

D Ü N Y A S I

Matematik Öğretim Programında Yapılan Değişiklikler

Avni Akyol

Matematik Dünyası'ndan

Gerçel Sayı Nedir?

Tuğrul Taner

Sihirli Kareler

Ali Doğanaksoy

Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler

İsmail Gūloğlu

izometriler

Hüseyin Demir

Doğrusal İndirgemeli Diziler ve Sıçrayan Kurbağalar

Albert Erkip

Sorular

Pisagor Teoremi: Ya Öncesi?

Alev Topuzoğlu

Pascal Üçgeni

Yavuz Nutku

İngiltere'de Matematik Öğretimi

Kitaplar

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
CEMAL KOÇ

YAYIN KURULU
OKAY ÇELEBİ
HÜSEYİN DEMİR
ALİ DOĞANAKSOY
HALİL ERDEM
YAŞAR ERSOY
İSMAİL GÜMÜŞEL
TİMUR KARAÇAY

*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.*

Adres : Matematik Dünyası
ODTÜ, Matematik Bölümü
06531 Ankara
Telefon : 223 71 00 / 2978-2979
Fiatı : 3000.- TL
Abone : Yurtiçi 1 yıllık (5 sayı)
10.000.-TL

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 ANKARA

adresine gönderilecektir.

*Abone olmak için yıllık abone ücretinin İş Bankası ODTÜ Ankara Şubesindeki
4229-0343587 numaralı hesaba yatırılması (bu mümkün değilse posta havalesi yapılması) ve
dekontun bir örneğinin dergi adresine gönderilmesi yeterlidir.*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt:1 Sayı: 1 dergisinin Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
15 Mart 1991 gün ve 611.7.YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 496 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

Baskı : ODTÜ Basım İşliği
Genel Dağıtım : Hitit Kitabevi
Mithatpaşa Cad. 62/A Kızılay 06420 ANKARA
Telefon : 117 93 07 **Fax** : 118 10 46

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası'ndan	1
Gerçel Sayı Nedir? (Tuğrul Taner)	2
Sihirli Kareler (Ali Doğanaksoy)	6
Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler (İsmail Güloğlu)	10
İzometriler (Hüseyin Demir)	16
Doğrusal İndirgemeli Diziler ve Sıçrayan Kurbağalar (Albert Erkip)	21
Sorular	24
Pisagor Teoremi; Ya Öncesi? (Alev Topuzoğlu)	26
Pascal Üçgeni (Yavuz Nutku)	29
İngiltere'de Matematik Öğretimi	30
Kitaplar	32

MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Şubat 1991 sayısı ile yayın hayatına başlayan dergimizin ikinci sayısını sunuyoruz. Dergiye gösterilen büyük ilgi, önemli bir boşluğu doldurmaya çalıştığını gösterdiği gibi ülkemizin düşünsel etkinlikler yönünden hiçbir ülkeden geri kalmak istemediğini de açıkça sergiliyor. Tahminlerin çok ötesinde insan kolayca kaçmadan düşünme, irdeleme, yeniden yorumlama isteminde. Bu durumu, bize gösterdikleri ilgi ile ortaya koydukları için okurlara içtenlikle teşekkür ediyoruz. Dergimizin ilk sayısı yeni baskı yapmak zorunda kaldı. Bu nedenle yeni aboneler olası gecikmelerden dolayı bizi bağışlasınlar.

Şimdi sayfalarımız arasında gezinelim.

- **Gerçel Sayı Nedir?** Bir lise öğrencisine sorulabilecek en zor soru bu. Tam yanıtını da beklememek gerek. Tuğrul Taner yazısında biçimselliğe boğmadan gerçel sayı kavramına açıklık getiriyor, yani derya içinde yaşayanlara deryayı anlatıyor.
- **Sihirli Kareler** Matematikle eğlenmenin yollarından biri de sihirli karelerle uğraşmak olsa gerek. Ali Doğanaksoy bu yazısında okura antik çağlardan günümüze nerdeyse bir kültür oluşturarak süregelen sihirli kareleri sunuyor. Konu zevkli, eğlendirici ve matematiksel açıdan beklenmedik ölçüde zengin.

- **Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler** Geçen sayımızda İsmail Güloğlu'nun söyleşisinde pergel ve cetvel kullanmanın ne demek olduğu konuşulmuştu. Bu sayıda yalnızca pergel ve cetvel kullanılarak üç eşit parçaya bölünemeyecek açılarının varlığı gösteriliyor. Bu yazıdan sonra artık "ben yaptım" diyenlere yanıt vermeyeceğiz.
- **İzometriler** Hüseyin Demir bu yazısında düzlemin uzunluk değiştirmeyen dönüşümlerini inceliyor. Bu dönüşümlere izometri diyoruz. Bu sayıda dört tür izometri ayrı ayrı ele alınıp işleniyor. Bunların bileşimi gelecek sayımıza kalıyor.
- **Doğrusal İndirgemeli Diziler ve Sıçrayan Kurbağalar** Geçen sayımızdaki doğrusal indirgemeli diziler yazısında verilen problemlerin çözümü verilerek konu tamamlanıyor ve 1975 Londra Olimpiyatı'nda sorulan sıçrayan kurbağa sorusuna yanıt isteniyor.
- **Pisagor Teoremi; Ya Öncesi?** Alev Topuzoğlu, kısa değinmelerle Pisagor ve Pisagorculuğa da ışık tuttuğu bu yazısında esas olarak Pisagor üçgenleri olarak bilinen kenarları tamsayılar olan dik üçgenleri ele alıyor ve bunların Pisagor'dan 1000 yıl kadar önce Mısır ve Mezopotamya'da bilindiğini belirten kanıtları sunuyor.
- **Pascal Üçgeni** Neyin nerede karşımıza çıkacağını bilemeyiz. Yavuz Nutku'nun tanık olduğu böylesi bir olay ve ortaya çıkardığı yeni sorular.

GERÇEL SAYI NEDİR?

Tuğrul Taner

1. Ondalık Açılımlar

Rasyonel sayılar, tamsayı çiftlerinin oranı olarak tanımlanır. Helenistik çağ matematikçileri de (pozitif gerçel) sayıları doğru parçalarının oranı olarak algılamışlardır. Buna göre eğer iki doğru parçası üçüncü bir doğru parçasının tam katları ise, bu iki doğru parçasının oranı hem bizim tanımımıza göre, hem de Helenistik anlamda bir rasyonel sayıdır.

Öte yandan eğer iki doğru parçasını ölçebilecek ortak bir birim yoksa, bu iki doğru parçasının oranı rasyonel olmayan (yani irrasyonel) bir sayıdır. Nitekim ikizkenar bir dik üçgenin hipotenüsünün bir dik kenarına oranı olan $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığını antik çağ matematikçileri de ispatlamışlardır.

Modern anlamda sayı kavramına Helenistik sayı kavramından başlayıp Arşimet özelliği denen bir özellikten yararlanarak ulaşmağa çalışacağız.

Arşimet özelliği, bir a doğru parçasının başka herhangi bir b doğru parçasının yeteri kadar büyük bir tam katından küçük olduğunu ifade eder.

Bu tam katların en küçüğüne $q+1$ dersek $c = \frac{a}{b}$ için

$$bq \leq a < b(q+1) \text{ yani } q \leq c < q+1 \quad 1$$

Buradaki q sayısına c nin içindeki en büyük tamsayı denir ve $[c] = q$ yazılır.

İkinci eşitsizlik ifadesi

$$0 \leq r = c - q < 1$$

biçiminde de yazılabileceğinden, her c (pozitif) gerçel sayısı için bir q tamsayısı ve $0 \leq r < 1$ koşulunu sağlayan bir r reel sayısı vardır öyle ki

$$c = q + r \quad 2$$

Bu r sayısı için $0 \leq 10r < 10$ olduğundan 10'dan küçük bir q_1 doğal sayısı (yani bir rakam)

vardır öyle ki

$$q_1 \leq 10r < q_1 + 1 \text{ yani } 0 \leq r_1 = 10r - q_1 < 1.$$

Buradan bulunacak $r = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10}$ değeri (2) de yerine konularak

$$c = q + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10}, \quad 0 \leq r_1 < 1$$

Böylece devam edildiğinde n -inci adımda

$$c = q + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n}, \quad 0 \leq r_n < 1$$

ve hiç durmaksızın devam edildiğinde

$$q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \dots + \frac{q_n}{10^n} + \dots = q, q_1 q_2 \dots q_n \dots$$

sonsuz toplamı elde edilir. Sonsuz çoklukta sayıyı toplama olanağı olmadığından böyle bir toplama ne anlam verileceği uygun bir biçimde belirtilmelidir.

Özel olarak, eğer a ve b pozitif tamsayılar, yani $c = \frac{a}{b}$ rasyonel sayı ise böyle bir açılımın rakamları belli uzunlukta rakam blokları biçiminde tekrarlanacaktır. Böyle açılımlara *periyotlu açılımlar* diyelim ve rasyonel sayıların açılımlarının neden periyotlu olacağını bir örnek üzerinde açıklayalım. $c = \frac{16}{35}$ olsun. 16 sayısını 35 sayısına bölerken, kalanlar 10 la çarpılıp bölme, aynı kalan ikinci kez

elde edilinceye kadar yürütülürse

r	$=$	16								35
$10r$	$=$	160	0,4	5	7	1	4	2	8	5
		-140	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
r_1	$=$	20								
$10r_1$	$=$	200								
		-175								
r_2	$=$	25								
$10r_2$	$=$	250								
		-245								
r_3	$=$	5								
$10r_3$	$=$	50								
		-35								
r_4	$=$	15								
$10r_4$	$=$	150								
		-140								
r_5	$=$	10								
$10r_5$	$=$	100								
		-70								
r_6	$=$	30								
$10r_6$	$=$	300								
		-280								
r_7	$=$	20								

elde edilir.

Bu tablodaki kalanlar 35'ten küçük doğal sayılardır. Olanaklı kalan sayısı 35 olduğundan, bölme işlemi en fazla 36 kez uygulanırsa elde edilecek kalanlardan en az ikisi birbirine eşit olacaktır. Örneğimizde $r_7 = r_1$ ve bu nedenle her $n \geq 2$ için $r_{n+6} = r_n$. Bunun sonucu olarak da her $n \geq 2$ için $q_{n+6} = q_n$. Demek ki bölme işlemine devam edildiğinde, ikinci basamaktan başlamak üzere

$$\overline{q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7} = 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 8$$

rakam blokları uç uca eklenmiş görünecektir. Yani $\frac{16}{35}$ in açılımı periyotludur.

2. Gerçel Sayıların Birkaç Eşdeğer Tanımı

Rasyonel sayı sistemini gerçel sayı sistemine genişletmek için, ilk sistemde doğru olmayan bir özelliğin gerçel sayı sisteminde doğru olacağını kabullenmemiz gerekmektedir.

$$c = (q, q_1 q_2 \dots q_n) + \frac{r_n}{10^n} =$$

$$\left(q + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_n}{10^n} \right) + \frac{r_n}{10^n}$$

eşitliğinde parantezler içindeki (rasyonel) sayıyı c_n ile gösterelim.

Böylece her n pozitif tamsayısı için, bu eşitlik

$$c = c_n + \frac{r_n}{10^n}, \quad 10 \leq r_n < 10$$

biçiminde yazılabilir.

$q \leq c_n < q+1$ olduğundan, *rasyonel sayılardan* oluşan c_n dizisi *sınırlıdır*. Ayrıca

$$c_{n+1} - c_n = \frac{q_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0 \text{ yani } c_n \leq c_{n+1}$$

olduğundan dizi *artandır*. Son olarak

$$0 \leq c - c_n < \frac{r_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

olduğundan, c_n nin c den uzaklığı ($\frac{1}{10^n}$ ile birlikte) gitgide sıfıra yaklaşır. Yani c_n dizisi c ye yakınsar.

Tanım 1. Sınırlı ve artan her rasyonel sayı dizisine bir *gerçel sayı gösteren dizi* denir ve farkları sıfıra yakınsayan böyle iki diziye *aynı gerçel sayıyı gösteren diziler* denir.

Eğer rasyonel sayı sistemi içinde çalışılıyorsa ve dizi bir rasyonel sayıya yakınsamıyorsa, bu dizi rasyonel sayı sistemi içinde ıraksak ama gerçel sayı sistemi içinde yakınsak olacaktır. Öte yandan gerçel sayı sistemi içinde, sınırlı ve artan bir dizi alırsak bu dizinin her zaman bir gerçel sayıya yakınsadığı gösterilebilir.

c nin ondalık açılımından yararlanarak bir de

$$d_n = q + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

dizisi oluşturulabilir. Bu dizi için

$$q \leq d_n < q+1, \quad d_{n+1} \leq d_n, \quad 0 \leq d_n - c_n < \frac{1}{10^n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Yani dizi, sınırlı ve azalandır. n büyüdükçe d_n ler c_n lere yaklaştığı için, c_n ile birlikte d_n dizisi de küçülerek c ye yakınsar. O halde herhangi bir c gerçel sayısına rasyonel sayılarla soldan da sağdan da yaklaşılabılır.

Söz konusu c sayısı c_n ler kümesinin ve bu nedenle c den küçük rasyonel sayıların oluşturduğu

kümenin de en küçük üst sınırıdır.¹ En küçük üst sınırın (veya en büyük alt sınırın) varlığını kabul etmekle yine gerçel sayı sistemine geçmiş oluruz.

Tanım 1. Boş olmayan, sınırlı bir rasyonel sayı kümesinin en küçük üst sınırı (en büyük alt sınırı) gerçel sayıdır.

Yani herhangi bir c gerçel sayısı c den küçük rasyonel sayıların en küçük üst sınırı, ya da c den büyük rasyonel sayıların en büyük alt sınırı olarak tanımlanmıştır.

Şimdi de sonsuz çoklukta sayının toplamının hangi durumlarda nasıl tanımlandığını açıklayalım. Sonsuz çoklukta sayıları toplayabilme gereksinimi antik çağlara kadar uzanır.

Ünlü Zeno çelişkisini basite indirgeyerek ifade edelim: Bir kaplumbağa 1 birim uzaklığı yürüyebilmek için önce bu uzaklığın $\frac{1}{2}$ sini, sonra kalanın yarısını yani asıl uzaklığın $\frac{1}{4}$ ünü, daha sonra $\frac{1}{8}$ ini ... yürümek zorundadır. Bütün bu uzunluklar toplamı

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

birim uzunluğa yani 1 sayısına eşit olmalıdır. Oysa ki kaplumbağa (ve insanlar) için bu sayıları toplama olanağı yoktur. O halde kaplumbağa bu uzaklığı yürüyemez. Çözümün ana fikri ondalık açılımın yorumlanmasına da yardımcı olacaktır.

Uygulamada

$$q, q_1 q_2 \dots q_n \dots$$

açılımının yaklaşık olarak

$$c_n = q + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_n}{10^n}$$

rasyonel sayılarına eşit olduğunu yani c_n dizisinin yakınsadığı gerçel sayıya eşit olduğunu kabulleniyoruz. Gerçekten de c_n dizisi sınırlı ve artan olduğundan yakınsak bir dizidir ve c_n dizisi c ye

yakınsıyorsa c sayısının bu ondalık açılıma eşit olduğunu yani

$$c = q + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_n}{10^n} + \dots$$

olduğunu söyleyebiliriz. Genel olarak da

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

sonsuz toplamı

$$a_1, a_1 + a_2, \dots, c_n = a_1 + c_2 + \dots + a_n, \dots$$

kısmi toplamlarının (varsa) yaklaştığı gerçel sayı olarak tanımlanır. Buna göre

$$c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

dizisi 1 sayısına yakınsadığından

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

yazabiliriz. Yani artık kaplumbağa birim uzunluğu yürüyebilecektir!

Tanım 3. Her c gerçel sayısı bir $q, q_1 q_2 \dots q_n \dots$ ondalık açılımdır ve $c_n = q, q_1 q_2 \dots q_n$ rasyonel sayıları bu gerçel sayının yaklaşık değerleridir.

Gerçel sayıların ondalık açılımlarının birtekliğini göstermek için önce

$$a = 0,999 \dots 9 \dots$$

sayısını inceleyelim. Bu sayı

$$c_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n}$$

dizisinin yakınsadığı gerçel sayıdır. O halde $10a$,

$$10c_n = 9 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^{n-1}}$$

dizisinin yakınsadığı reel sayıdır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} 10a &= 9 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{9}{10^n} + \dots \\ &= 9 + a \end{aligned}$$

yazabiliriz. O halde $a = 1$ yani

$$1 = 0,999 \dots 9 \dots$$

¹Bir A sayı kümesi için belli iki K ve L sayıları varsa öyle ki A nın her a elemanı için $K \leq a \leq L$ olsun, L sayısına A nın bir üst sınırı, K ya da alt sınırı denir. Böyle bir kümeye de (üstten ve alttan) sınırlı küme denir. Boş küme sınırlıdır. (Nasıl ve neden?) Boş olmayan sınırlı bir kümenin en küçük üst sınırı varsa ve bu sayı kümeye aitse, ona A nın maksimumu denir. Alt sınırların en büyüğü varsa ve kümeye aitse ona da kümenin minimumu denir.

