

MATEMATİK

DÜNYASI

Matematik Dünyası'ndan

Kümelerin Niceliği
Nurettin Ergun

Pisagor Teoreminin
Çeşitli İspatları
Ö. Özlük - A. Şahin - C. Tezer

Bölünebilmede Yeni
Yöntemler
Fahrettin Akbulut

İzometrilere Çarpımı
Hüseyin Demir

32. Matematik
Olimpiyatlarına Doğru
Albert Erkip

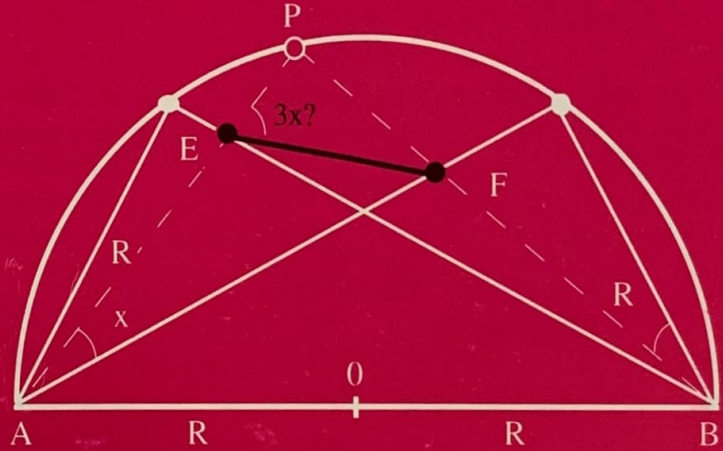
Bir Eşitsizlik Üzerine
Ferit Öktem

Sorular

Çözümler

Waring Problemi
Alev Topuzoğlu

Kıtaplar



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDITÖR
CEMAL KOÇ

YAYIN KURULU
OKAY ÇELEBİ
HÜSEYİN DEMİR
ALİ DOĞANAKSOY
HALİL ERDEM
YAŞAR ERSOY
İSMAIL GÜMÜŞEL
TİMUR KARAÇAY

*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.*

Adres : Matematik Dünyası
ODTÜ, Matematik Bölümü
06531 Ankara
Telefon : 223 71 00 / 2978-2979
Fiatı : 3000.- TL
Abone : Yurtiçi 1 yıllık (5 sayı)
10.000.-TL

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 ANKARA

adresine gönderilecektir.

*Abone olmak için yıllık abone ücretinin İş Bankası ODTÜ Ankara Şubesindeki
4229-0343587 numaralı hesaba yatırılması (bu mümkün değilse posta havalesi yapılması) ve
dekontun bir örneğinin dergi adresine gönderilmesi yeterlidir.*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt:1 Sayı: 2 dergisinin Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

Baskı : ODTÜ Basım İşliği

Genel Dağıtım : Hittit Kitabevi

Mithatpaşa Cad. 62/A Kızılay 06420 ANKARA

Telefon : 117 93 07

Fax : 118 10 46

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası'ndan	1
Kümelerin Niceliği (Nurettin Ergun)	2
Pisagor Teoreminin Çeşitli İspatları (Ö.Özlük - A.Şahin - C.Tezer)	6
Bölünebilmede Yeni Yöntemler (Fahrettin Akbulut)	10
İzometrilerin Çarpımı (Hüseyin Demir)	12
32. Matematik Olimpiyatlarına Doğru (Albert Erkip)	18
Bir Eşitsizlik Üzerine (Ferit Öktem)	21
Sorular	22
Çözümler	24
Waring Problemi (Alev Topuzoğlu)	29
Kitaplar	33

MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Dergimiz bu sayısında dört aylık matematik içeriğini 32 sayfaya sığdırmanın zorluğunu yaşadı. Bu nedenle matematiği daha yoğun bir dergi çıktı karşınıza. Okuyucu görüşlerine ve yabancı ülkelerde matematik öğretimine yer veremedik. Önümüzdeki sayıda okuyucu görüşlerine geniş yer ayracağız. Lütfen bize yazmayı sürdürün.

Şimdi bu sayının sayfalarına dönelim.

- **Kümelerin Niceliği** Bu yazısında Nurettin Ergun, daha çok sonlu olmayan kümeleri ele alıp bunların nicelik durumlarını karşılaştırıyor. Nicedir tam sayılar kümesi, nicedir rasyonel sayılar kümesi, nicedir gerçel sayılar kümesi? Yazıdan tam sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin aynı nicelikte olduğu ama rasyonel sayılar kümesi ile gerçel sayılar kümesinin farklı niceklikte olduğunu görüyoruz. Kısaca Nurettin Ergun bize 'sonsuzun da sonsuzu var' diyor.
- **Pisagor Teoreminin Çeşitli İspatları** Yazarlar bu yazılarında ışıldağı Pisagor teoremine çevirmişler. Pisagor'u sahnenin karanlık bir yerine koyup Pisagor teoreminin birbirinden güzel dokuz ispatını aydınlatmışlar bir ışık cümbüşüyle.
- **Bölünebilmede Yeni Yöntemler** Fahrettin Akbulut bu yazısında ezbere kaçmayan ve her sayı için kullanılabilen bir bölünebilme kuralı (daha doğru bir deyişle bir tür algoritma) öneriyor. İlk ve ortaokul öğrencilerinin bile rahatlıkla anlayıp kullanabileceği bir yöntem.

• **İzometrilerin Çarpımı** Hüseyin Demir'in bu yazısı geçen sayıdaki 'İzometriler' yazısının devamı. Bu yazıda izometrilerin çarpımı ele alınıp bunların çeşitli geometri problemlerine nasıl uygulanabileceği gösteriliyor.

• **32. Matematik Olimpiyatlarına Doğru** Albert Erkip bu yazısında Uluslararası Matematik Olimpiyatı hakkında bilgi vererek ülkemizin bu olimpiyata çeşitli açılardan daha kapsamlı katılmasını sağlamaya çalışıyor. Bu katılım ülkemizde matematik etkinliklerinin benimsenmesinde önemli bir yer tutacak.

• **Bir Eşitsizlik Üzerine** Ferit Öktem yazısında dergimizdeki bir alıştırma sorusunun ne ölçüde geliştirilebileceğini sergiliyor.

• **Sorular ve Çözümler** Alıştırma ve yarışma sorularına ilgi umduğumuzun çok ötesinde oldu. Bir çok okura çok zor görünen sorulara (özellikle kapak sorusu) ortaokul öğrencilerinin bile anlayabileceği çözümler geldi. Çözüm gönderen okurlara teşekkür ediyor ve değerlendirmede bize kolaylık sağlaması için her bir çözümün ayrı bir kağıda yazılmasını rica ediyoruz. Başarılar.

• **Waring Problemi** Alev Topuzoğlu Matematiğin geçmişten günümüze serüveninde önemli bir yer tutan Waring problemini ele alıyor.

KÜMELERİN NİCELİĞİ

Nurettin Ergun

Biliyoruz ki $\{1, 2, \dots, 10\}$ kümesinin 10 elemanı, $\{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{100}\}$ kümesinin ise 101 elemanı vardır. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $\{\alpha, \beta\}$ kümesi ile $\{\cos n\pi | n \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesinin ise ikişer elemanı vardır. Çünkü birincisi $\{\alpha, \beta\}$ ikincisi ise $\{-1, +1\}$ kümesine eşittir. Buna karşılık $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ ve $\{k + \sqrt{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ kümelerinin üçünün de sonsuz sayıda fakat “aynı sayıda” elemanları vardır. Bu ne demektir? Tüm pozitif tam sayıların kümesi $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ ile, yalnızca tek doğal sayılardan oluşan $\mathbb{Z}_t^+ = \{1, 3, 5, \dots\}$ kümesinin “aynı sayıda” elemana sahip olduklarını söylemek ya da herhangi iki gerçel sayı arasında tüm gerçel sayılar eksenindeki kadar gerçel sayı bulunduğunu iddia etmek daha da şaşırtıcı değil midir? Bu ve benzeri savları kavramak ve kanıtlamak için herşeyden önce “aynı sayıda” ya da “farklı sayıda” elemana sahip olmak, sonlu elemanlı olmak kavramlarına matematiksel bir kesinlik kazandırmak gereklidir. A ve B kümelerine, aralarında bire-bir ve örten bir eşleme (ya da fonksiyon) tanımlanabiliyorsa (ya da tanımlanabildiği matematiksel bir kesinlikle kanıtlanabiliyorsa) bunlara denk ya da eş kuvvetli kümeler denir ve bu olgu kısaca $A \cong B$ işareti ile belirtilir. Örten ve bire-bir olan ve bileşkeleri tanımlanabilen iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da örten ve bire-bir olduğundan şu önemli ve temel gerçeğe ulaşırız: $A \cong B$ ve $B \cong C$ ise $A \cong C$ olur. Peki sonlu elemanlı olmak ne demektir? Uygun bir n doğal sayısı için $\mathbb{Z}_n^+ = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi ile eş kuvvette olan bir kümeye sonlu elemanlı aksi halde sonsuz elemanlı denir. Bu yazıda sonsuz elemanlı bazı ünlü kümelerin neden denk oldukları gösterilecektir. Küme, fonksiyon, tümevarım

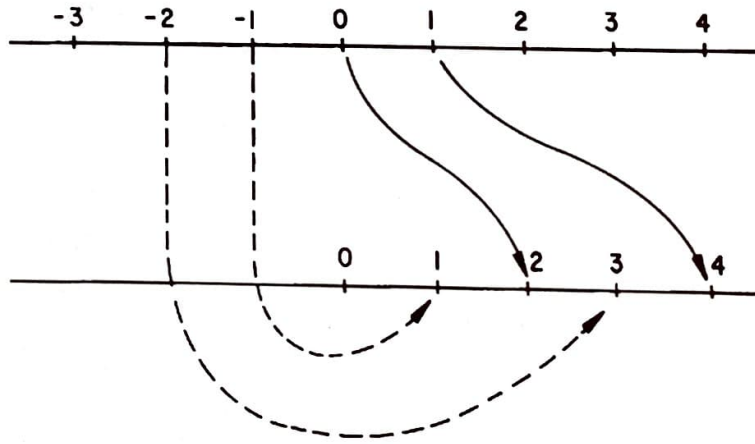
(indüksiyon) ve gerçel sayı kavramları ile “biraz olsun” tanışmış olmak ve kanıtlamalara katılma çabası, anlatılanları kavramak için sanırım yeterli olacaktır.

Önerme 1: $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^+$ dir.

Bu önermeyi kanıtlamak için $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}^+$ 'ya

$$f(k) = \begin{cases} 2k + 2 & k \geq 0 \text{ ise} \\ -2k - 1 & k < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğunu görmek yeter. Aşağıdaki şekilde gözlenen bu duruma biçimsel ispat veremeyi okuyucuya bırakıyoruz.



Giriş bölümünde yazılan sonsuz elemanlı üç kümenin denk olduklarını, okuyucu artık kolayca gösterebilecektir. $\cos x = \cos y$ eşitliğinin ancak uygun bir $k \in \mathbb{Z}$ için $y = x + 2k\pi$ gerçekleşmesi halinde doğru olduğu, dolayısı ile farklı pozitif tam sayılarda farklı kosinüs değerleri alındığı hatırlanmalıdır. Bundan sonraki kanıtlarda okuyucudan daha fazla “katkı” istenecektir.

Önerme 2: Sonsuz elemanlı her küme bir öz alt kümesi ile eş kuvvettedir.

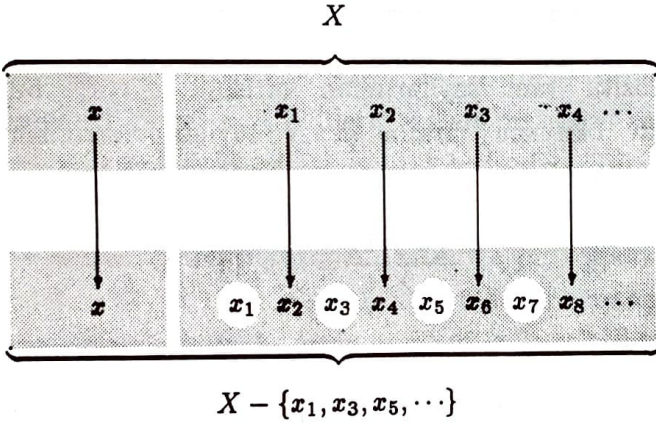
X sonsuz elemanlı olsun. $X - A$ ile X kümesine ait olup da A alt kümesine ait olmayan elemanlar

kümesini gösterdiğimizi anımsarsak, adım adım $x_1 \in X, x_2 \in X - \{x_1\}, x_3 \in X - \{x_1, x_2\}, \dots, x_n \in X - \{x_1, \dots, x_{n-1}\}, \dots$ elemanlarını tanımlayabiliriz.

Şimdi $X \cong X - \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ denkleğinin gerçeklendiğini görmek için

$$h(x) = \begin{cases} x_{2n} & x = x_n \text{ ise} \\ x & x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $h : X \rightarrow X - \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ fonksiyonunun örten ve bire-bir olduğunu gerçeklemek yeterli olacaktır ve bu güç değildir. Sezgisel olarak aşağıdaki şekilden de görebiliriz.

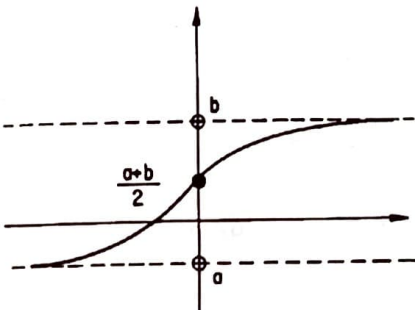


Önerme 3: a ve b gerçel sayıları için $a < b$ gerçeklensin. $\mathbb{R} \cong (a, b)$ dir.

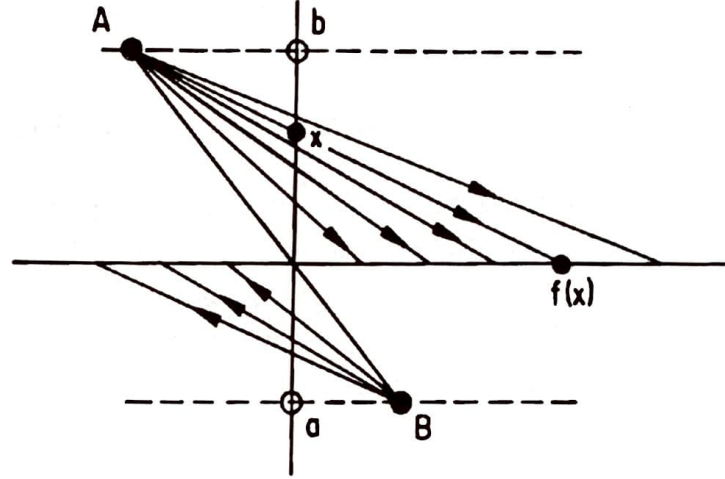
Evet, herhangi iki gerçel sayı arasında tüm (gerçel) sayı eksenindeki “kadar” gerçel sayı vardır!. Bunu görmek için

$$f(x) = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{1+|x|} + \frac{b+a}{2}$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğu biçimsel bir tamlıkla gösterilebilir ama bunu fonksiyonun aşağıdaki grafiğinden de gözleyebiliriz.



Bu eşleme gibi çeşitli eşlemeler yapılabilir. Netekim, aşağıdaki şekil de (a, b) aralığıyla $\mathbb{R}$ arasında bire-bir ve örten bir eşleme vermektedir.



Kanıtlamalara ilgi duyan okuyucunun yukarıda tanımlanan f fonksiyonunun bire-bir olduğunu zorlanmadan gösterebileceğini umuyoruz. Bu fonksiyonun örten olduğu şöyle görülebilir: Herhangi bir $a < x < b$ alındığında $-(b-a) < 2x - (a+b) < b-a$ yani $|2x - (a+b)| < b-a$ ve

$$f\left(\frac{2x - a(a+b)}{(b-a) - |2x - (a+b)|}\right) = x$$

gerçeklendiği, dolayısı ile (a, b) aralığındaki her gerçel sayının f fonksiyonu altında bir görüntü elemanı olduğu anlaşılır.

Önerme 4: $a < b$ ise $\mathbb{R} \cong [a, b)$ dir.

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ile $[a, b)$ aralığı arasında bire-bir ve örten bir fonksiyonunun varlığını kanıtlamak “biraz daha” çaba gerektirir. Şunları gözleyelim: eğer $X_n (n = 1, 2, \dots)$ kümeleri kendi aralarında ikişer ikişer ayrık, benzer biçimde Y_n kümeleri de kendi aralarında ikişerli ayrık ve üstelik her bir n için $X_n \cong Y_n$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \cong \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ olur, çünkü $h_n : X_n \rightarrow Y_n$ örten ve bire-bir fonksiyonları sayesinde

$$h : \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n;$$

$$h(x) = h_n(x) \quad (x \in X_n \text{ ise})$$

şeklinde tanımlanan h parçalı fonksiyonu, kolayca görülebileceği gibi hem örten hem de bire-birdir.

Dikkat edilirse $\cup_{n=1}^{\infty} X_n$ birleşim kümesinin herbir elemanı, bir ve yalnız bir X_n kümesine ait olabileceğinden, parçalı h fonksiyonunun tanımında bir "belirsizlik" yoktur. Ayrıca $a_1 < b_1$ ve $a_2 < b_2$ ise, yine $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ ve $c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ orta noktalarının yardımı ile

$$g : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]; g(x) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - c_1) + c_2$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonun da $a_1 \leq x < b_1$ için $a_2 \leq g(x) < b_2$ gerçeklediği, üstelik örten ve bire-bir olduğu kolayca gerçekleştirilebileceğinden $[a_1, b_1] \cong [a_2, b_2]$ iddiası da gösterilmiş olur. Geriye yalnızca bu iki bilgiyi kullanmak ve

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots,$$

$$\mathbb{R} = [0, 1) \cup [-1, 0) \cup [1, 2) \cup [-2, -1) \cup \dots$$

yazılışlarının geçerliliğini gözlemek kalacaktır. Burada herbir n doğal sayısı için $x_n = b - (b - a)/2^n$ alınmıştır. $x_n \in (a, b)$ gerçel sayılarının artarak b sayısına istenildiği kadar yaklaştığı gözlenmelidir.

Önerme 5: $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Q}$ dır.

