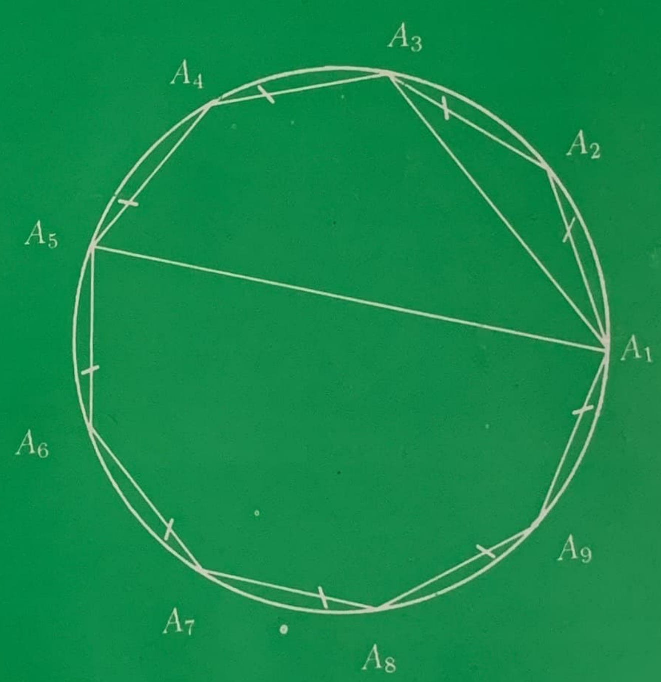
# MATEMATİK DÜNYASI






$$|A_1A_2| + |A_1A_3| \stackrel{?}{=} |A_1A_5|$$


EKİM 1991 CİLT: 1 SAYI: 4

MATEMATİK DÜNYASI

<u>SAHİBİ</u>
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU



*Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.*

| | | |
|---|---|---|
| Adres | : | Matematik Dünyası<br>ODTÜ, Matematik Bölümü<br>06531 Ankara |
| Telefon | : | 223 71 00 / 2978-2979 |
| Fiatı | : | 3000.-TL |
| Abone | : | Yurtiçi 1 yıllık (5 sayı)<br>10.000.-TL |

## YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

* Konu sunuşları,
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişiklikler de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

*Abone olmak için yıllık abone ücretinin İş Bankası ODTÜ Ankara Şubesindeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılması (bu mümkün değilse posta havalesi yapılması) ve dekontun bir örneğinin dergi adresine gönderilmesi yeterlidir*

Baskı :ODTÜ Basım İşliği
Genel Dağıtım : Hitit Kitabevi
Mithatpaşa Cad. 62/A Kızılay 06420 ANKARA
Telefon: 117 93 07 Fax : 118 10 46

# İÇİNDEKİLER



## MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Uzun süren bir yaz tatilinden sonra dergimiz yine elinizde. Bu süre içinde birçok mektup ve yazı aldık. Hepsinden çeşitli ölçülerde yararlanacağız. Ancak bazı yazılarda kaynak konusu yeterince önemsenmiyor. Örneğin matematik tarihi ile ilgili birçok ilginç yazıyı kaynak gösterilmediği için yayınlama olanağı bulamıyoruz. Özellikle *matematik tarihi ve benzeri konularda yazarların kaynakları açıklıkla belirtmeleri, hatta ilgili kısmının fotokopisini göndermelerini rica ediyoruz.*

Şimdi dergimizin sayfalarına dönelim:

- *Homoteti ve Benzerlik.* Konumuz uzun yıllardır orta öğretim müfredatı dışında kalan Homoteti dönüşümü. H. Demir bu yazısına yönlü uzunluk, bölme oranı ve çifte oran kavramlarını vererek başlıyor, Homoteti dönüşümünü tanımlayıp çeşitli uygulamalarla bu dönüşümün ne ölçüde kullanışlı bir araç olduğunu gösteriyor.

- *Fermat'nın Son Teoremi.* Alev Topuzoğlu bu yazısında matematik dünyasını 350 yıldır uğraştıran ünlü bir problemi tanıtmayı amaçlıyor. Bunu yaparken okuru 17. yüzyıl ortalarında Pierre de Fermat'nın yaşadığı matematik ortamına götürmekten de geri kalmıyor. Ek olarak verdiğimiz Pierre de Fermat'nın resmi ve dış kapak FST'yi vurgulamak için. Ancak bu noktada okurlara bir uyarımız var: hemen kâğıda kaleme sarılıp *kısa bir çalışmayla ya da basit hesaplamalarla FST'yi ispatlayabileceğiniz ya da bu konuda önemli sonuçlar elde edebileceğiniz yanılgısına kapılmayın,* önce bu konuda yapılanları anlayarak problemin ciddiyetini görmeye çalışın. Yazıda da örneklendiği gibi bu anlama uğraşısı bile birçok umutsuzlukları dağıtmaya yeterlidir.

- *Latin Kareler.* Üç genç matematikçi; E. Seçkin, F. Şenses ve B. Ünal özel bir matris türü olan Latin Kareleri ve bunlarla oluşturulan Greko-Latin kareler denilen ikilileri tanıtıyorlar. Greko-Latin kare çiftlerinin varlığı ve en fazla kaç tane olacağı yazının tartışma odağında.

- *Menelaus ve Ceva Teoremleri.* Bu iki teorem aralarında 1500 yıllık bir zaman dilimi bulunan iki matematikçiye ait. Bu iki teorem, nedense orta öğretim müfredatında bulunmayan ama hemen her öğrencinin öğrenme gereği duyduğu iki teorem. Cem Tezer bu önemli iki teoremi birbirinden önemli uygulamalarıyla sunuyor.

- *Bazı Temel Eşitsizlikler.* Olimpiyat köşesinde A. Erkip'in ele aldığı konu eşitsizlikler yanı bazı eşitsizlik ya da maksimum minimum problemlerinin çözümünde kullanılabilecek temel araçlar olan Aritmetik-Geometrik-Harmonik ortalama, Cauchy Schwarz ve Minkowski eşitsizlikleri ve kullanılış örnekleri.

- *Sorular ve Çözümler.* Yine beş alıştırma, beş yarışma sorusu. Bu arada özellikle A16, A17, Y16, Y17 ortaokul ve lise 1 öğrencilerinin rahatlıkla çözebilecekleri sorular.

- *Matematik Ödülleri.* Ş. Alpay bu yazısında Türkiye'deki matematik ödüllerini ele alıyor.

# HOMOTETİ VE BENZERLİK

Hüseyin Demir

Öklid düzleminde yer alan geometrik dönüşümlerden izometrileri Sayı 2 ve 3'te incelemiştik. Bu yazımızda homoteti ve benzerlik dönüşümlerini ele alacağız. İlerki sayılarımızda da evirtim dönüşümü C. Tezer tarafından tanıtılacak ve böylece dönüşümlerin tanıtılması bitmiş olacak.

Konuyu genel biçimde açıklamak için yönlü uzunluk kavramına ihtiyacımız var.