Aynı nedenle

$$0,25999 \dots 9 \dots = 0,26000 \dots 0 \dots = 0,26.$$

Yani belli bir ondalık basamaktan sonra bütün rakamları 9 olan bir ondalık açılımın gösterdiği rasyonel sayının başka bir ondalık açılımı daha vardır. Bundan böyle *ondalık açılım* deyince sonsuz çoklukta rakamı 9 dan farklı ondalık açılımları kastedeceğiz. Böyle açılımlar için, daima $0, q_1 q_2 \dots q_n \dots < 1$ olacaktır.

Buna göre her reel sayının sadece bir ondalık açılımı vardır. Çünkü

$$c = q, q_1 q_2 \dots q_n \dots = q', q'_1 q'_2 \dots q'_n \dots$$

ise c nin içindeki en büyük tam sayı $q = q'$ dür. Sadeleştirip 10 la çarparsak

$$q_1, q_2 q_3 \dots q_n \dots = q'_1, q'_2 q'_3 \dots q'_n \dots$$

ve $q_1 = q'_1$ olur. Böylece devam edersek her n için $q_n = q'_n$.

Rasyonel sayıların periyotlu ondalık açılımları olduğunu gösterdik. Periyotlu ondalık açılımların da rasyonel sayıları gösterdiği kolayca ispatlanabilir. O halde periyotsuz ondalık açılımlar irrasyonel sayıları gösterir. Örneğin $\sqrt{2}, \pi, e$ sayılarının ondalık açılımları periyotsuzdur. Öte yandan

$$0,1010010001000010 \dots$$

(1'ler arasındaki 0 rakamlarının sayısı her seferinde bir fazla) ondalık açılımı da bir irrasyonel sayıdır.

İrrasyonel sayı denince birkaç örnekle geçitirilir. Aslında irrasyonel sayılar rasyonel sayılardan her bakıma göre daha fazladır. Ancak burada biz şu kadarını ispatlayalım.

Teorem: Herhangi iki rasyonel (ya da irrasyonel) sayı arasında pek çok irrasyonel (ya da rasyonel) sayı vardır.

Eğer $a < b$ irrasyonel sayılarsa, a ya sağdan rasyonel sayılarla yaklaşılabilir. O halde a ile b arasında pek çok rasyonel sayı vardır.

Öte yandan eğer a ve b rasyonel sayılarsa, $a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ (n pozitif tamsayı) sayıları irrasyoneldir ve n büyükken bu sayılar a ya yakın, yani a ile b arasındadır.

3. ∞ ve $-\infty$

Gerçek sayılar arasında " $<$ " ile gösterilen bir sıralama bağıntısı vardır. Herhangi a ve b gerçek sayıları için aşağıdakilerden biri ve sadece biri doğrudur.

$$a < b \text{ veya } a = b \text{ veya } b < a.$$

Gerçek sayıların hepsi, üzerinde pozitif bir yön seçilmiş ve pozitif yönde 0 ve 1 noktaları seçilmiş bir sayı doğrusu üzerine büyüklük sıralarına göre yerleştirilebilir. Bu yerleştirme sonucunda geometrinin gereği olarak sayı doğrusunda boş nokta kalmaz.

Bilindiği gibi sayı doğrusunun (ve genelde hiçbir doğrunun) *başlangıç* ve bitim noktaları (yani, uç noktaları) yoktur. Gerçek her a sayısı için

$$a - 1 < a \text{ ve } a < a + 1$$

olduğundan *en büyük gerçek sayı* ve *en küçük gerçek sayı* deyimleri anlamsızdır. Ancak matematikçiler, (sadece) matematik dilinde özellikle limit kavramı ile ilgili olarak bazı kolaylıklar sağladığından, sayı doğrusuna, uç noktalar olarak $-\infty$ *başlangıç* noktasını ve ∞ bitim noktasını *yakıştırmışlardır*. Böylece ortaya çıkan bu iki simge öğretim düzeyinde daima büyük yanlışlara yol açmaktadır.

"Eksi sonsuz" ve "sonsuz" diye adlandırılan bu iki simgenin gerçek sayı göstermediği ve sadece gerçek sayılar için tanımlı olan

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b} \quad (b \neq 0), \quad a^b$$

ifadelerinde a veya b yerine bunların kullanılması (ayrıca tanımlanmamışlarsa) bu ifadeleri anlamsızlaştıracağı unutulmamalıdır. Ayrıca $\frac{1}{2}$ un anlamsız olduğu ve bunun hiçbir gerçek sayıya ve $-\infty, \infty$ simgelerinden birine eşit yazılamayacağı bilinmelidir.

Sayı herşeyin başlangıcıdır.

Eflatun

SİHİRLİ KARELER

Ali Doğanaksoy

Aşağıdaki karenin hanelerine 1'den 9'a kadar olan sayılar öyle yerleştirilmiştir ki, her satırın, her sütunun ve iki köşegenin üzerinde yer alan sayıların toplamı daima 15'e eşittir. Bu özelliği ile bu kareye, bir "3'lü sihirli kare" diyoruz.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Bu ifadeyi genelleştirerek satırları, sütunları ve köşegenleri toplamı hep aynı sayıya eşit olacak şekilde hanelerine 1'den n^2 'ye kadar sayıların yerleştirildiği, kenarı n hanelik bir kareyi de n 'li sihirli kare olarak tanımlarız. Örneğin, aşağıdaki 9'lü sihirli karede sabit toplam 369'dur.

50	60	70	80	9	10	20	30	40
58	68	78	7	17	27	28	38	48
66	76	5	15	25	35	45	46	56
74	3	13	23	33	43	53	63	64
1	11	21	31	41	51	61	71	81
18	19	29	39	49	59	69	79	8
26	36	37	47	57	67	77	6	16
34	44	54	55	65	75	4	14	24
42	52	62	72	73	2	12	22	32

Bir n 'li sihirli karede 1'den n^2 'ye kadar olan bütün sayılar birer kere yazıldığı için bütün hanelerin toplamı $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ dir. O halde n satırdan her birinin toplamı da $\frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n^3+n}{2}$ olarak elde edilir. Yani, n 'li bir sihirli karenin sabit toplamı $\frac{n^3+n}{2}$ dir. Nitekim, $n = 3$ için $\frac{n^3+n}{2} = \frac{27+3}{2} = 15$ ve $n = 9$ için de $\frac{n^3+n}{2} = \frac{729+9}{2} = 369$ olduğu görülmektedir.

Lo-shu adı verilen $\begin{smallmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{smallmatrix}$ karesi çok eskiden beri büyük alaka toplamıştır. Mistik özelliklere

sahip olduğu bile düşünülen lo-shu, günümüzde dahi Uzak Asya ve Hindistan'da karşımıza çıkabilmektedir. Antik çağlardan günümüze kadar sihirli karelerle o kadar uğraşmıştır ki, ortaya bir sihirli kareler kültürü çıkmıştır. Günümüze oranla o zamanlar haklarında bilinenler çok az olmasına rağmen, 1838 yılında Fransa'da bu konuda üç ciltlik bir çalışma yayınlanmıştır. Bu alana ilgi gösterenler arasında Arthur Cayley, Oswald Veblen gibi matematikçilerin adları verilebilir.

Şimdi şu soruya cevap arayalım: Acaba lo-shu'dan başka 3'lü sihirli kare var mıdır? Elbette vardır. Örneğin, lo-shu'yu merkezi etrafında 90° , 180° veya 270° döndürmekle sihiri bozulmaz ama aşağıdaki sihirli kareler elde edilir...

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Aynaların sayıların toplamı üzerinde bir etkisi olmadığına göre, lo-shu'nun ve dönmüş lo-shu'ların aynadaki akisleri de hep sihirli olacaktır yani,

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

kareleri de hep sihirlidir. Şimdi elimizde tam sekiz tane 3'lü sihirli kare oldu. Acaba başka var mı? Hayır... Bunu şöyle gösterebiliriz: 1'den 9'a kadar sayıların içinden toplamı 15 olan üç sayıyı sekiz şekilde seçebiliriz: (159), (168), (249),

(258), (267), (348), (357), (456). 3'lü sihirli karede de üzerindeki sayılar toplamı 15 olması gereken tam sekiz eleman vardır: üç satır, üç sütun ve iki köşegen. Karenin merkezindeki hane bir satır, bir sütun ve iki köşegen üzerindedir; o halde buraya yazılacak sayı listede en az dört seçenekte görülmelidir. Bunu sağlayan tek sayı da 5 olduğu için sihirli karenin merkez hanesinde daima 5 bulunmalıdır. Yani bir üçlü sihirli kare muhakkak $\begin{smallmatrix} _ & _ & _ \\ _ & 5 & _ \\ _ & _ & _ \end{smallmatrix}$ formunda olacaktır. Sol üst köşe farklı üç eleman üzerinde bulunmaktadır. Buraya yazılacak sayı listede en az üç seçenekte yer almalıdır. Bunu sağlayan dört sayı vardır: 2, 4, 6 ve 8. Şimdi, sol üst köşeye bu sayıları teker teker deneyerek yazalım. Önce 2... Bu durumda kare $\begin{smallmatrix} 2 & _ & _ \\ _ & 5 & _ \\ _ & _ & 8 \end{smallmatrix}$ şeklinde olacaktır. Birinci sıra için ya (2 4 9) ya da (2 6 7) tercihini yapabiliriz. (2 4 9)'u seçersek $\begin{smallmatrix} 2 & 9 & 4 \\ _ & 5 & _ \\ _ & _ & 8 \end{smallmatrix}$ elde edilir. Satır, sütun toplamaları 15 olacağından diğer haneler de tek türlü doldurulabilir. Neticede $\begin{smallmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{smallmatrix}$ karesi ortaya çıkar. Birinci satır için (2 6 7) tercihini yapsaydık elde edeceğimiz kare $\begin{smallmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{smallmatrix}$ olacaktı. Sol üst köşeye 2 yazarak iki farklı kare elde ediyoruz. Aynı şekilde 4, 6 ve 8 için de ikiye kare bulunacak ve ortaya toplam sekiz tane 3'lü sihirli kare çıkacaktır. Bu tahlille göstermiş olduk ki, 3'lü sihirli karelerin sayısı tam sekizdir.

Lo-shu'dan diğer kareleri elde ederken iki işlem kullandık: *lo-shu*'yu merkezi etrafında döndürme ve aynada yansıtma... Bu işlemlere kısaca *dönme* ve *yansıma* adları verilir. Birbirinden dönme ve yansıma ile elde edilebilen sihirli karelere aynı kare gözü ile bakılır. Bu kabule göre, yukarıda bulduğumuz bütün 3'lü sihirli kareler *lo-shu* ile aynıdır. Bir başka deyişle, (dönme ve yansımalar sayılmazsa) yalnız bir tane 3'lü sihirli kare vardır. Sihirli karelerin dereceleri büyüdükçe sayılarının da artacağı kolaylıkla tahmin edilebilir. Bütün 3'lü sihirli kareler birbirlerine dönme ve yansıma ile dönüştürülebilirken, daha büyük derecelerde bu tür dönüşümlerle birbirlerinden elde edilemeyecek sihirli kareler de ortaya çıkmaya başlar.

Örneğin aşağıdaki 5'li sihirli kareler birbirlerine dönme ve yansıma ile dönüştürülemezler.

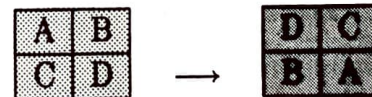
18	12	5	6	24
14	8	21	2	20
1	25	13	19	7
10	4	17	23	11
22	16	9	15	3

18	24	5	6	12
22	3	9	15	16
1	7	13	19	25
10	11	17	23	4
14	20	21	2	8

Kimi zaman sihirli kareler hane sayılarına göre, *tek* ve *çift* olarak tasnif edilirler. Bir kenardaki hane sayısı tek ise kareye *tek sihirli kare*; çift ise *çift sihirli kare* denir.

Bir n 'li sihirli karenin iki satırının yerleri değiştirilirse satır ve sütun toplamaları değişmeyecek fakat, köşegen toplamaları bozulacaktır. Yani iki satırın yerini değiştirmek sihir koruyan bir dönüşüm değildir. Fakat iki satırın, diyelim ki, i ve j numaralı satırların yerini değiştirdikten sonra bir de i ve j numaralı sütunların yerini değiştirirsek birinci (sol-üst köşeden sağ-alt köşeye olan) köşegen üzerindeki toplam yine karenin sabitine eşit olur. İkinci köşegen toplamını da garanti edebilmek için yeter şart, yer değiştiren satır ve sütunların merkeze göre simetrik olmalarıdır. Yani $j = n + 1 - i$ olmalıdır. Demek ki, bir sihirli karede önce i ve $n + 1 - i$ numaralı satırlar, arkasından da aynı numaralı sütunlar yer değiştirirse yeni bir sihirli kare elde edilir.

'Sihir-bozmaz' bir başka dönüşüm de, kareyi bloklara ayırıp bu blokların yerlerinin değiştirilmesine dayanır. Bu dönüşümü tek ve çift kareler için ayrı ayrı tanımlıyoruz. Çift sihirli kareyi dikey ve yatay simetri eksenleri ile dört eşit parçaya bölerek elde edilen blokların yerlerini çarpaz olarak değiştirmek karenin sihirini bozmayacaktır. Bu dönüşümü bir şekilde açıklarsak:



Aşağıda da bu dönüşümün bir 4'lü sihirli kareye uygulanması gösterilmiştir...

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

→

16	5	10	13
9	4	15	6
7	14	1	12
2	11	8	13

Tek sihirli kareler için ise, bloklara ayırma ve blokların yerini değiştirme işlemi aşağıdaki şekilde izah edilmiştir.

A	a	B
b	x	c
C	d	D

→

D	d	C
c	x	b
B	a	A

Bir 5'li sihirli kare üzerinde bu dönüşümün etkisi şöyle olur:

18	12	5	6	24
14	8	21	2	20
1	25	13	19	7
10	4	17	23	11
22	16	9	15	3

→

23	11	17	10	4
15	3	9	22	16
19	7	13	1	25
6	24	5	18	12
2	20	21	14	8

Bir n 'li sihirli karenin her hanesindeki sayıyı $n^2 + 1$ 'den çıkararak elde edilen kare yine bir sihirli kare olur. Yukarıda son bulduğumuz 5'li sihirli karenin sayılarını 26'dan çıkararak oluşturulan

3	15	9	16	22
11	23	17	4	10
7	19	13	25	1
20	2	21	8	14
24	6	5	12	18

karesi de bir sihirli karedir.

Elimizdeki bir sihirli kareden sihir bozmaz dönüşümlerle birçok yeni sihirli kare elde edilebileceğini gördük. Hemen şunu not edelim ki, verilen bir kareyle işe başlayıp, bu kareye yukarıda tanımlanan 'sihir-bozmaz' dönüşümleri defalarca uygulayarak sihirli karelerin tamamını elde etmek mümkün değildir. Bildiğimiz işlemlerle birbirine çevrilemeyecek sihirli kareler bulunabilir. Verilen bir dereceden kaç tane sihirli kare olduğunu cevaplamak kolay bir iş değildir ve bir kaç hal dışında henüz bu soru cevaplandırılmamıştır.

Bir sihirli kareden yeni sihirli kareler elde edilebileceğini biliyoruz. O halde mesele, bir

tane olsun bir sihirli kare yazabilmektir. Bu da konunun enteresan ve üzerinde epeyce çalışılmış bir problemidir. İstenen derecede bir sihirli kareyi hemen yazmak pek o kadar kolay olmayabilir. Yazının devamını okumadan, örneğin bir 6'lı sihirli kare yazmaya çalışmak problemin yapısı hakkında fikir verecektir. Verilen herhangi bir sayıya karşı gelen bir sihirli kare yazacak bir algoritma vermek konuyla ilgilenenlerin her zaman üzerinde durdukları bir mesele olmuştur. Çok uğraşılmasına rağmen bu mesele ancak kısmen cevaplandırılabilmiştir. Şöyle ki, eğer verilen sayı tek ise sihirli kareyi yazmak kolaydır. Bunu yapabilen çok basit algoritmalar geliştirilmiştir. Öte yandan, sayı çift olduğu takdirde uygulanabilecek basit bir yol mevcut değildir. Gerçi, her çift sayıya karşı bir sihirli kare yazabilmek mümkün olmaktadır. Ancak bunu veren algoritmalar, tek sayılar için verilenlerden oldukça karmaşıktır ve bunları basitleştirmek bugüne kadar mümkün olmamıştır. Burada tek kareler için birbirine çok benzeyen iki metod verilecektir. İlk metod *Bache de Méziriac* tarafından geliştirilmiştir. Bu metodu kullanarak bir 7'li sihirli kare oluşturacağız. Uygulanan metod, herhangi dereceden tek sihirli kare yazmak için kullanılabilir.