Pozitif tam sayı ikililerinin kümesi olan $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ kümesinden $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesine büyük usta Cantor'un ünlü *köşegen sayma fonksiyonunu* tanımlayalım:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$$

için

$$h(n, m) = n + \frac{1}{2}(n + m - 2)(n + m - 1).$$

Dikkat edilirse $(n + m - 2)(n + m - 1)$ negatif olmayan tam sayısı, iki ardışık tam sayının çarpımı olduğundan daima çifttir. O halde herbir (n, m) pozitif tam sayı ikilisi için $h(n, m)$ bir pozitif tam sayıdır. Şunları gözleyelim: Eğer $n + m < n^* + m^*$ ise $h(n, m) < h(n^*, m^*)$ olur, çünkü dikkat edilirse, $n + m \leq n^* + m^* - 1$ ve sonuçta $h(n, m) \leq (n + m - 1) + \frac{1}{2}(n + m - 2)(n + m - 1) = \frac{1}{2}(n + m)(n + m - 1) \leq \frac{1}{2}(n^* + m^* - 1)(n^* + m^* - 2) < h(n^*, m^*)$ geçerli olacaktır. O halde $h(n, m) = h(n^*, m^*)$ ise

zorunlu olarak önce $n + m = n^* + m^*$ ve dolayısı ile sonra

$$\begin{aligned} n &= h(n, m) - \frac{1}{2}(n + m - 1)(n + m - 2) \\ &= h(n^*, m^*) \\ &\quad - \frac{1}{2}(n^* + m^* - 1)(n^* + m^* - 2) \\ &= n^* \end{aligned}$$

ve sonuçta $(n, m) = (n^*, m^*)$ eşitlikleri geçerli olacaktır. Neden? Demek ki h bire-bir bir fonksiyondur. h üstelik örten bir fonksiyondur, çünkü herbir N pozitif tam sayısı, tek türlü belirli bir n doğal sayısı sayesinde

$$\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} + 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2} + n$$

pozitif tam sayılarından birisine eşittir; bu sav okuyucu tarafından N sayıları üzerinden tümevarımla kolayca gösterilebilir.

$$\frac{n(n+1)}{2} = h(n, 1)$$

ve $0 < m \leq n$ ise

$$\frac{n(n+1)}{2} + m = h(m, n - m + 2)$$

olduğundan her N doğal sayısının köşegen sayma fonksiyonunda bir görüntü elemanı olduğu anlaşılır. h fonksiyonunun doğal sayı ikililerini aşağıdaki köşegenler üzerinden *saydığına* yani

$$\begin{array}{ccccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$h(1,1) = 1, h(1,2) = 2, h(2,1) = 3$, vb. gerçekleştiğine dikkat edilmelidir.

Şimdi, verilen bir n pozitif tam sayısı ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayıların kümesinin $\mathbb{Z}^+$ ile eş kuvvette olduğunu ispatlamadan hatırlatalım. O halde, paydasında n payında ise n ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayıların yer aldığı pozitif rasyonel sayıların

kümesi $\mathbb{Q}_n^+$ (örneğin $\frac{6}{51} \notin \mathbb{Q}_{51}^+$, $\frac{2}{17} \in \mathbb{Q}_{17}^+$ dir) ile, ikinci bileşeni n olan bütün pozitif tam sayı ikililerinin kümesi $\mathbb{Z}^+ \times \{n\}$ için kolayca $\mathbb{Q}_n^+ \cong \mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}^+ \times \{n\}$ bulunur. Sonuçta, tüm pozitif rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}^+$ için

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n^+ \cong \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Z}^+ \times \{n\}) = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}^+$$

olur, neden? Tüm negatif rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}^-$ için elbette $\mathbb{Q}^- \cong \mathbb{Q}^+ \cong \mathbb{Z}^+$ olur. O halde $\mathbb{Q}^+$ ve $\mathbb{Q}^-$ kümeleri doğal sayılarla "numaralandırılır" yani $\mathbb{Q}^+ = \{r_1^+, r_2^+, \dots\}$ ve $\mathbb{Q}^- = \{p_1^-, p_2^-, \dots\}$ olur ve sonuçta tüm rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ için $\mathbb{Q} = \{0, r_1^+, p_1^-, r_2^+, p_2^-, \dots\} \cong \mathbb{Z}^+$ elde edilir. Nasıl?

Önerme 6: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ dir.

İşte şaşırtıcı bir başka gerçek daha! Öklid düzlemindeki gerçel sayı ikilileri, tastamam gerçel sayılar eksenindeki gerçel sayılar kadardır. Bunu göstermek, önceliklere göre biraz daha fazla bilgi ve hazırlık gerektirecektir. Öncelikle şuna dikkat edelim: $X_1 \cong Y_1$ ve $X_2 \cong Y_2$ ise bu denklikleri veren sırasıyla h_1 ve h_2 örten ve bire-bir fonksiyonları sayesinde, $h(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonu yardımı ile $X_1 \times X_2 \cong Y_1 \times Y_2$ gerçekleştiğini gözlemek güç değildir. O halde bu önermeyi kanıtlamak için $[0, 1) \times [0, 1) \cong [0, 1)$ göstermek yeterli olacaktır. Neden? Bu sonucunu gösterebilmek için önce $[0, 1)$ 'deki x gerçel sayısının sonsuz ondalık yazılımla

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots; \quad x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

biçiminde tek türlü yazılabileceğini anımsayalım. (Bkz. Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 2, s.2). Üstelik belirli bir basamaktan sonra tüm x_i 'lerin 9 olmadığını varsayabiliriz. Tersine basamakları $0, 1, \dots, 9$ sayılarından ya da bunların bazılarının oluşan fakat belirli bir yerden sonra bu basamakların hep 9 olmadığı böyle bir "ondalık açılım",

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

toplamından kesin küçük kalan ve negatif olmayan yani $[0, 1)$ aralığına ait olan bir gerçel

sayıdır. Neden? Belirli bir basamaktan sonra tüm diğerlerinin 9 olmasının sakıncası, iki farklı ondalık açılıma sahip olmaktır. Şu örneğe bakın:

$$\begin{aligned} 0,31999\dots &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{9}{10^3} \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{9}{10^3} \cdot \frac{10}{9} \\ &= 0,32000\dots \end{aligned}$$

Ayrıca $0,999\dots = 1 \notin [0, 1)$ olduğu gözlenmelidir. Artık Önerme 6'nın kanıtlanabilmesi için, belirli bir basamaktan sonra 9 tekrarlanmaması koşuluna uyan bu ondalık açılımlar yardımı ile

$$h(0, x_1 x_2 x_3 \dots, 0, y_1 y_2 y_3 \dots) = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots$$

şeklinde tanımlanan $h : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ fonksiyonunu gözönüne almak yeterlidir. $h(x, y) = h(x^*, y^*)$ ise $0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots = 0, x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \dots$ eşitliği ve söz konusu koşuldan ötürü basamakların tek türlü belirli olmasının gerekliliği nedeniyle $x_1 = x_1^*, y_1 = y_1^*, \dots$ ve sonuçta $(x, y) = (x^*, y^*)$ elde edileceği için h bire-birdir. Üstelik $h(0, x_1 x_3 x_5 \dots, 0, x_2 x_4 x_6 \dots) = x$ nedeniyle h örtendir. Peki, neden $(a, \infty) \cong \mathbb{R} \cong [a, b]$ geçerlidir? Eş kuvvette olmayan bazı ünlü küme örnekleri, başka bir yazının konusu olacaktır.



HER TAŞIN ALTINDA '6174'

Dört basamaklı ve rakamlarının hepsi aynı olmayan bir a sayısı alınız (örnek: 7112). a nın rakamlarının yerlerini değiştirerek elde ettiğiniz en büyük sayıyı $\bar{a}$ ile, en küçüğünü de $\underline{a}$ ile gösterip $b = \bar{a} - \underline{a}$ farkını bulunuz. a için yaptığınızı b için tekrarlayıp $c = \bar{b} - \underline{b}$ farkını hesaplayınız. Böylece devam edildiğinde, sonlu adım sonunda 6174 sayısına rastlayacaksınız.

Birkaç sayı için deneyip hep 6174 sayısına rastlayacağınızı görün. Bu rastlantının bir rastlantı olmadığını ispatlayabilir misiniz?

PİSAGOR TEOREMİNİN ÇEŞİTLİ İSPATLARI

Özgür Özlük, Ayşegül Şahin, Cem Tezer

İsmi, bu yazının konusunu teşkil eden teoremden yüzyıllardan beri ayrılmaz halde bulunan Pisagor hakkında çok az şey biliniyor. Sahanın temkinli mütehassıslarının ([2] gibi) eleğinde kalan sağlam delillerin sayısı o kadar az ki, Pisagor'un ciddi bir ilim adamı mı yoksa siyasete meraklı bir şaman mı, arkasında bıraktığı derneğinise halis niyetleri olan bir akademi mi yoksa varlığı biraz batıl itikadlara hatta biraz da terörizme dayalı bir tarikat mı olduğunu belki hiçbir zaman öğrenemeyeceğiz. Bu mecrada diğer bir zorluk da bugün alim, filozof, din adamı, politikacı diye adlandırdığımız insanların çalışma sahaları arasındaki sınırların, Pisagor'un çağı olan M.Ö. 6. yüzyıla doğru bir zaman yolculuğunda hızla değişip, bulanıklaşmasıdır.

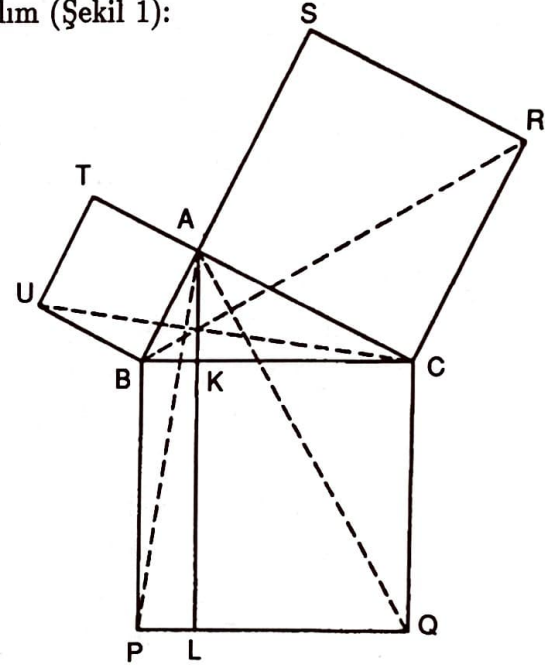
Pisagor'un ve takipçilerinin kim, insanlığa hizmetlerinin de ne olduğu sorusunda en mühim yer, Pisagor teoremi olarak anılan ve bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamının, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşit olduğunu söyleyen teoreme aittir. Günümüzde Pisagor teoreminin başta Çin medeniyeti olmak üzere dünyanın büyük medeniyetlerinde çok eskiden beri bilinmekte olduğu ortaya çıkıyor ([5]).

Teoremin ilk ispatının Pisagor tarafından yapıldığına dair bir delil yok. Bilinen en eski ispatıyla birlikte teorem Euclid'in "Elemanlar"ının birinci kitabında 46. önerme olarak bulunuyor. Bu kitap hakkında yazdığı değerli şerhte Proclus, daha o devirde (Pisagor'dan 10 yüzyıl sonra) Pisagor'un hayatına dair birçok efsane olduğunu işaretleyerek, kanaatince Euclid'in bu ispatı bulmakla hayranlık duyulmaya Pisagor'dan daha layık olduğunu söylüyor ([4]).

Bugün elimizde Pisagor teoreminin yüzlerce ispatı var ([3]). Burada size birkaç örnek sunmak istiyoruz.

I

Sade veya zarif değilse bile, tarihi önemi ve tabiiliği yüzünden Euclid'in ispatını öncelikle ele alalım (Şekil 1):

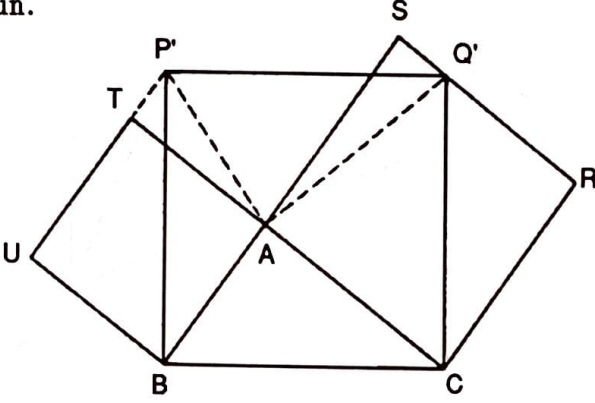


Şekil 1.

ABC dik üçgeninde, sırasıyla AB ve AC dik kenarları üzerine kurulan $BATU$ ve $ACRS$ kareleri ile BC hipotenüsü üzerine kurulan $PQCB$ karesini gözönüne alalım. A dan BC ye indirilen dikme BC yi K, PQ yu da L noktasında keserek, $PQCB$ karesini $PLKB$ ve $LQCK$ dikdörtgenlerine ayırsın. Okuyucu UBC üçgeninin ABP üçgenine denk olduğunu kolayca gösterebilir. $BATU$ karesi alanca UBC üçgeninin, $PLKB$ dikdörtgeni de alanca ABP üçgeninin iki katına eşit olduğuna göre, $BATU$ karesinin alanı $PLKB$ dikdörtgeninin alanına eşit olmalıdır. Aynı şekilde $ACRS$ karesinin alanının da $LQCK$ dikdörtgeninin alanına eşit olduğu gösterilebilir. Demekki $BATU$ ve $ACRS$ karelerinin alanları toplamı $PQCB$ karesinin alanına eşit olmalıdır.

II

Euclid'in ispatı, temel fikir muhafaza edilerek daha sade bir şekle sokulabilir (Şekil 2): Geni $BATU$ ve $ACRS$ sırasıyla AB ve AC dikkenarları üzerine kurulmuş kareler, $BCQ'P'$ ise BC hipotenüsünü kenar kabul edip A noktasını da içinde bulunduracak şekilde yerleştirilmiş kare olsun.

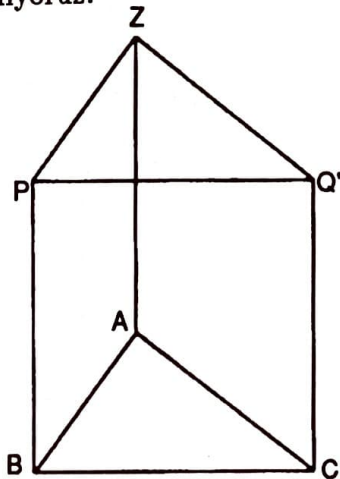


Şekil 2.

P' ve Q' noktaları sırasıyla UT ve RS doğruları üzerinde kalacaktır (!). $BATU$ ve $ACRS$ kareleri alanca sırasıyla $P'BA$ ve $Q'AC$ üçgenlerinin iki katı olup, bu üçgenler de beraberce $BCQ'P'$ karesinin alanca yarısını teşkil etmektedirler.

III

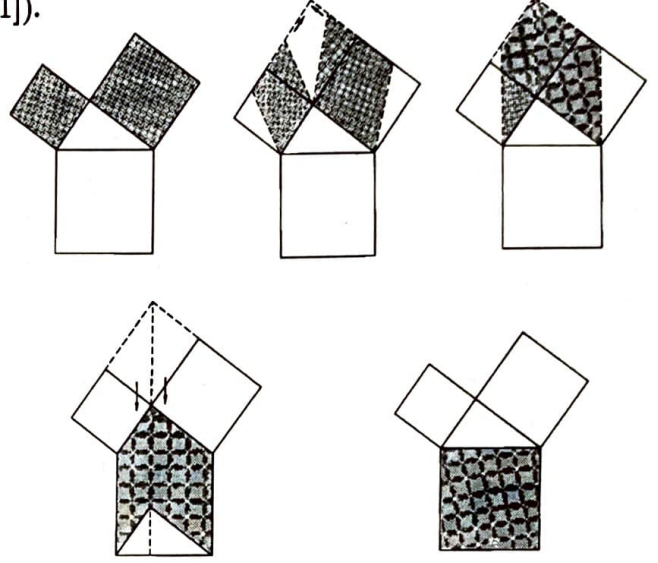
Okuyucumuzun gözü artık alanları değiştirmeden şekilleri değiştirmeye alışmış olmalıdır. Euclid'in ispatının daha da sade bir şeklini kendisi Şekil 3'ten yararlanarak elde edebilir. Biz sadece $BCQ'P'$ nün Şekil 2'den tanıdığımız kare olduğunu hatırlatmak ve $BAZP'$, $ACQ'Z$ paralelkenarlarının alanca sırasıyla AB , AC dikkenarları üzerine kurulmuş karelere eşit olduklarına işaret etmekle yetiniyoruz.



Şekil 3.

IV

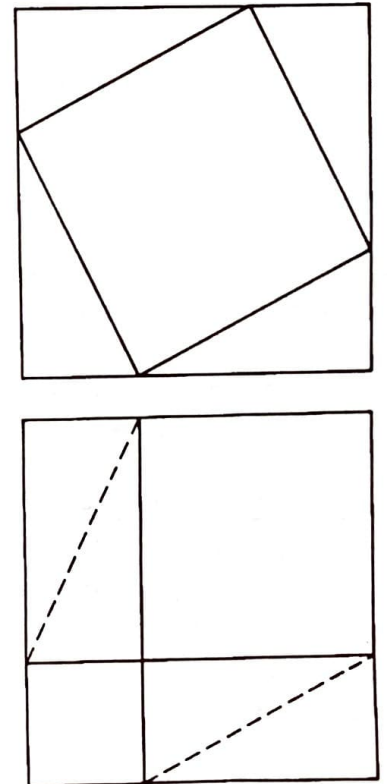
Kareleri alanları değişmeden paralelkenarlara çevirme fikrinden faydalanarak Pisagor teoreminin ispatı bir çizgi film haline getirilebilir (Şekil 4, [1]).



Şekil 4.

V

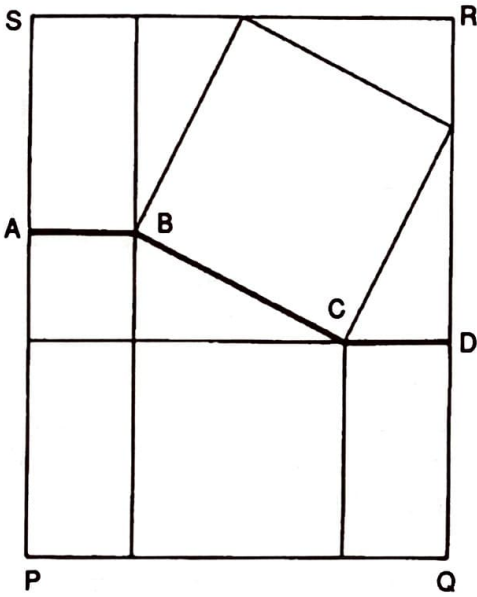
Pisagor teoreminin en zarif ispatlarından birisi de Hintli matematikçi Bhaskara'ya (M.S. 12. yüzyıl) izafe edilen ve gelenek olarak muhatabı sadece şekle bakmaya davet etmekten ibaret olan ispattır. Biz de okuyucumuzu Şekil 5'te Bhaskara'nın manevi huzuruna davet ediyoruz.



Şekil 5.