**Yönlü Uzunluklar**

Bir sayı ekseni üzerinde alınan ve apsisleri $a, b$ olan $A(a), B(b)$ gibi iki noktanın oluşturduğu $[AB]$ doğru parçasının uzunluğunun

$$|AB| = |a-b| = |b-a| \qquad (1)$$

olarak tanımlandığını bilmekteyiz.

Bu tanımı genellemek üzere $\overline{AB}$ olarak göstereceğimiz yönlü uzunluğu

$$\overline{AB} = b - a$$

=(ikinci noktanın apsisi)-(ilk noktanın apsisi) (2)

olarak tanımlıyoruz.

(2)'den, eksene ait herhangi sırada alınan $A, B, C, D, \ldots$ noktaları için hemen

$$\begin{array}{ll} 1. & \overline{AB}+\overline{BA}=0 \quad (\text{ya da}\, \overline{AB}=-\overline{BA}) \\ 2. & \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0 \\ 3. & \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=0 \end{array} \qquad (3)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bunlara Chasles (Şal) bağıntıları deniliyor.

$$|AP| + |PB| = |AB| \Leftrightarrow P \in [AB]$$

olmasına karşın yönlü uzunluklar için

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}, \ \forall\, P \in AB$$

geçerli olmaktadır.

**Alıştırma:** Bir sayı ekseni üzerinde herhangibir sırada alınan $A, B, C, D$ gibi dört nokta arasında

a) $\overline{DA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0$ *(Euler)*

b) $\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}$
$+\overline{PC}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$ *(Stewart)*

bağıntılarını gösteriniz.

Birinciyi gösterip ikincinin gösterilmesini size bırakıyoruz. a)'da sol tarafa s dersek $P$'nin apsisi $x$ ise (2)'den

$$\begin{aligned} s &= (a-x)(c-b)+(b-x)(a-c)+(c-x)(b-a) \\ &= a(c-b)+b(a-c)+c(b-a) \\ &\quad -x(c-b+a-c+b-a) = 0-0=0 \end{aligned}$$

**Bölme oranı:** $[AB]$ bir doğru parçası ve $P \in AB$ ise

$$\lambda(P) = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{a-x}{b-x} \qquad (4)$$

oranına $P$'nin $[AB]$'yi bölme oranı denir.

Bu oran $P$'nin $(AB)$ açık aralığının dışında (içinde) olması halinde pozitif (negatif) olur. $P(A)=0$ olup $P(B)$ tanımsızdır.

$[AB]$'nin $I$ ortası ve $AB$'nin sonsuzdaki $P_\infty$ noktası için $\lambda(P_x)=1$, $\lambda(I)=-1$, olacağı açıktır.

**Çifte Oran, Harmonik Bölme:** Bir doğru üzerinde bir $[AB]$ doğru parçası ve $C, D$ gibi iki nokta alınırsa $\lambda(C)$ ve $\lambda(D)$ oranlarının $\lambda(C)/\lambda(D)$ oranına *çifte oran* denir ve bu çifte oran

$$(AB, CD) = \frac{\lambda(C)}{\lambda(D)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \qquad (5)$$

olarak yazılır.

$(AB, CD) = -1$ olması halinde $C$ ve $D$'ye $[AB]$'yi *harmonik olarak bölüyor* denir. Bu durumda (5)'den

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} &= -1 \\ \Rightarrow \frac{c-a}{c-b} + \frac{d-a}{d-b} &= 0 \\ \Rightarrow (c-a)(d-b)+(d-c)(c-b) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir, bu da kısaltıldığında

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd) \tag{6}$$

verir. Bundan çıkarılacak ilk sonuç şu oluyor:

**Sonuç:** $C$ ve $D$ noktaları $[AB]$'yi harmonik olarak bölerse, $A$ ve $B$ de $[CD]$'yi harmonik olarak böler.

## Homoteti

Sabit bir $O$ noktası ve sıfırdan farklı $k$ gerçel sayısı verildiğinde bir $P$ noktasını

$i)$ $O, P, P'$ doğrudaş
$ii)$ $\overline{OP'} = k\overline{OP}$ (7)

olmak üzere $P'$ noktasına gönderen dönüşüme *homoteti*, $O$ noktasına *homoteti merkezi* ve $k$ sayısına *homoteti oranı* denir ve bu homotetiyi $[O,k]$ simgesiyle gösterilir.

$[O,1]$'in birim dönüşüm, $[O,-1]$'in ise $O$ merkezli simetri olacağı açıktır.

Yukarıdaki iki koşul

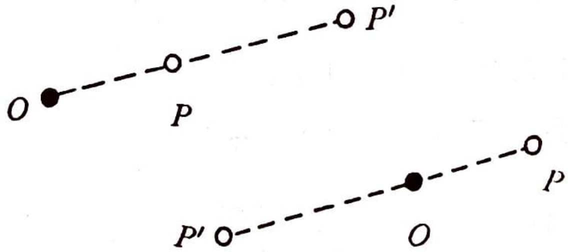
$$\vec{OP'} = k\vec{OP} \tag{8}$$

vektörel eşitliği ile gösterilebilir. Hatta bazı matematikçiler (2) yerine sadece

$$OP' = kOP \tag{2'}$$

yazıyorlar.

$k$'nın pozitif (negatif) olması durumunda homotetiye pozitif (negatif) homoteti deriz.




**Soru:** $[O,k]$ homotetisinin değiştirmediği nokta ve doğrular nelerdir?

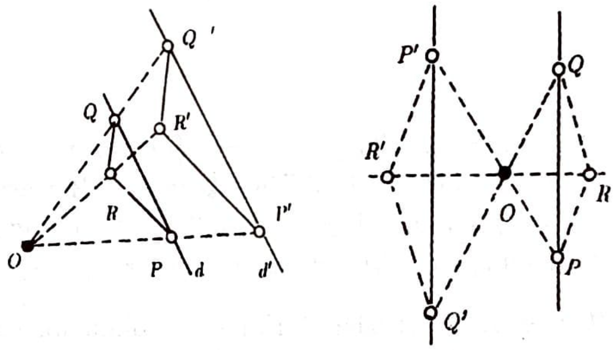
**Sonuç:** Bir $[O,k]$ hometetisi

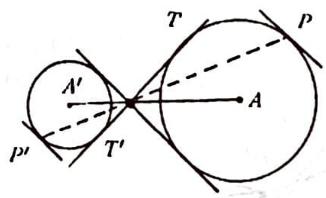
a) Bir $[AB]$ doğru parçasını, buna paralel ve uzunluğu $|k|\,|AB|$ olan bir doğru parçasına

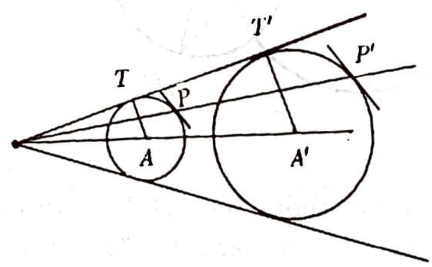
b) Bir doğruyu, buna paralel olan bir doğruya

c) Bir üçgeni, buna benzer olan bir üçgene

d) Yarıçapı $R$ olan bir çemberi, yarıçapı $R' = |k|R$ olan bir çembere dönüştürür.