İşe, her kenarında 7 hane bulunan boş bir karenin merkez hanesinin tam altındaki haneye 1 yazarak başlıyoruz. 1'in sağ-alt çarpazına 2 yazıyoruz. Bundan sonra 3,4,5,6,7 sayılarını bir önceki sayının sağ-alt çarpazına yerleştirmek sureti ile devam ediyoruz. 3 yazdığımız zaman karenin alt sınırına gelmiş olduğumuzdan, 4 yazacak bir sağ-alt çarpaz olmayacaktır. Bu durumda karenin son satırından sonra sanki ilk satırının devam ettiğini kabul edip, 3'ün sağ-alt çarpazı olarak, ilk satırın son hanesine 4 yazacağız. Benzer şekilde, 5 yazmak için de, 4'ün sağ-alt çarpazı olarak ilk satırın ikinci hanesini kullanacağız. 6 ve 7 sayılarını yazarken bir problem çıkmayacaktır... Şimdi elimizde şöyle bir kare oldu

-	-	-	-	-	-	4
5	-	-	-	-	-	-
-	6	-	-	-	-	-
-	-	7	-	-	-	-
-	-	-	1	-	-	-
-	-	-	-	2	-	-
-	-	-	-	-	3	-

Bundan sonra 8 sayısını 7'nin 2 hane altına yazıp 9,10,11,12,13,14 sayılarını da sıra ile ve hep bir öncekinin sağ-alt çarpazına gelmek sureti ile yazacağız. Karemiz şu şekli aldı:

-	-	-	-	10	-	4
5	-	-	-	-	11	-
-	6	-	-	-	-	12
13	-	7	-	-	-	-
-	14	-	1	-	-	-
-	-	8	-	2	-	-
-	-	-	9	-	3	-

14 'ün iki hane altına 15 yazıp benzer şekilde devam edilerek bütün kare doldurulursa bir 7'li sihirli kare elde edilir:

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	23	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Burada kullandığımız algoritma her dereceden tek sihirli kare için kolayca genelleştirilebilir.

Tek sihirli kareler için, Bache de Méziriac metoduna çok benzeyen bir metod da *De la Loubère* tarafından verilmiştir. Bu metodla karenin kuruluşu, iki ayrıntı dışında aynıdır... Sayıları yazmaya birinci satırın tam ortasındaki haneden başlıyor ve sağ-üst çarpaza doğru devam ederek diğer sayıları yerleştiriyoruz. Bir çarpaz dolduğu zaman da, kaldığımız yerden iki hane yerine yalnız bir hane iniyoruz. Aşağıdaki 7'li sihirli kare De la Loubère metodu ile yazılmıştır:

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Karmaşık yapılarından dolayı, çift sihirli kareler için geliştirilen metodları bir başka sayıya bırakarak burada sadece iki örnek veriyoruz. Aşağıda verilen, biri 6'lı; diğeri 8'li iki sihirli kare, *Devedec*'e ait metodla yazılmıştır.

31	5	3	34	2	36
12	26	10	9	29	25
24	17	16	15	20	19
13	23	22	21	14	18
30	8	27	28	11	7
1	32	33	4	35	6

57	7	62	5	4	59	2	64
16	50	14	12	53	11	55	49
17	23	43	21	20	46	42	48
32	39	30	36	37	27	34	25
40	26	38	28	29	35	31	33
41	47	19	45	44	22	18	24
56	10	51	52	13	54	15	9
1	58	3	61	60	6	63	8

Son olarak çok fazla sihirli bir 4'lü kare veriyoruz. 4'lü bir sihirli karede, sabit toplam 34'dür. Bu kareyi inceledikçe hiç beklenmedik bir çok özelliğe sahip olduğu görülecektir. Bu karede satır, sütun ve köşegenlerden başka hangi hanelerin toplamının da 34 olduğu araştırılarak karenin sihiri hakkında bilgi edinmeye başlanabilir.

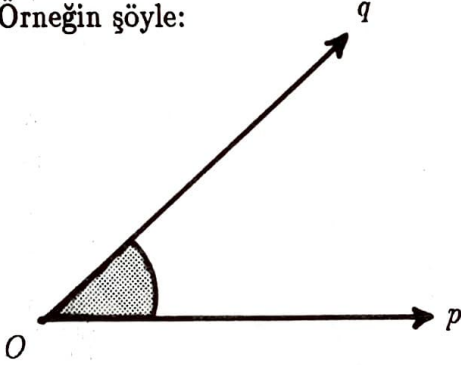
1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

PERGEL VE CETVELLE YAPILAMAYAN ÇİZİMLER

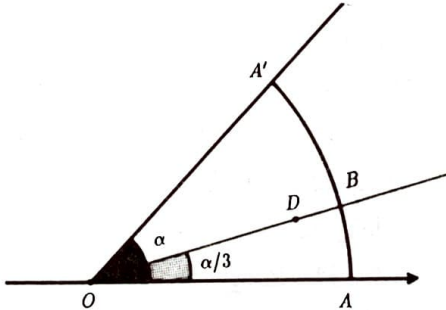
İsmail Güloğlu

Geçen sayıdan devam...

- Cetvel ve pergel ile çizim yapmanın ne demek olduğunu kesin bir hale getirdin. Bir de bu genel tanımlamayı açığı üçe bölme problemine tatbik edebilir misin?
- Bir açı demek, aynı bir O "köşe" noktasından başlayan bir (p, q) ışın çifti demektir. Örneğin şöyle:



Aynı açı, p üzerinde O 'dan farklı bir nokta A , q üzerinde O 'dan farklı bir nokta B olmak üzere A, O, B noktaları ile verilen, $\angle AOB$ ile gösterilen açı diye de anlatılabilir. Problemin başlangıç noktaları kümesi olarak $P_0 = \{O, A, B\}$ kümesini alabiliriz.



Çizimin amaç noktası $\angle AOD = \frac{1}{3} \angle AOB$ eşitliğini sağlayan OD ışını üzerinde O 'dan farklı herhangi bir noktadır. Fakat bu ışın üzerinde O 'dan farklı bir D noktası çizilebilir ise C noktası da, çizilebilir OD doğrusu ile, O merkezli $|OA|$ yarıçaplı çizilebilir çemberin kesişim noktası yani çizilebilir bir nokta olur. Dolayısı ile $\angle AOB$ açısının

üçe bölünebilirliği C noktasının çizilebilir olmasına denktir.

- Yani problemimizi çözmek için $P_0 = \{O, A, B\}$ kümesi verilince $C(P_0)$ kümesini belirlemeli ve C noktasının buna ait olup olmadığına karar verebilmeliyiz.
- Bir dakika, bir dakika. Burda bir kısır döngüye girmiş olmadık mı?
- Nasıl?
- Biraz önce açıklamaya çalıştığınız anlamda C noktası adı konmuş, işaretlenmiş bir nokta değil. Ayrıca "verilmiş" noktalar sadece O, A ve B olduğuna göre, belirlenebilen, "kimlikleri tesbit edilebilen" noktalar, çizilebilir noktalardan yani $C(\{O, A, B\})$ kümesinin elemanlarından ibaret değil mi? Yani C 'nin $C(P_0)$ 'a ait olup olmadığını sormak bile olanaksız galiba. Eğer $C(P_0)$ sonlu bir küme olsaydı, her elemanını tek tek kontrol ederek istenen özelliğe sahip olup olmadığına karar verebilirdik. Ama şimdi?
- Galiba haklısın. Bir çıkış noktası bulmamız lazım. C 'nin çizilebilir bir nokta olduğunu kabul edip bu varsayımın bir çelişkiye götürdüğünü göstererek dolaylı yoldan C 'nin çizilemez olduğunu ispatlamaya ne dersin?
- Herhalde siz de öğretmenime güveniyorsunuz. Bunu önerirken aklınızda bir çelişkinin nasıl üretilebileceği hakkında bir fikir var mı? Aksi takdirde bana bu yöntem uçsuz bucaksız bir ormanda kaybolmak gibi geliyor. Üstelik sonsuz tane açının üçe

bölünebilir olduğunu biliyoruz. Ben olsam bu yola gitmezdim.

- Peki, tekrar düşünelim. Sıkıntımız neydi?
- Özet olarak, verilen noktalardan hareketle çizilebilir olan noktalardan başkasının "adını koyamamak" ve sonsuz bir kümedeki noktaları teker teker kontrol edip problemimizi çözüp çözmediklerine karar verememek.
- Yani iki iş yapmalıyız. Önce "her noktaya bir ad verme" yöntemi; sonra da "bu adlara bakarak bir noktanın çizilebilir olup olmadığına karar verme" yolu bulmalıyız.
- Niçin analitik geometriye geçmiyoruz? Uygun bir sisteme göre noktalarımızı koordinatlarsak sadece her noktaya, onu diğerlerinden ayıran bir "ad", "kimlik" vermiş olmakla kalmayız, problemimizi cebirsel bir probleme, sayılar ve sayı kümeleri ile ilgili bir takım önermelere çevirmiş oluruz. Bu, belki, çizilebilir noktaları karakterize etmek için de bir yöntem verebilir.
- Problemimize dönerek bu fikri tatbik etmeye çalışalım. Ölçüsü α olan açı (3. şekildeki gibi) A, O, B noktaları ile verilmiş olsun. OA ışını pozitif x -ekseni O 'yu başlangıç noktası ve $|OA|$ 'yı birim uzunluk olarak alalım. Böylece O 'nun koordinatları $(0,0)$, A 'nın koordinatları $(1, 0)$ olacak şekilde bir koordinat sistemi seçmiş olalım. Buna göre OB doğrusu ile O merkezli $|OA|$ yarıçaplı çemberin kesişimi olan çizilebilir A' noktasının koordinatları $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ve amaç noktanın koordinatları $(\cos \frac{\alpha}{3}, \sin \frac{\alpha}{3})$ olur:
- Ve buna göre $\mathcal{P}_0 = \{(0,0), (1,0), (\cos \alpha, \sin \alpha)\}$ olup $(\cos \frac{\alpha}{3}, \sin \frac{\alpha}{3})$ 'ün $C(\mathcal{P}_0)$ 'a ait olup olmadığını sorabiliriz.
- Bu arada hemen şu gözleniyor: Bir (x,y) noktasının çizilebilir bir nokta olması için eksenler üzerine izdüşümleri olan

$(x,0), (0,y)$ noktalarının da çizilebilir olmaları gerek ve yeter. [Neden?] Buna göre başlangıç noktalarının koordinatlarına başlangıç sayıları ve bu noktalardan hareketle çizilebilir noktaların koordinatlarına "başlangıç sayılarından hareketle çizilebilir sayılar" dersek, bir geometrik çizimin bizim aletlerimizle yapılabilmesi demek çizimin amaç noktalarının koordinatlarının başlangıç sayılarından hareketle çizilebilir sayılar olmaları demektir.

- Ben birşey daha eklemek istiyorum. $\mathcal{P}_0$ 'daki noktalardan P noktasının çizilebilir olması P 'nin $C(\mathcal{P}_0) = \cup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i$ kümesinde olması demektir, dedik ama, aslında her çizim sonlu adımda gerçekleştirileceği ve dolayısı ile ancak sonlu tane "ara" nokta kullanacağı için, belki, P 'nin çizilebilir olmasını şöyle anlatmak daha uygun: $\mathcal{P}_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ olmak üzere şimdi söyleyeceğim koşulları sağlayan sonlu bir

$$A_1, A_2, \dots, A_k, P_1, P_2, \dots, P_r$$

noktalar dizisi kurulabilirse ve ancak bu durumda P noktası $\mathcal{P}_0$ 'dan çizilebilir bir noktadır. Koşullar şunlar:

- i) Her $1 \leq i \leq r$ tam sayısı için P_i noktası $\{A_1, A_2, \dots, A_k, P_1, P_2, \dots, P_{i-1}\}$ kümesinden bir adımda çizilebilir.
- ii) $P = P_r$.

- Tamam. Bu gözlemi "çizilebilir bir nokta, bir çizilebilir sayılar çiftidir" gözlemi ile birleştirirsek şöyle diyebilir miyiz? Verilen $\mathcal{P}_0$ kümesindeki noktaların koordinatları olan sayıların kümesi $K_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ olsun. Bir x reel sayısının bu K_0 kümesinden hareketle çizilebilir bir sayı olması demek sonlu öyle bir

$$a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_n$$

sayılar dizisi var olması demektir ki, $x = x_n$ olsun ve her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için x_i

sayısı $K_i = \{a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ kümesinden bir adımda çizilebilir olsun.

- Fakat bu son tanım pek net olmadı. Cebirsel bir önerme haline getirmek istediğimiz koşul, geometrik kılığı ile ifademize sızdı. Bir sayının, verilen sonlu bir sayılar kümesinden bir adımda çizilebilir olması, ne demek?
- Bunun için $K = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subseteq \mathbb{R}$ verildiği zaman koordinatları bu kümeden alınan noktalardan hareketle bir adımda çizilebilir olan noktaların koordinatlarının K 'daki sayılarla ilişkisini anlamamız lazım. Gel, tahtaya geçelim.

$(a, b), (c, d)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$(d - b)(x - a) - (c - a)(y - b) = 0$$

dır. $a_1x + b_1y = c_1, a_2x + b_2y = c_2$ doğrularının kesişim noktası, paralel değil iseler, yani $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ise

$$\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

dir. Buna göre koordinatları $K = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ sayılar kümesinden alınan farklı noktalardan geçen doğruların kesişim noktalarının koordinatları K kümesinin elemanlarını uygun şekilde toplayıp, çıkarıp, çarpıp, bölerek, yani dört temel işlemle elde edilebiliyor.

- Şimdi çizilebilir bir çember ile, çizilebilir bir doğrunun kesişim noktalarına sıra geldi. Bunu da ben ifade etmeye çalışayım. Merkezi (a, b) noktası ve yarıçapı R olan çemberin denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

yani

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

dir. İki $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ noktaları arasındaki uzaklığın karesi de

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$

dir. Buna göre koordinatları K 'dan alınan iki nokta arasındaki uzaklığı yarıçap ve koordinatları K dan alınan bir noktayı merkez olarak kabul eden bir çember, μ_1, μ_2 ve μ_3, K 'daki sayılardan toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri ile elde edilen sayılar olmak üzere

$$x^2 + y^2 + \mu_1x + \mu_2y + \mu_3 = 0$$

şeklinde bir denklemle verilir. Koordinatları K 'dan alınan iki farklı noktadan geçen bir doğrunun denklemi ise yine v_1, v_2, v_3 aynı tipte sayılar olmak üzere

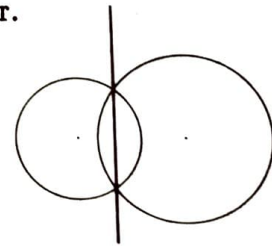
$$v_1x + v_2y = v_3, \quad (v_1, v_2) \neq (0, 0)$$

idi. Doğrunun denkleminde bilinmeyenlerden birini diğeri cinsinden çözer ve çember denkleminde yerine koyarsak ve geri kalan değişkene t dersek

$$t^2 + ut + v = 0$$

şeklinde ikinci dereceden bir denklem bulunur. Bu arada u ve v sabit sayıları K 'daki sayıları uygun şekilde toplayıp, çıkarıp, çarpıp, bölerek elde edilen sayılardır:

- İki çizilebilir çemberin arakesit noktalarını ayrıca düşünmemize lüzum yok. Çünkü bu noktaları çemberlerden biri ile bu arakesit noktalarından geçen çizilebilir doğrunun arakesit noktaları olarak da görebiliriz. Dolayısı ile senin anlattığın duruma indirgenmiş olur.



Sonuç olarak, verilen bir K sayılar kümesinden hareketle bir adımda çizilebilir sayı demek A, B ve C, K daki sayılardan sonlu sayıda toplama, çıkarma, çarpma ve (sıfırdan farklı bir sayı ile) bölme işlemleri ile elde edilebilen herhangi sayılar olmak üzere $A + B\sqrt{C}$ şeklinde olan bir sayı demektir.

