

MATEMATİK

D Ü N Y A S I

Matematik Dünyasından
Tosun Terzioğlu

Düzlem Geometride
Açılar ve Ölçüleri
Cem Tezer

Dört Renk Problemi
Ayşe Berkman - Ali Doğanaksoy
Ebru Keyman

Pergel ve Cetvelle
Yapılamayan Çizimler
İsmail Güloğlu

Sonsuzluğun Olağanüstü Özellikleri
Timur Karaçay

Bazı Ortalamalar
Hüseyin Demir

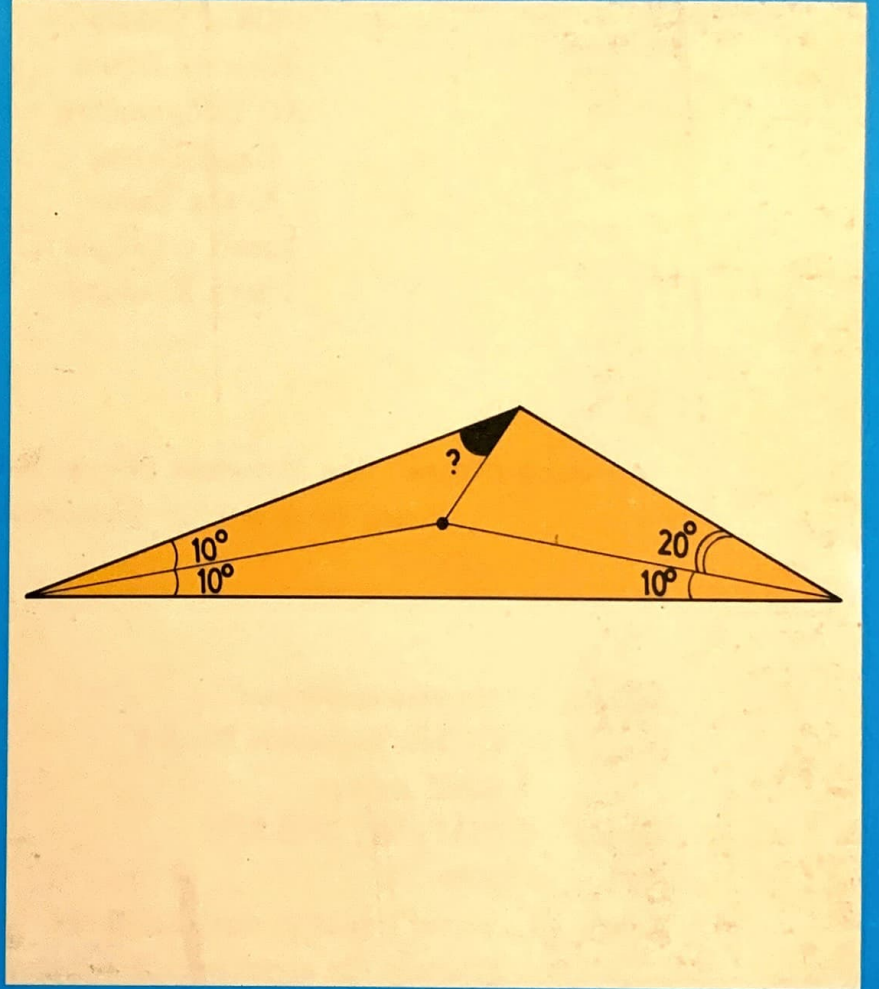
1, 2, 3, ∞ veya Sürat Felakettir
Tosun Terzioğlu

Eşkenar Üçgenler Üçgen Değil mi?
Nurettin Çalışkan

Doğrusal İndirgemeli Diziler
Albert Erkip

Yarışma Soruları
Matematik Dünyası

Dünyada Matematik Öğretimi
Matematik Dünyası



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR

CEMAL KOÇ

YAYIN KURULU

OKAY ÇELEBİ

HÜSEYİN DEMİR

ALİ DOĞANAKSOY

HALİL ERDEM

YAŞAR ERSOY

İSMAİL GÜMÜŞEL

TİMUR KARAÇAY

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği Tarafından, UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Adres : Matematik Dünyası
ODTÜ, Matematik Bölümü
06531 Ankara
Telefon : 223 71 00 / 2978-2979
Fiatı : 3000.-TL
Abone : Yurtiçi 1 yıllık (5 sayı) 10.000.-TL
(Yurtdışı için ayrıca posta ücreti alınır.)

Abone olmak için, yıllık abone ücretinin İş Bankası ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229 - 0343587 nolu hesaba yatırılması veya posta havalesi yapılp dekontun bir örneğinin dergi adresine gönderilmesi yeterlidir.

MATEMATİK DÜNYASINDA

Tosun Terzioğlu

Üç yıl kadar önce popüler bir İngilizce matematik dergisini karıştırıyordum. İlgimi çeken yazı önemli matematik problemlerinden birinin öyküsüydü. 1916 yılında Alman matematikçisi Bieberbach tarafından ortaya atılan bu problem birçok matematikçiye uğraştırmış ve sonunda Fransız asıllı Amerikalı matematikçi De Branges tarafından 1984 yılında çözülmüştü. Öyküde De Branges'in ispatının nasıl bazı Amerikalı ve Sovyet matematikçilerince kontrol edildiği ve sonra da Alman ve İsveçli iki matematikçi tarafından nasıl daha basitleştirildiği anlatılıyordu. Bu ilginç makaleyi bitirince bir sonraki gözüme ilişti. "Pisagor Teoreminin bir genelleştirilmesi" başlıklı bu yazıda ise Hintli ve Kanadalı iki matematikçi dik açılı üçgenlere ait bildiğimiz Pisagor Teoreminin yeni bir genelleştirmesini vermekteydiler. Esin kaynakları ise M.Ö. III. yüzyılda bu teoremin Öklid tarafından yapılmış olan ispatıydı. Bu iki yazı dergiye bilinçli olarak mı ardarda gelecek şekilde alınmıştı bilmiyorum. Ancak bu rastlantı bana bir kez daha hatırlattı matematiğin eskiliğini, çağdaşlığını, zamanla kaybolmayan geçerliliğini, evrenselliğini ve canlılığını...

Matematikte olduğu gibi soyut kavramlarla uğraşmak ilk başta çok kişiye sıkıcı gelebilir. Çağımızın aceleciliği, bazı günlük değer yargıları ve hatta aldığımız eğitim bizi matematiğe karşı önyargılı davranmaya itebilir. Ancak, salt uygu-

lamaları açısından ele alsak bile, matematiğin ne kadar gerekli olduğunu kavramamız hiç de zor olmaz. Gerçekten de bugün matematiğin doğrudan veya dolaylı olarak uygulanmadığı bir konu bulmak pek kolay değil. Teorik fizik ve kimya ile bazı bilgisayar konuları artık matematikle içiçe geliyor. Bir Amerikan mühendislik araştırma şirketinin müdürü, yüksek teknolojiyi temeli matematik olan teknoloji olarak tanımlıyor. Dolayısıyla, ilk bakışta kavrayamasak bile, matematik günümüzde çok önemli bir yere sahip. İnsan aklının yüzyıllar boyunca yarattığı matematik bugün her zamankinden daha canlı. İşte bu Matematik Dünyası'nda olup bitenleri sizlerle paylaşmak için Türk Matematik Derneği olarak bu dergiyi çıkarmaya karar verdik. Derneğimize bu amaç için UNESCO tarafından mali destek verildi. Birçok üyemizin uğraşı sonunda Matematik Dünyası'nın ilk sayısı işte elinizde. Doğal olarak dergimizin yaşaması ve giderek gelişmesi siz okuyucularının desteğine bağlı. Matematik Dünyası'nı çevrenize tanıtarak yardımcı olmanızın yanısıra bizlere dergi hakkındaki görüş, istek ve eleştirilerinizi ulaştırmanızı diliyoruz. İstiyoruz ki, matematik eğitimiyle uğraşan değerli öğretmenlerimiz, matematiği daha yakından tanımak isteyen öğrencilerimiz ve tüm okurlarımızla *Matematik Dünyası'nda birlikte olalım.*

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasında (T.Terzioğlu)	1
Matematik Dünyası'ndan	2
Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri (C.Tezer)	3
Dört Renk Problemi (A.Berkman A.Doğanaksoy E.Keyman)	7
Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler (İ.Güloğlu)	11
Sonsuzluğun Olağanüstü Özellikleri (T.Karaçay)	15
Bazı Ortalamalar (H.Demir)	17
1,2,3,∞ Veya Sürat Felakettir (T.Terzioğlu)	22
Doğrusal İndirgemeli Diziler (A.Erkip)	24
Sorular	28
Fransa'da Matematik Öğretimi	30
Kitaplar	32

MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Dergimiz bu sayısıyla yayın hayatına başlıyor. Amacı matematiğe ilgi duyanları yeni gelişmeler konusunda aydınlatmak ve matematik konusunda kendilerini aşmalarına katkıda bulunmak. Geniş bir çevrenin görüşleri ışığında hazırlanan dergimizin bu sayısında yer alacak yazılara göz atarsak şunları görüyoruz:

- *Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri* Cem Tezer bu yazısında açı ölçümüne ilişkin kuramsal temelleri vererek Öklid geometrisinde herbirinin ayrı ayrı görevleri bulunan ham açı, yönlü açı, iki doğru arasındaki açı kavramlarını ve bunların ölçülerini ayrıntısıyla incelemektedir.
- *Dört Renk Problemi* Elinize bir harita alıp komşu ülkeler aynı renk olmayacak biçimde boyamak isterseniz bu işi en az kaç renkle başarabilirsiniz. Haritasına bağlı diyebilirsiniz. Her haritayı dört renkle boyayabileceğinizi söyleyebilir misiniz? İşte bu renkli problem 1876'da ortaya çıkıp ancak 1976'da çözülebilmiş. Yazımızla bu problemi tanıyoruz.
- *Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler* Sık sık bir açıyı üçe bölme çabalarıyla karşılaşyoruz. Oysa sadece pergel ve (işaretsiz) cetvel kullanarak genel açıyı üç eşit parçaya bölmek olanaksız. Bu

naklanıyor ya da ispatını bilmeyenler bu sonucu hiçe sayıyor. Bu yazıda pergel ve cetvel kullanmanın ne demek olduğu tatlı bir sohbet biçimiyle anlatılacak ve gelecek sayımızda istenen ispat tamamlanacak.

- *Sonsuzluğun Olağanüstü Özellikleri* Bu yazıda gözle gördüğümüzle beyinle düşündüğümüzün aynı olduğunu görmek için insanlığının ne çabalar harcamak zorunda kaldığını görüyoruz.
- *Ortalamalar* Aritmetik ortalama, geometrik ortalama, harmonik ortalama kavramlarını biliyoruz. Bunların herbirinin kendi başına ne değerli kavramlar olduğunun da farkındayız. Ancak bir matematik kuyumcusu bu üçlüyü birleştirip bütünleştirmiş.
- *Sürat Felakettir* Matematik okurken tanımları iyi anlamamız, teoremlerin varsayımlarını iyi kavrayıp böylece hükümlerin hangi koşullar altında doğru olduğunu kesin çizgileriyle görmemiz gerekir. Kâğıt kalem kullanmamız zorunlu bir bakıma. Elinizdeki dergi için de bu gerekli. Bunu böyle yapmazsanız neler olabileceği bu yazıdaki matematiksel mizah konusu.
- *Olimpiyatlar* Her yıl bir ülkede matematik dünyasının atletleri yarışıyor. Köşemiz bu

DÜZLEM GEOMETRİDE AÇILAR VE ÖLÇÜLERİ

Cem Tezer

Bu yazıda, düzlem Euclid geometrisinde, her birinin diğerleri tarafından yerine getirilmesi güç hatta imkansız görevleri olan üç açı ve açı ölçüsü kavramını ele alacağız.

Önce Euclid düzlemini $\mathbb{R}^2$ olarak düşünelim ve $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{R}$ üzerindeki vektör uzayı yapısını kullanarak bazı geometri kavramlarını gözden geçirelim. Burada vereceğimiz tanım ve gösterimler eldeki yazıyla ilgili olup, yaygın veya geleneksel oldukları iddia edilmemektedir.

Birbirinden farklı A, B, C noktaları verildiğinde eğer

$$0 < t < 1 \quad \text{ve} \quad A = tB + (1 - t)C$$

olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ varsa, " A, B ve C arasındadır" diyoruz. Bunu kısaca BAC şeklinde gösterelim.

Gene birbirinden farklı A, B noktaları verildiğinde köşesi A da olan ve B den geçen yarıdoğru ile $\mathbb{R}^2$ nin

$$(AB = \{X \in \mathbb{R}^2, \sim XAB\})$$

altkümesini kastediyoruz. (Bu tanımla $A \notin (AB)$ olduğunu işaret edelim.)

Köşe noktaları ortak $\underline{a} = (OA, \underline{b} = (OB, \underline{c} = (OC$ yarıdoğrularını ele alalım. Eğer X, Y ve Z arasında kalacak şekilde $X \in \underline{a}, Y \in \underline{b}, Z \in \underline{c}$ noktaları varsa " $\underline{a}, \underline{b}$ ve $\underline{c}$ arasındadır" diyeceğiz.

Şimdi de birkaç basit cebir kavramını açıklayalım: $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. $x, y \in \mathbb{R}$ için eğer $x - y = n\alpha$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa $x \sim y$ yazalım. " $\sim$ " $\mathbb{R}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya göre x i içinde bulunduran denklik sınıfını $[x]_\alpha$ ile gösterelim. Yani

$x \sim y$ olması için gerek ve yeter şart $[x]_\alpha = [y]_\alpha$ dır. " $\sim$ " ya göre denklik sınıflarının kümesini $\mathbb{R}/\alpha$ ile gösterelim.

$$[x]_\alpha + [y]_\alpha = [x + y]_\alpha$$

şeklinde tanımlanan işlem $\mathbb{R}/\alpha$ üzerinde doğru tanımlanmış olup, $\mathbb{R}/\alpha$ yı değişmeli bir grup haline getirir. $\mathbb{R}/\alpha$ ya " α devirli sayılar grubu" diyeceğiz.

Önce " α -ana değer fonksiyonu"

$$E_\alpha : \mathbb{R}/\alpha \rightarrow \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$$

$y = E_\alpha([x]_\alpha)$ sayısı $[x]_\alpha = [y]_\alpha$ ve $y \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ şartlarını sağlayan biricik sayı olarak belirlenerek tanımlansın.

İkinci olarak " α -ikiye bölme fonksiyonu"

$$Y_\alpha : \mathbb{R}/2\alpha \rightarrow \mathbb{R}/\alpha$$

$$Y_\alpha([x]_{2\alpha}) = [x/2]_\alpha$$

şeklinde tanımlansın.

Son olarak da

$$ARG : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$$

fonksiyonunun $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ deki değerini

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \sin \theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

eşitliğini sağlayan biricik $[\theta]_{2\pi} \in \mathbb{R}/2\pi$ olarak tanımlayalım.

I. Ham Açı:

Ham açı ile sınır noktaları ortak iki yarıdoğrunun teşkil ettiği bir sırasız çifti

yahut da kümeyi anlıyoruz. $\underline{a} = (OA, \underline{b} = (OB$ yarıdoğrularından oluşan ham açığı $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ şeklinde gösterebileceğimiz gibi daha geleneksel bir biçimde $\angle AOB$ şeklinde de gösterebiliriz. $\angle AOB$ ham açısının ölçüsü (ölçü için de aynı gösterim kullanılarak)

$$\angle AOB = |E_{2\pi}(\text{ARG}(\vec{OB}) - \text{ARG}(\vec{OA}))|$$

şeklinde $[0, \pi]$ aralığında bir gerçekte sayı olarak tanımlanır.

Tabii, bu soyut sunuş öğrenciye doğrudan uygulanamaz. Sezgiye daha açık olup, geometri öğreniminin çok erken safhalarında ele alınabilecek bir "tanım" olarak şunu teklif edebiliriz: γ, O merkezli ve birim yarıçaplı bir çember olsun. $\{K\} = \gamma \cap (OA, \{L\} = \gamma \cap (OB$ ise $\angle AOB$ sayısı γ üzerinde K noktasını L noktasına birleştiren en kısa yayın uzunluğudur.