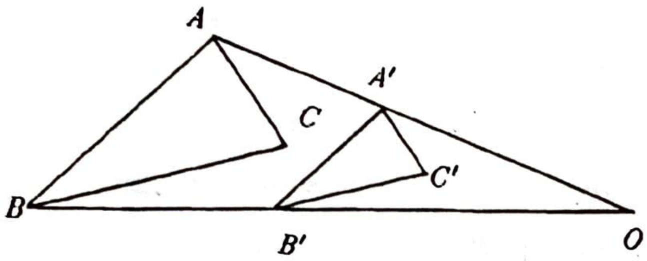




Şekildeki gibi, $O$ homoteti merkezi $(A)$ çemberinin dışında alınırsa, $O$'dan çizilen ortak bir dış (iç) teğet doğrunun $T, T'$ doğru noktaları homotetide karşıt noktalar olur: $[O,k](T) = T'$. Genel halde

$$[O,k](P) = P'$$

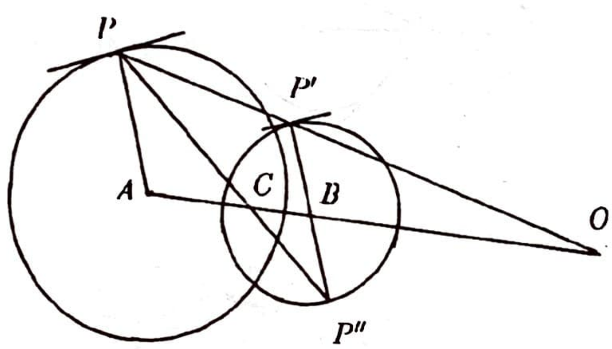
ise $P, P'$ karşıt noktalarda çemberlerce çizilen teğet doğrular birbirine paralel olur.

**Teorem:** $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ eşlemesinde karşıt kenarları birbirine paralel olup eş olmayan iki üçgen homotetiktir.




Gerçekten, $AA' \cap BB' = \{O\}$ olsun ve $OC$ doğrusu $B'C'$'yü $C''$'de kessin. Benzerlik ve orantı kullandığımızda $C'' = C'$ olduğu gösterilebilir, yani $CC'$'de $O$'dan geçer.

**Teorem:** Merkezleri farklı ve eş olmayan iki çember iki türlü homotetiktir. Homoteti merkezleri, çemberlerin merkezler doğru parçasını harmonik olarak böler.




$(A)$ çemberinin bir $[AP]$ yarıçapı ile $(B)$ çemberinin $AP$'ye paralel $[P'P'']$ çapını çizelim. $P$ ile $P'$ noktaları $AB$'nin aynı tarafında ise dış homoteti merkezi $D = AB \cap PP'$, ve $P$ ile $P''$ noktaları $AB$'nin ters tarafında olup iç homoteti merkezi de $C = AB \cap PP''$ olur.

Harmonik bölmeye gelince,

$$\overline{DA} : \overline{DB} = a : b, \quad \overline{CA} : \overline{CB} = a : b$$

olup

$$\lambda(D) = a/b = -\lambda(C)$$

çıkar.

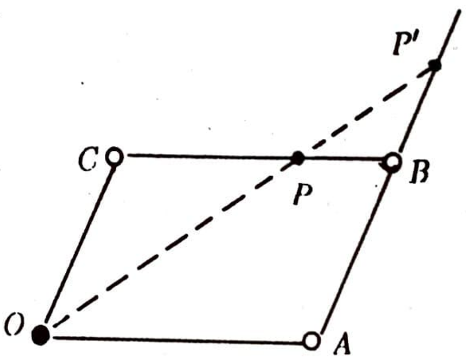
Üçgenlerde Menelaus teoremini biliyorsanız (bkz. s.15) aşağıdaki teoremin ispatını kendiniz verebilirsiniz:

**Teorem:** Merkezleri doğrudaş olmayan, yarıçapları farklı üç çemberden oluşturulan çember çiftlerinin
a) dış homoteti merkezleri
b) iki iç ve bir dış homoteti merkezleri
doğrudaştır.

**Homoteti Aleti (Pantograf)**

Pantograf, ressamlar tarafından resimleri istenilen bir oranda büyültmek ya da küçültmek için kullanılan bir alettir. Büyük kentlerde bazı kırtasıyecilerde satılmaktadır.

Alet sade olup şekilde gösterildiği gibi bir paralelkenardır. Kenarlar çubuklardan yapılmış olup uçlarından eklemlidir.




$[AB]$ çubuğu uzantılıdır.

$OABC$ paralel kenarının $[BC]$ kenarı üzerinde bir $P$ noktası işaretleyelim. $OP$ doğrusu $[AB]$ uzantısını bir $P'$ noktasında kessin. $P'$'yü de uzantı üzerine işaretleyelim.

Eklemli paralelkenar oynatılıp biçimi değiştirildiğinde $O$ noktası sabit tutulacak olursa aşağıdaki iki özellik geçerli kalmaktadır:

i) $O, P, P'$ doğrudaş kalır,

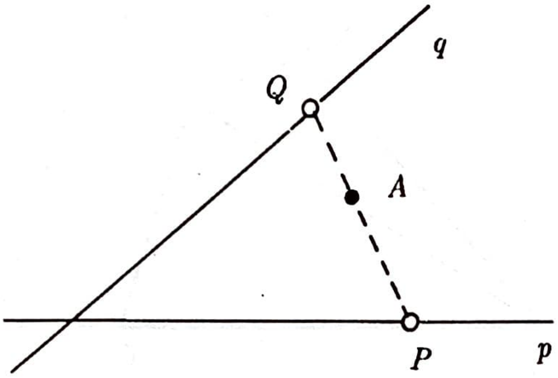
ii) $\overline{OP'} : \overline{OP}$ oranı sabit kalır.

O halde alet $[O, \overline{OP'}/\overline{OP}]$ homotetisini tanımlar. Bunun böyle olduğunu göstermede güçlük çekmeyeceksiniz.

$O$ noktası sabit tutulup $P$ noktasına yerleştirilen sivri bir uca bir sabit çizdirildiğinde, $P'$'ye yerleştirilen kalemin ucu o şeklin bir homotetiğini çizer. Homoteti oranı, $P$'nin $[AC]$ üzerindeki yerine bağlı olarak ayarlanabilir.