VI

“Peki, sizce hangisi en zarif?” denilse, bu metnin yazarlarının ittifakla seçecekleri ispat H. Demir’e ait bir ispat olur (Şekil 6). Üstadın 1931’te Darüşşafaka’da ortaokul öğrencisiyken bulduğu bu ispat hakkında bütün söylemek istediğimiz $ABCD$ kırık çizgisinin $PQRS$ dikdörtgenini denk iki parçaya ayırdığı. Gerisi okuyucuya ait! Bhaskara’ya layık bir rakip değil mi?

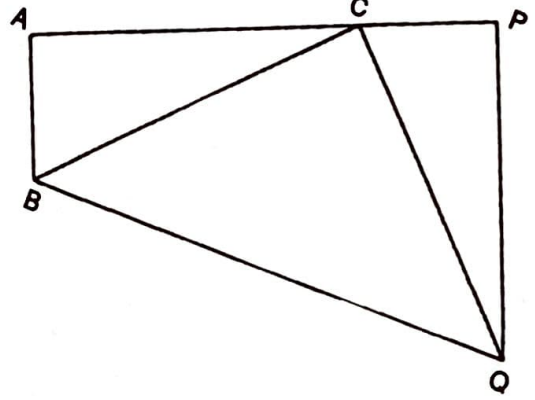


Şekil 6.

VII

Pisagor teoremi tarih boyunca sayısız amatörü ilgilendirmiş. Bunlar arasında ikbal merdiveninde çok yükselerek tırmanmış bir kişi de var: 1881’de Amerika Birleşik Devletleri Başkanı seçildikten dört ay sonra bir suikaste kurban giden J.A. Garfield. Garfield’in ispatı Şekil 7’de görüldüğü gibi ABC dik üçgenine, bu üçgene denk bir PCQ dik üçgeni eklenerek elde edilen $BQPA$ dik yamuğunun alanını iki farklı şekilde hesaplayarak yapıyor: $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$ yazarsak $BQPA$ dik yamuğunun alanı bir taraftan $\frac{(b+c)^2}{2}$ bir taraftan da ABC, CBQ, PCQ üçgenlerinin alanlarını toplamı olarak $\frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2}$ şeklinde yazılabilir.

Basit bir hesap, hepimizin aşinası olduğumuz $a^2 = b^2 + c^2$ yi verecektir. Garfield’in birinci sınıf bir beyne sahip olduğu belli. O beyni taşıyan başın siyaset gibi nafile bir uğraşta verilmiş olması ne acı!

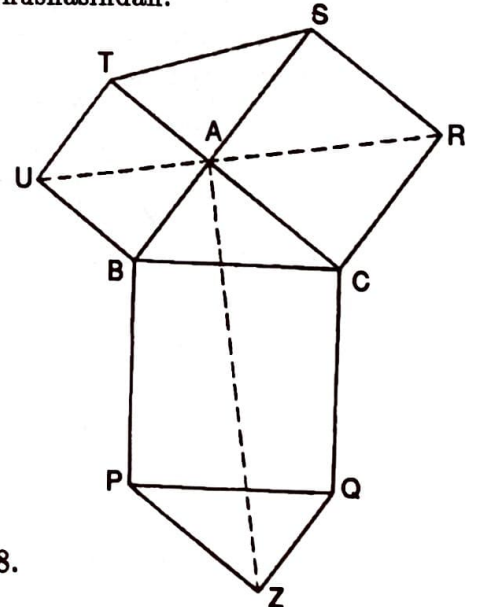


Şekil 7.

VIII

Dörtgenlerin denkliliğine dayalı olduğu için buraya kadarkilerden tarz itibariyle ayrılan çok güzel diğer bir ispatla devam ediyoruz (Şekil 8). ABC dik üçgenini ve Şekil 1’den tanıdığımız $PQCB, ACRS, BATU$ karelerini alalım. A noktasının

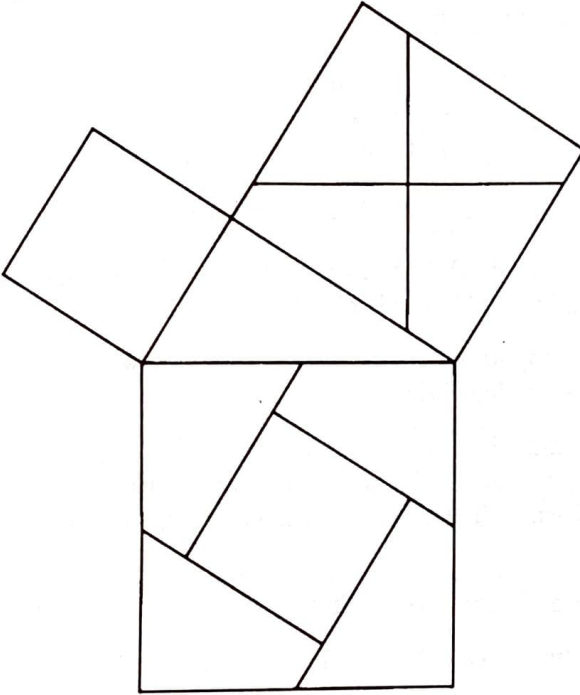
$PQCB$ karesinin merkezine göre bakışığına Z diyelim. $ABPZ, ZQCA, TURS, UBCR$ dörtgenleri birbirlerine denktir (!). Böylece $TUBCRS$ ve $ABPZQC$ altıgenleri alanca eşit olmalıdır. Bu altıgenlerden ilki dikkenarlar üzerindeki kareler ve ABC üçgeninin iki nüshasından meydana gelir; ikincisi ise hipotenüs üzerindeki kare ile gene ABC üçgeninin iki nüshasından!



Şekil 8.

IX

Pisagor teoreminin yüzlerce ispatından birçoğu eşparçalama tekniklerine dayanır. Bildiklerimizden en güzelini Şekil 9'da sunuyoruz. Eşparçalamanın nasıl yapıldığını şu ipuçları tespit edecektir: a) Eşparçalama sadece dik üçgenin kenarlarına paralel veya dik doğru parçalarıyla gerçekleştiriliyor. b) Büyük dik kenar üzerindeki kareyi bölen doğru parçaları karenin merkezinde kesişiyorlar.



Şekil 9.

Dik üçgenlerde kenar uzunlukları arasında yukarıda söz konusu edilen ilişkiyi, yani Pisagor teoremini çeşitli şekillerde ispat etmiş olduk. Fakat uygulamaların büyük bir kısmında, kenar uzunlukları arasında bu ilişki varsayılp, bundan üçgenin dik üçgen olduğuna hükmedilir. Yani aslında uygulamada önemli olan "Bir ABC üçgeninde $\angle BAC = \pi/2$ olması için gerek ve yeter şart $|BC|^2 = |AB|^2 + |CA|^2$ olmasıdır" önermesidir. Halbuki Pisagor teoremi bu önermenin ancak gerek şart kısmını teşkil eder. Birçok geometri kitabında eksik kalan bu hususa temas ederek, yani Pisagor teoreminin tersini ispatlayarak, yazımızı noktalıyoruz:

Bir ABC üçgeninde $|BC|^2 = |AB|^2 + |CA|^2$ varsayalım. $|PQ| = |AB|$, $|RP| = |CA|$ ve $\angle QPR = \pi/2$ olacak şekilde bir PQR dik üçgeni

alalım. Pisagor teoreminden dolayı

$$|QR|^2 = |PQ|^2 + |RP|^2 = |AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$$

böylece de

$$|QR| = |BC|$$

bulunur. Kenar-kenar-kenar denklik teoremine göre ABC üçgeni PQR üçgenine denk olup

$$\angle BAC = \angle QPR = \pi/2$$

dir.

Kaynaklar

- [1] L.N.H. Bunt, P.S. Jones, J.D. Bedient: "The Historical Roots of Elementary Mathematics", Dover Publications, New York 1988.
- [2] J. Burnet: "Early Greek Philosophy", 4. Edisyon Adam and Charks Black, Londra 1971.
- [3] E. Fourrey: "Curiosités Géométriques", 4. Edisyon Librairie Vnibert, Paris 1938.
- [4] Proclus: "A Commentary on the First Book of Euclid's Elements", Önsöz ve notlarla İngilizce'ye çeviren: Glenn R. Morrow, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1970.
- [5] F.J. Swetz, T.I. Kao: "Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China", The Pennsylvania State University Studies, no. 40.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{165} + \frac{1}{693} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231} = 1$$

$$1 + 98 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54} = 100$$

$$25 + 74 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18}$$

Yukarıdaki toplamaların ne özelliği vardır?

BÖLÜNEBİLMEDE YENİ YÖNTEMLER

Fahrettin Akbulut

Bilindiği gibi, a ve b tamsayıları için $a = kb$ olacak biçimde bir k tamsayısı bulabiliyorsak a sayısı b ile bölünebilir ya da b sayısı a yı böler diyor ve $b|a$ yazıyoruz. a ile b nin pozitif ortak bölenlerinin en büyüğünü (*OBE* ini) (a, b) ile gösteriyor ve $(a, b) = 1$ ise yani a ile b nin 1 den başka pozitif ortak böleni yoksa a ile b aralarında asaldır diyoruz.

Herkesçe bilinen şu iki temel özelliği anımsayalım:

- Üç tane $a, b, a + b$ (ya da $a - b$) tamsayısından herhangi ikisi bir c tamsayısı ile bölünebilirse üçüncü de bölünür.
- $c|ab$ ve $(c, a) = 1$ ise $c|b$ dir.

Bu iki basit özellikten bir A tamsayısının 2'nin ya da 5'in katı olmayan (yani 10 ile aralarında asal olan) bir b tamsayısı ile bölünüp bölünemediğini araştırmada kullanılabilecek bir yöntem çıkarmak istiyoruz. Şöyle ki 10 ile aralarında asal olan bu b sayısının son rakamı 1, 3, 7, 9'dan biri olacaktır. Bu b sayısını 1, 3, 7, 9 ile çarptığımızda ortaya çıkacak sayılardan birinin son rakamı 1 birinin de 9 olur; yani bu kb biçimindeki sayılardan biri $10m + 1$ bir başkası $10m - 1$ biçimindedir. Sözelimi $b = 37$ için $3b = 111 = 10 \times 11 + 1$ ve $7b = 259 = 10 \times 26 - 1$ dir. Bu bizi şu teoreme götürür: **Teorem** x, y, k, m ve b herhangi tamsayılar olduğuna göre

$$\left. \begin{array}{l} A = 10x + y \\ kb = 10m + 1 \end{array} \right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x - my;$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 10x + y \\ kb = 10m - 1 \end{array} \right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x + my$$

olur.

İspat Bu sonucu ispatlamak için $kb = 10m + 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} A &= 10x + y = 10x + y - kby + kby \\ &= 10x + y - (10m + 1)y + kby \\ &= 10(x - my) + kby \end{aligned}$$

olduğu için b sayısı $A, 10(x - my), kby$ tamsayılarından ikisini bölerse üçüncüsünü de böler yani

$$b|A \Leftrightarrow b|10(x - my)$$

dir. Oysa $(b, 10) = 1$ olduğu için

$$b|A \Leftrightarrow b|10(x - my) \Leftrightarrow b|x - my$$

sonucu elde edilir.

$kb = 10m - 1$ durumu için de aynı ispat tekrarlanabilir ya da değişiklik olsun diye $kb = 10m - 1$ ise $k(-b) = 10(-m) + 1$ olur ve dolayısıyla

$$b|A \Leftrightarrow -b|A \Leftrightarrow b|x + (-m)y$$

elde edilir diyebiliriz. Böylece bölünebilmeye ilişkin yeni iki kural elde etmiş olduk:

b 'nin bir tam katı $10m + 1$ ise $b|10x + y$ demek $b|x - my$ demektir.

b 'nin bir tam katı $10m - 1$ ise $b|10x + y$ demek $b|x + my$ demektir. Burada y bölünecek sayının birler basamağı x ise bu basamak atıldığı zaman kalan sayıdır.

Şimdi örneklerle bu kuralların kullanılmasını görelim:

Örnek 1. 441 sayısı 7 ile bölünür mü?

Çözüm 1.

$$\left. \begin{array}{l} 441 = 10.44 + 1 \\ 3.7 = 10.2 + 1 \end{array} \right\} \text{ den } x = 44, y = 1, m = 2$$

yani $x - my = 44 - 2$ olup $7|441 \Leftrightarrow 7|44 - 2 = 42$ çıkar ve $7|441$ olduğu görülür.

Çözüm 2.

$$\left. \begin{array}{l} 441 = 10.44 + 1 \\ 7.7 = 10.5 - 1 \end{array} \right\} \text{ den } x = 44, y = 1, m = 5$$

ve $x + my = 44 + 5.1 = 49$ elde edilir ve $7|49$ olduğundan $7|441$ çıkar.

Örnek 2. 2871 sayısı 11, 13, 17 ve 29'dan hangileri ile bölünür?

Çözüm. Bölen sayıların katlarını $10m + 1$ ya da $10m - 1$ biçiminde yazacak olursak

$$11 = 10.1 + 1$$

$$3.13 = 10.4 - 1$$

$$3.17 = 10.5 + 1$$

$$29 = 10.3 - 1$$

olur. Demek ki, $x \pm my$ ler

$$\begin{array}{lll} 11 & \text{için} & x - my = x - y \\ 13 & \text{için} & x + my = x + 4y \\ 17 & \text{için} & x - my = x - 5y \\ 29 & \text{için} & x + my = x + 3y \end{array}$$

olmaktadır. Böylece

$$\begin{array}{ll} 11|2871 & \Leftrightarrow 11|287 - 1 = 286 \Leftrightarrow 11|28 - 6 = 22 \text{ den } 11|2871; \\ 13|2871 & \Leftrightarrow 13|287 + 4 = 291 \Leftrightarrow 13|29 + 4 = 33 \text{ den } 13|2871; \\ 17|2871 & \Leftrightarrow 17|287 - 5 = 282 \Leftrightarrow 17|28 - 10 = 18 \text{ den } 17|2871; \\ 29|2871 & \Leftrightarrow 29|287 + 3 = 290 \Leftrightarrow 29|29 + 0 = 29 \text{ dan } 29|2871; \end{array}$$

sonuçları elde edilir.

Son olarak okuyucuya kolaylık sağlaması için aşağıdaki çizelgeyi veriyoruz

$A = 10x + y$			
$p = 10m + 1$		$q = 10m - 1$	
11	$x - y$	9, 3	$x + y$
21, 3, 7	$x - 2y$	19	$x + 2y$
31	$x - 3y$	29	$x + 3y$
41	$x - 4y$	39, 3, 13	$x + 4y$
51, 3, 17	$x - 5y$	49, 7	$x + 5y$
61	$x - 6y$	59	$x + 6y$
71	$x - 7y$	69, 3, 23	$x + 7y$
81, 3, 9	$x - 8y$	79	$x + 8y$
91, 7, 13	$x - 9y$	89	$x + 9y$

Alıştırırmalar:

- 4418 sayısının 13, 19, 37 sayılarından hangileriyle bölünebildiğini araştırınız.
- $kb = 10m + 1$ durumundaki yolu izleyerek

$$\left. \begin{array}{l} A = 10x + y \\ kb = 10m - 1 \end{array} \right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x + my$$

önermesini ispatlayınız.

3)

$$\left. \begin{array}{l} A = 10x + y \\ kb = 10m + 3 \end{array} \right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x + (3m + 1)y$$

önermesini ispatlayınız.



PROF.DR.TÜRKAN BAŞGÖZE'Yİ KAYBETTİK

Matematik dünyası değerli bir üyesini daha yitirdi. Meslektaşımız Türkan Başgöze

*Rüya mı hakikat mi kalbim duracak sanki
Hayır bir rüya değil gerçeğin ta kendisi
Bu ne sessiz bir zafer ne şerefli mutluluk
Müjdelersun, müjde, çözüm bulundu işte!...*

sözleriyle bizlere veda ederek sonsuz yolculuğuna çıktı. Başımız sağolsun.

1934 doğumlu olan Prof.Dr.Türkan Başgöze Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi matematik bölümünden 1957 yılında mezun oldu. Fakülte öğrenimi sırasında başarıları nedeniyle SCONY VACUM bursu ile ödüllendirildi. 1959 yılında ODTÜ'de asistanlığa başlayan Başgöze, 1962-1965 yılları arasında Londra Üniversitesi'nde doktora çalışmasını tamamlayarak ODTÜ'ye dönmüştür. 1968, 1973 ve 1981 yıllarında misafir öğretim üyesi olarak Kentucky Üniversitesi (ABD)'ni üç kez ziyaret etmiş olan Başgöze 1971 yılında doçent ünvanını almıştır. 1987 yılında profesörlüğe yükseltilen Başgöze, A.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde görev almıştır.

Ölüm tarihi olan 22 Şubat 1991 gününe kadar Bölüm Başkanı ve Ana Bilim Dalı Başkanı olarak görevini sürdürmüştür.



İZOMETRİLERİN ÇARPIMI

Hüseyin Demir

İzometrilere ilgili ilk yazımızda (Cilt 1, Sayı 2, s.16-20) düzlemdeki öteleme, dönme, simetri ve yansıma denilen izometrilere tanımlamış ve bunların çizim problemlerini çözme ve teorem ispatlamadaki bazı uygulamalarını vermiştik.

Bu yazımızda izometrilere çarpımlarını ele alıp bunların, ilk bakışta çözümleri ve ispatları oldukça zor gibi görünen bazı çizim problemleri ve teoremlerinin çözüm ve ispatlarını vereceğiz.

Ayrıca düzlemde bu dört izometriden başka izometrilere olup olmayacağını araştıracağız.

1. Tanım ve Özellikler

f ve g düzlemde iki izometri olsun. Eğer

$$f(P) = P', \quad g(P') = P'', \quad \forall P$$

ise P yi doğrudan P'' ye gönderen dönüşüm,

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)) = (gf)(P) = P''$$

nedeniyle $g \circ f$ ya da gf olur. Bunlardan birinciye f nin g ile bileşkesi aynı anlamda olan ikinciye f nin g ile çarpımı denir.

Yazımızda her iki simgeyi de kullanacağız.

Çarpımda genel olarak değişme özelliği yoktur: $gf \neq fg$. Örnekleri biraz ileride vereceğiz. Buna karşın çarpımda birleşme özelliği var: $h(gf) = (hg)f$.

Ayrıca,

$$(f^{-1}f)(P) = f^{-1}(f(P)) = f^{-1}(P') = P, \quad \forall P$$

olup

$$f^{-1}f = e = ff^{-1}$$

olduğunu görürüz.

gf çarpımının tersine gelince

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$$

olduğu kolayca şöyle gösterilir:

$$\begin{aligned} (f^{-1}g^{-1})(gf) &= f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}(e)f = f^{-1}(ef) \\ &= f^{-1}f = e. \end{aligned}$$

Bazı sade örnekler verelim:

- (a) $\vec{u} \circ \vec{u} = \vec{u}\vec{u} = 2\vec{u}$
- (b) $(0, \beta)(0, \alpha) = (0, \alpha + \beta) = (0, \alpha)(0, \beta)$
- (c) $A^{-1} \circ A = A \circ A = A^2 = e$
- (d) $a^{-1} \circ a = a \circ a = a^2 = e$

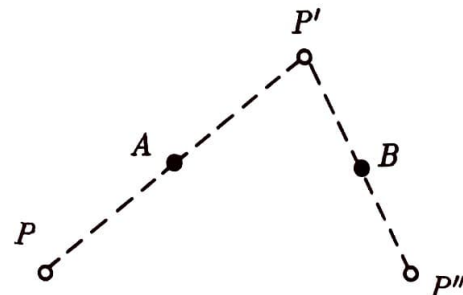
2. Öteleme ve Simetri Üzerine Çarpımlar Teorem 1.