Geometri öğreniminde, öğrencinin ilk karşılaştığı açı kavramı, bizim ham açı adını verdiğimiz açıdır. Geometrinin tarih içindeki tabii gelişmesine sadık her sunuş için bu açı çeşidinin vazgeçilmez olduğuna inanıyoruz. Özellikle, temel karşılaştırma teoremlerinde bu açı önemli bir yere sahiptir. Bunun, belki en esaslı örneği olarak "büyük açı - büyük kenar" teoremi alınabilir:

Teorem: Bir ABC üçgeninde $|AC| > |AB|$ olması için gerek ve yeter şart $\angle ABC > \angle ACB$ olmasıdır.

Temel denklik teoremleri (örneğin KAK, AKA vb. teoremler) ve temel karşılaştırma teoremlerindeki (mesela büyük açı - büyük kenar teoremi, üçgen eşitsizliği vb.) önemli ve vazgeçilmez yeri ne rağmen ham açının ileri geometri bahislerinde çok seyrek kullanılmasının sebebi bu açının kötü cebirsel özellikleri olmasıdır.

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$

yazabilmek için önce $(OB$ nin $(OA$ ve $(OC$ arasında kalmasını istemek zorundayız.

II. Yönlü Açı:

Yönlü açı ile sınır noktaları ortak iki yarıdoğrudan meydana gelen *sıralı* bir çift anlıyoruz. Sırasıyla $\underline{a} = (OA, \underline{b} = (OB$ yarıdoğrularından oluşan yönlü açığı $(\underline{a}, \underline{b})$ şeklinde, doğrudan bir sıralı çift olarak yazabileceğimiz gibi, daha geleneklere yakın bir şekilde $\vec{\angle} AOB$ olarak da gösterebiliriz. $\vec{\angle} AOB$ yönlü açısının ölçüsünü gene aynı gösterimi kullanarak

$$\vec{\angle} AOB = \text{ARG}(\vec{OB}) - \text{ARG}(\vec{OA})$$

ile tanımlanan 2π devirli sayı olarak tanımlıyoruz. Gene öğrenciye sunuş için şunu teklif edebiliriz: γ, O merkezli birim yarıçaplı bir çember olsun. $\{K\} = \gamma \cap (OA, \{L\} = \gamma \cap (OB$ ise γ üzerinde K noktasını, L noktasına birleştiren ve saatin tersi yönü artı olarak ölçülen muhtelif yayların uzunlukları birbirlerinden ancak 2π nin katları kadar farklı olabilirler. Bu bize 2π devirli bir sayı verir. Bu sayı $\vec{\angle} AOB$ yönlü açısının ölçüsüdür.

Yönlü açı özellikle trigonometri sahasının vazgeçilmez aletidir. Sinüs ve kosinüs bu açının fonksiyonları olarak görülmelidir. Ayrıca düzlemin önemli izometrilere dönmele de sabit bıraktıkları nokta ve bir yönlü açı ile tarif olunurlar.

Analitik yöntemlerde yönlü açılarının önemi bu açılarının güzel cebirsel özelliklerine verilmelidir:

$$\vec{\angle} AOB + \vec{\angle} BOC = \vec{\angle} AOC$$

daima doğrudur.

Yönlü ve ham açı ölçüleri arasında

$$\angle AOB = |E_{2\pi}(\vec{\angle} AOB)|$$

ilişkisi olduğu açıktır.

III. Doğrular Arasındaki Açı:

Bu halde açı herhangi bir (a, b) sıralı doğru çiftidir. Doğrular arasındaki açının ölçüsünü $\angle(a, b)$ ile göstererek şu şekilde tanımlayabiliriz:

a, b paralel veya çakışık doğrularsa $\angle(a, b) = 0$, Ham açılar kullanılırsa
eğer $\{O\} = a \cap b$ ve $A \in a - \{O\}, B \in b - \{O\}$ ise

$$\angle(a, b) = [E_{2\pi}(\tilde{\angle}AOB)]_{\pi}$$

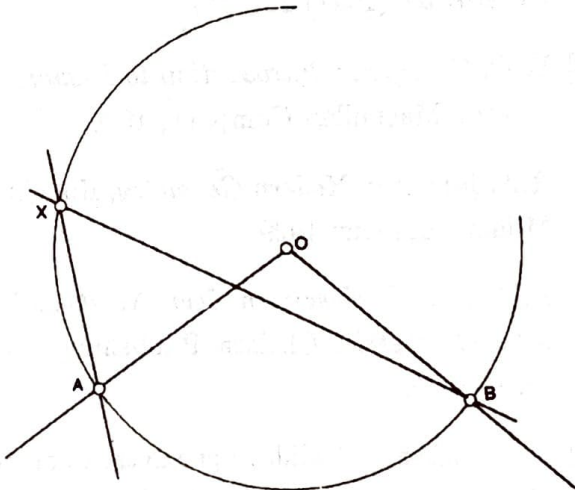
şeklinde π -devirli bir sayıdır. Gene göze hitap eden bir "tanım" verilebilir; Merkezi a ve b nin kesiştiği D noktası olan birim yarıçaplı bir γ çemberini ele alalım. $a \cap \gamma = \{A_1, A_2\}, b \cap \gamma = \{B_1, B_2\}$ olsun. γ üzerinde, saatin tersi yönü artı sayılarak, A_1, A_2 noktalarından herhangi birini B_1, B_2 noktalarından herhangi birine birleştiren muhtelif yayların uzunlukları birbirlerinden ancak π nin katları kadar farklı olabilirler. Bu bize π devirli bir sayı verir. a ve b doğruları arasındaki açının ölçüsü budur.

Önce doğrular arasındaki açının cebirsel olarak son derece elverişli olduğunu işaret edelim. *Herhangi* a, b, c doğruları için

$$\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$$

daima doğrudur.

Şimdi de "çemberde çevre açısı aynı yanı gören merkez açının yarısıdır" şeklinde sloganlaştırılan önemli teoreme bir göz atalım: Burada hangi açısı çeşidinin kullanıldığı belli değildir. O merkezli bir γ çemberi üzerinde A, B ve X noktaları alalım (Şekil 1).



Şekil 1.

$$\angle AXB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

söz konusudur. Fakat bu genel olarak yanlış olup ancak X ve O noktaları AB doğrusunun aynı tarafındaysa geçerlidir.

Ham açılar kaldırılıp, yerine yönlü açılar konulduğunda, yani

$$\tilde{\angle}AXB = \frac{1}{2} \tilde{\angle}AOB$$

söz konusu edildiğinde aynı yanlışlık devam ettikten başka diğer bir pürüz daha ortaya çıkar: $\tilde{\angle}AOB$, 2π devirli bir sayı olduğuna göre, bu miktarın yarısı nasıl anlaşılmalıdır? Gerçekten de $\mathbb{R}/2\pi$ içinde

$$2x = \tilde{\angle}AOB$$

denkleminin aralarında $[\pi]_{2\pi}$ kadar fark olan tam iki çözümü vardır. $\tilde{\angle}AOB$ nin yarısı olarak bunlardan birini tercih etmek mümkün değildir. Bu zorluk ancak iki farklı açı kavramı bir arada kullanılarak giderilebilir: "Çevre açısı" doğrular arasındaki açı, "merkez açısı" ise yönlü açı olarak alınmalıdır. Bu durumda $Y_{2\pi} : \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{R}/\pi$, bu yazının başında tanımlanan ikiye bölme fonksiyonu olmak üzere

$$\angle(XA, XB) = Y_{2\pi}(\tilde{\angle}AOB)$$

$X \neq A, B$ olmak kaydıyla X noktasının yerinden bağımsız olarak doğrudur. (Tabii mesela $X = A$ hali XA yerine A daki teğet alınarak halledilebilir!) Bu gözlem, düzlem geometride yüzlerce konum teoremine esas teşkil eden bir sonuç verir:

Teorem: Birbirinden farklı A, B, X, Y noktalarının aynı çember veya doğru üzerinde kalmaları için gerek ve yeter şart

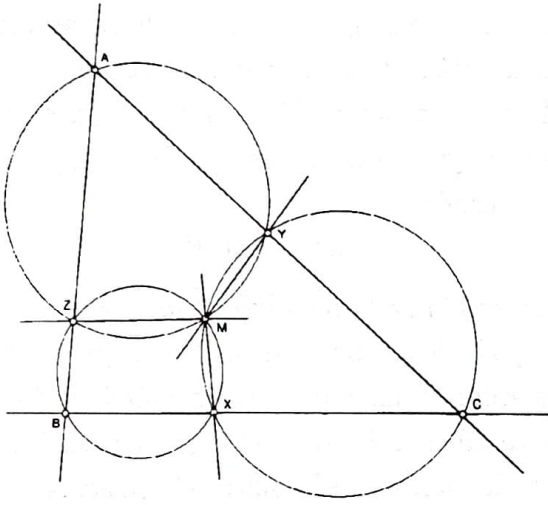
$$\angle(XA, XB) = \angle(YA, YB)$$

dir.

Bu teoremin kullanılışını, düzlem geometrinin en güzel teoremlerinden birisini ispat ederek

örnekleyelim:

Teorem: (Şekil 2) Bir ABC üçgeninde, $X \in BC - \{B, C\}, Y \in CA - \{C, A\}, Z \in AB - \{A, B\}$ noktaları verildiğinde, AYZ, XBZ ve XYC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ortak bir noktası vardır.



Şekil 2.

İspat: Sözkonusu üç çemberin hiçbirinin bir diğerine teğet olmadığını varsayalım. XYC nin çevrel çemberi ile AYZ nin çevrel çemberleri bir $M \neq X, Y, Z$ noktasında kesişirler. M, X, C, Y bir çember üzerinde olduğundan

$$\angle(MX, MY) = \angle(BX, CY) = \angle(BC, CA)$$

aynı şekilde M, Y, A, Z bir çember üzerinde olduğundan

$$\angle(MY, MZ) = \angle(AY, AZ) = \angle(CA, AB)$$

ve bu iki eşitlikten de

$$\begin{aligned} \angle(MX, MZ) &= \angle(MX, MY) + \angle(MY, MZ) \\ &= \angle(BC, CA) + \angle(CA, AB) \\ &= \angle(BC, AB) \\ &= \angle(BX, BZ) \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki B, M, X, Z noktaları aynı çember üzerindedir. Sözkonusu çemberlerden ikisinin teğet olması durumunu okuyucuya bırakıyoruz.

Ham ve yönlü açı kavramları yaygınlık kazanmış ve genel olarak doğru anlaşılmışlardır. Buna karşılık, belki de bu ikisinden de önemli olan doğrular arasındaki açı az tanınmış ve sık sık yanlış anlaşılmıştır. "Elemanter" geometri metinlerinde dikkatle kullanılması o kadar yenidir ki Coxeter [1]'de, R.A. Johnson ([4]) ve D.K. Picken'i ([6]) bu açının mucitleri olarak anıyor. H.G. Forder'ın da "cross" dediği ([2]) şey doğrular arasındaki açıdan başkası değil. Aslında kavram ileri geometri metinlerinde (örneğin [5]) daha eskiden kullanılmaktaydı. Gerçekten de Laguerre'in sonlu bir O noktasında kesişen a ve b doğruları arasındaki açıyı $e^{2i\theta}$ yı a, b ve O dan geçen iki izotropik doğrunun çapraz oranına eşit kılan θ olarak tanımlaması geçen yüzyılın ortasına rastlıyor ([3]). Bu π devirli bir miktar olup, bizim verdiğimiz doğrular arasındaki açı ölçüsüne karşılık gelmektedir.

Kaynaklar

- [1] H.S.M. Coxeter: *The Real Projective Plane*, Cambridge, University Press, 1960.
- [2] H.G. Forder: "The cross and the foundations of Euclidean geometry", *Mathematical Gazette*, 31 (1947) 227-233.
- [3] W.C. Graustein: *Introduction to Higher Geometry*, Macmillan Company, 1930.
- [4] R.A. Johnson: *Modern Geometry*, Houghton Mifflin Company 1929.
- [5] F. Klein: *Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie*, Chelsea Publishing Company, 1926.
- [6] D.K. Picken: "Euclidean geometry of angle" *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), 23 (1925) 45-55.

DÖRT RENK PROBLEMİ

Ayşe Berkman - Ali Doğanaksoy - Ebru Keyman

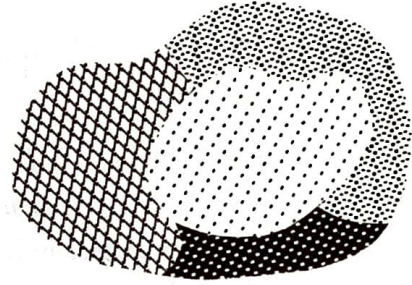
Bir haritanın renklendirilmesinde, birbirine komşu iki bölgenin farklı renklerde olması koşuluyla en az kaç renk kullanmak gerekir? Bazı küçük veya özel haritalar için bu soruya cevap vermek kolay olabilir. Örneğin, satranç tahtasına benzer bir haritayı boyamak için iki renk yeterli olacaktır. Çok karmaşık bir haritada ise sorunun cevabını deneme yaparak bulmak çok zor olabilir. Sözelimi, 10 bölgesi olan bir haritanın 4 renk kullanılarak 1048576 farklı şekilde renklendirilebileceği düşünülürse, deneme yoluyla araştırma yapmanın güçlüğü anlaşılır. Acaba yeterli renk sayısı için, en karmaşık bir haritada bile her zaman emin olabileceğimiz bir alt sınır var mıdır? 1852'de ortaya atılan bu problem 1976'da çözülmüş ve gösterilmiştir ki, en karmaşık bir harita dahi dört renkle boyanabilir.

Bir haritanın boyanması için dört rengin yeterli olacağını ilk sezinleyen belki de Francis Guthrie idi. 1852 yılında kardeşi Frederick'e yazdığı mektupta bu beklentisinden söz ediyor ve bunun matematik ispatının nasıl olabileceğini soruyordu. Soruya cevap bulamayan Frederick de problemi hocası olan matematikçi Augustus De Morgan'a götürüyordu. Ancak De Morgan da böyle bir ispatın olup olmadığını bilmiyordu. Böylece *dört renk problemi* olarak ünlenen ve şu iki önermenin gerçekleştirilmesini isteyen problem ortaya çıktı:

1. *Renklendirilebilmesi için en az dört renk gerektiren haritalar vardır.*
2. *Renklendirilebilmesi için beşinci renk gerektiren harita çizilemez.*

İlk önermeyi gerçeklemek De Morgan için kolay oldu. Her biri diğer üçüne komşu olan dört ülkenin

yer aldığı bir haritanın boyanması için elbette en az dört renge ihtiyaç vardı. Bu tür haritaların varlığını göstermek de zor değildi. Aşağıdaki şekilde böyle bir haritanın bir bölümü yer almaktadır. O halde birinci önerme doğrudur.



De Morgan benzer şekilde, her biri diğer dördüne komşu olan beş ülkenin yer aldığı bir haritanın olup olmadığını incelemeye başladı. Böyle bir harita olsaydı, dört renk problemi olumsuz olarak çözülmüş olacaktı. Ancak, De Morgan şunu gösterdi: Düzlemde (veya küre üzerinde) çizilmiş bir haritanın hiç bir kısmında hepsi birbirine komşu olan beş ülke yer alamaz. İlk bakışta bu ispat yukarıdaki ikinci soruya bir cevap gibi görülebilir. Ancak, birbirine komşu beş ülkenin bulunmaması, haritanın boyanması için beş renk gerektirmesini engellemez. Bunu bir örnekle şöyle gösterebiliriz. Aşağıdaki haritada birbirine komşu olacak şekilde dört ülke yer almamaktadır, Ancak bu harita yine de en az dört renkle boyanabilir.

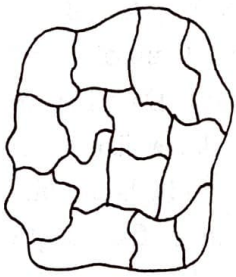


Bu soruyu çözmeye çalışan ancak ispatını yapamayan Arthur Cayley, 1878 yılında problemi Londra Matematik Cemiyeti'ne sundu. Artık problem geniş bir kitlenin ilgisine sunulmuştu ve bir asıra yakın bir süre bir çok amatör ve profesyonel matematikçinin ilgisini üzerinde toplayacaktı.

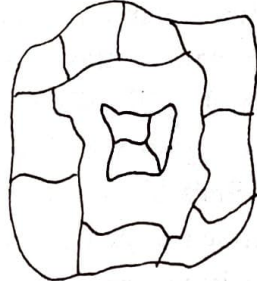
Problemin sunuluşunun üzerinden bir sene bile geçmeden Alfred Bray Kempe, geliştirdiği bir yöntemi gündeme getirdi. Bu yöntemle problem tam olarak çözülmemişti. Ancak, dört-renk problemiyle uğraşanların en çok baş vurdukları yol olmuştu.