- Bravo, bundan daha iyi olamazdı.
- Övgüne teşekkür, ama dikkat! Bir fikrî sıçrama yapmadık mı? Acelecilik edip Hakkı, batılla karıştırmadık mı?
- Biraz durun... Son hükmünüze kadar koordinatları K dan alınan noktalardan başlayarak bir adımda çizilebilir olan noktaların koordinatlarının K daki sayılara cebirsel olarak nasıl bağlı olduklarını tesbit ettik. Zannederim buraya kadar bir hata yok... Haa, anladım. Bulduğunuz sadece gerek bir koşul, yeter olmayabilir. Bu tipteki her sayının gerçekten çizilebilir bir noktanın koordinatları olarak görüleceğini, yani çizilebilir bir sayı olduğunu göstermedik.
- Tamam. Fakat biz kendi problemimizde bir imkansızlık ispatı yapmayı umduğumuz için, belki sadece bu gerek şart ile yetinebiliriz. İstersen yeterlilik meselesini şimdilik erteleyelim. [Bu şartın yeterli de olduğunu ispat edin.]
- Peki. Şimdi bakalım, bizim problemimizde durum ne?
- Açığı üçe bölme probleminde başlangıç sayılar kümemiz $K_0 = \{0, 1, \cos \alpha\}$. Bu sayıları dört işleme tabi tutarak bütün rasyonel sayıları ve $n, m \in \mathbb{N}$ ve $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i \in \mathbb{Q}$, $j = 0, 1, \dots, m$ için $b_j \in \mathbb{Q}$ ve payda sıfır olmamak üzere

$$\frac{a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos^2 \alpha + \dots + a_n \cos^n \alpha}{b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos^2 \alpha + \dots + b_m \cos^m \alpha}$$

şeklindeki bütün sayıları elde edebiliriz. Bu sayıların kümesini $F_0 = Q(\cos \alpha)$ ile gösterelim. K_0 kümesinden bir adımda çizilebilir bir sayı, a_1, b_1 ve c_1, F_0 'ın uygun elemanları olmak üzere $a_1 + b_1\sqrt{c_1}$ şeklinde bir sayıdır. [Neden?] $K_1 = \{0, 1, \cos \alpha, a_1 + b_1\sqrt{c_1}\}$ sayılarını dört işleme tâbi tutarak elde edeceğimiz sayılar kümesini F_1 ile gösterirsek, $F_1 = \{a + b\sqrt{c_1} | a, b \in F_0\}$ olur,

çünkü bu küme F_0 ve $a_1 + b_1\sqrt{c_1}$ sayısını içerir ve ayrıca dört işleme göre kapalıdır:

$$(a + b\sqrt{c_1}) \pm (a' + b'\sqrt{c_1}) =$$

$$(a \pm a') + (b \pm b')\sqrt{c_1}$$

$$(a + b\sqrt{c_1})(a' + b'\sqrt{c_1}) =$$

$$(aa' + bb'c_1) + (ab' + a'b)\sqrt{c_1}$$

ve $a, a', b, b' \in F_0$ ise $a \pm a', b \pm b', aa' + bb'c_1, ab' + a'b$ de F_0 a ait olacağından toplama, çıkarma ve çarpma için sorun yok. $\sqrt{c_1} \in F_0$ ise $F_1 = F_0$ olacağından $\sqrt{c_1} \notin F_0$ farzedebiliriz. Bu durumda $a', b' \in F_0$ olmak üzere $a' + b'\sqrt{c_1} \neq 0$ ise $a' - b'\sqrt{c_1}$ de sıfırdan farklı ve

$$\frac{a + b\sqrt{c_1}}{a' + b'\sqrt{c_1}} = \frac{(a + b\sqrt{c_1})(a' - b'\sqrt{c_1})}{(a')^2 - c_1(b')^2}$$

$$= \frac{aa' - bb'c_1}{(a')^2 - c_1(b')^2} + \frac{-ab' + a'b}{(a')^2 - c_1(b')^2} \sqrt{c_1}$$

ve $a, b \in F_0$ ise

$$\frac{aa' - bb'c_1}{(a')^2 - c_1(b')^2} \text{ ve } \frac{-ab' + a'b}{(a')^2 - c_1(b')^2}$$

de F_0 'a aittir. Dolayısı ile F_1 'in sıfırdan farklı elemanları ile bölme yaparak da F_1 'in dışına çıkmak, F_1 'de bulunmayan bir reel sayı elde edebilmek mümkün değil. F_1 'i $F_1 = F_0(\sqrt{c_1})$ ile göstereceğiz. Buna göre bir x reel sayısı K_1 kümesinden bir defada çizilebilir ise, F_1 'in uygun a_2, b_2, c_2 elemanları ile $x = a_2 + b_2\sqrt{c_2}$ yazılabilir, yani $x, F_2 = F_1(\sqrt{c_2}) = \{a + b\sqrt{c_2} | a, b \in F_1\}$ kümesine aittir. $F_2, K_2 = \{0, 1, \cos \alpha, a_1 + b_1\sqrt{c_1}, a_2 + b_2\sqrt{c_2}\}$ sayılarına dört işlemi tatbik ederek elde edeceğimiz sayılar kümesidir. Bu şekilde de devam edeceğiz.

- Yani α ölçülü açının sadece cetvel ve pergeli kullanılarak üç eşit parçaya ayrılabilmesi durumunda $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin $F_0 = Q(\cos \alpha)$ alt kümesinden başlayarak öyle $F_1, F_2, \dots, F_m$ alt kümeleri bulunabilir ki

- Her $i = 1, 2, \dots, m$ için F_i kümesi F_{i-1} kümesinden uygun bir $c_i \in F_{i-1}$ ile $F_i = F_{i-1}(\sqrt{c_i}) = \{a + b\sqrt{c_i} | a, b \in F_{i-1}\}$ şeklinde elde edilir.

ii) $\cos \frac{\alpha}{3}$ sayısı F_m kümesine aittir.

şartları sağlar.

Ayrıca bu alt kümelerin her biri de toplama, çıkarma, çarpma ve sıfırdan farklı elemanlarla bölme işlemlerine göre kapalıdır.

- İyi ve güzel ama, doğrusu şimdiye kadar problemin çözümü ile ilgili birşey yapmadık gibi geliyor bana. Sadece çözümü bulabileceğimizi umduğumuz bir alana, cebir alanına, problemimizin tam ve kesin bir tercümesini yapabildik. Peki, çözüm?
- Herhalde aradığımız noktanın verilen noktalarla bağlantısının ne olduğu üzerinde düşünmemiz gerekiyor.
- Yani, $\cos \alpha$ ile $\cos \frac{\alpha}{3}$ arasındaki ilişkiyi.
- Fakat bu trigonometrik bağıntılar vasıtası ile kolayca ifade edilebilir.

$$\cos(3\gamma) = 4 \cos^3 \gamma - 3 \cos \gamma$$

dır. $a = \cos \frac{\alpha}{3}$ dersek

$$4a^3 - 3a - \cos \alpha = 0$$

olmalı.

- Buna göre α açısı sadece pergel ve cetvel kullanarak üçe ayrılabilir ise öyle bir $m \geq 0$ tam sayısı ve reel sayılar kümesinin öyle $F_0, F_1, \dots, F_m$ alt kümeleri vardır ki şu şartlar sağlanır:

i) $F_0 = Q(\cos \alpha)$

ii) Her $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ için F_k kümesi F_{k-1} kümesinden, $c_k \in F_{k-1}, \sqrt{c_k} \notin F_{k-1}$ olmak üzere $F_k = F_{k-1}(\sqrt{c_k}) = \{a + b\sqrt{c_k} | a, b \in F_{k-1}\}$ şeklinde elde edilir.

iii) $4x^3 - 3x - \cos \alpha = 0$ denkleminin F_m 'de bir kökü vardır.

- Şu halde, uygun bir α için, bu koşulların sağlandığını varsaymanın bir çelişki doğurduğunu görmeliyiz.

- Niçin bir iki deneme yapmıyoruz. $\alpha = 60^\circ$ alalım.
- O zaman $F_0 = Q$ ve denklem $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ olacak. Burdan $2x = t$ dersek $t^3 - 3t - 1$ çıkıyor.
- Bu denklemin $F_0 = Q$ 'da bir kökü yok. [Neden?]
- Şimdi ne olacak? Bu denklemin köklerini bulmak mümkün olsa bile, ki ben üçüncü dereceden bir denklem genelde nasıl çözülür bilmiyorum, bu sayının istediğimiz tipte bir sayı olup olmadığını nasıl bileceğiz? Diğer taraftan F_m kümelerinin sadece ne tip olduklarını biliyoruz. Bunların ne oldukları hakkında hiçbir bilgimiz olamazken reel sayılar kümesinin F_m tipi alt kümelerinde nasıl çözüm arayacağız? Galiba yaptıklarımız bir şeye yaramadı.
- Dur bakalım, hemen yılma, azmini kırma. Bak bakalım dağarcığına, belki işe yarar birşey vardır.
- Yoruldum artık.
- Bak şimdi! Neredeyse işi pişirip kotarmışken son adımı atmanı engelleyen bu yılgınlık herhalde zirveye varmak üzere olduğumuzun bir müjdesidir, ama ona kanmaz, mücadelene devam edersen. Unutma ki her çaba, biraz da kendimizi yapma uğraşıdır. Hadi davran, $a + b\sqrt{c}$ şeklindeki sayılar hakkında neler söyleyebilirsin?
- Aklıma sadece paydası $a + b\sqrt{c}$ şeklinde olan kesirleri $a - b\sqrt{c}$ ile genişletip paydayı rasyonel yapmak geliyor.
- Ben de şunu hatırlıyorum: a, b ve c rasyonel sayılar ve $\sqrt{c}$ rasyonel değil ve $a + b\sqrt{c}$ rasyonel katsayılı bir polinomun kökü ise $a - b\sqrt{c}$ de aynı polinomun bir kökü oluyordu.
- Karmaşık sayılardaki eşlenik olma işlemine benziyor bu söylediğiniz. Reel katsayılı bir

polinomun $z = c + d\sqrt{-1}$, $c, d \in \mathbb{R}$ şeklinde bir kökü varsa z 'nin eşleniği $\bar{z} = c - d\sqrt{-1}$ de aynı polinomun bir köküdür.

- Heyecan verici bir benzerlik, fakat bunu nasıl kullanabiliriz?
- Acaba $a, b, c \in F_{m-1}$ ve $\sqrt{c} \notin F_{m-1}$ olmak üzere $a + b\sqrt{c} \in F_m$ sayısı rasyonel katsayılı bir polinomun kökü ise $a - b\sqrt{c}$ de bir kök oluyor mu?
- $a + b\sqrt{c}$ 'ye $(a + b\sqrt{c})^* = a - b\sqrt{c}$ 'yi karşılık getirme işlemi [$a + b\sqrt{c} \mapsto a - b\sqrt{c}$ bağıntısı gerçekten F_m 'den F_m 'e bir fonksiyon mu?] karmaşık sayılardaki eşlenik alma işlemine paralel ise, yani $a_1, b_1, a_2, b_2 \in F_{m-1}$ ve $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{c}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{c}$ olmak üzere

$$i) (z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*,$$

$$ii) (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \text{ ve}$$

$$iii) z_1 = z_1^* \Leftrightarrow z_i \in F_{m-1}$$

şartları gerçekleşiyorsa, istediğin oluyor, çünkü $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ katsayıları rasyonel olan bir polinom ve $a, b \in F_{m-1}$ olmak üzere $f(a + b\sqrt{c}) = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 = 0^* &= f(a + b\sqrt{c})^* \\ &= [a_0 + a_1(a + b\sqrt{c}) + \dots \\ &\quad + a_n(a + b\sqrt{c})^n]^* \\ &= a_0^* + a_1^*(a + b\sqrt{c})^* + \dots \\ &\quad + a_n^*[(a + b\sqrt{c})^*]^n \\ &= a_0 + a_1(a - b\sqrt{c}) + \dots \\ &\quad + a_n(a - b\sqrt{c})^n \\ &= f(a - b\sqrt{c}) \end{aligned}$$

olur, çünkü $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 0, 1, \dots, n$ ve $\mathbb{Q} \subseteq F_{m-1}$ dir.

- "Eşlenik" alma işleminin söylediğiniz özelliklere sahip olduğu hemen görülüyor. [Öyle mi?]
- O halde şimdi rasyonel katsayılı $t^3 - 3t - 1$ polinomunun $a + b\sqrt{c} \in F_m$ ($a, b \in F_{m-1}$, $\sqrt{c} \notin$

F_{m-1}) şeklinde bir kökü olduğunu kabul edelim.

- O zaman $(a + b\sqrt{c})^* = a - b\sqrt{c} \neq a + b\sqrt{c}$ de bir kök olacak ve dolayısı ile $(t - a - b\sqrt{c})(t - a + b\sqrt{c})$ polinomu $t^3 - 3t - 1$ polinomunu bölecek [neden?], yani $u \in F_m$ olmak üzere

$$t^3 - 3t - 1 = (t - a - b\sqrt{c})(t - a + b\sqrt{c})(t - u)$$

elde edilecek.

- Buna göre $u \in F_m$ polinomun bir kökü olduğuna göre u^* da bir kök olacak. $u \notin \{a + b\sqrt{c}, a - b\sqrt{c}\}$ olduğuna göre $u^* \notin \{a - b\sqrt{c}, a + b\sqrt{c}\}$ yani $u = u^*$ olacaktır [neden?]. Bu da $u \in F_{m-1}$ demektir. Evet!?

- Tamam! Buldum! Kanıtlandı! 60 derecelik açının sadece cetvel ve pergeli ile üçe bölünemeyeceğini gösterdik.

- Nasıl?

- F_m kümesine ait bir kök varsa, F_{m-1} 'e ait bir kökün de var olduğunu gördük. Fakat şimdi aynı düşünceleri F_{m-1} 'e uygulayarak F_{m-1} 'e ait bir kök varsa, F_{m-2} 'ye ait bir kökün de olduğuna hükmedebiliriz. Böylece birer birer aşağıya inerek $\mathbb{Q} = F_0$ 'a ait bir kökün bulunması gerektiğini çıkarırız. Fakat polinomumuzun rasyonel kökü yok!

- Tamam, keşfetmen gerekeni keşfettin. Böylece söyleyişi noktalayabilecek konuma da geldik. Ama tümüyle bitirmek mümkün değil. Şu ya da bu biçimde yine ele alacağız. Şimdilik Allah'a şükürler olsun.

"Birşeyi öğrenmek demek onu yeniden keşfetmek demektir."

Callit Art

İZOMETRİLER

Hüseyin Demir

Bu yazımızda, pek çok çizim probleminin çözümünde ve bazı teoremlerin ispatında başarılı uygulamaları olan ilginç bazı geometrik dönüşümleri tanıtmak ve incelemek istiyoruz.

1. Tanım ve Özellikler

Uzaklıkları koruyan, noktalardan noktalara bir dönüşüme *izometri* deniliyor. Bu dönüşümleri f, g harfleriyle göstereceğiz.

Bir P noktası bir f izometrisi ile bir P' noktasına dönüştürülürse,

$$f: P \rightarrow P' \text{ ya da } f(P) = P'$$

yazılır ve P' ye P nin f altındaki *görüntüsü* denir. Eğer ayrıca $f(Q) = Q'$ ise f nin, uzaklıkları koruması

$$|P'Q'| = |PQ| \quad (1)$$

anlamına gelir. Daha açık söyleyecek olursak, iki nokta arasındaki uzaklık, tanım gereği görüntüleri arasındaki uzaklığa eşittir.

Teorem: Bir izometri, bir doğru parçasını buna eş olan bir doğru parçasına dönüştürür.

Gerçekten, f bir izometri, $[AB]$ bir doğru parçası ve $P \in [AB]$ olsun. O zaman $|AP| + |PB| = |AB|$ olur. A, P, B noktalarının görüntüleri sırasıyla A', P', B' ise (1) den $|A'P'| + |P'B'| = |A'B'|$ olup $P' \in [A'B']$ olduğunu gösterir ve ayrıca $|A'B'| = |AB|$ yi verir.

Bu teoremden hemen şu sonuç çıkar:

Sonuç: Bir f izometrisi

- (a) bir doğruyu bir doğruya
- (b) bir ışını bir ışına
- (c) bir üçgeni buna eş olan bir üçgene
- (d) bir açıyı buna eş olan bir açığa
- (e) bir çemberi buna eş olan bir çembere dönüştürür.

İlk dört şık, teoremin doğrudan sonuçları olup son şık şöyle gösterilir: Çemberin merkezi A , üzerindeki değişken bir nokta P ve bunların görüntüleri A', P' ise $|A'P'| = |AP|$ sabit olup P' nün geometrik yeri, A' merkez olmak üzere $|A'P'| = |AP|$ yarıçaplı bir çemberdir.

Etkisiz ve Etkili İzometriler

Evrensel U kümesinin (düzlemin ya da uzayın) her P noktasını aynı P noktasına dönüştüren izometriye *etkisiz izometri* der ve bu izometriyi e harfiyle gösteririz.

$$e(P) = P, \quad \forall P \in U.$$

e den farklı izometrilere de *etkili izometri* deriz. Böyle bir izometri altında bazı noktalar başka noktalara dönüşür.

Değişmez Şekiller

Bir izometri altında kendisine dönüşen bir şekle izometrinin *değişmez şekil*i denir. Örneğin etkisiz e izometrisi altında, her şekil değişmez bir şekildir. Başka örnekleri §2'de göreceğiz.

İzometrilerin Tersi

Bir f izometrisi altında $f(P) = P', \forall P \in U$ olduğunda bir g izometrisi için $g(P') = P$ ise g ye f nin *tersi* denir ve g izometrisi f^{-1} olarak yazılır. Buna göre

$$f(P) = P' \iff f^{-1}(P') = P, \quad \forall P \in U$$

olur.

2. Düzlemde İzometriler

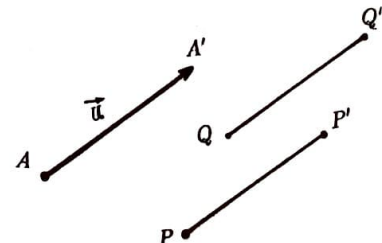
Düzlemde dört tür izometri yer almaktadır. Bunlar da öteleme, dönme, simetri ve yansıma diyeceğimiz izometrilere dir. Uzaydaki izometrilere konumuzun dışında bırakıyoruz.