- (a) İki ötelemenin çarpımı bir öteleme,
- (b) İki simetrinin çarpımı bir öteleme,
- (c) Bir öteleme ile bir simetrinin çarpımı bir simetri

dir.

İspat: a) $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ iki öteleme ise $\vec{u}\vec{v}$ nin, $\vec{u} + \vec{v}$ ötelemesi olduğu açıktır.

b) Şekilde A ve B gibi iki simetri alınmış ve $A(P) = P', B(P') = P''$ olduğu belirtilmiştir.



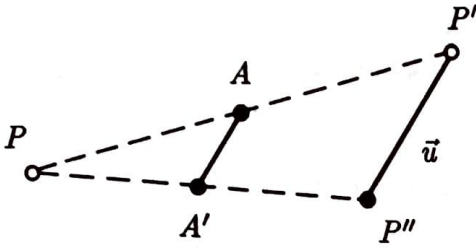
Neden $P\tilde{P}'' = 2\tilde{A}B$?

O halde çarpım bir ötelemedir. Ayrıca $BoA \neq AoB$ olduğunu da görüyoruz.

c) A bir simetri ve $\tilde{u}$ bir öteleme ve

$$(\tilde{u}oA) = \tilde{u}(A(P)) = \tilde{u}(P') = P''$$

olsun.



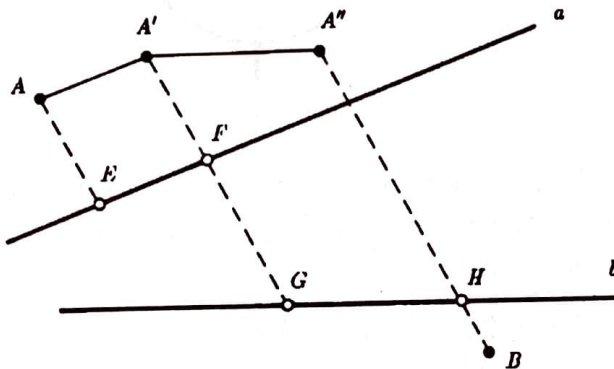
Şekilde $PP'P''$ üçgeninin $[AA']$ orta tabanı çizilmiştir. $\tilde{A}\tilde{A}' = \tilde{u}/2$ olduğundan A' noktası sabittir. O halde $A'(P) = P''$ olup çarpım A' simetrisidir.

$Ao\tilde{u}$ çarpımı için bir şekil çizip A'' çarpım simetrisini elde ediniz. A' ve A'' simetri merkezleri A ya göre simetrik mi?

Teoremi böylece ispatladıktan sonra bunun ilginç iki uygulamasını verelim.

Uygulama 1. A ve B gibi iki nokta (ev) ve bunların arasında birbirini kesmeyen düz iki yol a ve b olsun. A dan kalkan bir kişi a ya varıp bu yol üzerinde $[EF]$ kadar yürüyüp b ye ve b üzerinde $[GH]$ kadar yol alıp B ye varsın.

En kısa yolu bulmak.



Çözüm: $[EF]$ yolunu öteleyerek ($\tilde{A}\tilde{A}' = \tilde{E}\tilde{F}$ olarak) $[AA']$ durumuna getirirsek $[AEFG]$ yolu $[AA'FG]$ olur. Bu kısımda en kısa yol $[AA'G]$ dir. b yoluna gelince, $[GH]$ yi $[A'A'']$ olarak ötelediğimizde ($\tilde{A}'\tilde{A}'' = \tilde{G}\tilde{H}$ aldığımızda) yolumuz

$[AA'A''HB]$ olur. A'' sabit olup en kısa yol olarak $[AA'A''B]$ çıkar. Bu da $H = A''B \cap b$ verir. H bilinince sıra ile G, F, E bulunur.

Sonuç 1:

- a) Çift sayıda simetrilerin çarpımı bir öteleme,
- b) Tek sayıdakilerin çarpımı bir simetri

dir.

Gerçekten, simetriler $A_1, \dots, A_{2n}, A$ olsun. Teorem 1 den

a)

$$\begin{aligned} A_{2n}A_{2n-1} \cdots A_2A_1 &= (A_{2n}A_{2n-1}) \\ &\cdots (A_2A_1) \\ &= (2A_{2n-1}\tilde{A}_{2n}) \\ &\circ \cdots \circ (2A_1\tilde{A}_2) = \tilde{u} \end{aligned}$$

b) $AA_{2n} \cdots A_1 = Ao\tilde{u}$ (simetri)

Uygulama 2. Kenarlarının orta noktaları verilmiş olan beşgeni çizmek.

Çözüm: Çizimi istenilen beşgen $XYZUV$ ve kenarlarının verilen ortaları A, B, C, D, E olsun.

P herhangi bir nokta, $A(P) = P_1, B(P_1) = P_2, C(P_2) = P_3, D(P_3) = P_4, E(P_4) = P_5$ ise

$$(EoDoCoBoA)(P) = P_5$$

olup sol taraftaki beş simetrinin çarpımı bir simetri olur.

Bu simetrinin merkezi olan nokta, aranılan beşgenin X köşesi olur. (Neden?).

3. Yansımaların Çarpımı

Teorem 2.

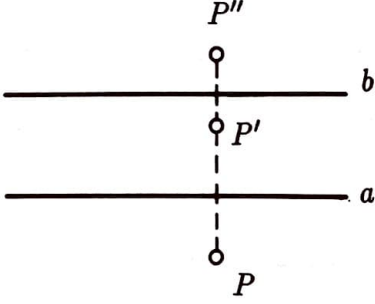
- a) Eksenleri paralel iki yansımanın çarpımı bir öteleme
- b) Eksenleri kesişenlerinki bir dönme

dir.

Bu öteleme ve dönmeyi aşağıdaki ispatta belirleyeceğiz.

İspat:

a) $a \parallel b$ ve $a(P) = P', b(P') = P''$ olsun.



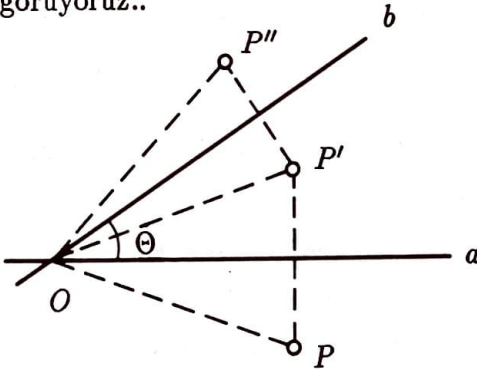
$P\vec{P}''$ vektörü a ve b ye dik, a dan b ye doğru yönlü ve uzunluğu a ile b arasındaki $|a, b|$ uzaklığının iki katı olan bir vektördür. Bu vektörü $2\vec{ab}$ olarak gösteriyoruz.
 $P\vec{P}'' = 2\vec{ab}$.

O halde

$$(2\vec{ab})(P) = P''$$

dir. P noktası a ile b arasında ya da b nin a ya göre ters tarafında alınması halinde bu eşitliğin doğruluğunu gösterebilirsiniz.

b) $a \cap b = 0$ ve $\angle(a, b) = \theta$ olsun. Şekilden, P yi doğrudan P'' ye gönderen dönmenin $(0, 2\theta)$ olduğunu görüyoruz..



Bu sonucun P nin her konumunda geçerli olduğunu gösterebilirsiniz.

Sonuç 2.

- a) Her $\vec{u}$ ötelemesi aralarındaki uzaklık $|\vec{u}|/2$ olan paralel eksenli iki yansımanın çarpımı
- b) Her $(0, \theta)$ dönmesi, 0 da kesişip aralarındaki açısı $\theta/2$ olan iki yansımanın çarpımı olarak alınabilir.

Sonuç 3. Eksenleri bir noktada kesişen

- a) Çift sayıda yansımanın çarpımı bir dönme,
 b) Tek sayıdakilerinki bir yansıma

dir.

İspat: Bir 0 noktasında kesişen yansımalar $a_1, \dots, a_{2n}, a$ olsun.

a)

$$\begin{aligned} a_{2n}a_{2n-1} \cdots a_2a_1 &= (a_{2n}a_{2n-1}) \cdots (a_2a_1) \\ &= 0(\alpha_n) \cdots 0(\alpha_1) \\ &= 0(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = 0(\alpha) \end{aligned}$$

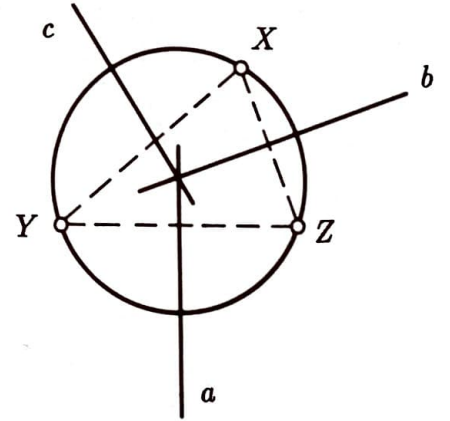
$$b) aa_{2n} \cdots a_1 = a(a_{2n} \cdots a_1) = a0(\alpha)$$

Burada Sonuç 2b den $0(\alpha)$ yerine aob dönmesi alınabilir ve

$$a0(\alpha) = a(ab) = a^2b = b$$

olur ve çarpım bir yansımadır.

Uygulama 3. Çevrel çemberi ve kenarlarının orta dikmeleri verilen bir üçgen çizmek.



Çözüm: Orta dikmeler yansıma eksenleri olarak alınırsa $(bac)(X) = X$ olur. bac çarpımı Sonuç 3b gereği bir yansımadır.

Sonuç 2b yi kullanarak ac dönmesi yerine bc' dönmesi alınırsa

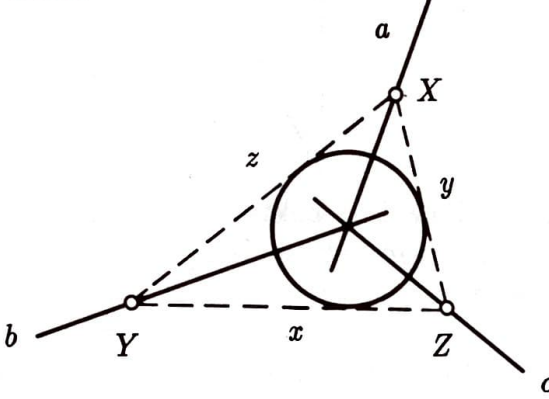
$$X = (bac)(X) = (bbc')(X) = c'(X)$$

çıkar. X noktası c' nün değişmez bir noktasıdır. O halde $X \in c'$ olup X noktası c' ile çemberin arakesiti olarak belirlenir.

c' eksenini bulmaya gelince $bc' = ac$ den $\angle(a, c) = \angle(b, c')$ elde edilir. Bu da c' nün çizimini verir.

Uygulama 4. İç çemberi ve iç açıortayları verilen bir üçgen çizmek.

Çözüm: Açıortaylar a, b, c ve kenarları x, y, z olsun.

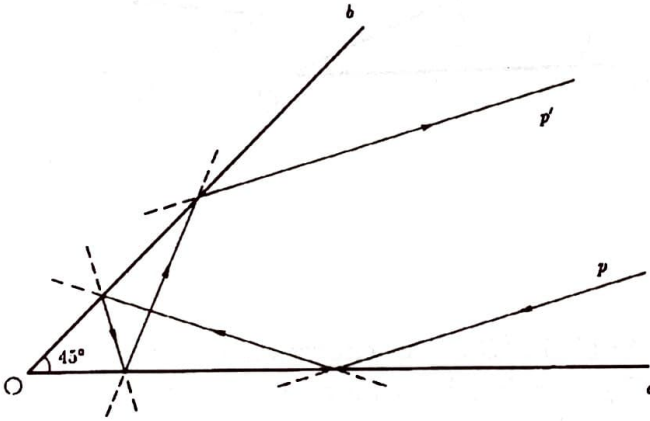


a, b, c yansıma eksenleri olarak alınırsa

$$(bac)(x) = x$$

olur. Uygulama 3'teki gibi $ac = bc'$ alınırsa $x = (bac)(x) = (bbc')(x) = c'(x)$ çıkar. O halde x doğrusu c' nün değişmez bir doğrusudur. c' nün, c' den farklı değişmez doğruları c' ye dik doğrular olup c' ye dik iki teğet doğru cevap olur.

Uygulama 5. Bir 0 noktasında kesişip aralarında 45° olan a ve b gibi iki aynadan a ya vuran bir p ışını sıra ile a, b, a, b den yansıyıp p' ışını elde edildiğine göre $p' // p$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: Bunu yansıma açılarının eşitliğinden yararlanarak açılarla gösterebilirsek de en kolay çözüm yansımaların çarpımı ile elde edilenidir.

$$\begin{aligned} p' &= (baba)(p) = (ba)^2(p) = (0, 90^\circ)^2(p) \\ &= (0, 180^\circ)(p) = 0(p) \end{aligned}$$

olup p' doğrusunun p nin 0 ya göre simetriği olduğu anlaşılır. O halde $p' // p$.

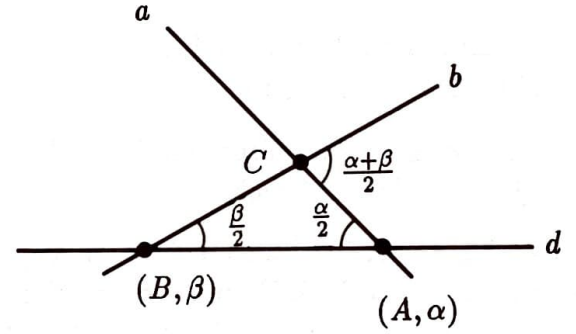
4. Dönmelerin Çarpımı

Merkezleri aynı iki dönmenin çarpımı aynı merkezli bir dönmedir. Merkezleri farklı $(A, \alpha), (B, \beta)$ gibi iki dönmenin $(B, \beta)(A, \alpha)$ çarpımını ele alalım.

Merkezler doğrusu d ise, (A, α) dönmesi yerine Sonuç 2b'den da çarpımı ve (B, β) yerine de bd çarpımı alınırsa

$$(B, \beta)(A, \alpha) = (bd)(da) = bd^2a = ba$$

elde edilir ve sonuç bir dönmedir.



Bu ba dönmesinin merkezi $c = a \cap b$ ve açısı ise

$$2\angle(a, c) = 2\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha + \beta.$$

O halde şu teoremi elde etmiş bulunuyoruz:

Teorem 3. $A(\alpha), B(\beta)$ gibi iki dönmenin $B(\beta)A(\alpha)$ çarpımı $(C, \alpha + \beta)$ dönmesi olup CAB üçgeninde

$$\angle CAB = \frac{\alpha}{2}, \angle ABC = \frac{\beta}{2}$$

dir.

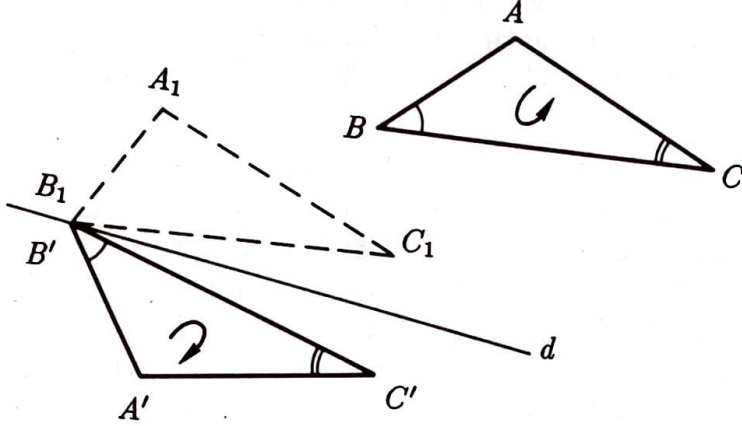
Simetri, açısı π olan bir dönme olup bir dönme ile bir simetrinin çarpımı bir dönmedir.

Öteleme, merkezi sonsuzda, açısı sıfır olan yoz bir dönme olup bir dönme ile bir ötelemenin çarpımının bir dönme olduğu beklenebilir. Bunu da şöyle gösteririz: Dönme $(A, \alpha) = qp$, öteleme de $\vec{u} = sr$ olsun.

$$\vec{a}(A, \alpha) = srqp$$

b) Üçgenler ters yönlü olsun.

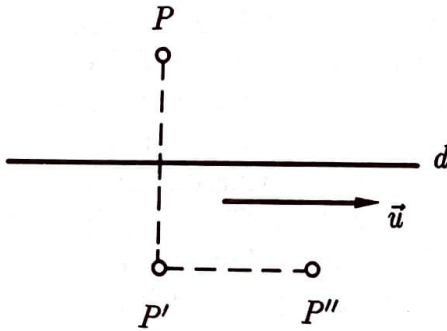
Bir öteleme ile ABC yi, B_1 ile B' çakışacak şekilde öteleyerek $A_1B_1C_1$ üçgenini elde edelim. $A_1B_1C_1$ ile $A'B'C'$ nün, A' dan geçen bir d doğrusuna göre simetrik olacakları açıktır. O halde ABC üçgenini ters yönlü eş $A'B'C'$ üçgenine dönüştüren dönüşüm bir öteleme ile bir d yansımasının çarpımıdır. Bu da yeni bir izometridir.



Öteleme $\vec{u} = A\vec{A}_1$ ve yansıma d olup yeni izometri $d\vec{u}$ olur.

Kaymalı Yansıma. d bir yansıma ve $\vec{u}$ da d ye paralel bir vektör (öteleme) ise $d\vec{u}$ çarpımına *kaymalı yansıma* adı verilir. $d\vec{u} = \vec{u}d$ olduğunu hemen görebilirsiniz.

Teorem 4. Herhangi bir öteleme ile bir yansımanın çarpımı kaymalı bir yansımadır.