Şimdi, Kempe'nin bu yöntemini adım adım izleyelim.

A. Hiç bir bölgesi bir veya daha fazla bölgeyi tamamen çevrelemeyen bir haritaya *normal harita*; her köşesinde tam üç sınır çizgisi buluşan bir normal haritaya da *üçüncü dereceden normal harita* denir.



normal harita



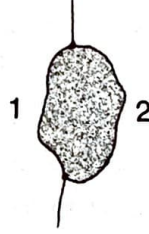
normal olmayan harita

B. Renklendirilebilmesi için beş renk gerektiren bir harita varsa, buna bağlı olarak, aynı özellikte bir normal harita vardır. Ya da, beşinci renk gerektiren normal harita yoksa, beşinci renk gerektiren genel bir harita da yoktur. Bu nedenle incelemeyi normal haritalarla sınırlı tutmak yeterlidir.

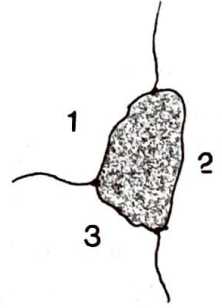
C. Beş renk gerektiren normal haritalar olduğunu kabul edelim. Bunların içinde ülke sayısı en az olanlara da *beş renk gerektirir minimal haritalar* (ya da kısaca *minimal haritalar*) diyelim. Eğer minimal haritaların olmadığı gösterilebilirse, buna bağlı olarak, beş renk gerektirir normal harita olmadığı da ispatlanmış olur. Şimdi minimal

haritaların var olduğunu kabul edelim ve böyle bir haritanın ülke sayısını da N ile gösterelim. Bu halde, ülke sayısı N -den az olan her harita dört renkle boyanabilir. Veya, bir harita en az beş renkle boyanabiliyorsa en az N ülkesi vardır.

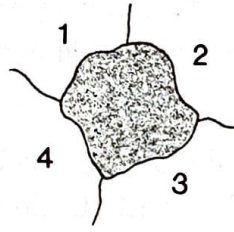
D. Bir normal haritada ülkelerin tümü birden altı veya daha fazla komşuya sahip olamaz. Bir başka deyişle, bir normal haritada iki, üç, dört veya beş komşusu olan en az bir bölge vardır. O halde, bir normal haritada aşağıdaki şekillerden en az bir tanesinin yer alması kaçınılmazdır.



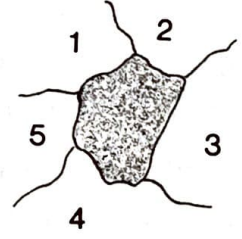
iki komşulu



üç komşulu



dört komşulu



beş komşulu

Bu nedenle, bu dört şekilden oluşan kümeye *Kempe kaçınılmaz kümesi* denir.

E. N -bölge bir normal haritada iki komşusu bulunan bir ülke olduğunu varsayalım. Bu ülke, komşu ülkelerden biriyle birleşirse elimizde $N - 1$ bölge bir harita olur ki, bunu da dört renkle boyayabiliriz. Demin komşusu ile birleşen ülkeyi yeniden haritaya ekleyelim. Bu durumda biri hariç, bütün ülkeleri istenen şekilde dört renk kullanarak boyanmış bir harita elde ederiz. Boyanması gereken ülkenin ise yalnızca iki komşusu vardır. O halde bunu da komşularından farklı ama haritada kullanılmış renklerden biriyle boyayabiliriz. Sonuçta dört renkle boyanmış bir harita ortaya çıkar ki, bu da bir minimal ha-

ritanın sadece iki komşusu olan bir ülkesi olmayacağını gösterir. Aynı şekilde, N -bölge bir normal haritada üç komşusu bulunan bir ülke olduğunu farzedelim. Bu ülke, komşu ülkelerden biriyle birleşsin. Bu durumda, ortaya çıkan $N - 1$ bölge haritayı dört renkle boyayabiliriz. Bu ülkeyi yeniden haritaya ekleyerek yine, biri hariç, bütün ülkeleri istenen şekilde dört renk kullanarak boyanmış bir harita elde ederiz. Boyanması gereken ülkenin ise yalnızca üç komşusu vardır. Bu komşular da birbirleri ile komşu olduğundan her biri farklı renktedir. Boyanması gereken ülkeyi haritada kullanılan diğer renklerden biriyle boyarsak, dört renkle boyanmış N ülkeli bir harita ortaya çıkar ki, bu da minimal bir haritanın sadece üç komşusu olan bir ülkesi de olamayacağını gösterir. Biraz daha karmaşık olmakla birlikte, benzer akıl yürütmelerle gösterilebilir ki, içinde sadece dört komşulu bir ülke bulunan, N bölge bir normal harita da dört renkle boyanabilir. Eğer, sadece beş komşusu bulunan bir ülkeye sahip, N ülkeli normal haritanın da dört renkle boyanabileceğini gösterebilseydik, problemi çözmüş olacaktık.

Kempe de bir normal haritada beş komşulu bir ülke olması halinde renklendirmenin dört renkle yapılabileceğini gösteren bir ispat verdi. Fakat kısa zaman sonra bu ispatın yanlış olduğu gösterildi.

Kempe'nin metodundaki temel şudur: Elemanları olan şekillerden en az birisinin her normal haritada yer alması gereken kümeler *kaçınılmaz küme* denir. 'Kempe kaçınılmaz kümesi' de buna bir örnektir. Belli bir şekil, N ülkeli normal bir haritada yer aldığı zaman, o haritanın dört renkle boyanabileceği gösterilebiliyorsa, bu şekile de *indirgenebilir şekil* denir. Örneğin, sadece iki komşusu bulunan bir ülke, indirgenebilir şekildir. O halde, dört renk probleminin olumlu çözümü için, bütün elemanları indirgenebilir olan bir kaçınılmaz küme bulunmalıdır.

Bu metodla problemi çözmeye çalışanların

karşılaştığı en büyük zorluk şuydu: Ya kaçınılmaz kümenin eleman sayısı çok büyük oluyordu ya da kaçınılmaz kümede yer alan şekillerin indirgenir olup olmadığını incelemek uzun vakit alıyordu. Her iki halde de, problemin çözümü için sabırla ve belki de yıllarca tek tek yüzbinlerce olasılığın değerlendirilmesi gerekiyordu.

Bilgisayarların ortaya çıkışı ile problem üzerinde çalışanlar, ellerindeki şekillerin incelenmesini bu hızlı araçlara yaptırmaya başladılar. Yine de çok uzun süre gerekiyordu. Örneğin, Appel ve Haken, 1970'de elde ettikleri kaçınılmaz kümenin bütün elemanlarının incelenmesinin, o zamanki bilgisayarların hızı ile, $4^4 \times 10^3 \times 25$ dakika (12 sene 2 aydan biraz fazla) süreceğini hesaplamışlardı.

Zamanla, bilgisayarlar daha büyük hıza erişiyor ve problemle uğraşanlar da yeni teknikler geliştiriyordu. Nihayet, 1976 yılında, Appel ve Haken 1482

şekilden oluşan bir kaçınılmaz kümenin bütün elemanlarının indirgenebilir olduğunu gösterdiler. Bu iş için toplam 1200 saat bilgisayar kullanmak gerekmişti.

Artık, her haritanın dört renkle boyanabileceğini biliyoruz. Ancak bunun nasıl yapılabileceğini bilmiyoruz. Öyle karmaşık haritalar çizilebilir ki, dört renkle boyanabileceğini bilmemize karşın, haritayı boyamakta güçlük çekebiliriz. Böyle bir harita yazının sonunda, okuyucunun denemesi için verilmiştir.

Herhangi bir harita dört renkle boyanabilir. Bunu kesinlikle biliyoruz. Ancak, yine biliyoruz ki, bazı haritaları boyamak için daha az renk yeterli olabilir. Bir haritanın iki veya üç renkle boyanması için verilen kriterler şunlardır:

* *Bir haritanın iki renkle boyanabilmesi için gerek ve yeter koşul haritanın tüm köşelerinde çift sayıda sınır çizgisinin buluşmasıdır.*

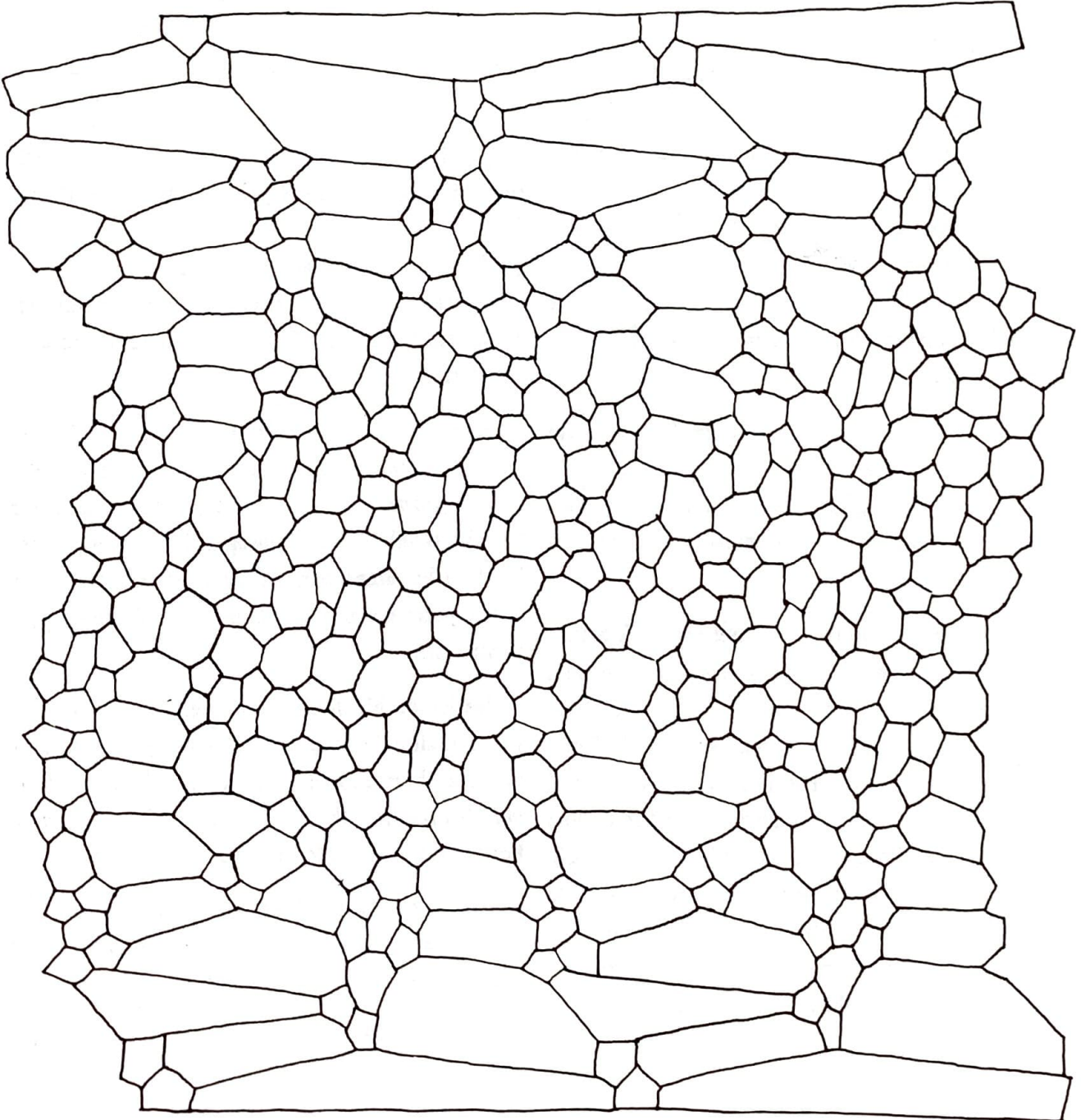
* *Bir haritanın üç renkle boyanabilmesi için gerek ve yeter koşul her ülkenin çift sayıda komşusu olmasıdır.*

Bütün bu söylediklerimize rağmen, dünya haritası veya Türkiye haritası gibi haritaları dört renkle boyamak mümkün olmayabilir. Çünkü, böyle haritalarda uyulması gereken kurallar vardır. Söz gelimi, bütün göller ve denizler maviye boyanmalıdır. Böyle zorlayıcı kurallar, haritanın boyanması için gerekli renk sayısını fazlalaştırabilir. Ancak, hiç bir zorlayıcı koşul yoksa, her haritayı

komşu ülkeler farklı renklerde olmak üzere sadece dört renk kullanarak boyayabiliriz.

Dört renk teoreminin ispatı düzleme (veya küre yüzeyine) çizilen yüzeyler için yapılmıştır. Farklı yüzeylerde, renk sayısı için farklı alt sınırlar verilebilir. Örneğin, Torus (simit biçimindeki yüzey) için bu alt sınır 7'dir.

Aşağıdaki harita, komşu ülkeler farklı renklerde olmak üzere sadece dört renk kullanarak boyanabilir. Deneyiniz.

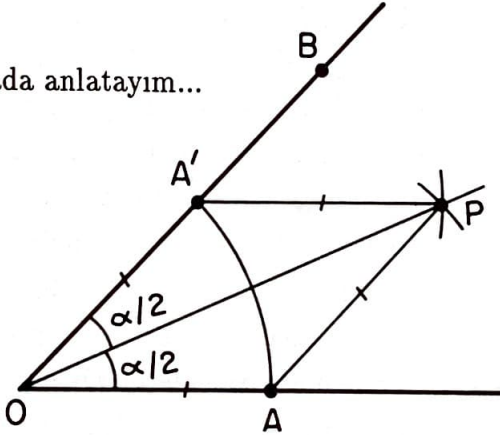


PERGEL VE CETVELLE YAPILAMAYAN ÇİZİMLER

İsmail Güloğlu

*N'oldu bu gönlüm, n'oldu bu gönlüm
Derd ü gamınla doldu bu gönlüm*

- Bugün bir açıyı ikiye bölmeyi öğrendik.
- Şu halde dörde, sekize, onaltıya,... bölmeyi de biliyorsun artık.
- Evet.
- Peki bütün bu bölmeleri sağlayan ana işlem yani "açıyı ikiye bölme" nasıl gerçekleştiriliyor?
- Tahtada anlatayım...



Ölçüsü α olan açı A, O, B noktaları ile şekildeki gibi verilmiş olsun. O merkezli $|OA|$ yarıçaplı çemberin açının kenarlarını kestiği noktalar sırasıyla A ve A' olsun. A ve A' merkezli $|OA|$ yarıçaplı çemberleri çizelim. Bunlar O ve P noktalarında kesişirler. OP doğrusu $\angle AOB$ açısını ikiye böler, çünkü OPA' ve OPA üçgenleri eşitler.

- Fakat niçin bu kadar zahmet çekiyorsun? İletki ile verilen açıyı ölçüp yarısını yine iletke ile çizemez miyim? Burda ölçü hataları çizimin kaçınılmaz hatalarından daha fazla mı oluyor ki?
- Ben soruyu eksik ilettim, galiba. Konumuz

bir açıyı gündelik gereksinmelere yanıt verebilen bir yöntemle yaklaşık ikiye bölmek değil, idealize edilmiş araçlarla tam ve kesin olarak ikiye bölmek; üstelik bu bölme işleminde araç olarak sadece cetvel ve pergel kullanmak. Problemi ilginç yapan da bir bakıma bu kısıtlamalar. Bu, doğal olarak araçlarımızın bazı çizimler için yetersiz kalmaları sonucunu doğurabilir. Nitekim sizin yönteminizle bir açı istenildiği kadar sayıda eşit parçaya ayrılabilir, bu arada üç eşit parçaya da, fakat öğretmenimizin söylediğine göre bir açıyı sadece cetvel ve pergel kullanarak üç eşit parçaya ayırmak olanaksızmış.