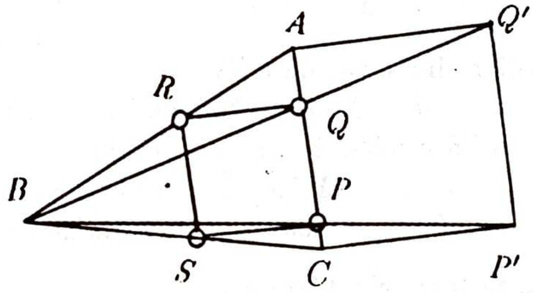
**Uygulamalar**

**Uygulama 1:** $p$ ve $q$ gibi, kesişen iki doğru ve bunların dışında bir $A$ noktası verildiğinde $A$'dan geçip $p$ ve $q$'yu $P$ ve $Q$'da kesen hangi doğru için $|AP| = 2|AQ|$ olur?



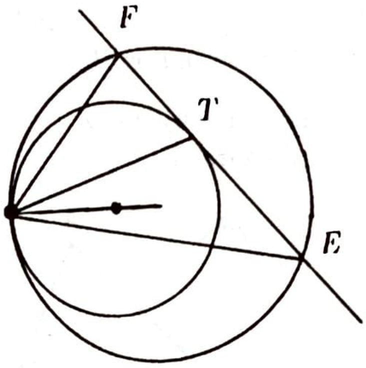

$[A, -2]$ homotetisi $q$'ya uygulandığında $q'$ görüntüsü $p$'yi, aranılan $P$ noktasında keser.

**Uygulama 2:** Bir $ABC$ üçgeninin içine, $P, Q$ köşeleri $[CA]$ ve $R, S$ köşeleri öteki iki kenar üzerinde bulunan $PQRS$ karesinin çizilmesi.




$[CA]$ kenarı üzerine dıştan $CAQ'P'$ karesini çizdiğimizde çizilecek kare bu karenin $A$ merkezli homotetiği olur ve $P = AP' \cap CA$, $Q = AQ' \cap CA$ elde edilir.

**Uygulama 3: Teorem.** Bir $\gamma$ çemberi, içten bir $P$ çemberine bir $O$ noktasında teğet olsun. İçteki çemberin bir $T$ noktasındaki teğet doğrusu $\Gamma$'yı $E, F$'de keserse $[O]$ ışını $EOF$ açısının iç açıortayıdır.

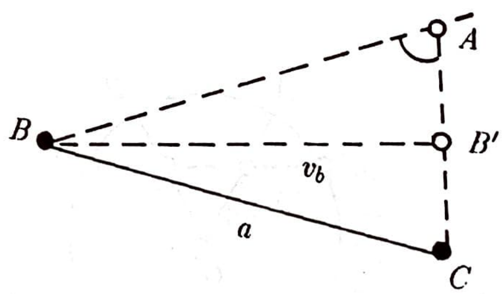



Bu iki çember homotetik olup homoteti merkezi $O$ değme noktasıdır ve $T$'nin görüntüsü $T'$ ise $T'$'deki teğet doğru $T$'deki $EF$ teğet doğrusuna paralel olup $T'$ noktası $\widehat{EF}$ yayının ortası olur. O halde $OT$ açıortaydır.

**Uygulama 4:** $\Delta ABC : a, \sphericalangle A, v_b$.

(Yukarıda gelenekselleşmiş ifadesiyle verdiğimiz çizim probleminde $a$ kenar uzunluğu, $A$ açısı ve $B$ köşesine ait $v_b$ kenarortay uzunluğu verilen bir $ABC$ üçgeninin çizimi söz konusudur.)

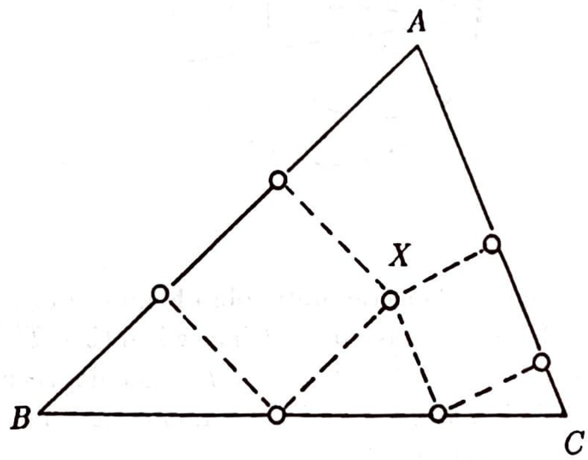
**Çizim:**




1. $[BC]$ kenarı çizilir.
2. $B$ merkez ve $v_b = |BB'|$ yarıçaplı çember çizilir. Bu $[CA]$'nın $B'$ ortasının geometrik yeridir.
3. $|CA| = 2|CB'|$ olup bu çemberin $[C, 2]$ homotetiği altındaki görüntüsü $A$ için bir geometrik yerdir.
4. $\sphericalangle A$ sabit olup $A$ köşesi bir çember yayı üzerinde bulunur. Bu iki çemberin arakesitleri, aranılan $A$ köşesini verir.

**Uygulama 5:** Bir $ABC$ üçgeninde birer kenarı $[AB], [AC]$, birer köşesi $[BC]$ üzerinde bulunan iki karenin ortak $X$ köşesinin çizilmesi.

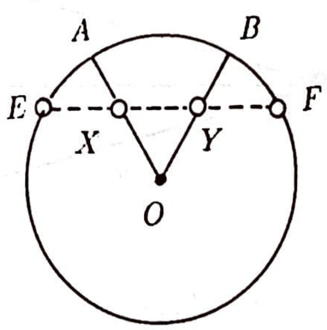
Problemin ifadesine uygun olarak içteki köşeleri $X', X''$ olan iki kare çizilir.




$B$ açısı içindeki iki kare homotetik olup homoteti merkezi $B$'dir. O halde, bilinmeyen $X$ noktası $BX'$ üzerindedir.

Benzer olarak, $X$ noktası $CX''$ üzerindedir. Böylece $X$ noktası çizilmiş olur.

**Uygulama 6:** Şekilde $O$ merkezli bir çember ile, yan kenarları iki yarıçap olan ikizkenar bir $OAB$ üçgeni verilmiştir. $AB$'ye paralel hangi $(EF)$ kirişi $OA, OB$ ile eş üç parçaya bölünür?

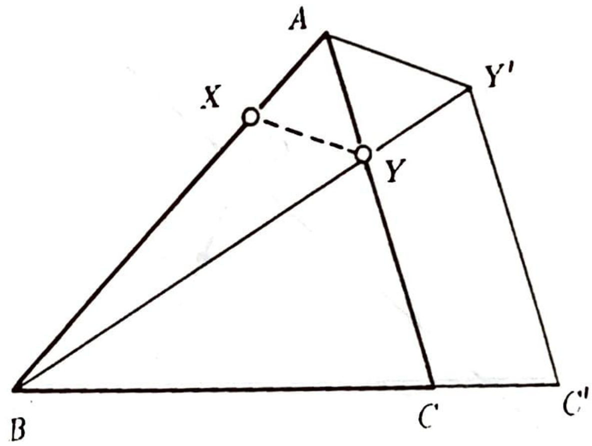



$EF$ doğrusu $OA$ ve $OB$'yi $X$ ve $Y$'de kessin. Bir $[O, k]$ homotetisi ile $XY$ doğrusunu $AB$ doğrusuna dönüştürelim. $E, X, Y, F$'nin görüntüleri $E', A, B, F'$ olsun. $|E'A| = |AB| = |BF'|$ olup $E', F'$ çizilebilir. Bunlardan da $E, F$ elde edilir.