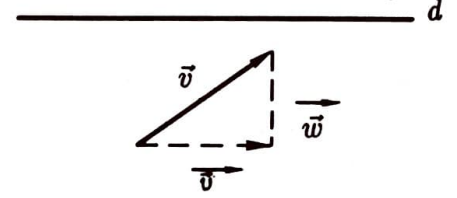
İspat: d bir yansıma ve $\vec{w}$ herhangi bir öteleme olsun. $\vec{w}$ yi $\vec{u} // d$ ve $\vec{v} \perp d$ olmak üzere $\vec{u} + \vec{v}$ olarak yazabiliriz. Bu toplam $\vec{u}\vec{v}$ çarpımı olup

$$\vec{w}d = (\vec{u}\vec{v})d$$

eşitliğinde $\vec{v}$ yerine $d'd$ aldığınızda (Sonuç 2'den)

$$\vec{w}d = \vec{u}(d'd) = \vec{u}d', \quad (d' // d)$$

bulunur ki bu bir kaymalı yansımadır.



Alıştırmalar

- Herhangi bir yansıma ile bir dönmenin
a) $(A, \alpha)a$ b) $a(0, \alpha)$
çarpımlarının kaymalı birer yansıma olduğunu ispatlayınız.
- İzometrilerin aşağıdaki çarpım tablosunda boş kutulara gelen izometrilerin adlarını bulunuz.

0	$\vec{v}$	C	(D, δ)	b
$\vec{u}$				
A				
(B, β)				
a				

- Aşağıdaki izometrilerin adlarını bulunuz.

- $A\vec{u}(0, \alpha)$
- $\vec{u}(0, \alpha)A$
- $\vec{v}\vec{u}a$
- $\vec{v}\vec{u}A$
- $b(0, \alpha)A\vec{u}$
- $CBAcba$

Bu konuya ilgi duyanlar aşağıda verdiğimiz kitaba başvurabilirler. Bu kitapta 47 tane çözümlü problem yer almaktadır.

Gelecek sayıda homoteti ve benzerlik dönüşümlerini ele alacağız.

KAYNAK

YAGLOM, I.M. "Geometrik Transformasyonlar", TMD Yayınları, Sayı: 34 (Çev: Vehbi K. Güney), İstanbul, 1969.

32. MATEMATİK OLİMPİYATLARINA DOĞRU...

Albert Erkip

Nisan ayında yapılan son seçmelerle bu yılki Matematik Olimpiyat takımımız belirlendi. Takımda Kadıköy Anadolu Lisesi'nden Emre Alkan, Gaziantep Fen Lisesi'nden Mustafa Arslan, İzmir Özel Yamanlar Lisesi'nden Tolga Etkü, TED Ankara Lisesi'nden Özgür Kişisel, İstanbul Atatürk Fen Lisesi'nden Arafat Şahin ve Eskişehir Cumhuriyet Lisesi'nden Çetin Ürtiş yer alıyor. Ekip 15-23 Temmuz'da İsveç'in Sigtuna şehrinde yapılacak 32. Uluslararası Olimpiyata katılacak.

Takım elemanları uzun bir seçme-hazırlanma döneminden geçtiler. Birkaç yıldır ülkemizde yürütülen uygulamada ilk Olimpiyat hazırlık ekibi lise 1. sınıftan sınavla seçiliyor. Hazırlık için yılda iki kez yaklaşık Eylül ve Şubat aylarında iki haftalık kamplar var. Kamp sonlarında eleme sınavları yapılıyor. Eylül-Şubat arasında yapılan ara seçme sınavı ile de hazırlık çalışmalarına sonradan katılmak mümkün. Bu uzun devreden sonra seçilen takım Mayıs ve Haziran sonlarında ikişer haftalık iki kamp daha yapıyor. Bu çalışmalarını TÜBİTAK'ın desteğiyle üniversite öğretim üeleri yürütüyor.

Olimpiyat kurallarına göre yarışmacıların üniversiteye başlamamış olmaları gerekiyor. Doğal olarak lise 3 öğrencilerinin daha şanslı olmalarına rağmen daha küçük sınıflardan da katılmak mümkün. Bu yıl ekibimizdekiler hep lise 3 öğrencisi ama örneğin Tolga Etkü ve Arafat Şahin geçen yıl da takımda yer almışlardı.

50'den fazla ülkeden 300'ü aşkın yarışmacının katılacağı Olimpiyatta takımları zorlu bir sınav bekliyor. Sınav iki bölümden oluşuyor, her bölümde 3 problem için dörtbuçuk saat süre veriliyor. Sorular katılan ülkelerin önerileri arasından son anda seçiliyor. Sınavda dil sorunu halledilmiş, yarışmacılara problemler kendi dillerine çevrilip veriliyor ve herkes soruları kendi dilinde yanıtlıyor. Yanıtlar tekrar ortak bir dile çevrilip hakemlere sunuluyor ve puanlanıyor. Verilen süre ilk bakışta 3 soru için çok gibi geliyor ama gerçekte

öyle değil. Soruların bir kısmı uzmanları bile çok zorluyor. Çözme konusunda yarışmacılar genellikle profesyonel matematikçilerden hatta soruyu hazırlayanlardan daha başarılı; çoğu kez önerilenden daha güzel, daha kestirme yanıtlar çıkıyor.

Bu yıl Olimpiyata 300'den fazla yarışmacı katılacak demistik, bunların en yüksek puan alan 20-25'i altın madalya, yaklaşık 50 kadarı gümüş ve 75'i bronz madalya alacak. Ayrıca bir soruyu tam çözen mansiyon kazanıyor. Madalya alma yüzdeye bağlı olduğundan puan sınırları yıldan yıla değişebiliyor ama örneğin altın madalya almak için ortalama 6 sorunun tümünü yanıtlamak gerekiyor. Olimpiyat her ne kadar ferdi bir yarışma olsa da her ülke toplam puanına bakıp nerede olduğunu anlamaya ve kendine bir pay çıkarmaya çalışıyor.

Türkiye 1985 yılından beri düzenli olarak hem matematik hem de buna paralel giden fizik olimpiyatlarına katılıyor. Şimdiye kadar çok sayıda bronz aldık, tek gümüş madalyamızı 1989'da Ümit Kumcuoğlu kazandı. 1989 en iyi yılımız, ortalama üç fazla tam çözümle 51 ülke arasında 16. olduk. Bu derece görüldüğünden çok daha iyi. ABD, Sovyetler Birliği, Almanya ve Doğu Avrupa ülkeleri yıllardır ilk 10-12 dereceyi aralarında paylaşmakta. Bir de son yıllarda yarışmaya katılıp hemen tepelere yerleşen Çin, Olimpiyatın büyüklerinden. Diğer ülkeler bunlar arasından sıyrılıp pek yükseklerle çıkamıyorlar. Olaya böyle bakınca 1989'da 16. olmamız gerçekten de önemli bir olay. Futbolla kıyaslırsak dünya kupası finallerinde iyi bir derece elde etmek ya da Galatasaray'ın Avrupada yarı final oynaması gibi birşey.

Peki ülkeler arasındaki bu farkı belirleyen ne? Bu yetenek ya da bilgi eksikliği değil, Olimpiyatçıların üniversite ve sonrasındaki başarıları yetenek açısından diğerlerinden hiç de farklı olmadıklarının kanıtı. Bilgi de pek farketmiyor, bu işe ciddi olarak hazırlanan tüm yarışmacılar

gerekli bilgi düzeyine erişiyorlar. Farkı belirleyen bilginin oturmuş ve olgunlaşmış olması, problem çözme becerisinin gelişmesi ve yarışma deneyimi. Yukarıda saydıklarımızın özellikle de Doğu Avrupa ülkelerinin eskiye dayanan bir matematik yarışması gelenekleri, kendi Ulusal Olimpiyatları var. Zaten Uluslararası Olimpiyat fikrini ortaya atan da bu ülkeler. Matematiğe meraklı bir öğrenci erken yaşlarda bu tür yarışmalara katılıp hem deneyimini hem de becerilerini geliştirebiliyor. Altın madalyaların da hemen hemen tümünü bu ülkeler aralarında paylaşıyorlar.

Bizim açımızdan Olimpiyat orta öğretim alışkanlıklarımıza ters düşen bir olay. Gitgide orta öğretimimiz test tipi sınavlara hazırlanmaya yönelmiş. Başarı giriş sınavlarındaki derecelerle ölçülüyor. Bu tür sınavlarda çabukluk önemli, öğrenci kısa bir süre içinde doğru yanıt kestirmek zorunda. Olimpiyatta ise bir soruya ayrılan süre birbuçuk saat. Hatta taktik yapıp 6 sorudan sadece 4 tanesini tam çözmeye çalışırsak ki bu da neredeyse gümüş için yeterli, bir problem için iki buçuk saate yakın bir süre düşüyor. Ama bu süre içinde problemin, olabilecek farklı durumların dikkatle ve sabırla irdelenmesi, gerektiğinde benzer basit problemlerin çözülüp fikrin keşfedilmesi gibi pek alışık olmadığımız işler yapmak gerekiyor.

Bu konuda ikinci büyük sorunumuz teşvik unsuru. Olimpiyat türü yarışmalar ülkemizde yok denecek kadar az, olanlar da eğitim kurumları dışında pek bir ilgi toplamıyor. Halbuki Olimpiyat takımına seçilip Türkiye'nin matematikte en iddialı ilk altısı arasına girmek bir giriş sınavında ya da bir proje yarışmasında benzer derece almak kadar yetenek ve emek gerektiriyor. Kamuoyu değil Türkiye'nin ilk altısına, Uluslararası Olimpiyat'ta madalya alanlara bile pek önem vermiyor. Kitle iletişim araçları bu tür yarışmaların ödül törenlerinde ödül alanlardan çok ödül verenleri sergiliyor. Bu durum bir taraftan öğrencilerin bu işe ilgisini azaltırken diğer taraftan da işe sevecek sarılan, takıma girme başarısını göstermiş bir öğrenciyi başka yerlerde de kendini kanıtlamaya zorluyor. ÖYS sınavı buna iyi bir örnek. Takım elemanları istedikleri bölümlere rahatça girebilecek düzey ve yetenekte öğrenciler ama işin prestiji yönünden yüksek puan tutturup dereceye girmeye çalışıyorlar. ÖYS sınavlarının tamamen farklı bir felsefede olması ise hazırlık çalışmalarını ciddi bir

biçimde engelliyor. Birçok ülke bu ikileme çözüm getirmiş. Olimpiyat takımlarına üniversite kontenjanları, burslar ayrılmış. Daha fazlası özellikle ilk dereceleri paylaşan ülkelerde takım elemanları 6 ay ya da 1 yıla varan bir hazırlık süresi için okullarından uzak bile kalabiliyorlar. Bu tür uygulamaların olması için tabii ki ilk koşul Olimpiyatların niteliğinin, öneminin kamuoyunca anlaşılması ve kabul edilmesi.

Peki Olimpiyatlara katılmak, iyi sonuç almak ne kazandırıyor? Bir kere seçme ve hazırlık olayı liselere bir yarışma havası getiriyor. Bu da hem ilgiyi hem de eğitimi canlandırıyor. Öte yandan bu hazırlıklara ve yarışmalara katılanlara önemli bir teşvik unsuru oluyor. Birçok önemli matematikçi ve bilim adamı işe böyle yarışmalarla başlamış. Türkiye'de böyle birşey gözlemek için daha yeterli zaman geçmedi ama son birkaç yıldır matematik veya fizik olimpiyatlarına ya da hazırlıklara katılan öğrenciler arasında temel bilimlere ve araştırmaya bir yönelme görülüyor. Bu öğrenciler eğitimlerini yurt içi ve yurt dışında başarıyla sürdürüyorlar, daha eskiler lisansüstü çalışmalarına başladılar. Yakında üniversitemizde eski olimpiyatçılarından oluşan kadrolar göreceğiz.

Bizim için önemli bir gelişme 1993'te Matematik Olimpiyatı'nın Türkiye'de yapılacak olması. Böyle büyük bir organizasyon tanıtma açısından Türkiye'ye çok şey kazandıracak. Matematik açısından da kamuoyunun ilgisini çekme, eğitimi canlandırma, diğer ülkelerin programlarını yakından görme gibi elde edilecek çok şey var.

Söz Olimpiyatlardan açılmışken sıkça sorulan bir soruyu da yanıtlayalım. Soru öğrenci ve öğretmenlerden geliyor: Olimpiyatlara nasıl hazırlanabiliriz, bu konuda ne tür kaynaklar var? Üzülerek söylemek gerekirse Türkçe pek bir kaynak yok. Matematik Dünyası'nda sık sık tanıtılan Matematik Derneği çevirileri dilleri eski olsa da çok şey veren iyi kitaplar. Ancak bilgiden belki daha önemli olan problem çözme yeteneği ve alışkanlığı. Bunun için de değişik düzeylerde problem kitapları gerekiyor, halbuki bu tür Türkçe bir problem kitabı yok. Hazırlık çalışmalarında yararlandığımız kaynaklar yabancı dilde, çoğu İngilizceye çevrili. "USSR Olympiad Problem Book" ve benzeri problem kitapları üniversite ve belki bazı lise kütüphanelerinde bulunabilir. TÜBİTAK'ın ya-

yınladığı 1968-1975 yıllarının Olimpiyat soru ve yanıtlarını içeren bir kitap var. Ancak kanımca bir ön hazırlık yapmadan Olimpiyat sorularına ya da çözümlerine bakmak pek işe yaramıyor. Hatta tersine soruların zor gelmesi caydırıcı bile oluyor. Hazırlık çalışmalarında sıkça kullandığımız yöntem önce basit problemleri ele alıp ana problemdeki ara adımları, buradaki fikirleri keşfetmek ya da anlamak. Bundan sonra öğrenci ya Olimpiyat problemini kendi çözebiliyor ya da çözümünden birşeyler öğrenebiliyor. Bu bakımdan gerek Olimpiyat sorularını gerekse çok yararlandığımız önerilen soruları hazırlık aşamasında daha çok yol gösterici olarak kullanmak gerek. Bazı problem kitaplarını Türkçeleştirmek önemli bir adım olacak ama bu bir insan kaynağı sorunu. Yıllardır bu işi sık sık gündeme getirmemize rağmen hazırlayıcı ekip olarak zaman bulamadık, bundan sonra da bulamayacak gibi görünüyoruz. Belki okurlarımızdan bazı öneriler gelir.

Bir de olimpiyatlardaki konulardan söz edelim. Kabaca bunları üç ana gruba ayırmak mümkün: geometri, tam sayıların özellikleri ve sayma ile ilgili sayılar teorisi ve kombinatorik dediğimiz konular, bir de analiz diye adlandırdığımız diziler, eşitsizlikler, fonksiyonlar, denklemler gibi konular. Yarışmalarda sorular yaklaşık eşit oranda bu gruplara dağılıyor. Bu konuların bir kısmı lise programlarında yok ya da az işleniyor. Tersine lise 3'te çok üzerinde durulan türev, integral olimpiyatta yok ama bunları kullanıp da çözüme varmak serbest.

Bu sayıda işin matematik yönüne eğilmedik, bari yapılan son seçme sınavının sorularını verelim.



1991 Uluslararası Matematik Olimpiyat Takımımız

1991 Olimpiyat Son Seçme Sınavı I. Bölüm

3 soru için süre 3 saattir.

1. Bir ABC üçgeninin AB, AC ve BC kenarları üzerinde sırası ile C', B' ve A' noktaları işaretleniyor.

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = k$$

olduğu bilindiğine göre, AA', BB' ve CC' doğrularının sınırladığı üçgeninin alanının, ABC üçgeni alanına oranının

$$\frac{(k-1)^2}{k^2 + k + 1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2$ denklemini sağlayacak şekilde a, b, c, d pozitif tam sayılarının bulunamayacağını gösterin.
3. a_i katsayıları $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinden olmak üzere $|x| < 1$ için tanımlı $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ fonksiyonu için $f(\frac{1}{10})$ bir rasyonel sayıdır. Tamsayı katsayılı uygun $p(x)$ ve $q(x)$ polinomları ile fonksiyonun $(|x| < 1$ için)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.

II. Bölüm

3 soru için süre 3 saattir.

4. Bir havuzun ortasında yanyana sıralanmış N -tane taşın üzerinde bir kurbağa sıçırıyor. Kurbağa bulunduğu taştan p olasılıkla soldaki, $1 - p$ olasılıkla ise sağdaki taşa sıçırıyor. En soldaki taştan sola, ya da en sağdaki taştan sağa sıçrayan kurbağa suya düşüyor. Sol baştan k -ıncı taşa bulunan kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığını p_k ile gösterirsek; $p < \frac{1}{2}$ için $p_1 > \frac{1}{2}$ olduğunu kanıtlayınız.
5. p yolcu, n vagondan oluşan bir trene içinde yolculuk edecekleri vagonu rastgele seçerek binerler. Her vagona en az bir yolcu bulunması olasılığını hesap ediniz.
6. Köşelere O, A, B, C olan bir dörtyüzlünün (üçgen piramidin) kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden (dışbükey) cismin hacmi V ve bütün kenarlarının uzunlukları toplamı U ise

$$V \leq \frac{(U - |OA| - |BC|)(U - |OB| - |AC|)(U - |OC| - |AB|)}{27 \cdot 3}$$

olacağını gösteriniz.

KURBAĞALARA YANIT

Sekizgenin köşelerini sırayla $ABCDEDE'C'B'$ olarak adlandıralım. A 'dan başlayan bir kurbağa tek sayıda sıçrama sonunda ancak B, B', D ve D' köşelerine varabilir; o halde $a_{2n-1} = 0$.

Kolaylık olsun diye A 'dan başlayıp k adımda C 'ye varan yolların sayısına (ki bu şeklin simetrisinden dolayı C' 'ne varan yolların sayısı ile aynı) x_k , A 'dan başlayıp k adımda yine A 'da biten yolların sayısına da y_k diyelim.

A 'dan başlayıp E 'de biten bir yol $A \dots CDE$ veya $A \dots C'D'E$ şeklinde olabilir. Yani $2n-2$ adımda C 'ye varan her yol için $2n$ adımda E 'ye varan bir, $2n-2$ adımda C' 'ne varan her yol için $2n$ adımda E 'ye varan yine tek bir yol var. Yani

$$a_{2n} = x_{2n-2} + x_{2n-2} = 2x_{2n-2}.$$

A 'dan C 'ye varan yollar $A \dots ABC$ veya $A \dots CBC$ ya da $A \dots CDC$ şeklinde olmalı. Yukarıdaki gibi irdelersek bunun anlamı:

$$x_{2n} = 2x_{2n-2} + y_{2n-2}.$$

A 'dan başlayıp yine A 'da biten yollar ise 4 tür olabilir: $A \dots ABA$, $A \dots AB'A$, $A \dots CBA$ veya $A \dots C'B'A$. Buradan

$$y_{2n} = 2x_{2n-2} + 2y_{2n-2}$$

elde ettik. İndislerdeki 2 çarpanından kurtulmak için:

$$X_n = x_{2n} \quad \text{ve} \quad Y_n = y_{2n}$$

dizilerini tanımlarsak

$$X_n = 2X_{n-1} + Y_{n-1}$$

$$Y_n = 2X_{n-1} + 2Y_{n-1}$$

indirgeme sistemini; Y 'leri yok edersek de:

$$X_{n+1} = 4X_n - 2X_{n-1}$$

bağıntısını buluruz. Genel çözüm

$$X_n = c(2 + \sqrt{2})^n + d(2 - \sqrt{2})^n$$

şeklindedir. Başlangıç değerleri $X_0 = 0$ (0 adımda C 'ye varan yol yok), $X_1 = 1$ (2 adımda C 'ye varan tek yol ABC). O halde

$$X_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((2 + \sqrt{2})^n - (2 - \sqrt{2})^n)$$

ve

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 2x_{2n-2} = 2X_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}) \end{aligned}$$

BİR EŞİTSİZLİK ÜZERİNE

İ. Ferit ÖKTEM

Bu yazımızda

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \quad (1)$$

çarpımının (Bkz. Matematik Dünyası C:1, S:1, A5)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n + \frac{1}{2})}} < P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (2)$$

eşitsizliklerini sağladığını göstermek istiyoruz.