- Yani öğretmenin ve onun bu problemle uğraşan tanıdıkları şimdiye kadar bir açıyı üçe bölmeyi başaramamışlar, bu uyuyan güzeli uyandıracak kudretli prens hâlâ bekleniyor, öyle mi?
- Hayır, yanlış anlamadıysam, öğretmenimizin bahsettiği bir becerememişlik itirafı değil, gerçek bir imkânsızlık iddiası. Problemin büyük gayretlere rağmen henüz çözülemediğini söylemiyor, fakat bir anlamda olumsuz şekilde çözüyor: "İstenen koşulları sağlayan bir çözüm yoktur, çünkü ..." deyip bu önermesini kanıtlıyor. "Bütün kenarları ve bir yüksekliği eşit uzunlukta bir üçgen çizmek" problemi gibi. Böyle bir üçgenin hangi araçlarla olursa olsun düzlemde çizilmesi olanaksızdır, çünkü böyle bir üçgen yoktur, deyip bunu kanıtlamakla

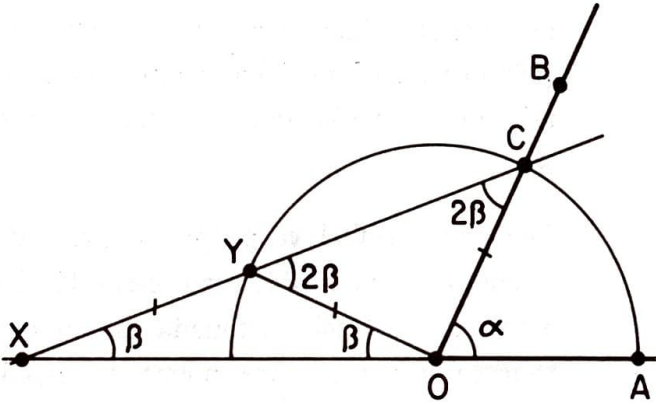
problem çözülmüş olur. Bunun gibi, bir açıyı sadece cetvel ve pergel kullanarak üç eşit parçaya bölmenin olanaksız olduğu kanıtlanmış sanıyorum.

- Fakat, nasıl olur? Ben bir dik açıyı veya dik açının yarısını veya bunun yarısını,... yani sonsuz tane farklı açıyı sadece cetvel ve pergel kullanarak üçe ayırabilirim.
- Fakat siz, burada özel bir takım açıların üçe bölünmesinden, dolayısıyla ölçüsü ile verilen bazı açıların sadece cetvel ve pergel kullanarak çizilebilmesinden söz ediyorsunuz. Bu kendi başına ilginç olmakla beraber bizim problemimiz değil. Sadece cetvel ve pergel kullanarak, açıyı ikiye bölme çiziminde olduğu gibi, herhangi bir açıya uygulandığında onu üç eşit parçaya ayıran bir çizim metodu veriyor değilsiniz.
- Her açı için uygulanabilir bir algoritma bulunmasa bile her açı kendisine özgü yöntemlerle sadece cetvel ve pergel kullanarak üçe ayrılabilir, olamaz mı?
- Uyarınızı anlıyorum. Belki de öğretmenimizin demek istediği şu idi: "Düzlemde sadece cetvel ve pergel kullanarak üç eşit parçaya ayrılamayan en az bir (dolayısı ile sonsuz tane) açı vardır". Buna ne dersiniz?
- Şimdi istenen kesinliğe ve açıklığa kavuştuk herhalde, derim. Peki sen ne dersin, hocanın bu iddiası doğru mu?
- Eh, öğretmenimiz bizi kandıracak değil ya. Elbette doğrudur, ben inanıyorum.
- Öğretmenine inanıp güvenmen çok saygı duyulması gereken bir tavır, aranızda böyle bir münasebetin oluşmuş olması bizi ancak sevindirir. Fakat ona olan güveninin onun ağzından çıktı diye matematiksel bir iddiaya "inanmaya" kadar varması, "acaba bir zihni tembellik mi söz konusu?" diye sorduruyor. İnanç, konusu olan mesajın

bellenip kavranıldıktan sonra gerçekliğinin tasdik veya red edilmesi olayıdır. Bu ise insanın o konuyla ilgili melekelerini sonuna kadar harekete geçirerek meseleyle haşır neşir olmasını gerektirir. Yani dinamik bir oluşumdur. Yoksa, inanmak, bu çok yönlü çabanın meşakkatinden kaçmanın bir yolu değildir. İman, "Babalarımızı böyle yapar bulduk" taklitçiliği ile, muhtevasının canlılığını kaybetmeden yaşayamaz. O, hissi, fikri ve diğer melekelerimizle denenmiş, gerçekleşmiş, yaşanmış olmaya, yani tahkike ihtiyaç duyar. Üstelik matematiksel gerçekliklerin yalın dünyasında bu doğrulama işi bir bakıma çok kolaylaştırılmıştır. Çünkü baştan, incelenen matematiksel nesneler bir aksiyom sistemi ile kapalı olarak da olsa kesin bir şekilde tanımlanmışlardır. Ve bunlar hakkında doğrulara ulaşma verilen aksiyom sisteminden hareketle yapılacak mantıksal çıkarımlara indirgenmiştir. Bunların kuraları da her türlü şüpheden ve kaypaklıktan arındırılmış, açık seçik hale getirilmiştir. Böylelikle gerekli zihni çabayı harcamaya hazır herkes için tam ve kesin matematiksel bilgiye ulaşmak mümkündür. Böyle iken, bir matematiksel iddiayı, ispat ederek veya hiç olmazsa yapılmış ispatları ciddiyetle takip ederek gerçekleştirme yoluna gitmeyip kolayca kaçarak "inandım" denmesi, sadece insanın taklit seviyesinde kalmasına neden olmuyor, fakat ispat denen yoğun ve yönlenmiş zihni çabanın getirdiği, uğraşılan problemi derinlemesine anlama ve bu çabayla oluşma imkanının da yitirilmesine neden oluyor.

- Fakat bir problemin çözümü, bu çözümü kavrayacak zihni olgunluğa, bilgi birikimine varmadan pek mümkün olamaz herhalde. Ben hiçbir lise matematik kitabında açının üçe bölünmesi probleminin tartışıldığını görmedim. Konu bizim bilgi ve deneyimlerimizi aşılıyor sanırım.

- Zihni olgunluk ve fikri birikim zamanının geçmesi ile kendiliğinden oluşmaz. Bize verilenleri yerli yerince kullanmamız, emek vermemiz, çile çekmemizle doğar, gelişir. Mesela, şimdi bu açıyı üçe bölme problemi ile karşılaşmış, ilgimiz buna çekilmiş, aklımız, fikrimiz buna meyletmiş iken, sınırlarımıza ulaşınca kadar üzerinde düşünmezsek ayıp etmiş olmaz mıyız? Zaten bilgi ve becerimizin neye yetip, neye yetmeyeceğini bize başkaları söyleyecek değil; böylesi bir sınır da yok. Bize düşen günlük kaygulardan soyutlanıp sebat ve azimle sorunların üzerine gitmek, yaşam içinde çalışıp kendimizi bulmak, anlamak ve oluşturmaktır.
- Peki, bu işe, bu problemle ilgili olarak nereden başlayalım?
- İstersen önce şu çizim metodu üzerinde konuşalım:



Şekildeki gibi A, O, B noktaları ile bir α dar açısı verilmiş olsun. O merkezli $|OA|$ yarıçaplı çemberin OB ışını kestiği nokta C olsun. Bir cetvel üzerinde aralarındaki uzaklık $|OA|$ 'ya eşit olan iki nokta, X ve Y işaretliyelim ve cetveli X noktası OA doğrusu üzerinde kalmak ve cetvel C noktasından geçmek şartıyla öyle hareket ettirelim ki Y noktası O merkezli $|OA|$ yarıçaplı çember üzerine gelsin. Bu konumda $\angle AXC$ açısının ölçüsü $\frac{1}{3}\alpha$ dır.

- Gerçekten $\triangle XYO$ ve $\triangle COY$ üçgenleri ikiz-

kenar üçgenler olduğu için $\angle AXC = \beta$ dersek $\alpha + \beta = 180^\circ - (180^\circ - 4/\beta) = 4\beta$ yani $3\beta = \alpha$ olduğu görülüyor.

- α herhangi bir dar açı olmak üzere $\frac{\alpha}{3}$ açısını sadece cetvel ve pergeli kullanarak çizmiş olmadık mı?
- Beni şaşırtıyorsunuz!
- Ben değil, olsa olsa alışkanlıklarımızın oluşturduğu düşünce kalıpları seni şaşırtmış olabilir. Öğretmeninizin iddiasının doğru olduğu düşüncesini hâlâ sürdürecekseniz bu çizimde "sadece cetvel ve pergeli" kullanmanın getirdiği kısıtlamalara uymadığımız hükmüne varmamız lazım.
- Biz cetveli sadece doğruları çizmekte değil, uzunlukları ölçmek için de kullanıyoruz. Siz de bu çizimde ölçme denebilecek, ölçülmüş bir uzunluğu cetvele uygun bir konuma yerleştirmek gibi bir işlem yaptınız, "işaretli bir cetvel" kullandınız. Herhalde izin verilmeyen işlem bu oldu.
- Evet, benim de bildiğim "cetvel" işaretsiz, sadece tek kenarı kullanılabilir, istenildiği kadar uzun, herhangi verilmiş iki noktanın belirlediği doğruyu çizmek için kullanılan bir araç. Pergel ise verilmiş bir noktayı merkez olarak kabul eden ve yarıçapı verilmiş iki nokta arasındaki uzaklığa eşit olan çemberi çizen araç.
- "Verilmiş nokta"dan kastınız ne? Çizimin yapılacağı düzlemle birlikte bu düzlemin her noktası da verilmiş olmaz mı?
- Her matematiksel iddia "verilen" bir hipotez ile bunun doğru olması halinde, "varılan" bir hükümden oluşur. Her geometrik çizim de, meselâ, bir üçgenin çevrel çemberinin, veya bir elipse dışındaki bir noktadan teğetlerin çizilmesi problemlerinde olduğu gibi bir takım "verilen" noktalar, doğrular, geometrik şekillerden (üçgen; elips ve dışında bir

nokta) hareket eder. Biraz dikkatle incelenirse bütün çizim problemlerinde (bizimkinde aşikâr olarak) aslında sonlu tane nokta verilmektedir (üçgende üç köşe noktası, çemberde merkez ve üzerindeki bir nokta, elipsde doğrultman doğrusunu belirleyen iki nokta ile bir odak noktası, v.s. gibi), ve yine sonlu tane noktanın çizilmesi ile tamamen belirlenen geometrik nesnelere ulaşmak istenmektedir. Yani bir geometrik çizim problemi “verilen” sonlu sayıda noktadan hareketle ve belirli araçlar kullanılarak, verilen noktalarla problemin istediği şekilde bağlantılı sonlu sayıda “amaç” noktayı çizmek meselesidir. Burada çizilmek demek izin verilen yöntemlerle gerçekleştirilen iki ayrı geometrik yerin arakesiti olarak verilebilmek demektir. Şuna dikkat etmek lâzım: Meselâ, merkezi ve bir noktası ile bir çember tamamen belirlenmiş olur. Fakat bu iki nokta ile çemberin bir geometrik yer olarak tamamen belirli olması ile üzerindeki her nokta da “verilmiş” noktalar olmaz. Bunun bir noktasının verilmiş olması, onun adının konabilmesi, çemberin diğer noktalarından ayırd edici bir özelliğinin bilinmesi, demektir. Bizim problemimizde O köşeli $\angle AOB$ açısı A, O, B noktaları ile verildi ise, bu noktalarla O merkezli $|OA|$ yarıçaplı çember de verilmiş olur. Fakat bu, çemberin her noktasının da “verilmiş” olması demek olsaydı, çemberin $\angle AOC = \frac{1}{3} \angle AOB$ şartı ile tek türlü ve tamamen belirli C noktası da “verilmiş” olur ve böylece OC doğrusu çizilebilir ve açığı üçe bölmek diye bir problem olmazdı.

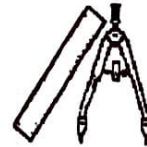
- Fakat herhalde “verilmiş” noktalar başlangıç noktalarından ibaret değil. Çizimin bu adımıyla elde edilen yeni noktalar da bunlara ekleniyor. Yani “verilen noktalar” çizim boyunca bir cins evrimleşerek amaç noktalara ulaşıyorlar.

- Veya ulaşamıyorlar.

- Şöyle diyebiliriz galiba: $\mathcal{P}$ bir düzlemin bazı noktalarından oluşan bir küme olsun. Bir doğruya, $\mathcal{P}$ 'deki farklı iki noktadan geçiyorsa “ $\mathcal{P}$ 'ye göre çizilebilir” bir doğru, ve bir çembere, merkezi $\mathcal{P}$ 'deki bir nokta ve yarıçapı $\mathcal{P}$ 'deki iki nokta arasındaki uzaklığa eşit ise “ $\mathcal{P}$ 'ye göre çizilebilir” bir çember diyelim. $\mathcal{P}$ kümesine göre çizilebilir bütün doğrular ile $\mathcal{P}$ kümesine göre çizilebilir bütün çemberlerin bütün mümkün kesişim noktalarına $\mathcal{P}$ kümesine göre bir adımda çizilebilir noktalar diyelim ve bunların kümesini $\mathcal{P}'$ ile gösterelim. Şimdi $\mathcal{P}_0$ sonlu bir başlangıç noktaları kümesi olmak üzere tüme varımla, $\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N}$ kümelerini, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}'_0$ ve $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{P}_i$ tanımlandı ise $\mathcal{P}_{i+1} := \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}'_i$ olacak şekilde tanımlayalım. Buna göre $\mathcal{P}_0$ dan başlayarak sadece cetvel ve pergel kullanarak çizilebilecek noktalar $C(\mathcal{P}_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ kümesini oluştururlar. Yani $\mathcal{P}_0$ dan başlayarak bizim araçlarımızla bir geometrik çizimin yapılabilmesi bu çizimin amaç noktalarının $C(\mathcal{P}_0)$ kümesine ait olması demektir.

- Çok güzel, cetvel ve pergel ile çizim yapmanın ne demek olduğunu kesin bir hale getirdin. Gelecek sayımızda da bu genel tanımlamayı açığı üçe bölme problemine uygulayalım.

Gelecek sayıda görüşmek üzere



SONSUZLUĞUN OLAĞANÜSTÜ ÖZELLİKLERİ

Timur Karaçay

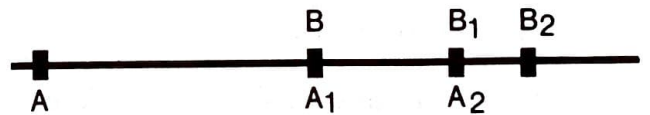
Çağdaş matematiğin tümüyle *sonsuzluk* kavramından doğduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. 20. yy başlarına kadar, matematiği *ilkel (elementary) matematik* ve *yüksek matematik* diye ikiye ayırırlardı. İlkel matematik, toplama, çıkarma, bölme işlemleriyle; yani dört işlemle yapılan matematik idi. Yüksek matematik ise, dört işleme ek olarak *limit* işleminin de kullanılmasıyla yapılan matematik idi. Bugün, bu tür bir sınıflandırma çok yetersiz kalır. Ama, limit işleminin beşinci işlem olarak matematiğe girişi, matematiğin ilgi alanını çok büyütmele kalmamış, pek çok fiziksel probleme de çözüm getirmiştir. Çağdaş bilim ve teknolojinin ürünleri varlıklarını tamamiyle limit kavramına borçludurlar. Matematikte limit kavramının doğuşu *sonsuz* kavramına dayanır. *Sonsuz büyükler* ve *sonsuz küçükler* diye adlandırılan kavramlar fiziksel olaylarla da ilişkilidir. Bir niceliğin sınırsız olarak büyümesi ya da küçülmesi doğa olaylarında sık karşılaşılan bir olgudur.

Eski çağlarda düşünürler sonsuz kavramını ele almışlardır. Zaten saymayı öğrenen her insan, her doğal sayının bir ardılı olduğunu kolayca sezmekteydi. Başka bir deyişle, sayma eylemi için kullandığı sayı kümesinin (*doğal sayılar*) en büyük ögesi yoktu. Çünkü en büyük doğal sayı var olsaydı, o sayıya 1 sayısı eklendiğinde daha büyük bir doğal sayı elde edilecekti. Yani bu sayı kümesi her sınırı aşıyor, sonsuza ulaşıyordu. Öyleyse, basit sayma işlemini yapan herkes sonsuzluk kavramı ile ister istemez karşılaşacaktı.