Öteleme

Düzlemde $\vec{u} = \vec{AA'}$ gibi bir vektör verildiğinde, bir P noktasını

$$P\vec{P'} = A\vec{A'}$$

vektörel eşitliği ile tanımlı P' noktasına dönüştüren dönüşüme *öteleme* ve $\vec{u}$ vektörüne *öteleme vektörü* deriz. Her vektör bir öteleme tanımlar.



Buna göre

$$\vec{u}(P) = P'$$

yazarız. Ayrıca

$$\vec{u}(Q) = Q'$$

ise $PP'Q'Q$ bir paralelkenar (ya da yoz paralelkenar) olup $|P'Q'| = |PQ|$ çıkar. Bu da ötelemelerin birer izometri olduğunu gösterir.

$\vec{u} = 0$ ötelemesinin etkisiz, ötekilerin ise etkili olacağı açıktır.

Etkili bir $\vec{u}$ ötelemesi altında değişmez şekiller ancak $\vec{u}$ yu taşıyan doğru ile $\vec{u}$ ya paralel olan doğrulardır.

$\vec{u}$ ötelemesinin tersi ise $-\vec{u}$ ötelemesidir.

Dönme

O sabit bir nokta ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise düzlemin her P noktasını

$$(i) |OP'| = |OP|$$

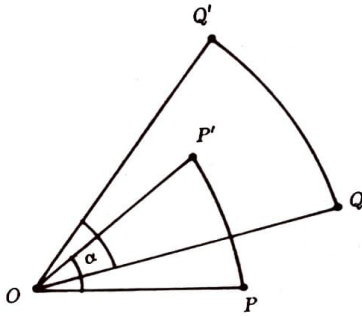
$$(ii) \angle POP' = \alpha$$

olarak tanımlı P' noktasına dönüştüren dönüşüme *dönme*, O noktasına *dönme merkezi*, α ya da *dönme açısı* denir.

Bu dönmeyi (O, α) simgesiyle gösterir ve

$$(O, \alpha)(P) = P'$$

yazarız.



Ayrıca $(O, \alpha)(Q) = Q'$ ise $\triangle POQ \cong \triangle P'OQ'$ eşliği nedeniyle $|P'Q'| = |PQ|$ olup dönmeler birer izometridir.

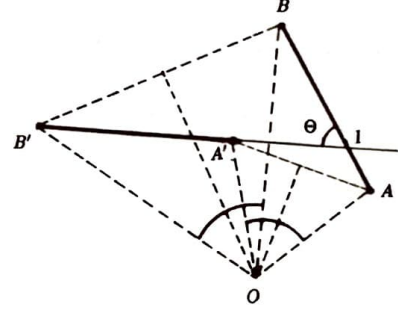
$$(O, \alpha)^{-1} = (O, -\alpha) \text{ olacağı açıktır.}$$

$k \in \mathbb{R}$ ise $(O, 2k\pi)$ ve özellikle $(O, 0)$ dönmesi etkisizdir.

Etkili bir (O, α) dönmesinin değişmez şekilleri ancak O merkezli çemberlerdir. ($\alpha \neq \pi$)

Şimdi dönme ile ilgili şu çizim problemini ele alalım:

Problem: $[AB], [A'B']$ gibi birbirine eş ve paralel olmayan iki doğru parçası verildiğinde, $[AB]$ yi $[A'B']$ ye gönderen (O, Θ) dönmesini belirlemek.



A ve B noktaları dönme ile karşılıklı olarak A' ve B' ye gönderildiğinden O dönme merkezi $[AA']$ ve $[BB']$ doğru parçalarının orta dikmeleri üzerinde bulunmalıdır. Öyle ise bunların arakesiti O merkezini verir.

Dönmenin gereği olarak, dönmenin Θ açısı da

$$\Theta = \angle AOA' = \angle BOB'$$

eşitlikleri ile belirlidir.

Öte yandan $AB \cap A'B' = I$ ise $[AB] \rightarrow [A'B']$ nedeniyle

$$\Theta = \angle(AB, A'B') = \angle BIB'$$

elde edilir. Bu ise $AIA'O$ ve $B'BIO$ dörtgenlerinin birer kirisler dörtgeni olduğunu gösterir. Bu da O merkezi için şu çizimi verir: O merkezi $(AIA'), (BIB')$ çemberlerinin öteki arakesit noktasıdır.

Simetri (Noktaya Göre Simetri)

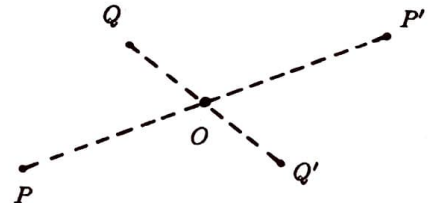
O gibi sabit bir nokta verildiğinde, bir P noktasını O ya göre P' simetriğine gönderen dönüşüme *simetri* denir.

Bu simetriyi O harfiyle gösterip $O(P) = P'$ yazarız.

O simetrisi (O, π) dönmesi olup simetriler birer izometridir.

$$O(P) = P' \iff O(P') = P$$

olup $O^{-1} = O$ elde edilir.



Soru: O simetrisi hangi doğru ve çemberleri değişmez bırakır?

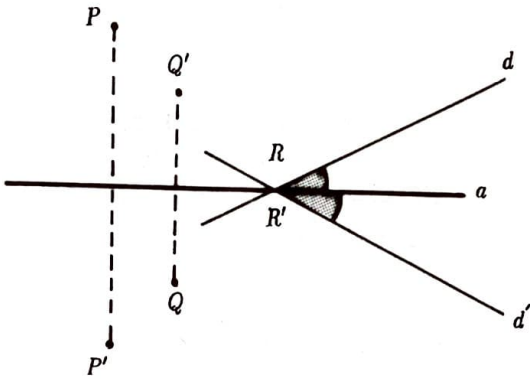
Yansıma (Doğruya Göre Simetri)

a gibi sabit bir doğru verildiğinde her P noktasını a ya göre P' simetrisine gönderen dönüşüme *yansıma* denir.

Bu yansımayı a harfiyle gösterip *yansıma eksenini* der ve

$$a(P) = P'$$

yazarız.



a^{-1} ters yansımasının yine a yansıması olduğunu görüyor ve yansımaların etkili olduklarını anlıyoruz.

Soru: Yansıma hangi nokta, doğru ve çemberleri değişmez bırakır?

3. Uygulamalar

Şimdi bazı çizim problemlerinin çözümünde ve bazı teoremlerin ispatında, öğrenmiş olduğumuz öteleme, dönme, simetri ve yansıma izometrilерinin herbirinin uygulamalarını ayrı ayrı ele alacağız.

Bu işi yapmayı denerken hangi izometrinin kullanılacağını kestirmek sezgiye dayanan bir iştir. Bununla birlikte, bazı sade problemlerin çözümünde her zaman geçerli olmamakla birlikte şu kuralı uyguluyoruz:

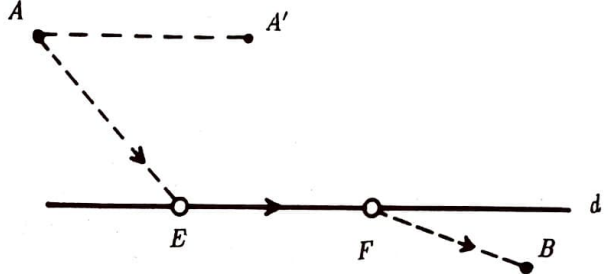
Kural 1: Eğer bir problemde

- (a) doğrultusu ve uzunluğu verilmiş bir doğru parçası söz konusu olursa, öteleme
- (b) tepesi ve tepe açısı bilinen ikizkenar bir üçgen söz konusu olursa, dönme
- (c) orta noktası verilen doğru parçası söz konusu olduğunda, simetri
- (d) açıortayı ile birlikte bir açı söz konusu ise, yansıma kullanılabilir.

Uygulama 1. Aşağıda düz bir d yolu ile ayrılmış A ve B gibi iki ev (nokta) verilmiştir. A dan kalkan bir kişi yola varıp uzunluğu belli $[EF]$ yo-

lunu yürüdükten sonra B ye varacaktır. En kısa yolu bulunuz.

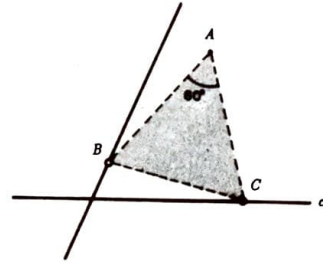
Çözümü okumadan düşünün. Kuralın hangi şıkkı geçerli?



Kural 1a geçerli.

A yı EF ötelemesiyle A' ye götürdüğümüzde yolu-muz $[AEFB]$ yerine $[AA'FB]$ olur. Burada $[AA']$ sabit olup $[A'FB]$ yolu en kısa olmalıdır. O halde $F = A'B \cap d$ olarak belirlenir. Bu da E yi verir.

Uygulama 2. Şekilde, b ve c gibi iki doğru ve bir A noktası verilmiştir.



$B \in b, C \in c$ olmak üzere eşkenar ABC üçgenini çizmek.

Kural 1b geçerli.

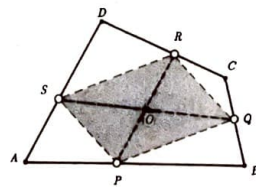
$(A, 60^\circ)$ dönmesini $\{b, B\}$ şekline uyguladığımızda $\{b', B'\}$ şekli elde edilir. $B' = C$ olması gerekir ve $C = b' \cap c$ olarak bulunur. Bu da B yi verir.

Uygulama 3. Genel bir $ABCD$ dörtgeni içine, O merkezi verilen $PQRS$ paralelkenarını çizmek.

Kural 1c geçerli.

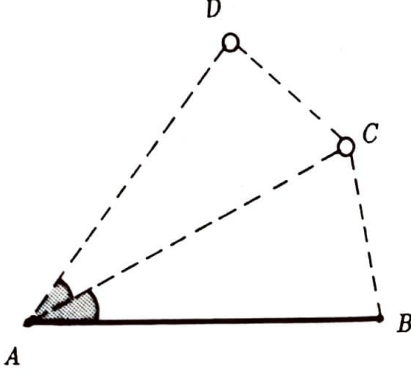
O noktası $[PR]$ nin ortası olup $\{CD, R\}$ şekline O simetrisi uygulandığında $\{C'D', R'\}$ görüntüsü elde edilir. Burada $R' = P = C'D' \cap AB$ olarak belirlenir.

Benzer olarak Q elde edilir.



Uygulama 4. $ABCD : a, b, c, d \nless BAC = \nless CAD$.

Burada, kenar uzunlukları verilen ve bir köşegeni bir açısının açıortayı olan bir dörtgenin çizimi söz konusu.



Kural 1d geçerli.

DAC üçgenine AC yansıması uygulanırsa D nin D' görüntüsü AB üzerinde bulunur ve $CD'B$ üçgeni $a - d, b, c$ kenarlarıyla belirlidir. D' nün AC ye göre simetriği de D yi verir.

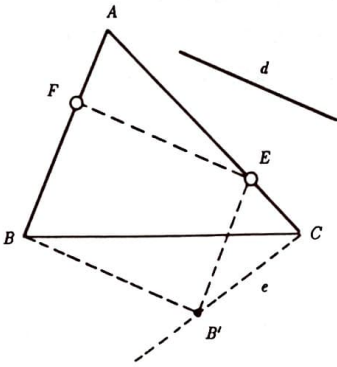
Şimdi Kural 1'in geçerli olmadığı şu uygulamayı ele alalım.

Uygulama 5. Bir ABC üçgeni ve bir d doğrusu verildiğinde $[AC], [AB]$ üzerinde

(i) $EF // d$

(ii) $|BF| = 2|CE|$

olmak üzere E ve F noktalarını çizmek.



Kural 1'in geçerli olmaması halinde, şu kuralı uygulayız:

Kural 2 Uygun bir izometri ile şeklin bazı elemanları başka elemanların yanına taşınır. Elde edilen yeni şekil incelenip çözüme götürecek bazı bağıntılar elde edilir.

Bu kuralı uygulamak görüş ve sezgiye dayanır.

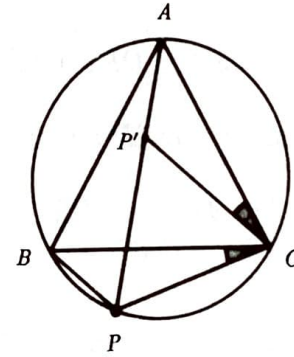
Şimdi Kural 2'yi uygulayarak Uygulama 5'in çözümünü elde etmeğe çalışalım.

$[BF]$ yi bir öteleme ile $[B'E]$ doğru parçasına gönderebiliriz. Ortaya $EB'C$ gibi E açısı sabit ve iki kenar uzunluğu orantılı bir üçgen çıkar. EF doğrusu d ye paralel olarak değiştiğinde $B'CE$

açısı sabit kalıp B' nün geometri yeri C den geçen bir e doğrusu olur. Probleme cevap verecek B' noktası, e yi B den d ye paralel olan doğru ile kesiştirmekle bulunur. B' bulununca önce E , sonra F elde edilir.

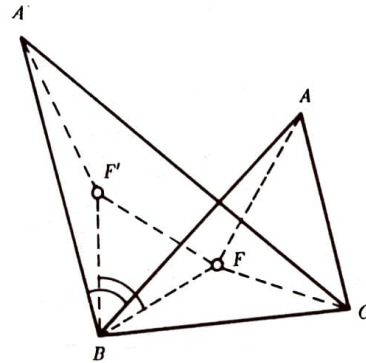
Uygulama 6. Teorem: Bir çember içine bir ABC eşkenar üçgeni çizildiğinde A karşısındaki $\widehat{BC}$ yayı üzerinde alınan bir P noktasının B ve C den uzaklıkları toplamı, A dan uzaklığına eşittir.

Kural 1 işe yaramıyor. Kural 2 ile CBP üçgenine $(C, -60^\circ)$ dönmesi uygulanıp CAP' üçgenini elde edelim. Böylece $[PB]$ doğru parçası $[PA]$ üzerine taşınmış olur. (işaretili eş açılardan)



Geriye $|PP'| = |PC|$ olduğunu göstermek kalır. Bu da $P'PC$ nin eşkenar olması sonucudur.

Uygulama 7. Fermat Problemi: Dar açılı bir ABC üçgeninin içinde, köşelerden uzaklıkları toplamı en küçük olan F noktasını bulmak.



$|PA| + |PB| + |PC|$ toplamını kesik bir çizginin uzunluğuna çevirmek üzere ABF üçgenine $(B, 60^\circ)$ dönmesini uygulayıp $A'B'F'$ görüntüsünü elde edelim. BFF' nün eşkenar üçgen olması nedeniyle kırık çizgimiz $[A'F'FC]$ olur. Bunun ise en kısa uzunluğu $|A'C|$ dir.

Öyle ise F noktası $A'C$ üzerinde bulunmalıdır. Bu da

$\nless BFC = 180^\circ - \nless BFF' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ verir. O halde F noktası $[BC]$ yi 120° altında gö-

rür. Benzer olarak öteki iki kenarı da 120° altında görür. Bu noktayı belirlemek için şu çizimi veriyoruz:

1. ABC nin kenarları üzerine dıştan XBC, YCA, ZAB eşkenar üçgenleri çizilir.
2. AX, BY, CZ doğruları F de kesişir.

Uygulama 8. Teorem. Dar açılı bir üçgende iç üçgenlerden çevresi en küçük olanı ortik üçgenidir.

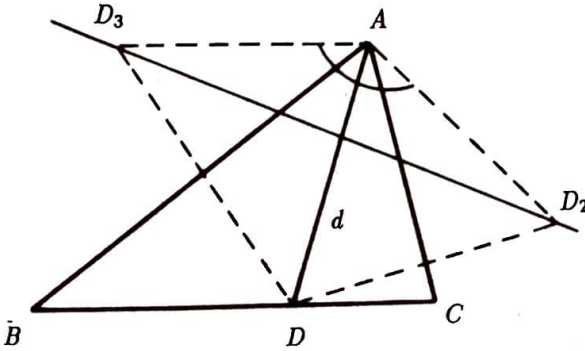
Bir ABC üçgeninin ortik üçgeni, köşeleri, yüksekliklerin kenarlar üzerindeki ayakları olan üçgendir.

Dar açılı bir ABC nin DEF ortik üçgeninin bilinen bazı özellikleri şunlardır:

1. ABC nin yükseklikleri DEF nin iç açıortaylarıdır,
2. ABC nin kenarları DEF nin dış açıortaylarıdır,
3. $ABC \sim AEF \sim BFD \sim CDE$,
4. $\angle BDF = \angle CDE = \angle BAC$.

İspat: Dar açılı üçgen ABC ve bir iç üçgeni DEF olsun. D yi sabit bırakıp en küçük çevre veren E ve F noktasını bulalım.