Önce

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = (2n-1)!!, \quad \prod_{k=1}^n (2k) = (2n)!! \quad (3)$$

tanımlarını kullanarak

$$P_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (4)$$

yazabiliriz. Şimdi, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (5)$$

integralini gözönüne alalım:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1, \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n > 1) \quad (6)$$

bağıntılarından $n \geq 1$ için

$$I_{2n-1} = \frac{1}{2n} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

$$I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \quad (7)$$

olur. Öte yandan

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

ve (5) ten dolayı

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1} \quad (9)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece (4), (7) ve (9) sonucu

$$\frac{1}{(2n+1)P_n} < \frac{\pi}{2} P_n < \frac{1}{2nP_n} \quad (10)$$

bulunur. (10) un her yanını $\frac{2}{\pi} P_n$ ile çarptıktan sonra karekök alınırsa (2) eşitsizlikleri elde edilir.

Bu eşitsizliklerin bir sonucu olarak

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{\pi(n + \theta_n)}}, \quad 0 < \theta_n < \frac{1}{2} \quad (11)$$

koşullarını sağlayan bir θ_n sayısının varlığı ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (12)$$

bağıntısı (Wallis formülü) de ispatlanabilir.

SORULAR

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Kasım 1991 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir

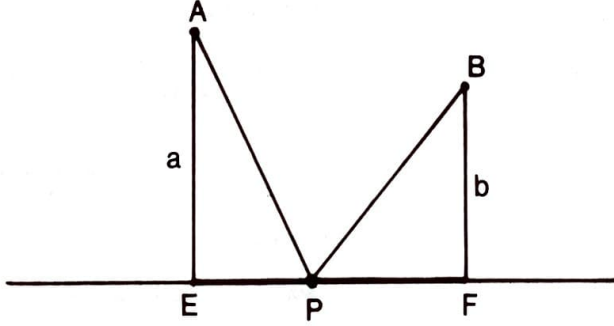
ALİŞTIRMA SORULARI

A11. A boş olmayan n ögeli bir küme olsun. Bu küme üzerinde kaç tane

- a) simetrik ve yansıyan olan,
- b) simetrik ve yansıyan olan fakat ters simetrik olmayan
- c) ters simetrik olan

bağıntı vardır? (Öneren: Namık Gök)

A12. Bir d doğrusunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta alınıyor. A ve B nin d üzerindeki izdüşümleri E, F ve d den uzaklıkları a ve b dir. ($a > b$). $[EF]$ ye ait hangi P noktası için $|AP| + |BP|$ toplamı en büyüktür? Geometrik bir ispat da verebilir misiniz? (Hazırlayan: Nadir Şener)



A13. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^4 + a(x+a)(2x+a)(3x+a)$$

olarak tanımlı f fonksiyonunun grafiğinin x -eksenini kestiği noktalarda eksene teğet olduğunu gösterip değme noktalarını bulunuz.

(Bu soru, hekim Bahri Kaderoğlu'nun bir özdeşliğinden yararlanılarak hazırlanmıştır.)

A14. $\lim_{n \rightarrow \infty} n[e^x - (1 + \frac{x}{n})^n] = ?$

(Hazırlayan: Nurettin Ergun)

A15. $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = ?$

YARIŞMA SORULARI

Y11. Düzlemde, köşeleri a, b, c karmaşık sayılarına karşılık gelen bir üçgenin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$ olduğunu gösteriniz. (Hazırlayan: H. Demir)

Y12. Kenarları a, b, c, d olan hangi dörtgenlerde $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = 0$ olur?

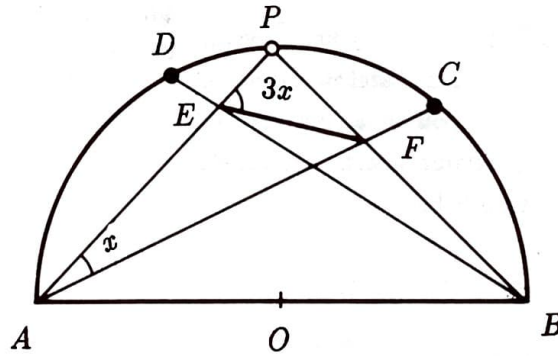
(Hazırlayan: H. Demir)

Y13. $f(x) = (1 + x + \dots + x^{2n}) - (-1)^n x^n$ polinomu, x in hangi değerleri için pozitif, hangileri için negatif, hangileri için sıfır değerler alır?

Y14. Banach'ın kibrit kutusu problemi:

Bir adam, her birinin içinde n tane kibrit bulunan iki kutu kibrit alır ve cebine koyar. Her ihtiyaç duyduğunda iki kutudan birini rastgele seçerek, bir kibrit kullanır. Aradan bir süre geçtikten sonra kutulardan birini eline alıp açtığında kutunun boş olduğunu görür. Bu sırada diğer kutuda tam olarak k tane ($0 \leq k \leq n$) kibrit kalmış olması olasılığını hesap ediniz. (Adamın boş kutudaki son kibriti kullandıktan sonra kutuyu dalgınlıkla tekrar cebine koymuş olduğu varsayılmaktadır.)

Y15. $[AB]$ çaplı bir yarıçember C, D ile eş üç parçaya bölünmüştür. $\widehat{CD}$ ye ait bir P noktasını A, B ye birleştiren doğrular BD ve AC yi E ve F de kesmektedir. $\angle CAP = x$ ise $\angle FEP = 3x$ olduğunu gösteriniz. (Hazırlayan: H. Demir)



Gönderilecek çözümlerde önemle dikkat edilmesi gereken noktalar:

- 1) Her sorunun çözümünün ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır biçimde yazılması;
- 2) Kağıdın sağ üst köşesine adınızın, soyadınızın, adresinizin ve öğrenci iseniz okul ve sınıfınızın yazılması.

ÇÖZÜMLER

A1. Ünlü Hintli matematikçi Ramanujan tarafından verilen aşağıdaki eşitliği gerçekteyiniz.

$$\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Çözüm: (Hakkı Taşkiran, ODTÜ/Ankara)

Önce her iki tarafın kübünü alalım:

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19} &= \left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^3 \\ &= \frac{5}{3} - 3\sqrt[3]{\frac{50}{27}} + 3\sqrt[3]{\frac{20}{27}} - \frac{2}{3} \\ &= 1 - \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{20}\end{aligned}$$

Sonra her iki tarafın karesini alırsak

$$\begin{aligned}7\sqrt[3]{20}-19 &= (1 - \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{20})^2 \\ &= 1 + \sqrt[3]{2500} + \sqrt[3]{400} - 2\sqrt[3]{50} + 2\sqrt[3]{20} - 2\sqrt[3]{1000} \\ &= 1 + \sqrt[3]{5^3 \times 20} + \sqrt[3]{2^3 \times 50} - 2\sqrt[3]{50} + 2\sqrt[3]{20} - 20 \\ &= 1 + 5\sqrt[3]{20} + 2\sqrt[3]{50} - 2\sqrt[3]{50} + 2\sqrt[3]{20} - 20 \\ &= 7\sqrt[3]{20} - 19.\end{aligned}$$

Not: Bu soru için verdiği çözümde Aydın Ünverdi sol yandaki $\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19}$ sayısından hareketle kendine özgü işlemlerle sonuca varmıştır. Bu hesaplama Aydın Ünverdi'nin yeteneğini kanıtlamaktadır, ancak bu yeteneği daha yararlı biçimde kullanmasını bekliyoruz.

A2. a ve b gerçel sayılar olduğuna göre

$$(a+b)^2x^2 - (a+b)^3x + 2ab(a^2+b^2) = 0$$

denkleminin gerçel köklerinin varlığını gösteriniz, bu kökler için $x_1 \geq x_2$ alarak x_1 ve x_2 yi belirleyiniz.

Çözüm: (S. Gökçen Şen, Erzurum Anadolu Lisesi)

$a+b \neq 0$ ise

$$(a+b)^2x^2 - (a+b)^3x + 2ab(a^2+b^2) = 0 \text{ dan}$$

$$x^2 - (a+b)x + \frac{2ab(a^2+b^2)}{(a+b)(a+b)} = 0$$

ve dolayısıyla kökler

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}, \quad \frac{2ab}{a+b}$$

çıkar. $a+b > 0$ ise bu sayılardan birincisi daha büyük olacağından

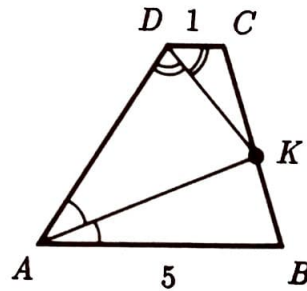
$$x_1 = \frac{a^2+b^2}{a+b}, \quad x_2 = \frac{2ab}{a+b}$$

olur. $a+b < 0$ ise

$$x_1 = \frac{2ab}{a+b}, \quad x_2 = \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

olacaktır. $a+b = 0$ ise ancak $a = b = 0$ iken çözüm vardır ve bu durumda her gerçel sayı çözümdür.

A3. Aşağıda çizilmiş yamukta A ve D açılarının açıortayları BC üzerinde kesismektedir. Birbirine paralel kenarların uzunlukları $|DC| = 1$, $|AB| = 5$ olduğuna göre $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?



Çözüm: (Barış Tuncer - Onur Kutlu - Aşkın Baş, Ankara)

K noktasından AB ye paralel doğru çizerek AD ile L de kesiştirelim.

$$m(\angle D\hat{K}K) = m(\angle D\hat{K}L)$$

$$m(\angle B\hat{A}K) = m(\angle L\hat{K}A)$$

olup LKD ve LAK ikizkenar üçgen olurlar. O halde $|LD| = |LK| = |LA|$, $|DL| = |LK|$ nede niyle $[LK]$ orta tabandır ve

$$|LK| = \frac{|DC| + |AB|}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \Rightarrow |AD| = 2|KL| = 6.$$

A4. a, b ve c pozitif gerçel sayılar ise

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

olacağını gösteriniz. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $a = b = c$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: (K. Önder Yıldırım, Şehitkamil/Gaziantep)

x ve y gerçel sayılar olsun. $(x - y)^2 \geq 0$ den $x^2 + y^2 \geq 2xy$ olur, eşitlik yalnızca $x = y$ için doğrudur.

Bu bilgiyi kullanarak, a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\begin{aligned} b^2a^2 + c^2a^2 &\geq 2a^2bc \\ c^2b^2 + a^2b^2 &\geq 2b^2ca \\ a^2c^2 + b^2c^2 &\geq 2c^2ab \end{aligned}$$

elde edip bunları taraf tarafa toplayalım:

$$2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 2abc(a + b + c).$$

Her iki tarafı abc ye bölersek istenilen eşitsizlik elde edilir.

A5. Her n pozitif tamsayısı için

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (Necmi Aydın Ünverdi, Kadıköy/İstanbul)

$$\begin{aligned} M &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \end{aligned}$$

diyelim.

$$N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

ifadesini oluşturalım. N 'deki her çarpan, M 'de aynı sırada bulunan çarpandan büyüktür. Yani

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}.$$

O halde N çarpımı, M çarpımından büyük olmalıdır. Yani $M < N$ yazabiliriz.

Bu eşitsizliğin her iki tarafını M ile çarpalım. $M > 0$ olduğu için eşitsizlik yön değiştirmez.

$$M^2 < \frac{1}{2n+1} \Rightarrow M < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

olur. Bu da aranılan sonuçtur.

Not: Soru tümevarımla da kolayca çözülebilir.

Y1.

$$\frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

sayısını a ve n pozitif tamsayı olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ biçiminde yazınız.

Çözüm: (Mehmet Serttuna, Manisa)

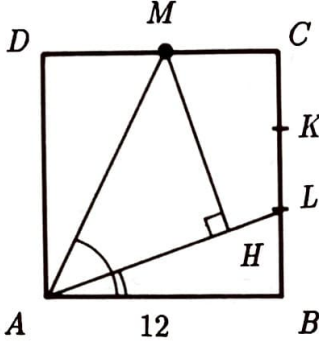
Verilen pozitif sayı A ile gösterilip her iki tarafın karesi alındığında

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}} \\ &= 2 \frac{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}} = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer çözenler: Aşkın Baş (Ankara), Atasağın Baykal (Yenişehir/Ankara), Adem Çavdar, Necip Çeldir (Aydın), C. Alparslan Ertuğ (Beylerbeyi/İstanbul), Onur Kutlu (Ankara), Murat Limoncu (ODTÜ/Ankara), Doğan Mersin (Avcılar/İstanbul), Ahmet Ok (Kızıltoprak/İstanbul), Barış Tuncer (Ankara), N. Aydın Ünverdi (Kadıköy/İstanbul), Alim Yılmaz (Balıkesir).

Y2. Şekilde $ABCD$ bir kare olup $|DM| = |MC|$, $|CK| = |KL| = |LB|$ ve $MH \perp AL$ dir. $AB = 12\text{cm}$ ise $\triangle MAH$ üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?



Çözüm I: (Veli Mutlukan, Zeytinburnu / İstanbul)

$$S(\triangle DAM) = a \Rightarrow \tan a = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$S(\triangle LAB) = b \Rightarrow \tan b = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Buradan $S(\triangle MAH) = S(\triangle HMA) = 45^\circ$ ve $|MH| = |AH|$ elde edilir. $\triangle ADM$ dik üçgeninde $|MA|^2 = |AD|^2 + |DM|^2 = 144 + 36 = 180$ ve dolayısıyla $|MH|^2 = |AH|^2 = \frac{180}{2} = 90$ ve sonuç olarak

$$\text{Alan}(\triangle HAM) = \frac{90}{2} = 45\text{cm}^2$$

olur.

Çözüm II: (Murat Silahlı, Ortaokul öğrencisi, İskenderun)

Verilenlerden

$$|LB| = \frac{12}{3} = 4, |MC| = \frac{12}{2} = 6, |CL| = 12 - 4 = 8$$

ve Pisagor teoremi uyarınca

$$|AL| = \sqrt{|AB|^2 + |BL|^2} = 4\sqrt{10}$$

$$|ML| = \sqrt{|MC|^2 + |CL|^2} = 10$$

alanlar ise

$$A(ABCM) = \frac{(12+6)12}{2} = 108$$

$$A(\triangle ALB) = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24$$

olduğundan

$$A(\triangle ALM) = 108 - 48 = 60$$

bulunur ve $\frac{|AL| \cdot |MH|}{2} = \frac{4\sqrt{10}|MH|}{2} = 60$ dan $|MH| = \frac{30}{\sqrt{10}}$ çıkar. Yine Pisagor teoreminden

$$\begin{aligned} |AH| &= \sqrt{|MA|^2 - |MH|^2} \\ &= \sqrt{|MD|^2 + |AD|^2 - |MH|^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 12^2 - 90} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$A(\triangle MAH) = \frac{|AH| \cdot |HM|}{2} = \frac{30}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{2} = 45$$

olur. Demek ki

$$A(\triangle MAH) = 45\text{cm}^2$$

Diğer çözenler: Erkut Acar (Eskişehir), Ahmet Akar (Tuzla/İstanbul), Gülperi Akarca (Göztepe/İstanbul), Ziya Artom (Çanakkale), Emre Ay (İstanbul), Murat Aygen (Çankaya/Ankara), Aşkın Baş (Ankara), Atasagun Baykal (Yenişehir/Ankara), Ömer Bilgiçli, Ferhan Bulun (Kazasker/İstanbul), S. Kadir Çelik (İncirli/Ankara), Necip Çeldir (Aydın), Münezzar Demirbilek (Lüleburgaz), Doğan Dikmen (Bursa), Mehmet Durmuş (Hopa/Artvin), C. Alparslan Ertuğ (Beylerbeyi/İstanbul), Tuğba Gezgini (Nazilli/Aydın), Namık Gök (Güzelbahçe/İzmir), Cem Güray (Çanakkale), Hasan Gürlü, Erdal Kalafat (Oltu/Erzurum), Aziz Kalender (Tokat), Bayram Karaahmetoğlu (Gerçüş/Batman), A. Kıvanç Karagöz (Bursa), Aslı Karahan, Evin Koç (Ankara), Şadi Kıpuz (ODTÜ/Ankara), Onur Kutlu (Ankara), Murat Limoncu (ODTÜ/Ankara), Ahmet Menteş (Aydın), Doğan Mersin (Avcılar/İstanbul), Ahmet Ok (Kızıltoprak/İstanbul), Nazan Palaz (Aydın), Mehmet Sertuna (Manisa), Murat Silahlı (İskenderun), S. Gökçen Şen (Erzurum), Hakkı Taşkıran, Barış Tuncer (Ankara), Aydın Uysal (Manisa), N. Aydın Ünverdi (Kadıköy/İstanbul), Tolga Yalçı (İzmit), Ufuk Yavuz (İstanbul), K. Önder Yıldırım (Gaziantep), Serap Yılmaz (Trabzon).

$$\mathbf{Y3.} \cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{4\pi}{17} \cos \frac{8\pi}{17} = ?$$

Çözüm: (Ahmet Ok, Kızıltoprak/İstanbul)

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ eşitliğinden $\sin \alpha \neq 0$ olduğunda $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ elde edilir. Bu eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{4\pi}{17} \cos \frac{8\pi}{17} &= \frac{\sin \frac{2\pi}{17}}{2 \sin \frac{\pi}{17}} \frac{\sin \frac{4\pi}{17}}{2 \sin \frac{2\pi}{17}} \frac{\sin \frac{8\pi}{17}}{2 \sin \frac{4\pi}{17}} \frac{\sin \frac{16\pi}{17}}{2 \sin \frac{8\pi}{17}} \\ &= \frac{\sin \frac{16\pi}{17}}{2^4 \sin \frac{\pi}{17}} = \frac{\sin \frac{16\pi}{17}}{16 \sin \frac{\pi}{17}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \frac{16\pi}{17}}{16 \sin \frac{\pi}{17}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{17})}{16 \sin \frac{\pi}{17}} = \frac{1}{16}$$

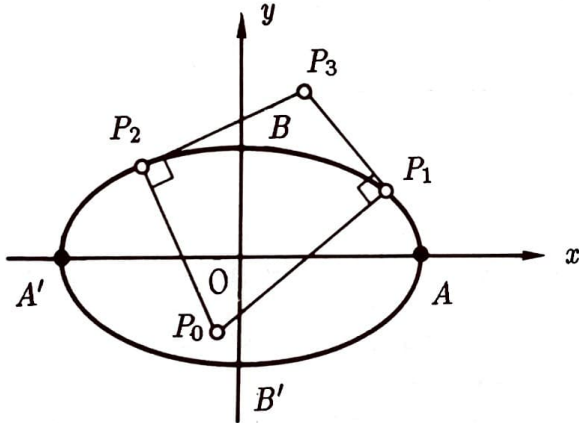
bulunur.