Ne var ki, eski zamanlarda matematiksel bilgiler sonsuzluğu içeren düşünceleri çözüme ulaştıracak düzeye ulaşmamıştı. O nedenle, sonsuzluğu içeren kimi düşünceler birer çatışkı (paradoks) yaratıyordu. Bu çatışkılar arasında ilginç bulacağınız bazılarını bu sayfada açıklamayı sürdüreceğiz.

Zeno Çatışkısı

M.Ö. 490-435 yılları arasında yaşayan Eski Yunan düşünürü Zeno hızlı bir koşucunun bir kaplumbağaya yetişemeyeceği savını ortaya attı. Zeno şöyle diyordu: Koşucu bir A noktasında, kaplumbağa bir B noktasında iken yarış başlamış olsun. Bu konumda, aralarında bir $|AB|$ uzaklığı vardır. Bu uzaklık sıfıra eşit değildir. Kaplumbağa ne kadar yavaş, koşucu ne kadar hızlı giderse gitsin, koşucu B noktasına ulaştığında, kaplumbağa bir B_1 noktasına ulaşacaktır. $A_1 = B$ diyelim.



Yeni konumlarıyla, koşucu A_1 , kaplumbağa B_1 noktasındadır. Aralarında $|A_1B_1|$ uzaklığı vardır. Bu uzaklık da sıfır değildir. Dolayısıyla bu konum ilk konumlarına benzemektedir: Koşucu A_1 noktasından B_1 noktasına erişene dek, kaplumbağa bir B_2 noktasına erişecektir. $A_2 = B_1$ diyelim. Gene $|A_2B_2|$ uzaklığı sıfır olmadığından, bu yeni konumları da ilk konumlarına benzemektedir. Bu olgu 3., 4., 5., ..., n , ... konumlarda da aynı olmaktadır. n düşünebildiğiniz kadar büyük bir doğal

sayı olsun. n inci konumda, koşucu ile kaplumbağa arasında sıfıra eşit olmayan $|A_n B_n|$ uzaklığı var olacaktır. Her n sayısı için benzer konumlar olduğuna göre, koşucu, kaplumbağaya hiçbir zaman yetişemez.

Zeno'nun düşüncesini kavrayabildiğimiz an ona hak veriyoruz; doğru düşündüğünü görüyoruz. Hatta bu çatışkıyı kullanarak hareketen olmadığı sonucuna bile ulaşabiliriz. Zeno'ya göre, atılan bir ok hedefine varamaz. Çünkü hedefe ulaşabilmesi için, önce ilk yarı yolu geçmesi gerekir. İlk yarıyı geçebilmesi için onun da ilk yarısını geçmesi gerekir. İlk yarının yarısını geçebilmesi için onun da ilk yarısını geçebilmesi gerekir... Bu süreç sonsuz olarak yineleneyeceğine göre, atılan ok hedefe ulaşamaz.

Öte yandan, gerçek yaşamda bir koşucunun bir kaplumbağayı geçebileceğini gözlerimizle görüyoruz... Hedefine varamaz diye hiçbirimiz bir okun önüne durmayız...

Zeno'nun ortaya koyduğu mantık ile, gerçek arasındaki bu ayrım yüzyıllar boyunca çözülemeyen bir çatışkı (*paradoks*) olarak kaldı.

Bunun çözümü için 1000 yıldan fazla bir zamanın geçmesi gerekti. Matematik sonsuz serilerin yakınsaklığı kavramını ortaya koyduktan sonra Zeno'nun çatışkısı kolayca çözüme ulaştı. Şimdi bu kolay çözümü vereceğiz:

Koşucunun A noktasından A_1 noktasına ulaşması için geçen zaman t_0 , A_1 noktasından A_2 noktasına ulaşması için geçen zaman t_1 , A_2 noktasından A_3 noktasına ulaşması için geçen zaman $t_2, \dots, A_n$ noktasından A_{n+1} noktasına ulaşması için geçen zaman $t_n, \dots$ olsun. Bütün bu zamanların toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n$$

olacaktır. Örneğin, kaplumbağanın hızını epeyce abartılı seçelim: Koşucunun aralarında 10 m. uzaklık olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her

n için $t_n = 1/2^{n+1}$ olacaktır. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

olacaktır. Yani koşucu 1 saniyede kaplumbağaya yetişecektir. Benzer yöntemle bir okun hedefine varacağını kanıtlayınız.

"Matematiğin anlamı ya da doğa bilimleri ile ilişkisi anlatılmadan çirkin bir odaya cebirsel toplamalar yapmak üzere kapatılmak birçok yazarda olduğu gibi benim de yaşamım boyunca matematikten nefret etmeme neden oldu."

G.B.Shaw

6 11 4 9 2 7 12 5 10 3 8 1

MODÜLER ARİTMETİKLE AYLARIN GÜN SAYISI

Hangi ayın kaç gün çekeceğini veren basit bir kural bilmiyoruz. Ancak, n ve r ay numaraları olduğuna göre

$$5n + 1 = r \pmod{12}$$

eşitliğinde sırasıyla 1,2,...,12 değerlerini verip r için elde ettiğimiz değerleri soldan sağa doğru yazdığımızda, şubat ayının solunda kalan ayların 30 günlük aylar; sağında kalanların ise 31 günlük aylar olduğunu görürüz. (Hüseyin Demir)

BAZI ORTALAMALAR

Hüseyin Demir

a ve b pozitif iki sayı ise

$$\frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{ab}$$

sayılarına sırası ile, a ve b nin *aritmetik* ve *geometrik ortalama*sı denilmekte ve bu iki ortalama liselerde işlenmektedir.

Bunların dışında *kareli ortalama* denilen

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

sayısı ile

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{2}{k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

olarak tanımlı h ve k ortalamaları da bazı konularda yer almaktadır. Bunlardan h ye *harmonik ortalama* denilmektedir. k ye de *kareli ters ortalama* adını veriyoruz.

Geometrik ortalama dışındaki bu dört ortalama, şu genel (1) ortalamasının özel halleridir:

$$g_\alpha(a, b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \quad (1)$$

Gerçekten

$$g_1 = \frac{a+b}{2}, \quad g_2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2} \right)^{1/2}, \quad g_{-1} = h, \quad g_{-2} = k.$$

(1) ortalaması $\alpha = 0$ için tanımsız olup g_0 ortalaması

$$g_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} \right)^{1/\alpha} \quad (2)$$

olarak tanımlanıyor.

Bu limiti hesaplamak için (1) de her iki tarafın logaritmasını alalım:

$$\ln g_\alpha = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$$

Buradan,

$$\ln(\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}}{\alpha} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

olup Hospital kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned}\ln(\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_{\alpha}) &= \frac{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} \frac{a^{\alpha} + b^{\alpha}}{2}}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} \alpha} \\ &= \frac{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha} \ln a + b^{\alpha} \ln b}{2}}{1} \\ &= \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab}\end{aligned}$$

bulunur ki

$$g_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_{\alpha} = \sqrt{ab}$$

elde edilir. Bu da geometrik ortalamadır.

Öte yandan $a \leq b$ aldığımızda

$$a = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} g_{\alpha}, \quad b = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_{\alpha}$$

olduğu ispatlanabilir ve böylece şu yedi ortalama söz konusu olur:

$$a, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, b.$$

α nın başka değerlerine karşılık gelen ortalamaları konumuzun dışında bırakıyoruz.

Bu ortalamalar arasında

$$g_{-i} g_i = g_0^2 = ab \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

bağıntısının varlığı kolayca gösterilebilir.

Örnek: 3 ve 4 sayılarının, sözü edilen yedi ortalamasının hesabı.

$$1) g_{-\infty} = 3, g_{\infty} = 4,$$

$$2) g_0 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3,464...,$$

$$3) g_1 = \frac{7}{2} = 3,500..., g_{-1} = \frac{g_0^2}{g_1} = \frac{24}{7} = 3,428...,$$

$$4) g_2 = \sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}/2 = 3,535...,$$

$$5) g_{-2} = \frac{g_0^2}{g_2} = \frac{12}{5\sqrt{2}/2} = \frac{12}{5}\sqrt{2} = 3,393...,$$

Bu değerleri soldan sağa doğru büyüklük sırasına göre yazalım:

$$\begin{aligned}g_{-\infty} &= 3, & g_{-2} &= 3,393..., & g_{-1} &= 3,428..., \\ g_0 &= 3,464..., & g_1 &= 3,500..., & g_2 &= 3,535..., & g_{\infty} &= 4.\end{aligned}$$

Bu ortalamaların, α büyüdükçe büyüdüğünü gözlemekteyiz. Bu bir rastlantı olmayıp, genelde $a \leq b$ için

$$a \leq g_{-2} \leq g_{-1} \leq g_0 \leq g_1 \leq g_2 \leq b \quad (4)$$

eşitsizlikleri vardır ve eşitsizlikler ancak $a = b$ için geçerlidir.

(4)'te tam 21 eşitsizlik yer almaktadır. Biz bunlardan sadece ilkinin ispatlamakla yetineceğiz. Ötekilerin ispatı benzer olarak verilebilir.

$$\begin{aligned} a \leq g_{-2} &\Leftrightarrow a \leq \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2. \quad (\text{Doğru}) \end{aligned}$$

Ortalamaların Çizimi

a ve b gibi ($a \leq b$) iki uzunluk verildiğinde g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1 ve g_2 uzunluklarını cetvel ve pergelle elde etmek istiyoruz.

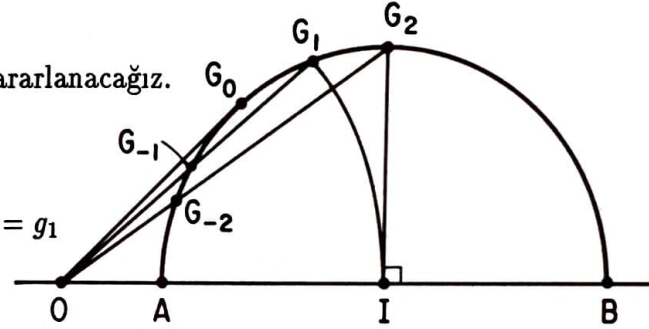
Bir doğru üzerinde alınan bir O noktasının aynı tarafından $|OA| = a$, $|OB| = b$ olmak üzere A ve B noktalarını alıp $[AB]$ çaplı Γ yarıçemberini çizelim.

O 'nun Γ çemberine göre $|OA|$, $|OB|$ kuvvetinden yararlanacağız.

1. $[AB]$ nin ortası (Γ nın merkezi) I ise

$$|OI| = \frac{a+b}{2} = g_1$$

dir.



O merkez ve g_1 yarıçaplı çemberi Γ ile kesiştirelim. Bu noktayı G_1 ile gösterip OG_1 in Γ yı yeniden kestiği noktaya G_{-1} dersek,

$$\begin{aligned} |OG_1| |OG_{-1}| &= |OA| |OB| = ab \\ \Rightarrow |OG_{-1}| &= \frac{ab}{g_1} = \frac{g_0^2}{g_1} = g_{-1}. \end{aligned}$$

2. O dan Γ ya $[OG_0]$ teğet doğru parçası çizildiğinde

$$|OG_0|^2 = |OA| |OB| = ab \Rightarrow |OG_0| = g_0.$$

3. Γ nın AB ye dik $[IG_2]$ yarıçapını çizelim.

$$\begin{aligned} |OG_2|^2 &= |OI|^2 + |IG_2|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \\ \Rightarrow |OG_2| &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = g_2. \end{aligned}$$

4. OG_2 doğrusu Γ yı yeniden G_{-2} de keserse

$$\begin{aligned} |OG_{-2}| |OG_2| &= |OA| |OB| = ab \\ \Rightarrow |OG_{-2}| &= \frac{ab}{g_2} = \frac{g_0^2}{g_2} = g_{-2}. \end{aligned}$$

Bu çizimlerden (4) eşitsizliklerini elde edebiliriz. G_0OI dik üçgeninden

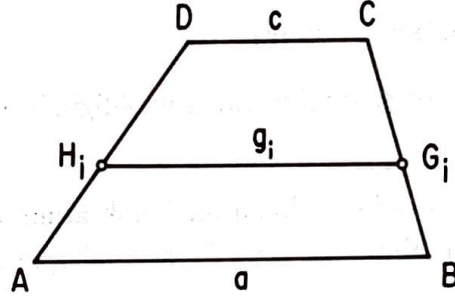
$$g_0 = |OG_0| \leq |OI| = g_1 \leq |OG_2| = g_2$$

olup

$$g_{-2} = |OG_{-2}| \leq |OG_{-1}| = g_{-1} < g_0.$$

Bu ortalamalar yamukta da ele alınabilir:

$ABCD$, taban uzunlukları a, b ($a \geq b$) olan bir yamuk olsun. Uçları yan kenarlar üzerinde ve tabanlara paralel olan bir $[G_i H_i]$ doğru parçasını düşünelim. $|G_i H_i| = g_i$ ise $0, 1, 2, -1$, değerlerine karşılık gelen ortalamaların çizimlerini veriyoruz.



1. $AB G_0 H_0 \sim H_0 G_0 CD$.
2. $[G_1 H_1]$ orta tabandır.
3. $|AB G_2 H_2| = |G_2 H_2 CD|$ (alanların eşitliği).
4. $G_{-1} H_{-1}$ doğrusu $AC \cap BD$ dan geçer.

Bunları bir alıştırma olarak ispatlayınız ve $|G_{-2} H_{-2}|$ için bir çizim veriniz.

Aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamalar aynı adı taşıyan; aşağıdaki dizilerle ilgilidir:

- (1) $a, a + d, \dots, a + nd, \dots$ aritmetik dizi
- (2) $a, ar, \dots, ar^n, \dots$ geometrik dizi
- (3) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a + d}, \dots, \frac{1}{a + nd}, \dots$ harmonik dizi.

Bu ilgi şöyle ifade edilebilir: İlk terim dışında her terim komşu iki terimin (1) de aritmetik ortalaması, (2) de geometrik ortalaması, (3) te de harmonik ortalamasıdır.

Daha genel olarak, bu dizilerden alınan her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin (ilgili) ortalamasıdır.

Şimdiye kadar iki sayının ortalamalarından söz ettik. $a_1, \dots, a_n$ gibi n tane pozitif sayı verildiğinde,

$$g_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \quad (5)$$

olarak tanımlanan ortalamaya $a_1, \dots, a_n$ sayılarının α yıncı mertebeden ortalaması denir.

g_0 geometrik ortalama ise

$$g_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha \quad (6)$$

olarak tanımlanır ve (2) de olduğu gibi

$$g_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad (7)$$

eşitliği ispatlanabilir.

Öteki dört ortalamanın açık ifadeleri şunlardır:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, & g_2 &= \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \\ g_{-1} &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}, & g_{-2} &= \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}}}. \end{aligned}$$

Daha önce vermiş olduğumuz her bir sonucun bu genel ortalamalar için geçerli olup olmadığını araştırınız. Örneğin (3) eşitliği $n \geq 3$ için doğru değildir. Bu konuda daha geniş bilgi için P.P.KOROWKIN'in, Türkçe çevirisi H.Şahinci tarafından yapılmış olan "Eşitsizlikler" (Matematik Derneği Yayınları, Sayı:1, 1962) kitabı görülebilir.

Alıştırımlar

1. Kenarları a, b, c olan bir üçgende

a) $a^2 < 2(b^2 + c^2)$ (Yol: $a < b < c$)

b) $\sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \leq a + b + c$

2. Dik kenarları b, c olan bir dik üçgende hipotenüse ait yükseklik h_a ise

$$h_a^2 = \frac{1}{2}g_{-2}(b, c)$$

3. Kenarları a, b, c olan bir üçgende $[AD]$ bir iç açıortaydır. D den AB ye çizilen paralel doğru AC yi D' de keserse

$$|CD'| = \frac{1}{2}g_{-1}(b, c)$$

4. Kenarları a, b, c olan bir üçgende BC ye paralel olan bir doğru $[AB], [AC]$ yi E, F de kesiyor. $|EF| = |CF|$ ise

$$|EF| = \frac{1}{2}g_{-1}(a, b)$$

5. Bir $ABCD$ yamuğunda ($AB \parallel CD$), $K = AC \cap BD$ den DA ya çizilen paralel doğru AB yi E de, BC ye çizilen ise CD yi F de kesiyor. EF nin $BC \cap AD$ den geçtiğini gösteriniz. (Yol: $2|CF|$ ve $2|AE|$ neden tabanların harmonik ortalamalarıdır?)