Uygun bir izometri kullanarak çevreyi kırık bir çizgiye dönüştürelim. D nin CA ve BA yansımalarına göre D_2, D_3 simetrilerini aldığımızda kırık çizgimiz $[D_2EFD_3]$ olur.



D_2, D_3 sabit olup kırık çizginin en kısa uzunluğu $|D_2D_3|$ olur. $|AD| = d$ ise $|AD_2| = |AD_3| = d$ ve $\angle D_2AD_3 = 2A$ olup AD_2D_3 ikizkenar üçgendir ve

$$|D_2D_3| = 2 d \sin A$$

bulunur. Burada $\sin A$ sabit olup en küçük çevrelerin $d = |AD_0| = h_a$ olmalıdır, yani $[AD]$, ABC nin $[AD_0]$ yüksekliği olmalıdır.

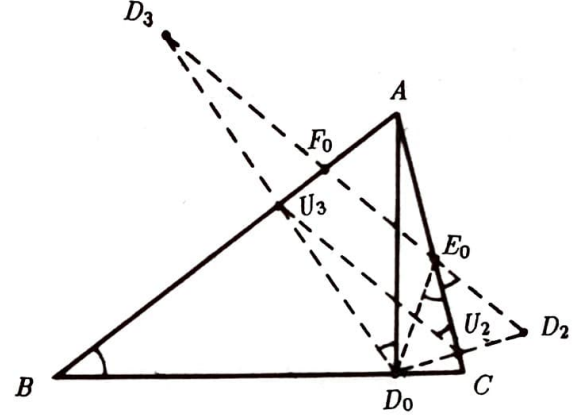
Bu durumda D_2D_3 ün AC ve AB yi kestikleri

E_0 ve F_0 noktalarının öteki yüksekliklerin ayakları olduğunu gösterelim.

Bunun için $\angle CD_0E_0 = A$ ya da $\angle D_0E_0C = B$ olduğunu göstermek yeter.

Gerçekten $[D_0D_2], [D_0D_3]$ ün ortaları U_2, U_3 ise

$$\begin{aligned} \angle CE_0D_0 &= \angle CE_0B_2 = \angle CE_0B_2 = \angle F_0E_0A \\ &= \angle U_3U_2E_0 = \angle U_3D_0A = \angle D_0BU_3 = B \end{aligned}$$



Aşağıdaki iki uygulamayı kendiniz çözünüz.

Uygulama 9. Eşitkenar bir ABC üçgeninin içine, D tepesi $[BC]$ üzerinde $[EF]$ tabanı BC ye paralel olan DEF üçgeni çizin.

Uygulama 10. Bir d doğrusu ile bunun aynı tarafında iki çember verildiğinde d ya paralel olup çemberlerden eş kirişler ayıran bir doğru çizin.

Kaynak

PETERSEN, J., *Geometri Problemleri için Metotlar ve Teoriler* (Çeviren: F. Gürsan), Şirketi Mürettibiye Basımevi, İst., 1943.

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$1! + 4! + 5! = 145$$

$$4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 40585$$

Bu özellikte başka sayılar bulabilir misiniz?

DOĞRUSAL İNDİRGEMELİ DİZİLER VE SIÇRAYAN KURBAĞALAR

Albert Erkip

Önce geçen sayıdaki problemleri yanıtlamakla işe başlayalım.

- (1) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ dizisini bulduğumuz yoldan çözmeye çalışırsak $r^2 - 2r + 1 = 0$ denklemini çıkar. Kökler $r_1 = r_2 = 1$. $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ çözümünde C, D katsayılarını bulalım. Başlangıç değerlerinden:

$$C + D = 1$$

$$C + D = 3$$

İşler karıştı: Bir çelişki bulduk, demek ki geçen sayıdaki yol bu kez yürümedi. Başka bir yol deneyelim. Sırayla terimleri indirgeme bağıntısından hesaplırsak, diziyi 1, 3, 5, 7, 9, ... olarak görüyoruz. Bu bir aritmetik dizi; genel terimi de $x_n = 2n - 1$. (Bunu kanıtlayabilir misiniz?)

- (2) $x_{n+2} = (x_{n+1})^3 / (x_n)^2$ bağıntısı önce gördüklerimize benzemiyor. Ama bunun logaritmasını alıp $y_n = \log x_n$ diye yeni bir dizi tanımlarsak, y_n için $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$ buluruz. $y_1 = \log x_1 = \log 1 = 0$, $y_2 = \log x_2 = \log 10 = 1$ değerleri de var. O halde $y_n = 2^{n-1} - 1$, aradığımız dizi ise $x_n = 10^{(2^n - 1)}$.

- (3) Fibonacci dizisi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Bu terimleri üçe bölüp kalanları sıralayalım: kalanlar 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, ... Görülen, kalanlar dizisinin 8 terimde bir tekrarladığı. Bunu nasıl kanıtlayabiliriz? x_n terimini üçe bölünce kalan tam sayıya r_n diyelim. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ olduğundan r_{n+2} ya $r_{n+1} + r_n$ ye ya da bu sayının üçle bölündüğünde kalanına eşit. Modüler aritmetik işimizi kolaylaştırabilir. Çünkü bu son dediğimiz

olarak ifade edilir. Yani kalanlar da bir tür Fibonacci dizisi. Hesapladığımız terimlerden $r_1 = r_2 = 1$ ve $r_9 = r_{10} = 1$. O halde $r_{11} = r_3$, $r_{12} = r_4, \dots, r_{n+8} = r_n$ olacak.

Şimdi r_n lere bir kez daha bakalım. $r_4 = r_8 = 0$. O halde bunlardan 8 sonraki 12, 16, 20, 24, ... terimleri hep sıfır. Bu da Fibonacci dizisinde 4, 8, 12, ..., $4n$ -inci terimlerin üçün katı olduklarını kanıtlıyor.

Beşin katı olan terimleri bulmayı da size bırakalım.

- (4) Bir sayının son rakamı, sayıyı onla böldüğümüzde elde ettiğimiz kalandır. Fibonacci dizisindeki terimlerin son rakamlarına r_n diyelim. 3. problemdeki gibi r_n için $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n \pmod{10}$ bağıntısı vardır ve bu dizinin kendini bir yerden sonra tekrarlaması için $r_m = r_{m+k}$, $r_{m+1} = r_{m+k+1}$ olması gerekir. Bu durumda indirgeme bağıntısından dizinin ilk m terimden sonra kendini k terimde bir yinelediğini kanıtlayabiliriz.

O halde r_n 'lerin tekrarlanıp tekrarlanmadığını anlamak için sabırla dizinin terimlerini yazıp ardışık (r_m, r_{m+1}) çiftinin tekrarlanıp tekrarlanmadığına bakmak gerekiyor. Yanlış yapmadımsa (r_{60}, r_{61}) çifti $(1, 1)$ yani (r_1, r_2) . Demek ki dizi 60 terimde bir kendini tekrarlıyor.

Aslında tekrarlama olduğunu göstermenin daha zahmetsiz bir yolu da var. O da şu: (r_m, r_{m+1}) çiftlerinin alabilecekleri tüm değerler $(0, 0), (0, 1), (1, 0), \dots, (9, 9)$. Bu da tam 100 farklı değer ediyor. Biz dizinin ilk 101 ardışık çifti $(r_1, r_2), (r_2, r_3), \dots, (r_{102}, r_{103})$ 'ü alırsak bunlardan en az ikisinin birbirine eşit olması gerek. Yani Fibonacci dizisinin son rakamları bir yerden sonra kendilerini tekrarlamalı.

$$r_{n+2} = r_{n+1} + r_n \pmod{3}$$

Bu ikinci verdiğimiz kanıt matematikte “çekmece ilkesi” denen bir ilkeye dayanıyor. Elimizde k tane çekmece, içlerinde de en az $k + 1$ çorap varsa, en az bir çekmecede en azından iki çorap olmalıdır. Bu basit görünen ilke ile çok sayıda matematik problemi kolayca çözülebiliyor. Bir noktaya dikkat! Çorapların hangi çekmecede olduğu hakkında bu ilke hiç birşey söylemiyor. Biz de ikinci kanıtımızda tekrar olması gerektiğini bulduk, ama hangi terimde olacak, bunu ancak başka yoldan bulabiliriz.

- (5) Para konusunda dikkat etmeli. A bankasına bakalım. Önce ücretini kesip sonra faiz vermesi işimize gelmiyor çünkü bu durumda kestikleri 1 milyonun faizini alamıyoruz. O halde öbür yolu tercih edeceğiz. Bankaya p_0 lira yatırdık, bir yıl sonunda $0.5p_0$ faiz aldık, 1 milyon kesildi, toplam para $p_1 = p_0 + 0.5p_0 - 1 = 1.5p_0 - 1$ oldu. Milyonları yer tutmasın diye yazmadık. n -inci yıl sonundaki toplam parayı p_n ile gösterirsek, aynı yoldan $p_{n+1} = 1.5p_n - 1$ bağıntısı çıkıyor. Geçen sayıda gördüğümüz gibi bunu çözebilmek için önce n yerine $n + 1$ koyup sonra taraf tarafa çıkarıyoruz ve $p_{n+2} = 2.5p_{n+1} - 1.5p_n$ indirgeme bağıntısını buluyoruz. Başlangıç değerleri p_0 ve $p_1 = 1.5p_0 - 1$ olduğundan çözüm:

$$p_n = 2 + (p_0 - 2)(1.5)^n.$$

B bankasında işler daha kolay, n -inci yıl sonunda biriken toplam paraya q_n dersek %45 faiz aldığımızdan $q_{n+1} = 1.45q_n$. Başta p_0 lira yatırdık, o halde $q_n = p_0(1.45)^n$.

Şimdi iki bankayı kıyaslayalım. p_0 miktarı 2 milyondan azsa A kötü, çünkü paramız artmak bir yana azalıyor, bir süre sonra da borçlu çıkacağız. p_0 , 2 milyondan fazlaysa belki ilk yıllarda B daha çok gelir getirebilir, ama uzun vadede $(1.5)^n$ dizisi $(1.45)^n$ 'den daha hızlı arttığından tercih A olmalı.

- (6) Kırık basamağı bir kenara bırakıp kurbağanın herhangi bir anda n -inci basamağa gelme olasılığına p_n diyelim. Kurbağa başta birinci basamakta olduğundan $p_1 = 1$

dir. İkinci basamağa kurbağa ancak ilk seferde tek basamaklık bir sıçrayış yaparak erişebilir, bu da $1/2$ olasılıkla olur. Yani $p_2 = 1/2$. Üçüncüde işler zorlaşıyor. Onun yerine p_{n+2} ye bakalım. $(n + 2)$ -nci basamağa kurbağa ya $(n + 1)$ -inciden tek basamak sıçrayarak ya da n -inciden çift basamak sıçrayarak gelebilir. Bu son iki olayın da olasılığı $1/2$. O halde

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n.$$

Bu indirgemeli dizinin çözümü

$$p_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right].$$

38-inci basamağa gelme olasılığı ise

$$p_{38} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{38}} \right)$$

bu da $\frac{2}{3}$ ten biraz küçük.

Öte yandan 38-inci basamağa basmadan 75-inciye varmak için kurbağa önce 37-nciye gelmeli (bunun olasılığı p_{37}) sonra çift sıçramalı (bunun olasılığı da $1/2$) ve son olarak da 39-uncudan 75-inciye gelmeli. Bu son iş için $75 - 39 = 36$ basamaklık bir yol katedmesi lazım ki, bu da birinciden 37-nciye gitmekle eşdeğer, olasılığı p_{37} . Birleştirirsek, aradığımız olasılık

$$p_{37} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_{37} = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2^{37}} \right)^2.$$

- (7) n -inci yıl başındaki G sayısına g_n , D sayısına d_n diyelim. Başlangıçta tek bir G var, yani $g_0 = 1$, $d_0 = 0$. Her yıl bir G den bir G ve bir D , bir D den ise bir G ve iki D oluşuyor. Yani

$$g_{n+1} = g_n + d_n$$

$$d_{n+1} = g_n + 2d_n$$

Bu bir indirgeme bağıntısı gibi ama iki denklem ve iki bilinmeyen var. Nasıl çözeceğimizi kara kara düşünmek yerine birkaç terim hesaplayalım:

$$g_1 = 1, d_1 = 1; \quad g_2 = 2, d_2 = 3;$$

$$g_3 = 5, d_3 = 8; \quad g_4 = 13, d_4 = 21.$$

Bu Fibonacci dizisi. Yani tahminimiz x_n Fibonacci dizisi olmak üzere $g_n = x_{2n-1}$, $d_n = x_{2n}$. Gerçekten de bunu tümevarımla kanıtlamak zor değil. Bunu size bırakıp problemi tamamlayalım. Aradığımız d_n/g_n oranı. Fibonacci dizisi için

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

olduğunu bulmuştuk. O halde

$$\frac{d_n}{g_n} = \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1}}$$

$2n-1$ tek bir sayı olduğundan paydadaki $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1}$ terimi negatif, paydaki ise pozitif. Bir kesirin payını büyütüp paydasını küçültürsek kesir büyür. Yani:

$$\frac{d_n}{g_n} < \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$, halbuki $5/3 = 1.666\dots$, daha büyük. Demek ki d_n/g_n hep $5/3$ ten ufak kalıyor.

Geçen sayıdaki problemlerin çözümlerine baktık. Şimdi de indirgemeli dizilerle ilgili bir-iki noktaya daha değinelim:

İlki birinci problemle ilgili. Yöntemimiz orada işlemedi. Nedeni de tahmin ettiğiniz gibi $r_1 = r_2$ olması. Genelde bakarsak iki durum söz konusu: köklerin farklı olduğu durumda geçen sayıda kullandığımız yöntem işliyor. Kökler tekrarlanıyorsa, yani çok katlı kök varsa biraz değişiklik yapmak gerekiyor. $r_1 = r_2 = \dots = r_p$ ise o zaman çözümdeki $r_1^n, r_2^n, \dots, r_p^n$ terimleri yerine $r_1^n, nr_1^n, n^2r_1^n, \dots, n^{p-1}r_1^n$ terimlerini almak gerekiyor. Bu dediklerimizin kanıtı burada vermek için fazla uzun ama geçen sayıda değindiğimiz "İndirgemeli Diziler" adlı kitapta var.

İkinci nokta son problemle ilgili. Burada tek bir indirgeme bağıntısı yerine iki bilinmeyenli iki indirgeme bağıntısı bulmuştuk.

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= g_n + d_n \\ d_{n+1} &= g_n + 2d_n \end{aligned} \quad (*)$$

Bu tür bir sistemi çözmek için çeşitli yollar var. Örneğin matrisleri kullanarak bir yöntem bulmak mümkün, daha fazla ipucu vermeden bunu meraklılara bırakalım. Sistemleri çözmenin en kısa olmasa da kolay bir yolu bilinmeyenlerden birini yoketmek. (*) sisteminde ilk denklemden d_n 'yi çekelim: $d_n = g_{n+1} - g_n$. n yerine $n+1$ alırsak $d_{n+1} = g_{n+2} - g_{n+1}$. Bu iki değeri (*) daki ikinci denklemden yerine koyarsak:

$$g_{n+2} - g_{n+1} = g_n + 2(g_{n+1} - g_n)$$

Toparlarsak $g_{n+2} = 3g_{n+1} - g_n$. Buradan önce g_n 'yi çözer sonra da ilk denklemden yerine koyup d_n 'yi buluruz. Yedinci problemi bir de bu yolla çözümler!

Doğrusal indirgemeli dizilerle daha çok şey yapılabilir. Konunun ana hatlarını, temel yöntemleri öğrendiniz. Artık Olimpiyata hazır olmanız lazım.

Gelelim sıçrayan kurbağalara. Altıncı problemdeki kurbağaların benzerleri Olimpiyat hazırlık çalışmalarımızda sık sık yer aldı. Büyük Olimpik kurbağa ise 1979'da Londra'da sıçırıyordu. 1979 Olimpiyatı'nın altıncı problemi şu:

Düzgün bir sekizgenin karşı iki köşesi A ve E olsun. Bir kurbağa A köşesinden sıçramaya başlıyor. E dışındaki her köşeden kurbağa bir komşu köşeye sıçrayabiliyor. E köşesine gelince kurbağa artık sıçramıyor, orada kalıyor. Kurbağanın A 'dan E 'ye tam n sıçrayışta gidebileceği değişik yolların sayısına a_n diyelim. $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$ olmak üzere $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$a_{2n-1} = 0 \quad \text{ve} \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$$

olduğunu kanıtlayınız.

İyi şanslar!

SORULAR

İlk sayımızdaki alıştırma ve yarışma sorularına ait yanıtlar Sayı 3'te yayınlanacaktır. Bu nedenle Sayı 1'e ait çözümlerinizin 1 Mayıs 1991 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir. Bu sayıdaki problemleri çözmeniz için 1 Ağustos 1991 tarihine kadar süreniz bulunmaktadır.

Başarılar dileriz...