Diğer çözenler: Aşkın Baş (Ankara), Atasığın Baykal (Yenişehir/Ankara), Necip Çeldir (Aydın), C. Alparslan Ertuğ (Beylerbeyi/İstanbul), Tuğba Gezgin (Nazilli/Aydın), Namık Gök (Güzelbahçe/İzmir), Onur Kutlu (Ankara), Murat Limoncu (ODTÜ/Ankara), Veli Mutlukhan (Zeytinburnu/İstanbul), Ünsal Önder (Şirinyer/İzmir), Nazan Palaz (Nazilli/Aydın), Mehmet Serttuna (Manisa), Ertan Toprakbastı (Samsun), Barış Tuncer (Ankara), N. Aydın Ünverdi (Kadıköy/İstanbul), Ufuk Yavuz (İstanbul), K. Önder Yıldırım (Gaziantep).

Y4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi veriliyor. Elips üzerinde A, A', B, B' den farklı $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları alınıyor. Bu noktalardaki normallerin kesim noktası $P_0(x_0, y_0)$ ve teğetlerin kesim noktası

$$P_3(x_3, y_3) \text{ ise } \frac{x_1 x_2 x_3}{x_0} + \frac{y_1 y_2 y_3}{y_0} = a^2 + b^2$$

olacağını gösteriniz. (H. Demir)



Çözüm: (Doğan Mersin, Avcılar/İstanbul)

P_1 noktasındaki teğetin denklemi: $a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$

P_2 noktasındaki teğetin denklemi: $a^2 y_2 y + b^2 x_2 x = a^2 b^2$

Bu iki denklem ortak çözümlerse x_3, y_3 koordinatlarını elde ederiz. Bu da bize

$$x_3 = \frac{a^2(y_1 - y_2)}{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}, \quad y_3 = \frac{b^2(x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

verir.

P_1 noktasındaki normalin denklemi: $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$

P_2 noktasındaki normalin denklemi: $y - y_2 = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2} (x - x_2)$

Bu denklemleri ortak çözersek x_0, y_0 koordinatlarını buluruz.

$$x_0 = \frac{(a^2 - b^2)(y_1 - y_2)x_1 x_2}{a^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)},$$

$$y_0 = \frac{(a^2 - b^2)(x_2 - x_1)y_1 y_2}{b^2(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{x_1 x_2 x_3}{x_0} &= x_1 x_2 \frac{a^2(y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \frac{a^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(a^2 - b^2)(y_1 - y_2)x_1 x_2} \\ &= \frac{a^4}{a^2 - b^2} \\ \frac{y_1 y_2 y_3}{y_0} &= y_1 y_2 \frac{b^2(x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \frac{b^2(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{(a^2 - b^2)(x_2 - x_1)y_1 y_2} \\ &= \frac{-b^4}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

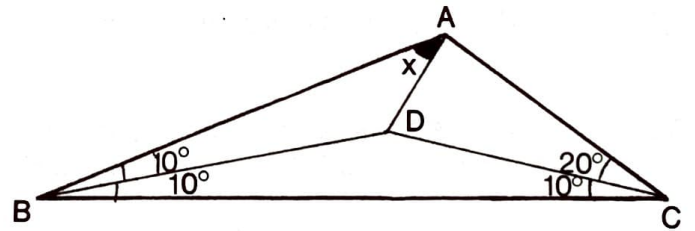
buradan

$$\begin{aligned} \frac{x_1 x_2 x_3}{x_0} + \frac{y_1 y_2 y_3}{y_0} &= \frac{a^4}{a^2 - b^2} - \frac{b^4}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

bulunur.

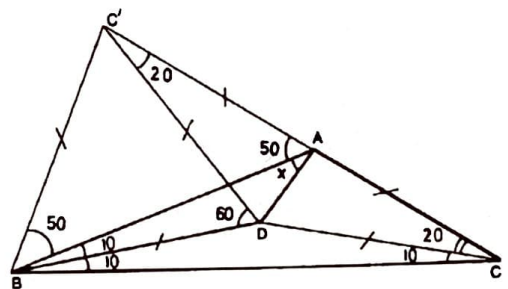
Diğer çözenler: Mehmet Serttuna (Manisa), N. Aydın Ünverdi (Kadıköy/İstanbul).

Y5. Bir ABC üçgeninde bir D noktası köşelere birleştirilmiştir. Şekilde belirtilen açılar verilmiş olduğuna göre x açısı kaç derecedir? (H. Demir)



Çözüm I: (Murat Limoncu, ODTÜ, Ankara)

Bu ilginç çözüm ortaokul düzeyindedir. D merkez ve $|DC|$ yarıçaplı çember AC 'yi C ve C' de kessin. Bu durumda $\angle AC'D = 20^\circ$ ve $|DB| = |DC| = |DC'|$ olur.

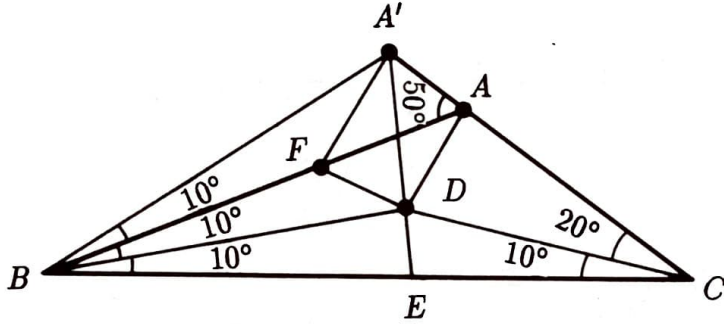


$C'DBC$ dörtgeninin iç açıları toplamı 360° olup

$\angle C'DB = 60$ dir. Bu nedenle $C'BD$ üçgeni eşkenardır. O halde $\angle C'BA = 60 - 10 = 50$ ve $\angle C'AB = 20 + 30 = 50$ olup $|C'A| = |C'B| = |C'D|$ çıkar. Öyle ise $C'DA$ üçgeni, tepesi C' olan ikizkenar bir üçgen olup taban açısı 80° dir. Bu da $x = 80 - 50 = 30$ verir.

Çözüm II: (Fikri Gökdağ, Gazi Üniv.)

Taban açıları 30° ve tepe açısı 120° olan ikizkenar $A'BC$ üçgenini çizelim. DBC ikizkenar olup $[A'E]$ yüksekliği D den geçer.



$A'BD$ üçgeninin A', B, D açıları $60^\circ, 20^\circ, 100^\circ$ dir. A' açısının açıortayı B ninkini F de keserse DF bir açıortaydır ve $\angle A'DF = 50^\circ$ elde edilir.

$AA'FD$ dörtgeni, $\angle A'DF = 50^\circ, \angle A'AF = 50^\circ$ nedeniyle bir kirişler dörtgenidir. O halde $\angle DAF = \angle DA'F = 30^\circ$.

Çözüm III: (Necip Çeldir, Aydın / Murat Serttuna, Manisa)

Yukarıdaki şekilde $A'BD$ üçgeninde BA iç açıortay ve $A'A$ dış açıortay olduğundan DA da bir dış açıortaydır.

Necip Çıldır, A nın bir dış merkez oluşundan yararlanarak A nın $[BD]$ yi gördüğü x açısının A' nın gördüğü 60° 'lik açının yarısı olduğu sonucuna varmaktadır.

Murat Serttuna ise $\angle ADA' = \angle ADK$ eşitliğini kullanarak

$$\angle ADA' = \angle ALA' - x = (60 + 10) - x = 70 - x$$

ve $\angle KDA = x + 10$ dan $70 - x = x + 10$ eşitliğine ve buradan da $x = 30$ değerine varmaktadır.

Çözüm IV: (Serap Göğüş, İstanbul)

ABC üçgeninin çevrel merkezi O ise $\angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$ olup ikizkenar OAB üçgeni eşkenardır. O halde bu üçgende AD nin açıortay, ya da $|DB| =$

$|DO|$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 2(\angle ABC + \angle ACB) \\ &= 100^\circ \Rightarrow \angle DOB = 50^\circ\end{aligned}$$

Öte yandan $\angle DBO = 60^\circ - 10^\circ = 50^\circ$ olup $|DB| = |DO|$ elde edilmiş olunur.

Çözüm V: (Ahmet Ok, Kızıltoprak/İstanbul)

$|DA| = d, |DB| = |DC| = u$ koyup ABD, ADC üçgenlerine sinüs teoremi uygulandığında

$$\frac{\sin x}{u} = \frac{\sin 10}{d}, \quad \frac{\sin(130 - x)}{u} = \frac{\sin 20}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(130 - x)}{\sin x} = 2 \cos 10$$

$$\Rightarrow \sin(130 - x) = 2 \cos 10 \sin x$$

$$\Rightarrow \sin(50 + x) = \sin(10 + x) - \sin(10 - x)$$

$$\Rightarrow \sin(50 + x) + \sin(10 - x) = \sin(10 + x)$$

$$\Rightarrow 2 \sin 30 \cos(20 + x) = \sin(10 + x)$$

$$\Rightarrow \cos(20 + x) = \sin(10 + x)$$

$$\Rightarrow 20 + x + 10 + x = 90$$

$$\Rightarrow x = 30$$

Diğer çözenler: Nihat Akkurt (Karşıyaka/İzmir), Murat Aygen (Çankaya/Ankara), Aşkın Baş (Ankara), Atasagun Baykal (Yenişehir/Ankara), Necip Çeldir (Aydın), C. Alparslan Ertuğ (Beylerbeyi/İstanbul), Onur Kutlu (Ankara), Murat Limoncu (ODTÜ/Ankara), Ahmet Menteş (Afyon), Doğan Mersin (Avclar/İstanbul), Ahmet Ok (Kızıltoprak/İstanbul), Mehmet Serttuna (Manisa), R. Can Tekinel (ODTÜ/Ankara), Barış Tuncer (Ankara), N. Aydın Ünverdi (Kadıköy/İstanbul), M. Necati Üstünay (Ankara), K. Önder Yıldırım (Gaziantep).

$$2^{592} = 2592$$

WARING PROBLEMİ

Alev Topuzoğlu

Geçen sayıdaki yazımızda kenarları tamsayı olan dik üçgenlerden bahsetmiştik. Böyle üçgenleri *Pisagor Üçgenleri*, $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısını sağlayan (a, b, c) pozitif tamsayı üçlülerini de *Pisagor Üçlüler* olarak adlandırmıştık. a, b nin en büyük ortak böleni 1 ise (a, b, c) üçlüsüne *Temel Pisagor Üçlüsü* denir.

Temel Pisagor Üçlülerinin tümünün, biri tek biri çift, birbirlerine göre asal (x, y) pozitif tamsayı ikililerinden $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$, $c = x^2 + y^2$ eşitlikleri yoluyla elde edebileceğimizi de biliyoruz ([6], Teorem A). (x, y) ikilisine (a, b, c) nin doğuranı denir. Pisagor üçlülerinin doğuranlarıyla elde edilebileceğini Mezopotamyalılar, Pisagorcular biliyordu. Eski Yunan Matematiğinin "Geç İskenderiye Dönemi" (ya da Gümüş Dönemi; M.S. 250-350) matematikçilerinin en ünlüsü İskenderiyeli **Diofant** da kuşkusuz bunu biliyordu. Hatta (x, y) 'den (a, b, c) 'yi elde etme yöntemi için özel bir sözcük kullanıyordu. Bu, "biçim vermek" anlamına gelen " $\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\epsilon\upsilon$ " sözcüğüydü. Diofant'ın yaşamı hakkında İskenderiye Okulu'nda olması dışında kesin birşey bilinmiyor. M.S. 3. yüzyılda yaşamış olduğu sanılıyor. Diofant üç kitap yazdı. Bunlardan "Porizmalar" (Önergeler) kayboldu. "Polygonal Sayılar Üzerine" adlı kitabın sadece kısa bir parçası zamanımıza kaldı. Yüzyıllar sonra Sayılar Teorisinin gelişmesine önemli katkısı olan 13 ciltlik "**Aritmetik**" adlı kitabın ise sadece 6 cildi zamanımıza kadar geldi.

Aritmetik ($\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}$) sözcüğü *Eski Yunanca'da sayı anlamına gelen "arimos" sözcüğünden türetilmiş. Eski Yunanlılar "sayıların özelliklerinin sistematik bir şekilde incelenmesi" için aritmetik sözcüğünü, günlük hesaplamalar için ise lojistik* ($\lambda\omicron\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}$) sözcüğünü kullanırlardı.

Diofant'ın "Aritmetik" kitabında 130 kadar problem var. Bu problemlerde cebirsel denklemler

ve denklem sistemlerinin *tamsayı veya rasyonel* çözümleri bulunuyor. Kitaptan birkaç örnek verelim:

Problem 29, Cilt II: Öyle iki (rasyonel) kare sayı bulunuz ki çarpımlarına sayılardan herhangi birini ekleyince, sonuç gene kare olsun.

Problem 7, Cilt III: Öyle üç (rasyonel) sayı bulunuz ki üçünün toplamı ve herhangi ikisinin toplamı kare sayılar olsun.

Problem 11, Cilt IV: Öyle iki (rasyonel) sayı bulunuz ki toplamları, küplerinin toplamına eşit olsun.

Diofant'ın konuyu ilk ortaya atan kişi olması nedeniyle zamanımızda tamsayı veya rasyonel sayı çözümlerin arandığı cebirsel problemlere "**Diofant Problemleri**" denir.

"Aritmetik"in III. cildinde 19. problem ise **Hipotenüsü aynı (65) olan 4 ayrı Pisagor üçgeninin bulunması**. Diğer bir deyişle $a^2 + b^2 = 65^2$ eşitliğini sağlayan 4 ayrı $(a, b, 65)$ üçlüsünün bulunması. Diofant, önce bu üçgenlerden ikisini, bilinen Pisagor üçgenlerinden kolayca elde ediyor; $(3, 4, 5)$ üçlüsünün 13 katı yani $(3 \times 13, 4 \times 13, 5 \times 13) = (39, 52, 65)$ üçgeni ile $(5, 12, 13)$ üçlüsünün 5 katı yani $(5 \times 5, 12 \times 5, 13 \times 5) = (25, 60, 65)$ üçgenini buluyor. Diğer iki üçgeni ya da üçlüyü bulmak için doğuranları kullanıyor. $x^2 + y^2 = 65$ olacak şekilde (x, y) ikililerini buluyor. $65 = 7^2 + 4^2$ eşitliğinden $x = 7, y = 4$ alarak $(2xy, x^2 - y^2, x^2 + y^2) = (56, 33, 65)$ üçlüsünü ve $65 = 8^2 + 1^2$ eşitliğinden $x = 8, y = 1$ alarak $(16, 63, 65)$ üçlüsünü elde ediyor. Son iki üçlü temel Pisagor üçlüleridir. İlk ikisi ise değil.

(65'in bir temel Pisagor Üçgeninin hipotenüsü olabilmesi için iki karenin toplamı olarak yazılabilmesi gerektiğine dikkat edin!)

Diofant çözümünden sonra şunu ekliyor;

“65 iki karenin toplamı olarak iki değişik şekilde yazılabilir. Bu 65’in, kendileri de iki karenin toplamı olarak yazılabilen 5 ile 13 sayılarının çarpımı olmasındandır”;

$$65 = 5 \cdot 13 = (4^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)$$

Diofant burada şu denkleği kullanıyor;

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2)(z^2 + t^2) &= (ut + yz)^2 + (uz - vt)^2 \\ &= (ut - vz)^2 \\ &\quad + (uz + vz)^2 \end{aligned} \quad (0.1)$$

$u = 4, v = 1, z = 3, t = 2$ alırsanız

$$65 = 5 \cdot 13 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$$

bulursunuz.

Diofant’ın (1) denkleğini Önermeler kitabında kanıtlandığı sanılıyor.

(1) denkleğinin $z = t = 1$ özel durumu yani

$$2(u^2 + v^2) = (u + v)^2 + (u - v)^2 \quad (0.2)$$

denkleği Öklid’in “Elementler” kitabında kanıtlanmıştır (Cilt II, Önerme 9).

Şimdi “Aritmetik”’in yazılışından yaklaşık 1300 yıl sonra Fransa’dayız. 1621 yılında matematikçi olmamakla beraber matematiğe çok ilgi duyan Claude Gasper Bachet, “Aritmetik”’in Yunanca aslını Latinceye çevirisi ve kendi fikirlerini de ekleyerek yayınladı. Bachet, (Başe okunur) yukarıda değindiğimiz III. Ciltteki 19. Problem-den sonra şu soruyu soruyordu; *Bir sayı kaç değişik Pisagor Üçgeninin hipotenüsü olabilir?*

Bu soruya yanıtın önemli kısmı Pierre Fermat’nın 1640’ta Mersenne’e (Mersenne asal sayılarını duymuşsunuzdur belki!) yazdığı mektupta.

Fermat (Ferma okunur) 1601’de doğdu. Hukuk eğitimi gördü, 1631’de Toulouse parlamentosuna üye seçildi ve 1665’te ölümüne değin bu görevde kaldı. Fermat çok iyi bir eğitim almıştı, Latince, Yunanca, İtalyanca ve İspanyolca biliyor ve çeşitli dillerde şiir yazıyordu. Kitap toplamaya meraklıydı. Kitapları arasında Bachet’nin yayınladığı “Aritmetik” de vardı.

Fermat’nın matematiğini büyük ölçüde zamanın matematikle ilgilenen diğer ünlülerine gönderdiği mektuplardan ve “Aritmetik” kitabının sayfalarındaki boş yerlere yazdığı notlardan öğreniyoruz. Oğlu Samuel Fermat, babasının ölümünden sonra 1670 yılında “Aritmetik” kitabını babasının sayfa aralarına yazdığı notlarla birlikte yayınladı. Aşağıda bu kitabın kapak sayfasını görüyorsunuz.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

*CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI P. C.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.*

*Accedit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs ciuilem D. de FERMAT Epistolis.*



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSCH, à Regione Collegij Societatis Iesû.
M. DC. LXX.