6. İlk iki terimi $a_1 = 2, a_2 = 6$ olan

a) aritmetik b) geometrik c) harmonik

dizinin a_3, a_4, a_5, a_6 terimlerini bulunuz.

7. 1, 2, 4 sayılarının geometrik, aritmetik, kareli, harmonik ve kareli ters ortalamalarını hesaplayınız.

8. a, b, c, d pozitif sayılar olsun. a, b nin g_α ortalaması ile c, d nin g_α ortalamasının g_α ortalaması, bu dört sayının g_α ortalamasına eşit olacaktır yani

$$g_\alpha(g_\alpha(a, b), g_\alpha(c, d)) = g_\alpha(a, b, c, d)$$

olacaktır. Gösteriniz (bkz. (5)).



1,2,3,∞ VEYA SÜRAT FELAKETTİR!

Tosun Terzioğlu

Limitlerle uğraştığımızda sonsuzla sık sık karşılaşmaya başlarız. Bildiğimiz sayılarla hesap yaparcasına sonsuzla hesap yapmaya kalkıştığımızda bir çok zorlukla karşılaşırız. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ifadesinin tanımını doğru dürüst kavramadan yola çıkarsak sonsuz “çok büyük” bir sayı gibi aklımızda yer alır. Örneğin 10^{10} . Ama bu sonsuz ise, bunun 1000 katı olan 10^{13} ne olmalı? Acaba şu “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ” tanımını bir kez daha okusak mı? “Aman boşver” diyebilir içimizden bir ses. “Tanımlar bir sürü laf. Pek bir işe yaradıkları da yok. Zaman kaybı. Dedem bile asrımız sürat asrı der”. Haydi biz bir probleme bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right) = ?$$

Kolaya benziyor. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ bunları biliyoruz. Bir de limit teoremi vardı, hani

$$\lim(a_n - b_n) = a - b$$

diye yazılan. Sonuç $\infty - \infty$. Doğru sonsuz sayı değil, ama $a - a$ da sıfırdan başka ne olabilir ki? Yani

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

Bir de l'Hospital kuralıyla deneyelim bu problemi.

$$\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^4}$$

olduğuna göre, pay ve paydanın türevini alıp

$$-\frac{2x}{4x^3} = -\frac{1}{2x^2}$$

yazalım ve $x \rightarrow 0$ için limite bakalım. Bu sefer de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

çıktı! Acaba bu limit yok mu?

Şu kolay probleme bir de şöyle bakalım. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty$; doğru ama farkları, yani

$$\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^4}$$

x sıfıra yaklaştıkça nasıl davranıyor? Şimdi $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise $2x^2 < 1$ olur. Demek ki, $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ için

$$\frac{1 - x^2}{x^4} > \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

elde edilir. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğuna göre buradan da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

bulunur. Bu doğru yanıt. Bundan $\infty - \infty = \infty$ olduğunu söyleyemeyiz tabii. İlk olarak $1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3 = 0$, dolayısıyla $\infty - \infty = 0$ yanlışını yaptık. İkinci olarak da l'Hospital kuralını anlamadığımızı kanıtladık! $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$ ve bu halde l'Hospital kuralını uygulayamayız.

Bir de şuna bakalım. Herhangi bir a için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right) = 1$$

olur. $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ ve o halde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = 1^\infty$$

bu da olsa olsa bire eşittir! İsterseniz bir hesap makinası bulalım, $a = 1$ olsun ve örneğin $\left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{8}{7}\right)^7$ değerlerini hesaplayalım. Pek bire yaklaşıyoruz galiba! Oysa logaritma fonksiyonuna ara değer teoremini $[x, x+a]$ aralığında uygularsak ($a > 0$ aldık burada)

$$\frac{a}{x+a} < \ln \left(\frac{x+a}{x} \right) < \frac{a}{x}$$



eşitsizliğini ve buradan da

$$\frac{ax}{x+a} < \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)^x < a$$

eşitsizliğini buluruz. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x+a} = a$ olduğuna göre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = a$$

ve bundan da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = e^a$$

sonucunu elde ederiz. Bu sonuç aslında herhangi bir a sayısı için doğrudur. Herhangi bir $b > 0$ sayısını $b = e^{\ln b}$ olarak yazabiliriz. Dolayısıyla bu yolla herhangi bir pozitif sayıyı elde edebiliriz.

Son olarak da limit hesaplamalarında çokca duyduğumuz

“ŞİMDİ BU BELİRSİZLİĞİ BELİRLEYELİM” deyiminde nasıl dikkatli olmamız gerektiğini bir örnekle görelim

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(5 + \sin x)}{x + 5}$$

ifadesine bakacak olursak pay ve payda ∞ 'a gidiyor ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ortaya çıkıyor ama bu belirsizlik belirlenebilecek bir belirsizlik değil çünkü limit yok, yani belirsiz durumlarda limitin yokluğu da söz konusu.

Sonsuz bir sayı değildir. Matematik okurken tanımları çok iyi anlamadan ilerlersek, pek çok yanılgıya düşeriz. Aslında matematik okurken elimizin altında hep kalem kağıt olmalı. Okuduğumuz her cümleyi iyice anlamalı, bunu da gerektiğinde yazarak, hesap yaparak kontrol etmeliyiz. Teoremlerin varsayımlarıdır sonuca götüren. Bu varsayımları anlamalı ve teoremi elimizdeki probleme uygulamadan önce varsayımların gerçekleştiğini göstermeliyiz. Bu noktalara özen göstermezsek işte o zaman sürat felaket olur!

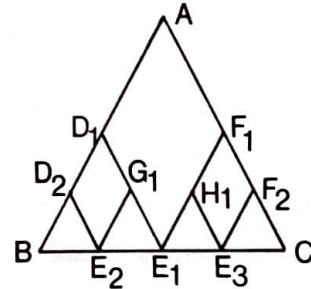
Eşkenar Üçgenler Üçgen Değil mi?

Nurettin Çalışkan

Kenarlarının uzunluğu a birim olan bir ABC eşkenar üçgeni alalım. D_1, E_1, F_1 , sırasıyla AB, BC ve AC kenarlarının orta noktaları olsun. D_1, E_1 ve E_1, F_1 noktalarını birleştirerek elde edilen BD_1E_1 ve E_1F_1C üçgenleri, kenar uzunlukları $a/2$ olan eşkenar üçgenlerdir, dolayısıyla

$$|BD_1| + |D_1E_1| + |E_1F_1| + |F_1C| = 4 \frac{a}{2} = 2a$$

olur. Aynı şekilde D_2, E_2, G_1, H_1, E_3 ve F_2 noktaları, sırasıyla $BD_1, BE_1, D_1E_1, E_1F_1, E_1C$ ve F_1C doğrularının orta noktaları olsun. Elde ettiğimiz $BD_2E_2, E_2G_1E_1, E_1H_1E_3$ ve E_3F_2C üçgenleri kenar uzunlukları $a/4$ olan eşkenar üçgenlerdir ve $|BD_2| + |D_2E_2| + |E_2G_1| + |G_1E_1| + |E_1H_1| + |H_1E_3| + |E_3F_2| + |F_2C| = 8 \frac{a}{4} = 2a$ olur.



Böylece devam edecek olursak, her defasında, BC kenarına en yakın olarak elde edilecek kırık çizginin uzunluğu değişmeyecek, daima $2a$ olarak kalacaktır. Bu kırık çizginin BC kenarına istenildiği kadar yaklaştırılabileceği düşünülürse,

$$|BC| = 2a = |AC| + |AB|$$

sonucuna varılır.

Nerede hata yapılmıştır?

DOĞRUSAL İNDİRGEMELİ DİZİLER

Albert Erkip

Uluslararası Matematik Olimpiyadı çok sayıda ülkeden yarışmacıların katıldığı her yıl yapılan bir problem çözme yarışması. Dörtbuçuk saatlik iki bölümden oluşan yarışmanın her bölümünde üçer problem soruluyor. Problemler bir bakıma lise düzeyinde, zaten yarışmacıların üniversiteye başlamamış olmaları gerekiyor. Öte yandan bu tür problemleri çözmek için yaratıcılıktan başka hem ciddi bir özgün problem çözme alışkanlığı, hem de bazı özel ön bilgiler gerekiyor. Çoğu ülke bu yüzden seçtikleri Olimpiyat takımlarına yüklü bir eğitim programı uyguluyor.

Bu köşede sizlere geçmiş yıllarda sorulmuş bazı Olimpiyat problemlerini tanıtmak istiyoruz. Amacımız bir takım problemleri ve çözümlerini sıralayıp bunların ne zor ya da ne kolay olduklarını tartışmak değil. Bir Olimpiyat hazırlığı yapıyor muycasına önce ön bilgileri, sonra daha kolayca problemleri verip sizleri bir Olimpiyat problemine hazırlamak. Bu hazırlık bir iki sayı sürebilecek ama sonunda problemin önemli bir kısmını çözebilecek durumda olacaksınız. Gerisi size kalmış. Bir öneri; sabırlı olun! Üç problem için dörtbuçuk saat çok uzun bir süre.

Bu sayıda *doğrusal indirgemeli dizi* denilen özel türden dizilere bakacağız. Bunun ne olduğunu söylemeden önce bazı örneklerle bakalım. 1, 4, 9, 16, 225, ... dizisi kareler dizisidir, dizinin aynı şekilde gittiğini varsayarsak n -inci terim için $x_n = n^2$ formülünü elde ederiz. Örneğin 38-inci terimi istiyorsak bu $38^2 = 1444$ 'tür. Bir de 1, 2, 5, 26, 677, ... dizisine bakalım. Dikkat edersek her terimin kendinden öncekinin karesinden bir fazla olduğunu görürüz. 38-inci terim nedir? Bunu bulmak uzunca ve tatsız bir takım hesaplar gerektirir. Bu işi bir bilgisayara nasıl yaptırırız? Bilgisayara önce yukarda gözlediğimiz $x_{n+1} = (x_n)^2$ bağıntısını veririz, sonra da $x_1 = 1$ ilk teriminden başlayarak sırasıyla $n = 1, n = 2, \dots, n = 37$ için bağıntıyı kullanmasını isteriz. Birçok dizi bu ikinci örnekteki benzer yolla kolayca tanımlanabilir; dizinin bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanmaktadır. Matematiksel deyişle $n + k$ -ıncı terim kendinden önceki k terimin bir fonksiyonu olarak verilmektedir. Bu tür tanımlanan dizilere indirgemeli (rekürsif) dizi, tanımlama bağıntısına da indirgeme bağıntısı

denir. Biraz önce değindiğimiz gibi indirgeme bağıntıları bilgisayar kullanımında çok önemlidir.

Konumuz olan doğrusal indirgemeli diziler, indirgeme bağıntısı doğrusal olanlardır. Yani bazı $A_1, A_2, \dots, A_k$ katsayıları için dizinin terimleri ($n = 1, 2, \dots$ için)

$$x_{n+k} = A_1 x_{n+k-1} + A_2 x_{n+k-2} + \dots + A_k x_n \quad (1)$$

bağıntısını sağlarlar. Birkaç örnek verelim; 2, 4, 8, 16, 32, ... geometrik dizisinde her terim kendinden öncekinin iki katıdır. Yani her $n = 1, 2, \dots$ için $x_{n+1} = 2x_n$ bağıntısı sağlanır. Bu bağıntı $k = 1, A_1 = 2$ olmak üzere (1) türündendir. Fibonacci dizisi denilen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... dizisinde ikinciden sonra her terim kendinden önceki iki terimin toplamıdır, yani $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ bağıntısı vardır. Öte yandan 4, 2, 6, 8, 14, 22, ... dizisi de aynı bağıntıyı sağlar. Fark başlangıç değerlerindedir. Fibonacci dizisi 1, 1 ile başlarken ikinci dizi 4, 2 terimleriyle başlamaktadır. Genellersek (1) türünden bir indirgeme bağıntısı tek başına pek çok dizi tarafından sağlanır, ancak başlangıç değerleri

dediğimiz ilk k terim $x_1, x_2, \dots, x_k$ değerlerini de bilirse indirgeme bağıntısını sırasıyla $n = 1, n = 2, \dots$ için kullanarak tüm terimleri hesaplayabiliriz. Başka bir deyişle (1) bağıntısı ve başlangıç değerleri tüm diziyi tanımlamak için yeterlidir.

Şimdi doğrusal indirgemeli bir dizinin n -inci terimini veren bir formül bulmaya çalışacağız. Gösterimde kolaylık olsun diye indirgeme bağıntısında iki terim olduğunu varsayalım, yani $k = 2$ durumuna bakıyoruz, bağıntımız

$$x_{n+2} = A_1 x_{n+1} + A_2 x_n \quad (2)$$

türündendir. Genel (1) durumu örneklerde de değineceğimiz gibi kolayca benzer şekilde bulunabilir. (2) bağıntısını sağlayan geometrik dizilere bakalım. Yerine koyup sadeleştirirsek $x_n = r^n$ dizisinin (2) bağıntısını sağlaması için gerek ve yeter koşulunun

$$r^2 - A_1 r - A_2 = 0 \quad (3)$$

eşitliği olduğunu buluruz. Bir adım daha atalım, (3) denkleminin kökleri r_1 ve r_2 olsun. C, D katsayıları ne olursa olsun

$$x_n = C(r_1)^n + D(r_2)^n \quad (4)$$

dizisinin (2) bağıntısını sağladığı uygun terimleri bir araya toplayarak hemen görülür. Özetlersek, (3) denkleminin köklerini kullanarak çok sayıda (C ve D katsayılarına istediğimiz gibi seçebiliriz!) dizi bulduk.

Şimdi (2) bağıntısının yanısıra dizinin başlangıç terimleri x_1 ve x_2 verilmiş olsun. Acaba bu dizi uygun C, D katsayıları ile (4) türünde yazılabilir mi? Uygun C, D nasıl seçilebilir? Bunun için (4) te sırayla $n = 1$ ve $n = 2$ alarak çıkan x_1 ve x_2 ile eşitleyelim.

$$\begin{aligned} Cr_1 + Dr_2 &= x_1 \\ C(r_1)^2 + D(r_2)^2 &= x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

sistemini elde ettik. Şansımız var da C, D katsayılarını (5) sisteminden çözebilirsek gerçekten de (4) bize dizinin tüm terimlerini verecektir. Yaptıklarımızı bazı örneklerde izleyelim:

1. $x_1 = 6, x_2 = 0$ başlangıç değerleri ve $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ bağıntısı ile verilen diziyi bulalım. Önce birkaç terim hesaplayalım: bağıntıda sırayla

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ için } x_3 &= 5x_2 - 6x_1 = -36 \\ n = 2 \text{ için } x_4 &= 5x_3 - 6x_2 = -180 \\ n = 3 \text{ için } x_5 &= 5x_4 - 6x_3 = -684 \end{aligned}$$

gibi istediğimiz sayıda terimi hesaplayabiliriz. Şimdi yukarıda geliştirdiğimiz yöntemle bakalım. (3) denklemi $r^2 - 5r + 6 = 0$, kökleri $r_1 = 2, r_2 = 3$ olduğundan, (5) sistemini buluruz:

$$\begin{aligned} 2C + 3D &= 6 \\ 4C + 9D &= 0 \end{aligned}$$

Sistemden $C = 9, D = -4$ buluruz. O halde dizimiz için $x_n = 9 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$ formülünü elde ettik. (Formülü $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için hesapladığımız değerlerle karşılaştırınız.)

2. Fibonacci dizisinin genel terimini bulalım. (3) denklemi $r^2 - r - 1 = 0$, kökleri ise $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ olduğundan, (5) sisteminden C ve D katsayılarını bulursak n -inci terim için

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

formülünü elde ederiz.

3. Bulduğumuz yöntemin kolayca genelleştirilebileceğini söylemiştik, buna bir örnek verelim:

$x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 8$ ve $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$ ile tanımlanan diziyi ele alalım. Burada $k = 3$ olduğundan yukarıdaki adımları uygun şekilde genellememiz gerekecek. İlk olarak geometrik diziler için (3) yerine $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ denklemini buluruz. Kökler 1, -1, 2 olduğundan (4) yerine $x_n = A + B(-1)^n + C \cdot 2^n$ koymalıyız. Başlangıç değerlerini alınca (5) sistemi yerine

$$A - B + 2C = 2$$

$$A + B + 4C = 8$$

$$A - B + 8C = 8$$

sistemini buluruz. $A = 2, B = 2, C = 1$ olduğundan, $x_n = 2 + 2(-1)^n + 2^n$ olmalıdır.