ALİŞTIRMA SORULARI

A6. P. Fermat (1601-1665) tarafından verilen

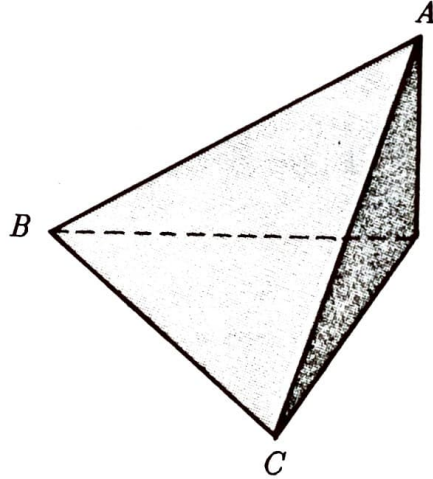
$$\left[\frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3} \right]^3 - \left[\frac{a(2b^3 - a^3)}{a^3 + b^3} \right]^3 = a^3 - b^3$$

özdeşliğini ispatlayınız.

A7. $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-2} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

A8. Bir kenarına ait h_a yüksekliği, n_a açıortayı ve v_a kenarortayı verilen bir üçgeni yalnızca cetvel ve pergelle çiziniz.

A9. $ABCD$ bir dikdörtzyüzlü
(yani $DB \perp DC, DC \perp DA, DA \perp DB$) ise
 ABC üçgeninin d alanını DBC, DCA, DAB
üçgenlerinin a, b, c alanları türünden bulunuz.



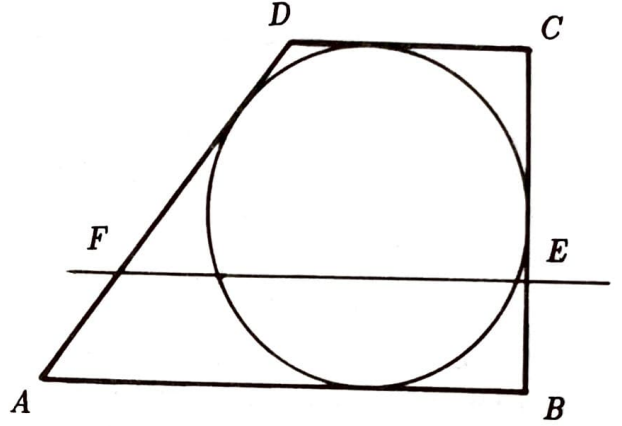
A10. $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = ?$

NOT : Alıştırma ve yarışma sorularının çözümlerinin öğretmenlerce öğrencilere verilmemesi özellikle rica olunur.

DÜZELTME: Sayı 1'deki Y1. yarışma probleminde yer alan $\sqrt{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}}$ ifadesinin doğru şekli $\sqrt{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}}$ olacaktır. Düzeltir, özür dileriz.

YARIŞMA SORULARI

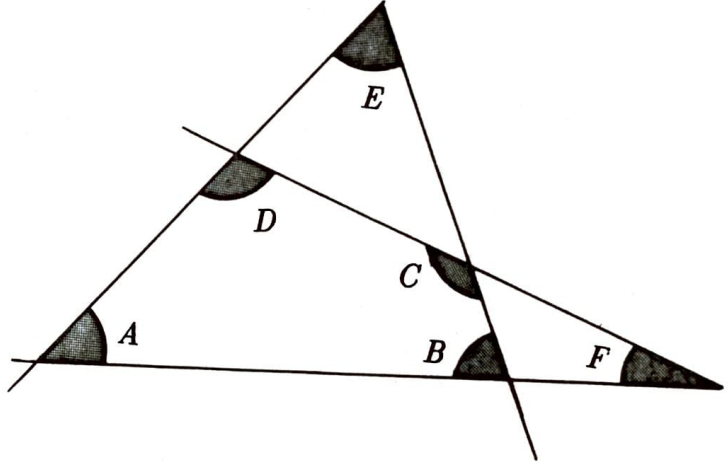
Y6. Bir teğetler dik yamuğu tabanlara paralel bir doğru ile kesiltilerek çevre uzunlukları eşit $ABEF, FECD$ yamukları elde edilmiştir. $|EF|$ uzunluğunun $ABCD$ nin kenarlarından birine eşit olduğunu gösteriniz.



Y7. Yandaki tamdörtgende (genel durumlu dört doğrunun oluşturduğu şekilde) belirtilen açılar arasında

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{D}{2} = \cos \frac{E}{2} \cos \frac{F}{2}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu gösteriniz.



Y8. a, b, c sıfırdan farklı gerçel sayılar olduğuna göre

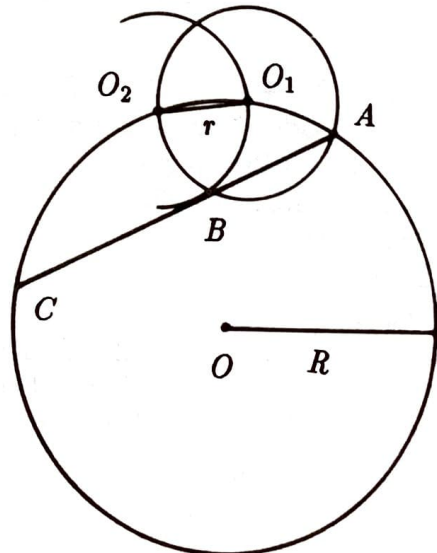
$$\left(\frac{b}{x} + 1 + \frac{x}{c}\right)^{-1} + \left(\frac{c}{x} + 1 + \frac{x}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{a}{x} + 1 + \frac{x}{b}\right)^{-1} = 1$$

denklemini çözünüz.

Y9. $t = -1 + \sqrt{2}$ olduğuna göre

$$\int_{1/t}^t \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^t + 1)}$$

integralinin değeri nedir?



Y10. Merkezi O ve yarıçapı R olan bir çemberin üzerinde bir O_1 noktası alınıp çizilen (O_1, r) çemberi (O, R) yi A ve O_2 de kesiyor. (O_2, r) çemberi (O_1, r) yi (O, R) nin içinde B de, AB doğrusu da (O, R) yi C de keserse $|BC| = R$ olduğunu gösteriniz.

PİSAGOR TEOREMİ; YA ÖNCESİ?

Alev Topuzoğlu

Pisagor teoremini çoğumuz biliriz. Bir dik üçgenin dik kenarlarının uzunluklarını a, b ve hipotenüsünün uzunluğunu da c ile gösterirsek a, b, c sayıları arasında

$$a^2 + b^2 = c^2$$

bağıntısı vardır. Bu yazımızda sadece, kenar uzunlukları tamsayı olan dik üçgenlerle ilgileneceğiz. Böyle üçgenleri *Pisagor Üçgenleri* olarak adlandıralım.

Yaygın olarak a, b, c pozitif tamsayılar olmak üzere $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısını sağlayan (a, b, c) üçlülerine *Pisagor Üçlüler*i denir. Örnekler: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$.

Tahmin edebileceğiniz gibi sonsuz tane *Pisagor üçlüsü* var. Aslında, 2 den büyük her a tamsayısı için, (a, b, c) *Pisagor üçlüsü* olacak şekilde b, c sayıları bulabiliriz.

Bunun kanıtı kolay; a çift olsun. O zaman 2 a yı böler, yani $\frac{a}{2}$ bir tamsayıdır.¹ Tabii bu durumda 4 , a^2 yi böler.¹ O halde $\frac{a^2-4}{4}$, $\frac{a^2+4}{4}$ sayıları pozitif tamsayılardır. Eğer $b = \frac{a^2-4}{4}$, $c = \frac{a^2+4}{4}$ alırsanız a, b, c nin $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağladığını kolayca görebilirsiniz. a , tek ise bir n tamsayısı için $a = 2n + 1$ şeklinde yazılabilir. Eğer $b = 2n^2 + 2n$, $c = 2n^2 + 2n + 1$ alırsanız (a, b, c) bir *Pisagor üçlüsü*dür.

Acaba tüm *Pisagor üçlülerini* (ya da *üçgenlerini*) bulabilir miyiz? Bu yazıda yanıtlayacağımız soru bu.

$a = 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$, $c = 2n^2 + 2n + 1$ bağıntıları kullanılarak elde edilen sayıların $a^2 + b^2 = c^2$ koşulunu sağladıkları *Pisagorcular* tarafından biliniyordu; *Pisagor M.Ö. 6. yüzyılda* yaşayan bir filozof, matematikçi. Sisam Adası'nda doğdu sonra İtalya'nın güneyindeki Kroton'a giderek orada dinsel, ahlaksal, siyasal yönleri ağır basan bir okul ya da topluluk kurdu. *Pisagorcular* dediğimiz bu topluluğun üyeleri evrenin temel/birincil maddesinin tamsayılar olduğuna inandıkları için sayıların

özelliklerine, aralarındaki bağlantılara ilgi duyuyorlardı. Matematiksel bilgi, mutlak, değişmeyen tek bilgiydi. İnançlarına göre bir (soyut) matematikçi dünyadaki somut varlıklarla bağlantı kurmak zorunda olmadığı için kendisine güzelliklerle dolu bir dünya yaratabilirdi. Bu düşünceleriyle matematiğin pratik problemleri çözmenin dışında önemli bir soyut uğraş olarak algılanmasına yardımcı oldular.

Ancak *Pisagor*, İyonyalı olmasına karşın mistik eğilimleri yönünden Milet okulu filozoflarının (Tales, Anaksimandros, Anaksimenes) bilimsel geleneğinden önemli bir ayrılık gösterir. *Pisagorcu*'ların felsefesinde temel güdü İyonyalı'larda olduğu gibi salt bilimsel merak değildi. Vardıkları bazı sonuçlar, ussal kaynaklardan çok (Orfeci gizemsel) dinden geliyordu ([2], [4]). Bilimsel yöntemden uzaklaşma böylece *Pisagor*'la başlar ve *Pisagor*'un etkisi ondan sonraki pek çok filozofta görülür ([4]). Yüzyıllar boyunca sürecek olan rasyonel ile mistik düşüncenin karşıtlığı/çatışması ilk kez burada ortaya çıkar. Aşağıda "Onikinci Gece"den aldığımız kısımda *Pisagor*'un, ruhların bedenden bedene dolaştığına olan inancına değiniliyor.

SOYTARI.- *Pisagor'un yabani kuş hakkındaki düşüncesi nedir?*

MALVOLIO.- Anneannemizin ruhunun bir kuşta yaşayabileceğidir.

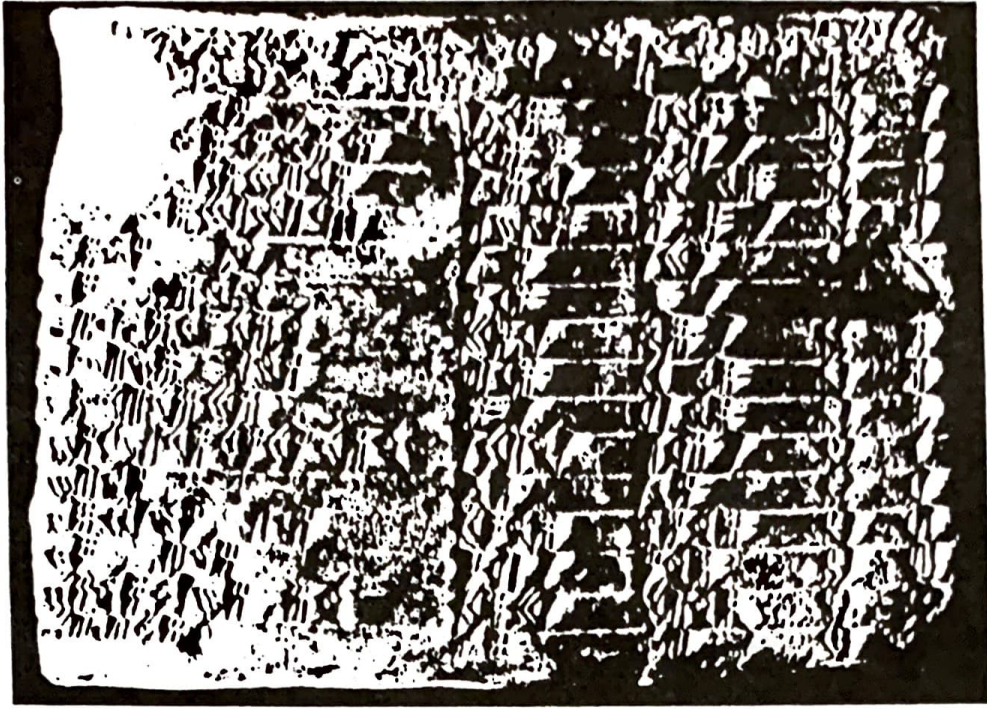
SOYTARI.- *Sen bu fikir hakkında ne düşünüyorsun?*

MALVOLIO.- Ben ruhun yüceliğine inanırım, onun düşüncesini hiç de uygun bulmuyorum.

SOYTARI.- *Allaha ısmarladık. Ebediyen karanlıkta kal. Senin akıllı olduğunu kabul etmem için önce senin Pisagor'un düşüncesini kabul etmen gerekecektir ve sakın çulluk öldüreyim deme yoksa belki onun vücudundan anneannenin ruhunu çıkarılmış olursun.*

W. Shakespeare "Onikinci Gece"

¹ x, y tamsayılar ve $\frac{x}{y}$ bir tamsayı ise x, y yi böler deriz ve bunu $x|y$ şeklinde gösteririz. Örneğin $2|6$, çünkü $\frac{6}{2} = 3$ bir tamsayı.



Plimpton 322

Pisagorcuların varlıkları hatta matematiksel buluşları ortaktı ve çoğu gizli tutulurdu. Bu yüzden Pisagor'un matematiğinden değil de Pisagorcuların matematiğinden bahsetmek daha doğru olur. Pisagor'un Kroton'a yerleşmeden önce epeyce seyahat ettiği ve bu seyahatleri sırasında Mısır, Mezopotamya matematiğini öğrendiği sanılıyor.

Dik üçgenlerin Pisagor teoremi olarak adlandırığımız özelliği Pisagor'dan en az 1000 yıl önce hem Mısır'da hem Mezopotamya'da biliniyordu; M.Ö. 1900-1600 yıllarından kalan (tarihi kesin değil) ve şimdi Columbia Üniversitesi'nde bulunan Plimpton koleksiyonundan 322 numaralı kil tablette 4 sütun halinde yazılmış sayılar var.

Tablo 1

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

Tablo 1 son üç sütundaki sayıların kullandığımız sayı sistemine göre yazılışını gösteriyor. İkinci sütundaki herhangi bir sayının karesinden birinci sütunda, aynı sırada yer alan sayının karesini çıkarırsanız gene bir kare elde edersiniz. Yani ikinci sütundaki sayılar dik üçgenlerin hipotenüs uzunluklarını, birinci sütundakiler de dik kenarlardan birinin uzunluğunu gösterir. Diğer bir deyişle tablet, 15 değişik Pisagor üçlüsünü gösteriyor. Ama neden özellikle bu üçlüleri?

Bu soruya yanıt verebilmek için Pisagor üçlülere ilgili bazı gözlemlere gereksinimimiz var;

Gözlem 1: (a, b, c) bir Pisagor üçlüsü ise her pozitif k tamsayısı için (ka, kb, kc) de bir Pisagor üçlüsüdür. O halde;

Tanım: a, b sayılarının 1 den başka ortak böleni yoksa (ki bu $(a, b) = 1$ şeklinde gösterilir.)² (a, b, c) Pisagor üçlüsüne *temel Pisagor üçlüsü* denir.

Demek ki tüm Pisagor üçlülerini bulmak için temel Pisagor üçlülerini bulmak yeterli.

Gözlem 2: (a, b, c) bir temel Pisagor üçlüsüyse c tek ve a, b nin biri tek diğeri çifttir.

Kanıt: a, b nin ikisi de çift olamaz çünkü bu durumda 2, a ve b nin ortak bölenidir. a, b nin ikisinin de tek olduğunu kabul edelim. Bu durum-

² a, b tamsayılarının en büyük ortak böleni k sayıysa bunu $(a, b) = k$ şeklinde yazarız. Eğer $(a, b) = 1$ ise " a, b sayıları aralarında asaldır" denir.

$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ ise AB ile AC arasındaki açı diktir.) ilk yazılı kanıt *Öklid*'in $\sim$ M.Ö. 300'de yazdığı *Elementler* kitabında. *Öklid*'in bu kanıtları Pisagorculardan aldığı sanılıyor.

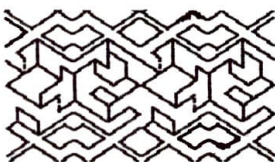
Yukarıda çözümünü verdiğimiz problem; kenar uzunlukları tamsayı olan tüm dik üçgenlerin bulunması, ya da başka bir anlatımla $a^2 + b^2 = c^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin bulunması, sayılar teorisinin en eski problemlerinden birisi. Zamanımızın Pisagor üçlülerıyla bağlantılı ünlü problemleri de gelecek sayıda...