**Uygulama 7:** Bir $ABC$ üçgeninin $[AB], [AC]$ kenarları üzerinde

$$|BX| : |XY| : |YC| = 3 : 1 : 2$$

olacak biçimde $X$ ve $Y$ noktalarının bulunması.




$B$ merkezli bir homoteti ile $X$'i $A$'ya gönderdiğimizi düşünelim. $Y$'nin görüntüsü $Y'$ ve $C$'ninki $C'$ ise

$$\frac{|AB|}{3} = \frac{|AY'|}{1} = \frac{|Y'C'|}{2}$$

olup

$$|AY'| = \frac{1}{3}|AB|, \quad |Y'C'| = \frac{2}{3}|AB|$$

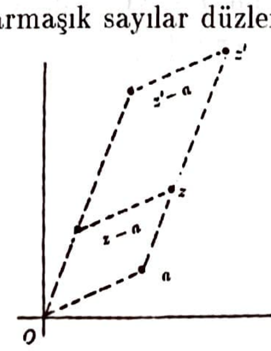
elde edilir. Bu sonuç da $C'$'yü ve $Y'$ için iki geometrik yer verir. Bu geometrik yerler ise $A$ ve $C'$ merkezli iki çemberdir. $Y'$'nün çiziminden $Y = AC \cap BY'$ bulunur. $Y$'den $Y'A$'ya çizilen paralel doğru ise $AC$'yi, verilen $X$ noktasında keser.

### Homotetilerin Çarpımı

**Teorem:** İki homotetinin çarpımı, merkezi merkezler doğrusu üzerinde ve oranı oranların çarpımı olan bir homotetidir.

$$[B, \mu][A, \lambda] = [C, \lambda\mu], \quad C \in AB$$

**İspat:** Karmaşık sayılar, izometri ve homoteti dönüşümlerinin incelenmesinde elverişli olduğu için ispatı karmaşık sayılar düzleminde vereceğiz.



$A$ ve $B$ noktalarına karşılık gelen karmaşık sayılar $a, b$ olsun.

Bir $z$ sayısının $[a, \lambda]$ homotetisi altındaki $z'$ görüntüsünü $a$ ve $z$ türünden yazalım. Bunun için $a, z, z'$ noktalarına $-a$ ötelemesini uygulayalım. Elde edilen $O, z-a, z'-a$ arasında $z'-a = \lambda(z-a)$ bağıntısı geçerli olur. Bu da

$$z' = \lambda z + (1-\lambda)a \tag{9}$$

eşitliğini verir.

Benzer olarak $[b, \mu](z') = z''$'den de

$$z'' = \mu z' + (1-\mu)b \tag{1'}$$

çıkar. (1) ile (1') arasında $z'$'yü yok ettiğimizde ise

$$z'' = (\lambda\mu)z + (1-\lambda)\mu a + (1-\mu)b$$

elde edilir. Bunu da

$$\lambda'' = (\lambda\mu)z + (1-\lambda\mu)c \tag{10}$$

biçiminde yazdığımızda iki homotetinin çarpımının $[C, \lambda\mu]$ homotetisi olduğu çıkar. Burada

$$(1-\lambda\mu)c = (1-\lambda)\mu a + (1-\mu)b$$

ile belirli olup doğrusal ifadeler $C(c)$ merkezinin $AB$ üzerinde olduğu anlaşılır.

## Benzerlik

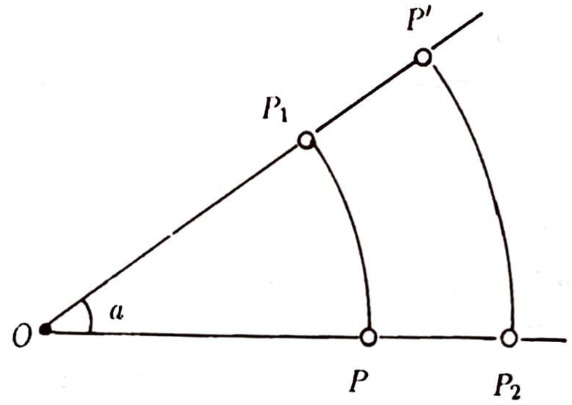
Benzerlik dönüşümünün tanımını ve bir uygulamasını vermekle yetineceğiz. Konuya girmek isteyenler aşağıda vereceğimiz kaynak kitaptan yararlanabilirler.

Aynı merkezli bir $(O, \theta)$ dönmesi ile bir $[O, k]$ homotetisinin çarpımına *benzerlik* $O$ noktasına *benzerlik merkezi*, $\theta$ açısına *benzerlik açısı* ve $k$'ye *benzerlik oranı* denir.

Bu benzerliği $(O, \theta k)$ simgesiyle göstereceğiz. O halde

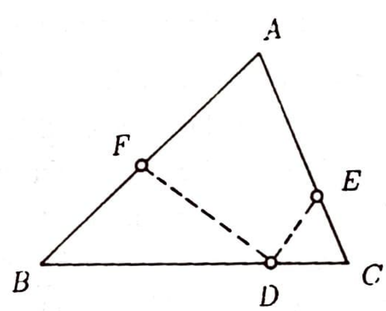
$$[O, k](O, \theta) = (O, \theta, k)$$

olup şekilden, çarpımda değişme özelliği olduğu görülür. O halde bu dönüşümü uygularken dönme ve homotetiden herhangi biriyle başlanabilir ve öteki ile sonuçlandırılır.




$$P' = [O, k](O, \theta)(P) = [O, k](P_1)$$
$$P' = (O, \theta)[O, k](P) = (O, \theta)(P_2)$$

**Uygulama:** $DEF$, bir $ABC$ üçgeninin bir iç üçgenidir. $D$ köşesi $[BC]$ üzerinde sabit olarak verilmiş ise ve $\measuredangle EDF = 90°, |DF| = 2|DE|$ ile $E$ ve $F$'yi bulunuz.




**Çizim:** $AC$'ye önce $[D, 2]$ homotetisini uygulayıp $d$ doğrusunu elde edelim. $E$'nin $d$ üzerindeki görüntüsü $E_2$ olsun. $d$'ye $(D, 90°)$ dönmesi uygulanırsa $d$'nin $d'$ görüntüsü $AB$'yi, aranılan $F$ noktasında keser ve bu nokta $E_2$'nin görüntüsüdür.

$F$ bilinince $E$ bulunur ($DE \perp DF$).

**Kaynak:** PETERSEN, J., *Geometri problemleri için Metotlar ve Teoriler* (Çeviren: F. Gürsan), Şirketi Mürettibiye Basımevi, Ist., 1943.