4. (1) türünden olmayan bazı bağıntılar biraz oynayarak istenen türe benzetilebilir. İlk terimi 4, ondan sonraki her terimi bir öncekinin iki katından 3 fazla diziyeye bakalım. Bağıntı $x_{n+1} = 2x_n + 3$ şeklindedir. Bu (1) türünden değildir. (Neden?) Ancak bağıntıda n yerine $n + 1$ koyarsak $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3$ olur. Bundan ilkin çıkarırsak, $x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n)$, düzenlersek $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ olur. Bu (1) türündendir. Ancak başlangıç değeri olarak x_1 ve x_2 gerekecek; $x_1 = 4$ verilmişti, x_2 için en baştaki bağıntıdan ($n = 1$ için yazarak) $x_2 = 2x_1 + 3 = 11$ buluruz. Gerekli işlemlerden sonra $x_n = -3 + 7 \cdot 2^{n-1}$ çıkar.

Bazı dizilerin genel terimlerini bulmak için bir yöntem geliştirdik. Genelde bir dizinin yalnızca terimlerini bulmak yetmez, onunla ilgili bazı özellikleri bulmamız gerekebilir. Bu özellikler ya bulacağımız formül yardımıyla ya da indirgeme bağıntısını doğrudan kullanarak gösterilebilir. Buna birkaç örnek verelim:

5. Fibonacci dizisinin ilk 8 teriminden 3 ve 6 ncı terimler çift, diğerleri tektir. Bu acaba hep doğru olur mu, yani $3k$ -ıncı terimler hep çift, diğerleri hep tek midir? Bu soruya yanıt ararken bulduğumuz x_n ifadesi pek işe yaramaz. İndirgeme bağıntısı ise çok şey söyler. Kanıtlamak istediğimiz terimlerin tek-tek-çift-tek-tek-çift-... olduğu. x_n ve x_{n+1} tek olsunlar. İndirgeme bağıntısından $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ olacaktır, yani $x_{n+2} = \text{tek} + \text{tek} = \text{çift}$ tır. Devam edelim, n yerine $n + 1$ koyarsak, $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} = \text{çift} + \text{tek} = \text{tektir}$. Aynı yolla x_{n+4} 'ün tek olduğu

vb. gösterilir. Aslında burada (farkına varmadan) tümevarımla istediğimizi kanıtlamış olduk. (Neden?)

6. Yüksek bir merdivenin ilk basamağındaki bir kurbağa sıçrayarak yukarı çıkıyor. Kurbağa her seferinde ya bir basamak ya da iki basamak sıçrayabiliyor. Bu şekilde kurbağanın 38-inci basamağa varabilmesi için kaç değişik yol vardır?

Problemi tanımaya çalışalım. İkinci basamağa kurbağa tek sıçrayışta çıkar. Yani ikinci basamağa çıkmak için tek yol vardır. 3.basamak için iki yol vardır, ya teker teker sıçrar, ya da iki basamak birden sıçrar. Bu şekilde devam etmeye çalışırsak, 4. basamakta bile hesap karışıyor. Mademki konumuz diziler, bir dizi tanımlayalım. n -inci basamağa çıkan değişik yolların sayısına y_n diyelim, $y_2 = 1, y_3 = 2$ olduğunu bulduk. (y_1 ne olabilir?) y_{n+2} 'ye bakalım. Kurbağa n 2-nci basamağa nasıl çıkabilir? Bir sıçrayış önce ya $n + 1$ ya da n -inci basamakta olacaktı. O halde $n + 2$ 'ye varan iki tür yol vardır, ya n 'ye gelip çift sıçrayan yollar (bunların sayısı y_n idi), ya da $n + 1$ 'e gelip son adımda tek sıçrayan yollar (bunların da sayısı y_{n+1} idi). O halde $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ bağıntısını bulduk. Artık y_{38} 'i hesaplayabiliriz.

7. Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinden büyüğün küçüğe oranına bakalım. Bu oranlar sırasıyla $1/1 = 1, 3/2 = 1.5, 5/3 = 1.666, 8/5 = 1.6, 13/8 = 1.625, 21/13 = 1.615, 34/21 = 1.619$ diye gitmekte. Oranların 1.618 gibi bir sayıya yaklaştığını görüyoruz. Bunu kanıtlayabilir miyiz? x_n için yukarıda bulduğumuz ifadeyi yakından inceleyelim. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayısı -1 ile 0 arasındadır, n -inci kuvvetleri n büyüdükçe sıfıra yaklaşır. O halde büyük n değerleri için x_n terimi $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ sayısına yakındır, ya-

ni terimlerin birbirine oranı $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803 \dots$ sayısına yaklaşıp. Altın oran adı verilen bu sayının Eski Yunan'dan beri sanat ve mimarlıkta önemli yeri vardır. Klasik mimarlıkta kapı, pencere gibi dikdörtgen formların kenarları hep bu oranda yapılır.

Fibonacci dizisinin yukarıdakilerden başka pek çok ilginç özelliği var. Adını 13. yüzyıl başlarında yaşamış İtalyan matematikçisi Leonardo Fibonacci'den alan diziye aynı zamanda doğada da sık sık rastlanmakta. Bu ilginç dizi hakkında daha fazla bilgi almak için Nazif Tepedelenlioğlu'nun "Kim Korkar Matematikten" (Bilim ve Sanat Yayınları, 1983) adlı kitabına bakmanızı öneririz. İndirgemeli dizilerin burada değinmediğimiz özellikleri için ise A.I.Markuschewitz'in, Türkçeye çevirisi yapılmış bulunan "İndirgemeli Diziler" (Matematik Derneği Yayınları, Sayı:18, 1963) kitabına bakabilirsiniz.

Bu yazıyı aralarında bazı Olimpiyat hazırlık problemleri bulunan sorularla bitirelim. Olimpiyat problemimiz gelecek sayıda çıkacak!



Sorular

1. $x_1 = 1, x_2 = 3, x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ bağıntısıyla verilen diziyi bulunuz. Yöntemimiz işledi mi? (5) sistemi için 'şansımız varsa' C, D 'yi çizebiliriz demistik; eğer $r_1 \neq r_2$ ise şansımızın olduğunu gösteriniz. $k = 3$ durumunda (örnek 3'teki gibi) benzer bir şey kanıtlayabilir misiniz?
2. $x_1 = 1, x_2 = 10$ ve $x_{n+2} = (x_{n+1})^3 / (x_n)^2$ bağıntısıyla verilen diziyi bulunuz.
3. Fibonacci dizisinde hangi terimler 3'le tam olarak bölünebilir? Hangi terimler 5'le tam olarak bölünebilir? Yanıtlarınızı kanıtlayınız.
4. Fibonacci dizisinden terimlerin birler basamağındaki rakamlarla yeni bir dizi oluşturalım. Bu dizi bir süre sonra kendini tekrarlar mı?
5. Elimizdeki p_0 milyon lirayı bankaya yatırmak istiyoruz. A bankası yılda % 50 net faiz veriyor, ancak hizmetine karşılık her yıl 1.000.000 lira ücret kesiyor. B bankası yılda net % 45 faiz veriyor ama ücret almıyor. Hangi bankayı tercih edelim? Parayı bankada çok uzun süre tutacaksak tercihimiz ne olmalı? (Tercihimiz p_0 miktarına ve bankada tutacağımız süreye bağlı olacak. Soruda bir de açıklanmamış bir şey var; A bankası önce faiz verip sonra mı ücretini alıyor - ya da tersini mi yapıyor? Hangi durum bizim için daha iyi?)
6. Bir merdivenin ilk basamağındaki kurbağa sıçrayarak yukarı çıkıyor. Kurbağa her sıçrayışta eşit olasılıkla ya 1 basamak, ya da 2 basamak sıçrıyor. 38-inci basamak kırk; kurbağanın bu basamağa düşme olasılığı nedir, bu basamağa düşmeden 75-inci basamağa gelme olasılığı nedir?
7. Üçgenler gezegeninde iki tür üçgen yaşıyor; geniş açılılar (G) ve dar açılılar (D). Her yılın son günü üçgenler bölünüyorlar; öyle ki her G bir G ve bir D 'ye, her D ise bir G ve iki D 'ye bölünüyor. Yıl boyunca büyüyen üçgenler ertesi yıl sonunda yine aynı şekilde bölünüyorlar. Gezegenin iki efsanesi var. Birine göre yaşam tek bir G ile başlamış. İkinci efsane ise D 'lerin sayısının G 'lerinkine oranı $5/3$ 'ten büyük olursa gezegen patlayacak diyor. Gezegenin patlama tehlikesi var mı, varsa ne zaman patlayabilir?

SORULAR

Dergimizin bu bölümünde alıştırma ve yarışma soruları bulunacak. Alıştırma sorularından en azından bir kısmının daha kolay olacağını düşünüyoruz. Okuyuculardan bu soruların çözümlerini bize göndermelerini bekliyoruz. Çözüm göndereceklerin öğrenci olması şu ya da bu sınıfta olması gibi bir kısıtlamamız yok. Yarışma sorularının çözümlerinden en çok beğenilenler gelecek sayıda yayınlanacak. Soruyu çözen diğer okurlar da belirtilecek. Bir yıl içinde yaptığı çözümler gözönüne alınarak en başarılı okurlar derginin olanakları ölçüsünde ödüllendirilecek. Alıştırma sorularına verilen ilginç çözümleri de yayınlayacağız.

Haydi kolay gelsin.

ALİŞTIRMA SORULARI

A1. Ünlü Hintli matematikçi Ramanujan tarafından verilen aşağıdaki eşitliği gerçekeyiniz:

$$\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

A2. a ve b gerçel sayılar olduğuna göre,

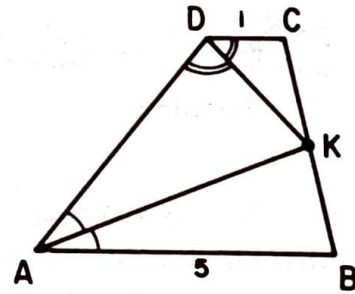
$$(a+b)^2x^2 - (a+b)^3x + 2ab(a^2+b^2) = 0$$

denkleminin gerçel köklerinin varlığını gösteriniz, bu kökler için $x_1 \geq x_2$ olarak x_1 ve x_2 yi belirleyiniz.

A3. Aşağıda çizilmiş yamukta A ve D açılarının açıortayları BC üzerinde kesişmektedir. Birbirine paralel kenarların uzunlukları

$$|DC| = 1 \quad \text{ve} \quad |AB| = 5$$

olduğuna göre $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?



A4. a, b ve c pozitif gerçel sayılar ise

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

olacağını gösteriniz. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $a = b = c$ olduğunu ispatlayınız.

A5. Her n pozitif tamsayısı için

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

olduğunu gösteriniz.

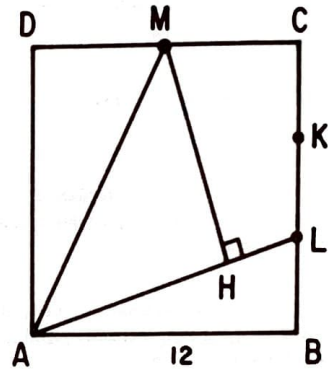
YARIŞMA SORULARI

Y1.
$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} + 1}}}$$

sayısını a ve n pozitif tamsayı olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ biçiminde yazınız.

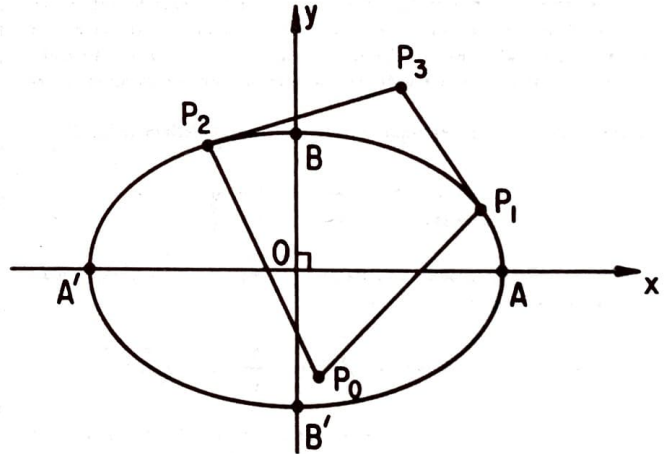
Y2. Şekilde $ABCD$ bir kare olup $|DM| = |MC|$, $|CK| = |KL| = |LB|$ ve $MH \perp AL$ dir.

$AB = 12\text{cm}$ ise $\triangle MAH$ üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

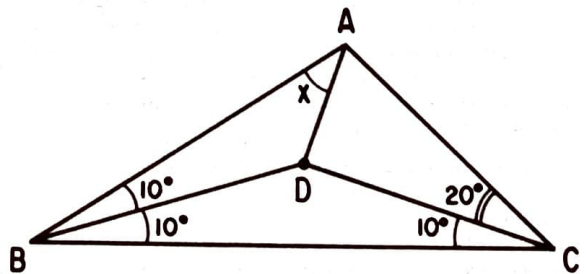


Y3. $\cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{4\pi}{17} \cos \frac{8\pi}{17} = ?$

Y4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi veriliyor. Elips üzerinde A, A', B, B' den farklı $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları alınıyor. Bu noktalardaki normallerin kesin noktası $P_0(x_0, y_0)$ ve teğetlerin kesim noktası $P_3(x_3, y_3)$ ise $\frac{x_1 x_2 x_3}{x_0} + \frac{y_1 y_2 y_3}{y_0} = a^2 + b^2$ olacağını gösteriniz. (Hazırlayan: Hüseyin Demir)



Y5. Bir ABC üçgeninin içindeki bir D noktası köşelere birleştirilmiştir. Şekilde belirtilen açılar verilmiş olduğuna göre x açısı kaç derecedir? (Hazırlayan: Hüseyin Demir)



Dergimiz bu bölümü ile matematik müfredatının geniş bir çevrede tartışılmasını sağlamak istemektedir. Bu tartışmalara sağlıklı bir temel oluşturmak amacıyla ilk olarak çeşitli ülkelerdeki matematik müfredatını olanaklar ölçüsünde objektif olarak okuyucuya sunmak istiyoruz. Ancak, her ülkenin eğitim yapısı çeşitli yönlerde farklılıklar göstermekte ve bu yapı içinde çeşitli bölümlerin farklı müfredatları bulunmaktadır. Dergimiz ilke olarak her ülkenin ortaöğretiminin her aşamasında matematiğe en fazla yer ayrılan bölümünün matematik içeriğini vermeye çalışacaktır. Bu sayımızda Fransa'daki lise matematik müfredatını ele alıyoruz.

FRANSA'DA MATEMATİK ÖĞRETİMİ

Bu programda lise düzeyinde felsefe ve dil bilimleri, ekonomi, temel bilimler, doğa bilimleri, teknik bilimler ve meslek bölümleri gibi bölümler bulunmaktadır. Biz bunlardan Temel Bilimler bölümüne ilişkin programı vereceğiz.

Lise I (Haftada 4 saat)

I. Sayısal İşlemler:

Gerçek sayılarla (özellikle rasyonel ve ondalık sayılarla) işlemler, eşitlik ve eşitsizlikler. Mutlak değer, uzaklık. Bir gerçel sayının diziler yardımıyla (limit kavramı olmaksızın) yaklaşılması.

II. İstatistik

Popülasyon ve örneklem tanıtılması. Veri tablosu, periyodik alıntılar, bir anketin cevaplandırılması, verilerin düzenlenmesi, çeşitli grafik gösterimi. Efektif, frekans, ağırlıklı frekans, ortalamalar.