Bachet’nin sorusuyla ilgili yanıtlanması gereken problem hangi sayıların iki karenin toplamı olarak yazılabileceğidir. Önce *hangi asal sayıların* iki karenin toplamı şeklinde yazılabileceği sorusu var. 5, 13, 17 sayıları Pisagor üçgenlerinin hipotenüsleri, başka bir deyişle iki karenin toplamı. Ancak hipotenüsü 7 veya 11 olan Pisagor üçgenleri yok. 5, 13, 17 sayılarının ortak özelliği nedir? Tahmin edebilir misiniz? Bu sayıların herbirinin tek olduğu yani 2’ye bölününce kalanın 1 olduğu açık. Ya 4’e bölününce? $5 = 1 \cdot 4 + 1$, $13 = 2 \cdot 4 + 1$, $17 = 4 \cdot 4 + 1$; kalan yine 1.

Diğer yandan $7 = 1 \cdot 4 + 3$, $11 = 2 \cdot 4 + 3$; kalan 3. (Bir tek sayı 4'e bölündüğünde kalanın ya 1 ya da 3 olacağını anımsayınız.) O halde 5, 13, 17 sayıları uygun bir n için $4n+1$ şeklinde yazılabilir. 7, 11 ise yazılamaz. Evet, tahmininiz doğru; " **$4n+1$ formundaki asal sayılar iki karenin toplamı olarak (tek şekilde) yazılabilir.**" (Fermat, 1640) Bu önermenin kanıtını vermeyeceğiz (Bkz. [3]). Ancak " **$4n+3$ şeklindeki asal sayılar iki karenin toplamı şeklinde yazılamaz**" önermesinin kanıtı kolay;

$p = 4n + 3$ bir asal sayı olsun. p 'nin iki kare toplamı $p = x^2 + y^2$ olduğunu kabul edelim. $4n + 3$ tek olduğuna göre x^2 ve y^2 'nin ikisi de tek veya ikisi de çift olamaz. y^2 tek olsun. Bu durumda x^2 çift, dolayısıyla x çifttir. Yani $(x^2)/4$ bir tamsayıdır. $4n = x^2 + y^2 - 3$ olduğuna göre $n = (x^2)/4 + (y^2 - 3)/4$ buluruz, n ve $(x^2)/4$ tamsayı olduklarına göre $(y^2 - 3)/4$ de bir tamsayıdır. Bu sayıya k diyelim. $(y^2 - 3)/4 = k$, $y^2 - 3 = 4k$, $y^2 = 4k + 3$ olur. y^2 tek olduğuna göre y de tektir; $y = 2m + 1$ şeklinde yazılabilir. $y^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$ elde ederiz ki bu da $y^2 = 4k + 3 = 4(m^2 + m) + 1$ çelişkisini verir. O halde baştaki $4n + 3 = x^2 + y^2$ kabulümüz olanaksızdır.

Yukarıdaki (1) ve (2) denkliklerinden 2 ile $(4n + 1)$ formundaki asalların çarpımının iki kare toplamı olacağı açık. Ayrıca herhangi bir k tamsayısı için $k^2(x^2 + y^2) = k^2x^2 + k^2y^2 = (kx)^2 + (ky)^2$ eşitliğinden şu sonuca varabiliriz:

N herhangi bir tamsayı, içindeki en büyük kare çarpan m^2 ve $N = N_0 m^2$ olsun. Eğer N_0 , 2 ile $4n + 1$ formundaki asalların çarpımı ise N , 2 karenin toplamı şeklinde yazılabilir. Bu durumda N sayısının kaç değişik şekilde karelerin toplamı olarak yazılabileceği ise N 'nin asal çarpanlarının sayılarına ve kuvvetlerine bağlı ([7]). Bu yazıda sadece birkaç örnekle yetineceğiz;

$$(1) \quad 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 5 \cdot (4 \cdot 3)^2 = 5 \cdot 12^2$$

$$\text{ve } 5 = 4 \cdot 1 + 1$$

olduğu için 720 iki karenin toplamıdır;

$$720 = 12^2 \cdot 5 = 12^2(2^2 + 1) = 24^2 + 12^2.$$

2) $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = (4 \cdot 1 + 1)(4 \cdot 3 + 1)(4 \cdot 4 + 1)$ olduğu için iki karenin toplamıdır. 1105, 4 ayrı şekilde iki karenin toplamı olarak yazılabilir. (1)

denkliğini kullanarak

$$5 \cdot 13 = 8^2 + 1 = 7^2 + 4^2$$

$$5 \cdot 17 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$$

$$13 \cdot 17 = 14^2 + 5^2 = 11^2 + 10^2$$

$1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$ elde ederiz.

3) $99 = 3^2 \cdot 11$ ise iki karenin toplamı değildir çünkü $11 = 4 \cdot 2 + 3$.

Öyleyse herhangi bir sayıyı karelerin toplamı olarak yazabilmek için 2 kare yeterli olmayabilir. Acaba 3 kare yeterli midir? Örneğin $43 = 4 \cdot 10 + 3$ iki kare toplamı değil fakat

$$43 = 5^2 + 3^2 + 3^2.$$

Ancak 47 sayısını incellerseniz 47'nin 2 karenin hatta 3 karenin toplamı olarak yazılamayacağını görürsünüz, ama 4 karenin toplamı olarak (iki şekilde) yazılabilir;

$$\begin{aligned} 47 &= 6^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 5^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 \end{aligned}$$

Bachet, her sayının en fazla 4 karenin toplamı olarak yazılabileceğini iddia etti. Aslında Diofant da bunu bazı problemlerin çözümünde kullandı. Fermat "Aritmetik" kitabına yazdığı notlardan birinde bu iddianın doğruluğunu kanıtladığını söylüyordu. Rober- val'e yazdığı bir mektupta kanıt için (gelecek sayıda değineceğimiz) sonsuz azalma yöntemini kullandığını söylüyor ve ekliyor:

"... Sayılar teorisinde başka hiçbir şey bu teoremin kanıtı kadar hoşuma gitmedi. Bu kanıtı siz de bulmaya çalışırsanız gerçekten sevinirim. Bunun sandığımdan kolay olması ve benim buluşuma fazlaca değer verdiğimi göstermesi olasılığına rağmen..." [5].

Fermat'nın kanıtının doğru olup olmadığını bilemiyoruz. Yaklaşık 100 yıl sonra, 1770'te Fransız matematikçi J.L. Lagrange ilk kanıtı yayınladı. Aynı yılda İngiltere Cambridge Üniversitesi'nden

Edward Waring (1734-1798) "Meditationes Algebraicae" adlı kitabını yayınladı. Waring herhangi bir sayının küplerin toplamı olarak yazılabilmesi için en fazla 9 küp sayının, dördüncü kuvvetlerin toplamı olarak yazılabilmesi için de en fazla 19 dördüncü kuvvetin yeterli olacağını söylüyordu; (Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $n = x_1^3 + \dots + x_9^3$ ve $n = y_1^4 + \dots + y_{19}^4$). 1782'de Waring benzer özelliğin 4'ten büyük kuvvetler için de doğru olduğunu ileri sürdü. Waring Problemi olarak adlandırılan bu iddia matematikçileri uzun yıllar uğraştırdı.

Waring Problemi: Her n pozitif tamsayısı en fazla $N(k)$ sayıda k 'ıncı kuvvetin toplamı olarak yazılabilir. ($n = x_1^k + x_2^k + \dots + x_{N(k)}^k$). $N(k)$, n sayısına bağımlı değildir.

Yukarıda $N(2) = 4$ olduğunu Lagrange'ın kanıtladığını belirttik. Waring, $N(3) = 9$ ve $N(4) = 19$ olduğunu iddia ediyordu. Liouville 1859'da $N(4) \leq 53$ eşitsizliğini, Wieferich 1909'da $N(3) = 9$ olduğunu gösterdiler.

Hilbert, Waring'ın iddiasının her k için doğru olduğunu 1909'da kanıtladı. Ancak Hilbert'in kanıt yöntemi verilen bir k için $N(k)$ sayısının nasıl bulunacağı hakkında fikir vermiyordu. İngiliz matematikçileri Hardy ve Littlewood 1920'lerde yaptıkları çalışmalarda Hilbert'inkinden değişik bir yöntemle Waring'ın iddiasının doğruluğunu kanıtlarken $N(k)$ sayısının bulunması hakkında önemli ipuçları verdiler. Vinogradov'un geliştirdiği bu yeni yöntemi kullanarak Dickson, Pillai, Rubugunday ve Niven $k \geq 6$ için $N(k)$ değerlerini buldular. 1964'te Chen $N(5) = 37$ olduğunu gösterdi.

Böylece Waring probleminin tam olarak çözülebilmesi (verilen her k için $N(k)$ sayısının bulunması) için geride kalan tek sorun $k = 4$ için $N(4) = 19$ olduğunun gösterilmesiydi. Bu son problem ancak 5 yıl önce, 1986'da R. Balasubramanian, J.-M. Deshouillers ve F. Dress tarafından çözüldü ([1]). Kullandıkları yöntem ilginç; bu matematikçiler 10^{357} 'den büyük sayıların en fazla 19 dördüncü kuvvetin toplamı olarak yazılabileceğini esas olarak Hardy - Littlewood - Vinogradov yöntemini kullanarak kanıtladılar. 10^{378} 'den küçük sayılar için $N(4) = 19$ olduğunu ise karmaşık algoritmalar geliştirerek bilgisayarla

gösterdiler.

Waring probleminin pekçok genellemesi var. Bunlardan sadece ikisine değinelim:

Asal Waring Problemi: Her pozitif n sayısı en fazla $M(k)$ sayıda asal sayının k 'ıncı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılabilir. $M(k)$ sadece k 'ye bağlıdır.

Bu problemin çözümünde de Hardy-Littlewood-Vinogradov yöntemi kullanılır (Bkz. [4]).

Polinomsal Waring Problemi: $f(x)$, katsayıları tamsayılar olan ve bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için $f(m) = 1$ değerini alan bir polinom olsun. Her pozitif n tamsayısı $f(x)$ polinomunun (n 'den bağımsız) N_f sayıda değerinin toplamı olarak yazılabilir; $n = f(x_1) + \dots + f(x_{N_f})$. (Waring probleminde $f(x) = x^k$). Bu problem Kamke tarafından 1921'de çözüldü.

Waring problemi hakkında daha fazla bilgi için [2]'ye başvurabilirsiniz.

Kaynakça

1. R. Balasubramanian, J.-M. Deshouillers, F. Dress. "Probleme de Waring pour le bicarrés", *C.R.A.S.* **303** (1986), 65-86 ve 161-163.
2. W.J. Ellison. "Waring's problem", *Amer. Math. Month.* **78** (1971), 10-36.
3. G.H. Hardy, E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979 (5. basım).
4. L.K. Hua. *Additive Prime Number Theory*, *Amer. Math. Soc.* 1965.
5. O. Ore. *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, 1948.
6. A. Topuzoğlu. "Pisagor Teoremi; ya öncesi", *Matematik Dünyası*, **1**, Sayı 2, (1991) 26-29.
7. A. Weil, *Number Theory, An Approach Through History*, Birkhäuser Boston Inc. 1984.



Geometrik Transformasyonlar

Yazan

I.M.Yaglom

Çeviren

Vehbi Kemal Güney

Türk Matematik Derneği

Yayınları Sayı:34

I.M.Yaglom tarafından yazılan Geometrik Transformasyonlar kitabı Vehbi Kemal Güney tarafından Türkçeye kazandırılmıştır. Kitap, bir başlangıç bölümünü izleyen iki bölümden oluşuyor. Başlangıçta yazar, kendisini kitabı yazmaya iten nedenleri açıklayarak 'Geometri nedir?' sorusuna ilgiyi topluyor. Zaten kitabın amacı da bu soruya kaçınılmaz, çelişkisiz yanıt vermek ve bu yanıtı verebilmek için gerekli kavramları tanıtmak.

Kitabın birinci bölümü öteleme, dönme ve özel bir dönme olan bir noktaya göre simetri dönüşümlerine ayrılmış. Bu dönüşümler yirmiyi aşkın pekiştirici alıştırmalarla işleniyor.

Kitabın ikinci bölümünde bir doğruya göre simetri dönüşümü verilmekte ve simetritelerin bileşkesi incelenmektedir. Böylece diğer dönüşümlerin simetriteler bileşkesi olarak ifadesini veren kitap 'Düzlem geometri nedir?' sorusunun yanıtıyla son buluyor. Bu bölümde de yirmiyi aşkın alıştırmalar bulunuyor.

Kitabın sonundaki önemli bir kısım alıştırmaların çözümlerine ayrılmış. Bu alıştırmalar, doğallığından ötürü çok basit gibi görünen bazı kavram ve özelliklerin ustaca kullanıldığında ne güç problemlere çözüm getirdiğini göstermekte ve böylece kitabın en değerli yanını oluşturmaktadır.

1969 yılında çevirisi yapılan kitap okuyucuya yirmi yılda matematik Türkçesindeki gelişmeyi de göstermekte ve gerek kendisinin gerekse dilimizdeki diğer kitapların bugünün okuru için özellikle dil açısından gözden geçirilmesinin gereğini vurgulamaktadır.

THE COLLECTED PAPERS OF Cahit ARF

Sınıfına girse de girmese de konuşmalarını dinlese de dinlemese de ülkemizdeki hemen hemen her matematikçinin bir biçimde hocasıdır Ord.Prof.Dr.Cahit Arf. Arf'ın çeşitli dergilerde yayınlanan matematik makalelerini bir araya getiren *The Collected Papers of Cahit Arf* 400 sayfa aşkın, niteliği niceliği çok aşan dev bir yapıt. İngilizce hazırlanan kitap Tosun Terzioğlu'nun sunuş yazısıyla başlayıp, Cahit Arf'ın çeşitli dergi ve dillerdeki matematik makalelerinin tıpkı basımlarıyla sürüyor ve bu çalışmaların ilgili olduğu dallara etkisini belirten bir ek bölümle son buluyor. Bu son bölümdeki yazılar M.G.İkeda, T.Önder, S.Sertöz ve C.Tezer'e ait.

Bu kitabı okuyucuya rahatça okuyabileceğiniz bir kitap diye tanıtmaya olanağımız yok. Ancak matematiğe ilgi duyan herkes için vazgeçilmez bir anımsak.

İsteme adresi:

Prof.Dr. Hülya Şenkon

Türk Matematik Derneği

Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Vezneciler - 34459 - İstanbul

TEX typesetting systeminin yayılmasına yardımcı olmak, kullanıcılar arasında dayanışma ve destek sağlamak, bilgi akışını hızlandırmak ve özellikle Türkçe $\text{\TeX}$ 'in gelişmesini sağlamak amacıyla TRMETU'de YUNUS adıyla bir elektronik liste oluşturulmuştur. Liste daha sonra kurulacak olan Türkiye $\text{\TeX}$ kullanıcıları gurubunun elektronik haberleşme organı olacaktır.

TeX, American Mathematical Society'nin desteğiyle Stanford Computer Science Profesörü Donald E. Knuth tarafından geliştirilmiş, oldukça karmaşık ve 'versatile' bir yazılım sistemidir. Esas olarak 'Public Domain' olan bu yazılım matematik ağırlıklı metinler için çok uygun bir sistemdir. TeX bir 'Multi Pass' sistemidir; yani aynı 'data' ya da input file'ını bir kaç kere işleminden geçirebilir. Bu ise, cross-referans yapmayı, denklemleri numaralamayı, kaynakları numaralamayı, içindekiler, şekiller listesi, tablolar listesi, index gibi nesneleri hazırlamayı mümkün kılmaktadır. Ayrıca şekilleri ya TeX içinde yaratmaya ya da TeX dışında yaratıp en son dokümanın içine yerleştirmeye olanak sağlamaktadır. İçinde 'Postscript' ve başka fontları kullanmaya da uygundur. Aynı ascii metinden 'transliteration' ve esas dilinde bastırmak da mümkündür: bu Rusça, Osmanlıca gibi dillerde yararlıdır. Ayrıca müzik notaları, satranç işaretleri gibi karmaşık nesneleri de yazmaya uygundur.

T_EX kullanıcısı önce sevdiği bir editörle, örneğin paper.tex file'ını hazırlar. Bu file tamamen ascii'dir, dolayısıyla elektronik ağlar üzerinden makinalar arasında aktarılabilir. Paper.tex esas metin ve T_EX dilinde format komutları ve matematik sembol komutları içerir. Bunlar yazar, başlık, bölüm başlığı, font değişikliği, sembol'ler ve denklemler, tablolar vs'dir. T_EX programı paper.tex file'ı üzerinde çalışır (compile eder), ve bir çok file yaratır. Bunlar paper.dvi, paper.log, paper.aux ve file'ın içeriğine bağlı olarak paper.toc, paper.idx, paper.lot gibi. Bunlardan en önemlisi DVI (DeVice Independent)'dir. Bu binary bir file'dır ve esas olarak şu bilgiyi içerir: sayfanın şurasına git, ve şu font ailesinden şu karakteri bas. Şayet T_EX programı aynı version'da ise her hangi bir makinada aynı sonucu verir, ve bir makinada üretilen bir DVI file'ı bir diğer makinada basılabilir. Çıkan DVI file'ını ekranda PREVIEW programlarıyla görebilirsiniz. Yazıcı'dan 'hardcopy' almak için *Device Driver* programını kullanırsınız. Sayet laser yazıcı Postscript ise önce bir DvitoPS programı çalıştırılır. Yazıcı dotmatrix, laser yada phototypesetter olabilir.

Başta American Mathematical Society ve American Physical Society'nin çıkardıkları olmak üzere bir çok bilimsel dergi ve yayıncı $\text{\TeX}$ 'le hazırlanan taslakları kabul etmekte bu ise yayın süresini oldukça kısaltmaktadır. Springer, Addison-Wesley, Academic Press gibi bir çok yayınevi hatta American TV Guide dergisi $\text{\TeX}$ ile hazırlanmaktadır. Şu ana kadar Türkiye'de 10 kadar kitap $\text{\TeX}$ ile basılmıştır. TÜBİTAK'ın Doğa Matematik ve Fizik Dergileri de $\text{\TeX}$ ile basılmaktadır. Bir çok konferans özetleri $\text{\TeX}$ 'le yazıldığı zaman elektronik olarak kabul etmektedir.

TeX bugün tüm PC'lerde (Amiga ve Atari ST dahil), MAC, tüm Unix sistemlerinde ve belli başlı tüm 'mainframe'lerde (IBM, Data General, VAX, Prime vs) çalışmaktadır.

Amacımız T_EX'in özellikle Üniversitelerde yaygınlaşmasına çalışmakla birlikte, kamu ve özel sektördeki herkese yardıma hazırız. Kullanıcı gurubumuz T_EX'le ilgili her türlü desteği sağlamaya çalışacaktır. List'e ek olarak YUNUS Filelist'inde T_EX kullanıcıları için gerekli yada yararlı bir çok yazılım konulacaktır.

TeX'i öğrenmek, öğretmek, kullanmak, geliştirmek isteyenleri ve özellikle TeX'le Knuth'un deyimiyle 'Master Piece' yaratmak isteyenleri YUNUS'a üye olmaya çağırıyoruz.