# FERMAT'NIN SON TEOREMİ
## ya da 'MATEMATİĞİ SEVER MİSİNİZ ?'

Alev Topuzoğlu

16. yüzyıl ile 17. yüzyılın ilk yarısında Avrupa'da matematiğin "yeniden doğuşu" gözlenmektedir. Batıda yaşanan yaklaşık 1000 yıllık bir durgunluktan sonra özellikle 17. yüzyılın ilk yarısında matematikte önemli ilerlemeler görülür. Bu dönemin ilginç özelliklerinden biri matematiğin çok farklı biçimlerde algılanmasıdır. Üzerinde çalışılan problemler, kullanılan yöntemler, hatta matematiğin amacının ne olması gerektiği üzerinde değişik görüşler göze çarpar. Matematikle uğraşan kişilerin çoğu için matematik sadece bir yan uğraştır. Asıl meslekleri, geldikleri çevre nedeniyle aldıkları eğitim, sosyal konumları bu kişilerin matematikten beklentilerini de etkiler. Aralarında büyük anlaşmazlıklar çıkması kaçınılmaz olur.

Bu dönemin ünlülerinden bazıları klasik Yunan matematiğinin en belirgin özelliği olan geometrik yöntemlerin kullanımına sıkı sıkıya bağlı kalır. Öte yandan Rudolf'un *Coss* (Strassburg 1525), Cardano'nun *Ars Magna* (Nuremberg 1545), Clavius'un *Algebra* (Roma, 1608) adlı kitaplarında Harzimi'nin cebirsel denklemlerin çözümünde kullandığı yöntemlerin etkisi görülür. Uygulamalı matematikçiler diyebileceğimiz bir diğer grup ise zamanın teknolojik gelişmelerine temel oluşturacak buluşlarını tamamen farklı yöntemlerle elde ederler. Onlara göre bir buluş ancak uygulanabilir olursa değerlidir.

**Pierre de Fermat** (1601-1665) da dönemin matematikçilerinin tipik özelliklerini taşır. Üniversitede hukuk eğitimi görmüş, Toulouse parlamentosu üyesi ve hakim. Matematiğe ilgisi 1620'lerin sonlarında, Viète'in çalışmalarını okuyarak başladı. Bu yüzden bir anlamda Viète'in öğrencilerinden, dahası izleyicilerindendir. Viète'in öğretisinden olanlar büyük saygı duydukları ve yaşatmaya çalıştıkları klasik Yunan matematiğini sadece bir başlangıç noktası olarak görüp onu yeni yöntemlerle geliştirmek gerektiğine inanırlar.[1]

Fermat'nın analitik geometri, diferansiyel ve integral hesaplar teorisi üzerine önemli çalışmaları vardır. Sayılar teorisindeki çalışmaları, bu dalın doğuşunu simgeler. Bachet'nin 1621'de yayınladığı Diofant'ın *Aritmetik* kitabını (Bkz. [6]) Fermat'nın ne zaman okumaya başladığını bilmiyoruz ancak kitabın Fermat'nın büyük ilgisini çektiği ve yazdığı mektuplardan 1636'da kitapta değinilen konular üzerinde önemli buluşlar yapmaya başladığı anlaşılıyor. Fermat ölümüne değin "sayılar" a ilişkin çalışmalarını sürdürdü. Ancak zamanının diğer ünlülerinde aynı ilgiyi uyandıramadı; Huygens, Wallis'e *"üzerinde vakit harcanacak daha iyi konular yok değil"* diye yazıyordu. B. Pascal büyük olasılıkla aynı düşüncede olduğundan, Fermat'nın birlikte "sayılar" hakkında bir kitap yazma isteğini geri çevirdi (Bkz. [3]). Bu, matematik dünyası için önemli bir kayıp sayılır, çünkü bu girişim dışında Fermat çalışmalarını yayınlamaktan her zaman kaçındı. (Bazı matematik tarihçilerine göre bunun nedeni basılan çalışmaların yaratabileceği büyük tartışmalardan çekinmesi (Bkz. [7]).) Bu yüzden Fermat'nın sayılar teoresi üzerindeki çalışmalarına ilişkin bilgimiz, mektupları ve *Aritmetik* kitabının satır aralarına notlar türünden yazdığı gözlemlerle sınırlı.

[1] Fermat da Apollonius'un kayıp "Plane Loci" adlı kitabını yeniden yazmaya çalışmış. Analitik Geometri'nin temel prensiplerini buluşu bu çalışmalar sonucundadır (Bkz. [1], [3]). Analitik Geometri'nin kurucusu olarak tanınan Descartes ile aralarında bu yüzden doğan anlaşmazlıklar ünlüdür.

Ölümünden sonra, 1679'da oğlu Samuel Fermat'nın yayınladığı (babasının gözlemlerini de kapsayan) Aritmetik kitabına, geçen sayıda değinmiştik (Bkz. [6]).

*Aritmetik*'in VI. cildindeki 26. problemden sonra Fermat şunları yazıyor:

> *"Kenarları rasyonel sayılar olan bir dik üçgenin alanı, bir rasyonel sayının karesi olamaz. Bu teoremi ancak uzun ve zorlu bir çalışma sonucu kanıtlayabildim. Kanıtı burada veriyorum çünkü kullandığım yöntem sayılar teorisinde büyük ilerlemelere yol açabilir".*

Sonra oldukça karmaşık bir dille ve hiçbir sembol kullanmadan kanıtı anlatıyor, *"sayfadaki boşluğun yeterli olmaması nedeniyle tüm ayrıntıları veremeyeceğini"* yazarak bitiriyor. Fermat bu yeni yönteme "sonsuz azalma" adını verdi. Fermat'nın kanıtını gelecek sayıda anlatacağız.

Bu teoremden kolayca elde edilebilen sonuçlar var; öncelikle teoremi kenarları tam sayılar olan dik üçgenler, yani Pisagor üçgenleri ([5]) için ifade edelim. (Alanı kare olan bir üçgenin kenarlarını sabit bir sayıyla çarparsak, alanını bu sayının karesiyle çarpmış oluruz ki böylece alan gene bir kare sayı olur).

**Teorem (Fermat)** Bir Pisagor üçgeninin alanı kare sayı olamaz.

**Sonuç 1.** Sıfırdan farklı $x, y, z$ tamsayıları için $x^4 - y^4 = z^2$ denkleminin çözümü yoktur.

Kanıt: Eğer denklemi sağlayan $x, y$ tamsayıları varsa $m = x^2, n = y^2$ olmak üzere $(m, n)$'nin doğurduğu (Bkz. [5]) Pisagor üçgenini ele alalım. Diğer bir deyişle dik kenarları

$$a = 2mn = 2x^2y^2 \quad \text{ve} \quad b = m^2 - n^2 = x^4 - y^4$$

olan Pisagor üçgenini düşünelim. Bu üçgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}ab = x^2y^2(x^4 - y^4) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2$$

olacaktır. Yani alan karedir. Fakat Fermat'nın teoremine göre bir Pisagor üçgeninin alanı kare olamaz. O halde denklemi sağlayan sıfırdan farklı $x, y, z$ tam sayıları yoktur.