III. Fonksiyonlar

a) Çeşitli şekillerde ortaya çıkan fonksiyon örnekleri. Formülle verilmiş fonksiyonlar, verilerin tablolar biçiminde ifadesi, hesap makinasıyla çalışmalara başlangıç. Fiziksel, biyolojik ve ekonomik sistemler Geometrik ve fiziksel ölçüler Trigonometrik fonksiyonlar Grafikler, yorumlanışı, grafikten fonksiyona geçiş, fonksiyonun belli bir aralığa kısıtlanması.

b) Fonksiyonun bütününe ilişkin özellikler: artan, azalan fonksiyonlar; çiftlik, teklik, periyodiklik ve bunların grafiğe etkileri.

c) Trigonometrik fonksiyonlar: hesap makinası ile değer hesaplamalar, periyot, simetritler, artan ve azalan oldukları aralıklar, trigonometrik çemberle açıklanabilecek özdeşlikler. (Örneğin: $\cos(x + \pi) = -\cos x$ gibi). Özel açıların trigonometrik değerlerinin düzgün çokgenler yardımıyla belirlenmesi.

d) Özel fonksiyonların değişimlerinin incelenip, grafiklerinin çizilmesi:

$$\begin{aligned} x &\mapsto ax + b; & x &\mapsto x^2; & x &\mapsto \sqrt{x}; \\ x &\mapsto |x|; & x &\mapsto x^3; & x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Cebirsel ve geometrik dönüşümlerle bunlara indirgenebilen fonksiyonlar.

e) Fonksiyonların yerel incelenmesi:

$$x \mapsto (1+x)^2; \quad x \mapsto (1+x)^3; \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}; \quad x \mapsto \sqrt{1+x}$$

gibi fonksiyonların sıfır noktası yörnesindeki durumu. Bir fonksiyona bir nokta yörnesinde doğrusal fonksiyonla yaklaşım. Yaklaşık değer hesapları ve hata hesapları.

IV. Düzlem Geometri Uzaklık, koordinatlar, eksenler, simetritler, ötelemeler, vektör kavramı, Thalés teoremi ve benzeri orta okuldaki bilgilerin kısaca tekrarı. Homoteti; öteleme ve homotetiye ilişkin analitik formüller. En çok dört noktadan oluşan (ağırlıklı) sistemin ağırlık merkezi. Bir koordinat sistemine göre doğru denklemleri, doğruların parametrik gösterimi, koordinat eksenlerinin değiştirilmesi.

V. Düzlemde vektörlerin skalar çarpımı Skalar çarpımın özellikleri, iki yarı-doğru arasındaki açının " $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$ " formülüyle belirlenmesi, Pisagor teoremi ve kargısı.

Skalar çarpımın koordinatlarla ifadesi, iki nokta arasındaki uzaklığın koordinatlarla ifadesi; çemberin analitik ifadesi (iç ve dış noktalar).

VI. Düzlemde açılar ve dönme Daire ve çember; teğetler, dış büyüklük, simetritler. Trigonometrik çember, yönlü yayın ölçüsü, iki yarı-doğrunun

arasındaki açının ölçüsü. Çevre ve merkez açıları. Rotasyonlar, eş merkezli iki rotasyonun bileşimi; rotasyon altında, uzunluk ve açıların değişmezliği.

VII. Uzaklık Geometrisi

Kesişme bağıntıları ve paralellik Diklik, bir düzleme göre simetri, bir doğru parçasının orta dikme düzlemi, izdüşüm kavramı, dik izdüşüm, Uzaklık, alan ve hacim hesapları.

VIII. Denklemler ve denklem hesapları (Programın bu kısmı yerli geldikçe diğer konular arasında verilecektir.)

Kolay optimizasyon problemleri. Bu problemlerle dış büyüklüklerin ilişkisi (doğrusal programlama). Fonksiyonların interpolasyon ve ekstrapolasyonlarına ilişkin basit problemler. Yerine koyma yöntemi ile dört bilinmeyene kadar doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri. İki bilinmeyenli doğrusal denklem ve eşitsizlikler.

Lise II (Haftada 6 saat)

I. Sayı Dizileri

Çeşitli şekillerde tanımlanmış dizi örnekleri, (fonksiyonun değerleri olarak, ardışık terimler arasındaki bağıntılarla) Monoton diziler Periyodik diziler Sonsuza ıraksayan dizi örnekleri Aritmetik ve geometrik diziler ve bunların ilk n teriminin toplamına ilişkin formüller Bir dizinin sıfıra yakınsaması: tanım; sıfıra yakınsayan dizilerin sınırlı oluşu; sıfıra yakınsayan iki dizinin toplamının yine sıfıra yakınsaması ve sınırlı bir dizi ile sıfıra yakınsayan bir dizinin çarpımının sıfıra yakınsaması. Sıfıra yakınsayan dizilerden yararlanarak genelde yakınsama kavramının verilmesi $|u_n| \leq \frac{A}{n}$; $|u_n| \leq \frac{A}{10^n}$ gibi örneklerle yakınsamanın ne ölçüde hızlı ya da yavaş olduğunu belirtilmesi, bu tür sınırlamalarla sıfıra yakınsamanın belirlenmesi.

II. Fonksiyonlar

a) Bir aralıkta tanımlı fonksiyonlar ve bu fonksiyonlarla işlemler $f \geq 0$; $f \geq g$ gösterimleri ve sınırlı fonksiyonlar Birebir örten fonksiyon kavramı ($f(x) = y$ denkleminin irdelenmesi ile bağıntılı) Verilen bir f fonksiyonundan $|f|$, λf , $x \mapsto f(x - \lambda)$, $x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$ fonksiyonlarının oluşturulması ve genelde bileşke fonksiyon kavramı

b) Limit kavramı: sıfırda limitin sıfır olması durumuyla başlayıp, $x \rightarrow a$ için limitin sıfır oluşuna geçilecek, oradan da $x \rightarrow a$ için limitin ℓ olması tanımı verilecek. Süreklilik: noktada süreklilik, aralıkta süreklilik.

c) Türev: geometrik ve fiziksel yorumu, bir aralıkta türevlenebilir fonksiyonlar, toplamın, çarpımın türevi $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ ve $x \mapsto f(ax - b)$ fonksiyonlarının türevi. Türev yardımıyla bir fonksiyonun artan ya da azalan oluşunun belirlenmesi; ekstremumların bulunması, denklem ve eşitsizliklerin çözülmesi.

İspat verilmeden bir aralıkta türevli ve türevi sıfır olan bir fonksiyonun sabit olduğu; bir aralıkta türevli ve türevi pozitif olan fonksiyonların artan olacağı gibi teoremler kullanılacaktır.

d) Bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun ilkel (belirsiz integrali). Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının incelenmesi: periyodiklik, teklik, çiftlik, türevler ve belirsiz integraller ve grafikleri.

III. Polinomlar

Tek değişkenli polinom fonksiyonları ile ilgili işlemler; $(x - a)$ ile bölünebilme. İkinci derece, üç terimli

IV. İstatistik

Tek değişkenli istatistik serilerinin incelenmesi Frekanslar, histogram Bir istatistik serisinin analizi ve deskripsiyonunun karakteristik öğeleri.

V. Düzlem Geometrisi

Vektörlerin paralellik, bir doğrunun doğrultu vektörü, tabanlar.

Düzlemde dönüşüm örnekleri, bileşik dönüşümler, bir dönüşümün parçalanması, dönüşüm grupları. Bir noktayı sabit bırakan eş ölçü dönüşümleri (izometrilere), bunların bazı eksenlere göre simetritlerinin çarpımı olarak yazılışı, rotasyonlar. Düzlemin yönlendirilmesi. Skaler çarpımın uygulamaları: $M \mapsto \alpha AM^2 + \beta MB^2$ fonksiyonları, Kenar ortay teoremi, Trigonometrinin toplam ve fark formülleri, yarı aç formülleri, sinüs ve kosinüs teoremleri.

VI. Uzak Geometri

Uzayda vektörler Bir nokta ve bir vektörle doğruların, bir nokta ve iki vektörle düzlemin belirlenmesi, tabanlar. Uzayda skaler çarpım. Diklik: düzlem ve doğrularla ilgili uygulamalar, dik izdüşüm. Ortanormal tabanlar: skaler çarpımın ve uzaklığın koordinatlarla ifadesi Uzayın yönlendirilmesi, yönlendirilmiş ortanormal tabanlar. Vektörel çarpım, karma çarpım ve koordinatlarla ifadeleri. Küre, düzlem kesitleri, teğet düzlem.

Lise III (Haftada 9 saat)

I. Sayma Yöntemleri ve İstatistik

Sonlu bir kümeden diğer bir kümeye fonksiyon sayısı ve birebir fonksiyon sayısı. Kombinasyon Sayma örnekleri, olasılık Binom formülleri iki nicelik arasındaki bağıntının deneylerle belirlenmesi.

II. Sayı Dizileri

Sayı dizilerin yakınsaklığı, limiti ℓ olan bir (a_n) dizisi ve sürekli bir f fonksiyonu için $f(a_n)$ dizisinin limitinin $f(\ell)$ oluşu. ∞ ya da $-\infty$ 'a ıraksama, a^n ve n^a dizileri. İndirgemeli diziler (ekonomi ve biyolojiye uygulanabilecek örneklerle).

III. Fonksiyonlar

a) Doğal logaritma ve adi logaritma Limit ve süreklilik kavramlarının daha ayrıntılı incelenmesi. İspatsız olarak ara değer teoremi ve uç değer teoremi. Sonsuzla ilgili limitler. b) Türev: bileşik fonksiyonunun türevi, ters fonksiyonun türevi, ardışık türevler. Türevle artan ve azalışın incelenmesi. Maksimum, minimum değerler ve bunların denklem ve eşitsizlik çözümlerinde kullanılışı. Dik, yatay, eğik ve eğri asimptotlar. Üstel fonksiyon. e^x , u^v gösterimleri. a^x ve x^a fonksiyonları. ($a > 0$), $\ln x$, x^a , e^x fonksiyonlarının artış durumlarının birbirleriyle karşılaştırılması,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

sonuçlarının elde edilişi. Logaritmik ve üstel fonksiyonlarla elde edilmiş bileşik fonksiyonların türevleri. Ortalama değer teoremi.

IV. İntegraller

a) Sürekli bir fonksiyonun integrali:

$$1) \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \text{ bağıntısı}$$

2) Chales bağıntısı

$$\left(\int_a^b \dots = \int_a^c \dots + \int_c^b \dots \right)$$

3) İntegralin lineerliği

$$4) a \leq b \text{ ve } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

5) Ortalama değer teoremi

6) Değişken değiştirme yöntemi

7) Parçalı integral (tümlev)

$$8) x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ fonksiyonunun incelenmesi}$$

b) Kesin hesaplanamayan bir integralin (dikdörtgenlerle) yaklaşık hesabı. c) İntegralin alan, hacim, ağırlık hesabında kullanılışı, eylemsizlik momenti. d) Lineer homojen, sabit katsayılı birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü.

Başlangıç değerli problemlerin çözümleri için, varlık ve teklik ispatları

$$y'' + hy' + ky = a \cos(wx - \varphi)$$

türev denklemlerin çözümü, (belirsiz katsayılar yöntemi)

V. Vektör Değerli Fonksiyonlar

a) Tek gerçel parametreye bağlı, değerleri $\mathbb{R}^2$, ya da $\mathbb{R}^3$ 'te alınabilen fonksiyonlar. (Tanım ve ispatlar gerçel değerli koordinat fonksiyonları kullanılarak verilecektir.)

Vektör değerli bir fonksiyonun türevi ve türev kuralları.

b) Parametrik olarak verilmiş düzlemsel bir eğrinin çizimine ilişkin basit örnekler. (Tekil nokta ve dallanma incelemesine girilmeyecektir.)

c) Noktanın hareketi. Yörünge, hız ve ivme vektörleri, hızlanan ve yavaşlayan hareketler, doğrusal ve dairesel hareketler, düzgün doğrusal ve düzgün sınırlı hareketler.

VI. Karmaşık sayılar

a) Karmaşık sayılar cismi, geometrik gösterim, eşlenik, salt değer, üçgen eşitsizliği.

b) Karmaşık sayıların $re^{i\theta}$ biçiminde yazılışı, $t \mapsto e^{it}$ fonksiyonunun türevi.

c) De Moivre formülü Trigonometrik ifadelerin doğrusallaştırılması

Toplamdan çarpıma, çarpımdan toplama geçiş formülleri. $a \cos x + b \sin x$ ifadesinin $r \cos(x + \varphi)$ biçiminde yazılışı. d) Bir karmaşık sayının n 'inci kökleri, birimin n 'inci kökleri grubu ve geometrik yorumu. İkinci dereceden denklemlerin karmaşık sayılarda çözümü.

VII. Geometri

a) Ağırlık merkezi,

$$M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i \text{ ve } M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\vec{MA}_i\|^2$$

fonsiyonlarının incelenmesi.

b) Afin dönüşümler: (φ doğrusal olmak üzere) bir uzaydan kendine $\vec{v} \mapsto \vec{A} + \varphi(\vec{v})$ biçimindeki dönüşümler. Bir noktası belirlenmiş uzayda $OM \mapsto OM'$ afin dönüşüm oluşuyla $M \mapsto M'$ afin dönüşümünün tanımlanması.

Afin dönüşümlerin ağırlık merkezini değiştirmeyen dönüşümler olarak belirlenmesi. Doğru ve düzlemlerin görüntüleri.

Konveks bölgelerin görüntüleri, paralelliğin korunması. İzometrilere iç çarpımı koruyan afin dönüşümler oluşu.

c) (Düzlem Geometri) Yönlü düzlemde bir doğru çiftinin yönlü aç ölçüsü.

d) Kirişler dörtgeni. Dönme ve ötelemelerin bileşimi. Hareket grupları.

Bir hareketle bir homotedinin bileşimi. Benzerlik dönüşümleri Karmaşık düzlemde dönüşümler, afin olmayan dönüşüm örnekleri. e) Uzak geometrisi: Dönmeler, ötelemeler, homotediler, izometrilere, simetrilere.

f) Düzlem geometrisi: Konikler: geometrik tanımları (iki odakla, odak ve doğrultmanla). Asimptotları yardımıyla hiperbol denklemi. Koniklerin parametrik denklemleri. Teğet.

"Öğretimin insanı kendisine ne ölçüde bağlayan bir uğraş olduğunu ancak ondan uzak düşünce anlarsınız."

I.R.Shafarevich

Bu kısımda çeşitli kitapların tanıtımını yapacağız. Herhangi bir kısıtlama olmamakla birlikte doğal olarak çoğunlukla Türkçe kitaplar ele alınacaktır. Bu sayımızda Türk Matematik Derneği yayınlarından geometri kitaplarını ele alıyoruz. Bunlar ve Türk Matematik Derneği'nin tüm yayınları ödemeli olarak aşağıdaki adresten istenebilir. Fiatlar gerçekten ucuz.

İsteme adresi:
Prof.Dr. Hülya Şenkon
Türk Matematik Derneği
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Vezneciler - İstanbul

Geometri Cilt 1-2-3

Yazan: B.V.Kutuzov

Çeviren: Hüseyin Demir



B.V. Kutuzov tarafından yazılan geometri kitabı Hüseyin Demir tarafından üç cilt olarak çevrilmiştir. Birinci cildinde, geometride sık sık kullanılan aksiyom teoremi vb. temel kavramlarla başlayan kitap geometrik şekillerin nokta kümeleri olarak incelenmesi, geometrik yer, çizim problemleri, cetvel ve pergelle çizimlerle devam etmekte ve geometride dönüşümler ve dönüşüm grupları ile son bulmaktadır. İkinci ciltte ise öteleme, dönme, simetri dönüşümleri ayrıntısı ile ele alınmakta ve benzerlik ve evirtim dönüşümleri işlenmektedir ve çizim problemlerine uygulamaları verilmektedir. İkinci cildin son kısmında ise uzunluk, alan ve hacimlerin ölçülmesi kavramsal olarak ele alınmıştır. Üçüncü cilt ise geometrideki aksiyomatik yapıyı ele almakta Öklid'in Elemanlar adlı eserinin ayrıntılı bir eleştirisini yaparak Öklid dışı geometri örneği olarak Lobachevski geometrisini incelemektedir.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

Basic
Mathematics
For Beginners
Timur Karacay



Basic
Mathematics Three
Dr. L.M. Brown - Dr. Kenan Taş - Dr. Orhan Özer



Basic
Mathematics One
Dr. Kenan Taş



Basic
Mathematics Two
Dr. L.M. Brown - Dr. Kenan Taş - Dr. A. Haydar Eş



Yasar Baykul Lawrence M. Brown
Dogan Coker Timur Karacay

COLLEGE
Mathematics
ONE



Timur Karacay
Professor of Mathematics
University of Hacettepe

COLLEGE

Mathematics
TWO



NAİF TÜRETKEN
HÜSNÜ ÖZKAN
MUSTAFA ÖZBAKAN

COLLEGE
PHYSICS TWO



HÜSNÜ ÖZKAN
NAİF TÜRETKEN
MUSTAFA ÖZBAKAN

COLLEGE
PHYSICS THREE



NAİF TÜRETKEN
HÜSNÜ ÖZKAN

COLLEGE
PHYSICS ONE