Gelecek sayıya kadar üzerinde uğraşabileceğiniz birkaç soru:

1. Alanı, verilen bir A tamsayısına eşit olan Pisagor üçgenlerini nasıl bulabiliriz? (Meraklıysanız eğer, algoritmayı bulduktan sonra bunun için bir bilgisayar programı da yazabilirsiniz).
2. Pisagor üçgenlerinin alanları tam kare olabilir mi? (n bir tamsayı olmak üzere $A = n^2$ olası mıdır?)
3. Çevresi verilen bir C sayısına eşit olan Pisagor üçgenlerini nasıl buluruz?
4. Alanı çevresinin yarısına eşit olan Pisagor üçgenlerini bulunuz.

Kaynakça:

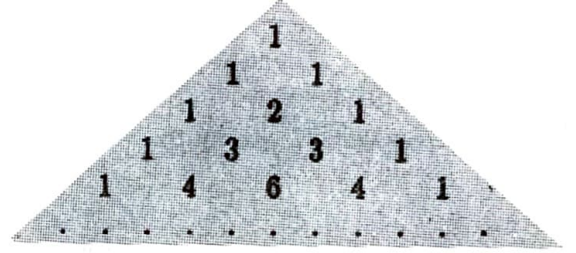
- [1] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968.
- [2] W.K.C. Guthrie, *İlk Çağ Felsefesi Tarihi*, Gündoğan Yayınları, 1988.
- [3] O. Ore, *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, 1948.
- [4] B. Russel, *Batı Felsefesi Tarihi I*, Bilgi Yayınevi, 1972.
- [5] A. Weil, *Number Theory, An Approach Through History*, Birkhäuser Boston Inc. 1984.



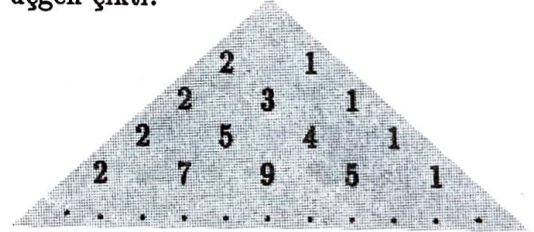
PASCAL ÜÇGENİ

Yavuz Nutku

Pascal üçgeni binom katsayılarından oluşan bir sonsuz diziler topluluğudur:



Bu tablodaki sayılar üstlerindeki iki sayının toplamından oluşmakta ve $(1+x)^n$ nin açılımındaki katsayıları vermektedir. Geçenlerde Hamiltonyen yapı ile ilgili anti-simetrik diferansiyel operatörleri incelerken karşıma buna benzer bir üçgen çıktı:



Bu tabloda da her sayı üstündeki iki sayının toplamına eşit. Ancak kenarlarının farklı sayılardan oluşmasından ötürü bazı değişik özelliklere sahip. Örneğin ikinci tabloda hemen görünen kare sayılar dizisini birincide bulmak mümkün değil.

Matematikçi arkadaşlara sorduğumda, bana ikinci tablodaki üçgenin iki Pascal üçgeninin kaydırılarak toplanmasından hemen elde edilebileceğini gösterdiler. Bu nasıl oluyor?

Peki, Fibonacci dizisini de Pascal üçgenlerinden oluşan bir üçgenin içinde bulmak kabil mi?

Bir kartondan kenar uzunlukları

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 6, 7

olan 11 kare kesip bunları yanyana yerleştirerek bir kare elde edebilir misiniz?

İNGİLTERE'DE MATEMATİK ÖĞRETİMİ

Aşağıdaki program İngiltere'deki matematik kapsamını belirtmek için "1990 Syllabuses" dan alınmıştır. İngiltere'de öğrenim süresi üç yıl olup bizim üniversitenin ilk yıllarında verdiğimiz bilgilerin bir kısmı orta öğretim sıralarında verilmektedir. Bu nedenle programın çok iddialı görünüşü okuru yanıltmamalıdır.

Kısım 1

Polinomlar ve rasyonel fonksiyonlarda cebirsel işlemler, bölüm ve kalanla ilgili teoremler. Paydaları

$$(ax + b)(cx + d)(ex + f), (ax^2 + b)(cx + d)$$

ya da

$$(ax + b)(cx + d)^2$$

den daha karmaşık durumda olmayan rasyonel fonksiyonların kısmi kesirlere ayrılışı. Basit eşitsizlikler ve mutlak değer işaretinin kullanılışı.

Genel ikinci derece fonksiyonu, sıfır yerleri, köklerle katsayılar arasındaki bağıntılar; kareye tamamlama, grafikler, en büyük ve en küçük değerler.

Karmaşık sayılar; toplama, çarpma, bölme (kartezyen ve salt değer-argüman biçimiyle), eşlenik, geometrik gösterim.

Üslü ve logaritmali ifadeler (taban değiştirme dahil), aritmetik ve geometrik seriler (Σ gösteriminin kullanılışı dahil), yakınsak geometrik serinin (sonsuz) toplamı. Binom açılımı, pozitif tam üsler, negatif üsler ve kesirli üsler için geçerlilik durumu. Binom açılımının yaklaşık hesaplamalarda kullanılışı.

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye birebir ya da çokla-bir dönüşüm olarak fonksiyon kavramı. Tanım kümesi, görüntü kümesi; bileşke; birebir fonksiyonun ters fonksiyonu. Dik koordinatlarda fonksiyon ve ters fonksiyon grafikleri. Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, basit özellikler, grafikleri ve seri açılımları. Altı temel trigonometrik fonksiyon, periyodik özellikleri, simetriteri, grafikleri. Uygun tanım kümeleri

ile sin, cos ve tan'ın ters fonksiyonları.

$$\text{Çemberde ölçüler: } s = r\theta, A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\sin(A \pm B), \cos(A \pm B), \tan(A \pm B)$$

$$\sin A \pm \sin B, \cos A \pm \cos B$$

formülleri ile yarımaçı formüllerinin kullanılışı; $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$ gibi özdeşlikler. $a \cos \theta + b \sin \theta$ ifadesinin $r \cos(\theta \pm \alpha)$ ya da $r \sin(\theta \pm \alpha)$ biçiminde yazılışı.

Basit trigonometrik denklemlerin genel çözümü (grafikle çözüm yöntemi dahil). $\sin x \approx x$, $\tan x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ yaklaşımları. Sinüs ve kosinüs teoremleriyle çözülen üçgen problemleri, üçboyutlu uzayla basit problemler (basit durumlar için, bir düzlemle bir doğru arasında, iki düzlem arasında, iki aykırı doğru arasında kalan açılarla ilgili problemler dahil).

Düzlemde dik koordinatlar. İki nokta arasındaki uzaklık; bir doğru parçasını verilen oranda bölen nokta; doğru denklemi. İki doğru arasındaki açı, diklik ve paralellik koşulları.

$y = f(x)$, $f(x, y) = 0$ ya da $x = f(t)$, $y = g(t)$ biçiminde verilen basit eğrilerin çizimi (çizim eğrinin genel biçimini ve eksenlerle ilişkisini vermeli). Çemberin dik koordinatlardaki denklemiyle parametrik denklemlerinin tanınması. Bir eğrinin denkleminin simetriklerinin denkleminin elde edilişi. $y = af(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x - a)$, $y = f(ax)$ gibi basit dönüşümlerin etkisi.

İki ve üç boyutlu uzayda vektörler; cebirsel işlemler, iç çarpım (geometrik anlamı dahil). Bir vektörün doğrultusu, yönü ve şiddeti. Birim vektörler, yer vektörleri, hareket vektörleri; i , j , k

birim vektörleri, bir doğrunun $r = a + tb$ biçimindeki denklemi.

Limit kavramı ve türevin limit olarak tanımı. Kiriş eğiminin limiti olarak teğetin eğimi. Cebirsel, trigonometrik ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonların türevleri (açık olarak, kapalı olarak ya da parametrik olarak verilmiş olabilirler). Toplamın, çarpımın, bölümün türevleri, bileşkenin türevi.

İkinci türev, türevin uygulamaları: eğim, teğet, normal, maksimum, minimum, dönüm noktaları, eğri çizimi, birbirine bağlı değişim oranları, küçük artmalar, yaklaşık değer hesapları.

Toplam limiti olarak ve türevin tersi işlem olarak integral (tümlev). Yamuk yöntemi ve Simpson yöntemi ile yaklaşık integral hesapları. Basit integrasyon (tümleme) yöntemleri (kısmi kesirler, değişken değiştirme parçalı tümleme dahil).

Belirli integraller, düzlemsel alan hesapları ve hacim hesaplarında kullanılışı. Birinci mertebeden değişkenleri ayrılabilen diferensiyel denklemlerin çözümü.

Kısım 2

Matematiksel tümevarım. Basit serilerin toplamı. Gerçek sayı dizilerinin limitlerinin elemanter olarak ele alınışı, yakınsak sonsuz seriler, fonksiyonların limitleri.

Permütasyonlar, kombinasyonlar. Olasılık ($P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ bağıntıları dahil).

Bir polinom denkleminin kökleri ile katsayıları arasındaki bağıntılar. Parametrik biçimde ya da dik koordinatlarda sözgelimi

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}, a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2),$$

$$y = e^x \sin x, x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$$

ile verilmiş eğrilerin çizimi (simetri, asimptot vb.). Bir eğrinin kiriş, teğet ve normallerinin denklemleri, basit geometrik yer denklemlerinin çıkarılışı.

Elips, hiperbol ve parabolde standart biçimdeki denklemler (dik koordinatlarda ve parametrik

biçimde). Elips, hiperbol ve parabolde doğrultman - odak özelliği. (Bu eğrilerin diğer geometrik özellikleri ve genel ikinci derece denkleminin incelenmesi hariç).

Karmaşık sayıların kutupsal biçimi. De Moivre Teoremi, basit trigonometrik özdeşliklerde ve bir sayının köklerinin bulunmasında kullanılışı.

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ bağıntısı ve vektörlerin döndürülmesinde kullanılışı. Karmaşık düzlemde

$$|z - a| = k|z - b|, \arg \left(\frac{z - a}{z - b} \right) = k$$

gibi bağıntılarla verilen nokta kümeleri.

Hiperbolik ve ters hiperbolik fonksiyonlar, özellikleri, grafikleri, türevleri, tümlevleri ve logaritmik ifadeleri (örneğin $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$).

Vektörler ve dik koordinatlarla doğru ve düzlemlerin incelenişi. Dış çarpım ve basit uygulamaları.

Bir denklemin köklerine yaklaşma yöntemleri, böylesi bir yaklaşık değerın daha da yaklaştırılması (Newton-Raphson yöntemi dahil).

Üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevler. Basit fonksiyonlara ikinci (ve daha yüksek) dereceden polinomlarla yaklaşma; Maclaurin açılımı.

Integral almada basit indirgeme formüllerinin çıkarılışı ve kullanılışı. Ortalama değer, ağırlık merkezi (düzlemsel alanlar için), dönel hacimler, yay uzunluğu ve dönel cisimler için alan hesaplarında uygun cebirsel yöntemlerin ve diferensiyel-integral hesabın uygulanışı. Kolay örneklerle kutupsal koordinatlarda verilmiş eğriler ve bunlarla sınırlı alanlar.

Birinci mertebeden diferensiyel denklemlerin tümleme çarpanı yardımı ile çözülmesi. a, b, c sabitler ve $f(x)$ basit bir fonksiyon olmak üzere

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

biçimindeki ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümü.



Eşitsizlikler

Yazan

P.P.Korowkin

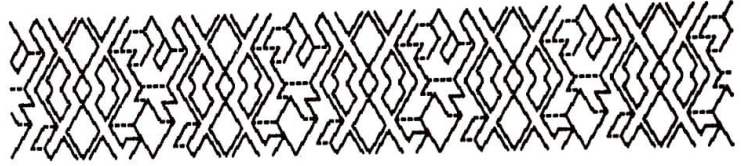
Çeviren

H.Şahinci

Türk Matematik Derneği

Yayınları Sayı:1

Kitap 60 sayfaya beş kesimlik bir bütün olarak yoğun biçimde yazılmış birbirinden güzel ve kullanışlı eşitsizlikler içeriyor. Kitap §1'de ilgi uyandırıcı örneklerle başlayıp §2'de aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin özel durumları, kendisi ve genellemeleri verilmektedir. §3'de ise bunlardan yeni eşitsizlikler üretilmekte, §4'te bu eşitsizliklerin maksimum-minimum problemlerine uygulanışını ele almaktadır. Kitap Hölder eşitsizliği ve özel durumu olan Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve bunların dizilerde kullanışı ile son bulmaktadır.



Eşitsizliklere Giriş

Yazan

E.Beckenbach - R.Bellman

Çeviren

H.Yüksel

Türk Matematik Derneği

Yayınları Sayı:10

Kitap altı bölümden oluşmaktadır. 1., 2., 3. bölümler gerçel sayılardaki sıralama bağıntısı ve cebirsel işlemlerle ilişkilerine ait temel bilgileri vermektedir. Kitaba asıl kimliğini veren 4. bölümde klasik eşitsizlikler başlığı ile aritmetik-geometrik ortalama, Cauchy, Hölder, üçgen ve Minkowski eşitsizlikleri incelenmektedir. Bölüm 5'te bu eşitsizlikler maksimum-minimum problemlerine uygulanmakta ve son olarak Bölüm 6'da "uzaklık fonksiyonları" ile ilişki verilmektedir.

İsteme adresi:

Prof.Dr. Hülya Şenkon

Türk Matematik Derneği

Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Vezneciler - 34459 - İstanbul

HER YAŞTA MATEMATİK

Arithmetic Teacher Dergisi'nin son sayısında, sekiz yaşındaki Muratcan Öztürk'ün bulduğu ilginç bir çıkarma yöntemine (algoritmasına) yer verilmiştir. Muratcan'ın algoritması şöyle açıklanabilir : Verilen iki sayının karşılıklı basamaklarının işaretli farklarının cebirsel toplamı iki sayının farkını verecektir. Örneğin 12345 ve 3279 sayılarının farkını bulalım :

Birler basamağı : $5-9=-4$

Onlar basamağı : $40-70=-30$

Yüzler basamağı : $300-200=100$

Binler basamağı : $2000-3000=-1000$

Onbinler basamağı : $10000-0=10000$

Cebirsel Toplam : $10000-1000+100-30-4=9066$

Aritmetik işlemler için kullandığımız algoritmanın Hintliler tarafından bulunduğu ve Muratcan'ın algoritmasına benzer çeşitli aritmetik algoritmalar olduğu bilinmektedir. Muratcan örneği öğrencileri yaratıcılığa özendirmenin gereğini vurguluyor. Yetenekli gençlerin daha ileri düzeyde matematik üretmesi dileğiyle.

DUYURULAR

* Beklentilerinizi daha iyi karşılayabilmemiz için eleştiri, dilek, öneri ve matematikle ilgili gördüğünüz her konuyu bize yazınız. Unutmayınız ki, matematikte yazmaya değer olmayan konu yoktur. Yazdığınız her şey bizim için, sizin düşündüğünüzden daha değerlidir.

* Çok sayıda ödev çözme isteği ile karşılaşmaktayız. Gerek derginin amacı gerekse ödevin veriliş amacı ile bağdaşmayan bu isteklere karşılık verilmeyecektir.

* Abonelerimizin bizimle yazışmalarında abone numaralarını belirtmeleri büyük kolaylık sağlayacaktır. Abone numaraları postalamada kullandığımız etiketlerde bulunmaktadır.

GENÇ MATEMATİKÇİLERİN ETKİNLİKLERİ

ODTÜ Matematik Topluluğu, 1988 yılında, ODTÜ öğrencileri tarafından kuruldu. Topluluğun amacı matematiği olabildiğince geniş kitlelere tanıtmak ve sevdirmektir. Son iki yılda düzenlenen Matematik Haftaları ilgiyle izlendi. Ankara liseleri arasında yapılan "Liselerarası Matematik Yarışması"na da çok sayıda lise katıldı. Bu etkinlikler bu yıl da sürdürülecektir. Matematik yarışması hakkında gerekli bilgi yakında liselere yollanacaktır.

Matematik Topluluğu bu yıl ayrıca "Lise Sohbet Toplantıları" düzenleyecektir. Bu toplantıların amacı matematikle ilgilenen lise öğrencilerini bir araya getirmek, Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve öğrencileri ile tartışma olanağı sağlamaktır. İlk toplantı 28 Nisan 1991 günü saat 14.00'te ODTÜ Matematik Bölümü'nde yapılacaktır. Toplantı ilgilenen herkese açıktır.

ZENGİN MATEMATİKÇİLER

İngiliz hükümetince her 10 yılda bir yaptırılan ve üniversite mezunlarının iş durumlarını araştıran araştırmaların sonuncusuna göre; bu ülkede en yüksek ücretleri alanlar matematik mezunları.

Bu araştırmanın sonuçları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Meslek	Ortalama Gelir (Sterlin)
Matematik	16.610
Elektrik Mühendisliği	15.250
Fizik	14.330
Biokimya	11.470
İşletme, Hukuk, Muhasebe, Ekonomi	16.480
Mimarlık, Şehir Planlama	12.650