**Sonuç 2.** Sıfırdan farklı $x, y, z$ tamsayıları için $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin çözümü yoktur.

Kanıt: Denklemin $x, y, z$ tamsayıları için sağlandığını varsayalım. Bu durumda

$$z^4 - y^4 = x^4 = (x^2)^2,$$

$x^2 = m$ alırsak

$$z^4 - y^4 = m^2$$

denklemini sağlayan $m, y, z$ tamsayıları bulmuş oluruz. Sonuç 1'e göre bu olanaksızdır, O halde varsayımımız da olanaksızdır. Matematik Dünyası'nın 2. sayısında,

$$\text{"}\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}$$

**denkleminin** $xyz \neq 0$ ve $x, y, z \in \mathcal{Z}$ olacak şekilde **sonsuz tane çözümü vardır"** önermesini kanıtlamıştık.

$$\text{"}\boldsymbol{x^4 + y^4 = z^4}$$

**denkleminin** $xyz \neq 0$ ve $x, y, z \in \mathcal{Z}$ olacak şekilde **hiçbir çözümü yoktur"** önermesini de yukarıda kanıtladık.

$x^3 + y^3 = z^3$ ya da $x^5 + y^5 = z^5$ denklemleri konusunda ne diyebiliriz?

Fermat'nın bu konuda, Aritmetik'in II. cildinde 8. problemden sonra gene sayfadaki boşluklara yazdığı not şöyle (bkz. arka kapak):

> *"Hiçbir küp sayı iki küp sayıya ayrılamaz. Aynı özellik dördüncü kuvvetler için ve genel olarak ikiden büyük tüm kuvvetler için doğrudur".*

> *(Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum...)*

Bu önerme "Fermat'nın Son Teoremi" olarak bilinir;

**Fermat'nın Son Teoremi:** $x^n + y^n = z^n$ denkleminin $n \geq 3$ ve sıfırdan farklı $x, y, z$ tam sayıları için çözümü yoktur.

Fermat'nın son teoremi (eğer doğruysa) henüz kanıtlanamadı. "Son" teorem olarak adlandırılmasının nedeni de bu; Fermat'nın doğruluğunu öne sürdüğü teoremler arasında zamanımıza değin kanıtlanmamış tek teorem olması. Bu önermeye teorem demek yanlış tabii, çünkü kanıtlanmadığına göre doğruluğundan emin değiliz. Ancak bu problemin ya da iddianın Fermat'nın Son Teoremi olarak anılması matematikçiler arasında alışılagelmiş.

Fermat teoremden sonra şu sözleri ekliyor:

> "Bunun gerçekten dikkat çekici güzellikte bir kanıtını buldum, ancak sayfadaki boşluk kanıtı yazamayacak kadar küçük"!!

Kanıtın doğru olup olmadığını bilemiyoruz. Büyük olasılıkla sözünü ettiği kanıt yine "sonsuz azalma" yöntemine dayanıyor ([3]). Ancak bu yöntemin her $n$ için kullanılamayacağı biliniyor. Geçen 350 yılda pek çok matematikçinin uğraşıp çözemediği bu problemi, Fermat'nın (özellikle o dönemdeki matematiksel bilgi ile) çözmüş olması olasılığı epeyce düşük. Yaşamının son yıllarında Fermat'nın aynı problemi Carcavi ve Huygens'e önerirken kanıttan bahsetmemiş olması ([3]) da bu kanıyı doğruluyor.

Problemin çözümüne ilişkin çalışmaları gelecek sayıda anlatacağız.

Fermat'nın Son Teoremi'nin ilginç bir özelliği, matematikte *en fazla yanlış kanıtı yapılmış teorem* olması. Bunun nedeni Wolfskehl adlı bir matematikçinin 1908'de, problemi çözen kişiye verilmek üzere 100.000 Alman markını (yaklaşık 300 milyon TL) Göttingen Akademisi'ne bağışlaması.

Paul Wolfskehl, Almanya'da Darmstadt Üniversitesi'nde bir Matematik profesörü. Wolfskehl'in gençlik yıllarında Fermat'nın Son Teoremi gündemde; Berlin Üniversitesi'nden Kummer adlı bir matematikçi problemin çözümüne doğru çok önemli bir adım atmış. Hatta kısa bir süre için problemi çözdüğü sanılmış. Wolfskehl de problemle uzun süre uğraştı. Ancak çalışmaları başarısızlıkla sonuçlandı. Bu sırada başından bir de *hüsranla* biten aşk macerası geçti.

Wolfskehl ümitsizliğe kapılıp yaşamına son vermeye karar verdi. İntiharını büyük bir titizlikle planlayıp bunu gerçekleştireceği gün ve saati seçerek, vasiyetini yazdı, yapılması gereken işlerini tamamladı. "Son gün" arkadaşlarına veda mektuplarını da yazdıktan sonra belirlediği saati beklerken çalışma odasında, rafta bir makale gözüne ilişti. Bu Kummer'in Fermat'nın Son Teoremiyle ilgili çalışmasıydı. Makaleye şöyle bir göz atarken bir mantıksal yanlışlık dikkatini çekti ve oturup bu yanlışın giderilip giderilemeyeceğini incelemeye daldı. Saatler geçti, sonunda bu yanlışın sonuçları etkilemediğine emin olup saatine baktığında daha önce intihara karar verdiği saatin geçtiğini gördü. Birden, artık pek de ölmek istemediğini farketti ve vasiyeti ile mektupları yırttı!! ([2]). Yıllar sonra, 1908'de Wolfskehl öldüğünde yeni bir vasiyetname bulundu. Göttingen Bilimler Akademisi'ne bıraktığı Fermat'nın Son Teoremi'ni gelecek 100 yıl içinde kanıtlayan kişiye verilmek üzere 100.000 mark. 2007 yılına değin problem çözülebilecek mi acaba, oldukça az zaman kaldı!

Evet, **eğer matematiği severseniz yaşamınız kurtulabilir....**

**Kaynakça**

[1] C.B. Boyer, *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, 1968.

[2] W.G. Chinn, ve R.J. Davis, *"3.1416 and All That"*, Birkhäuser 1985.

[3] M.S. Mohaney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601-1665,* Princeton Univ. Press, 1973.

[4] O. Ore, *Number Theory and its History,* McGraw-Hill, 1948.

[5] A. Topuzoğlu, "Pisagor Teoremi; ya öncesi", *Matematik Dünyası,* 1, Sayı 2, (1991) 26-29.

[6] A. Topuzoğlu, "Waring Problemi", *Matematik Dünyası,* 1, Sayı 3, (1991) 29-32.

[7] A. Weil, *Number Theory, An Approach Through History,* Birkhäuser, Boston Inc. 1984.

# LATİN KARELER

Elif Seçkin, Figen Şenses, Bülent Ünal

Özel bir matris türü olan Latin kareler, kombinasyon tasarımlarında ve istatistikte yapılan deneylerde geniş bir uygulama alanına sahiptir. Konuya Latin kareyi tanımlamakla başlayalım. $n$ elemanlı bir küme üzerinde tanımlanan $n \times n$ boyutunda bir kare matrisin her satır ve sütununda kümenin bütün elemanları birer kez kullanılıyorsa bu matrise bir Latin kare denir. Böyle bir matrise Latin kare denmesinin nedeni bu yapının ilk ortaya çıktığında kümenin elemanlarının Latin harfleri olarak alınmasındandır. Ancak, tanımlarda ve hesaplarda sağlayacağı kolaylık açısından, genellikle $\{1, 2, \ldots, n\}$ veya $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ kümesi tercih edilir.

$2 \times 2$ boyutunda $\{1, 2\}$ kümesi üzerinde tanımlı sadece 2 tane Latin kare vardır:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Aşağıda da $\{1, 2, \ldots, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlı $5 \times 5$ boyutunda bir Latin kare yer almaktadır.

$$L = \begin{matrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Birinci satırı $(1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n)$ olan $n \times n$ boyutunda Latin kareye standart formda denir. Her Latin kareden standart formda Latin kareler elde edilebilir. Örneğin, yukarıdaki $5 \times 5$ $L$ Latin karesinden standart formda bir latin kare elde edelim. Eğer her 4 yerine 1, her 5 yerine 4, her 1 yerine de 5 yazarsak standart formdaki $L_1$ karesini buluruz.

$$L_1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$L$'nin sütunlarını değştirerek de standart formda bir Latin kare bulunabilir: 1. sütunu 4. sütun, 5. sütunu 1. sütun ve 4. sütunu 5. sütun olarak yazarsak $L_2$ standart karesi elde edilir:

$$L_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{matrix}$$

Daha önceki örneğimizde $2 \times 2$ boyutunda sadece 2 tane Latin karesi olduğunu görmüştük. Şimdi de $3 \times 3$ Latin karelerine bakalım. Birinci satır ve sütunu doldurulmuş olan Latin karesini sadece bir şekilde tamamlayabiliriz. İlk satır ve ilk sütunu 1 2 3 şeklinde alınırsa

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

ikinci satırın ikinci ve üçüncü elemanı 3 veya 1 olabilir. Fakat bu satırın 3. sütununa 3 yazamayız, çünkü 3. sütunda 3 var. Böylece ikinci satırı 2 3 1 şeklinde doldururuz, ve son satıra da tek seçenek olarak 3 1 2 kalır:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Sütunları $3! = 6$ değişik şekilde yazabiliriz. Bu permütasyonların herbirinin satırlarını, ilk satırı sabit tutarak, 2 şekilde sıralayabiliriz. Böylece 12 farklı $3 \times 3$ Latin karesi elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Birinci satır ve sütunu (1 2 3 4) olan $4 \times 4$ boyutunda 4 tane Latin karesi vardır. Bu karelerin her birinden, önce 4 sütununun 24 permütasyonunu sonra da kalan 3 satırın 6 permütasyonunu göz önüne alarak $24 \cdot 6 = 144$ Latin kare elde ederiz. Böylece birbirinden farklı $4 \times 4$ Latin karelerin sayısı $4 \cdot 144 = 576$ olarak bulunur.

$5 \times 5$ Latin karelerinin sayısına bakalım. İlk satır ve sütunu (1 2 3 4 5) olan $5 \times 5$ Latin karelerinin sayısı 56'dır. 5 sütunun ve ilk satır dışındaki 4 satırın permütasyonları ile bu 56 Latin karenin herbirinden $5! \cdot 4! = 2880$ farklı Latin kare elde ederiz. Bu nedenle $56 \cdot 2880 = 161,280$ tane $5 \times 5$ Latin kare vardır.

$L_1 = (a_{ij})$ ve $L_2 = (b_{ij})$ $n \times n$ boyutunda iki Latin kare olsun. Eğer tüm $i, j = 1, \ldots, n$ için $(a_{ij}, b_{ij})$ sıralı ikilileri farklı oluyorsa$L_1$ ve $L_2$ birbirlerine dik Latin karelerdir denir.

Daha önceki örneğimizde $2 \times 2$ boyutunda sadece iki tane Latin kare olduğunu görmüştük, bunlar birbirlerine dik olmadığından $2 \times 2$ boyutunda dik Latin kareler yoktur. $3 \times 3$ boyutunda da birbirlerine dik sadece bir Latin kare çifti vardır, ve bunlar şu karelerdir:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Dik Latin kareleri tek bir kareyle de gösterebiliriz. örneğin, yukarıdaki $3 \times 3$ dik Latin kareler

$$\begin{array}{ccc} 11 & 22 & 33 \\ 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \end{array}$$

şeklinde de gösterilebilir.

İlk ortaya çıktıklarında Latin karelerin Latin harfleri ile inşa edildiklerini söylemiştik. Dik Latin karelerin gösteriminde ise, karelerin birincisi için Latin harfleri; ikincisi için Yunan harfleri kullanılırdı. Bu nedenle dik Latin karelere *Greko-Latin Kareler* adı da verilir. Bu gösterimle, yukarıdaki $3 \times 3$ dik Latin kareler ve ortaya çıkan Greko-Latin kare şöyle yazılabilir:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\alpha & B\beta & C\gamma \\ B\gamma & C\alpha & A\beta \\ C\beta & A\gamma & B\alpha. \end{array}$$

$n \times n$ boyutlarında dik Latin kare çiftlerinin elde edilmesi ilgi çekici bir problemdir. $n$ tek olduğunda böyle bir çift her zaman vardır ve bunları yazmak için birçok algoritma da verilmiştir. Örneğin, $n$ tek doğal sayı olmak üzere, $L_1 = (a_{ij})$, $a_{ij} = i + j \operatorname{mod}(n)$ ve $L_2 = (b_{ij})$, $b_{ij} = i + 2j \operatorname{mod}(n)$ şeklinde oluşturulan

$L_1$ ve $L_2$ matrisleri, $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ kümesi üzerinde dik Latin karelerdir. $n = 5$ için uygulanırsa,

$$L_1 = \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{matrix} \quad \text{ve} \quad L_2 = \begin{matrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

elde edilir. $n$ çift ise, n=2 halinde olduğu gibi, dik Latin kare çiftleri bulunmayabilir. Çeşitli boyutlarda dik Latin kare çiftlerinin olup olmadığını ilk araştıran Leonhard Euler (1707-1783) olmuştur. Euler, 1782'de *'$k$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $4k+2$ boyutunda birbirlerine dik Latin kare çifti yoktur'* şeklinde bir konjektür ortaya atmıştır. $2 \times 2$ ( $k = 0$) için konjektürün doğru olduğu zaten aşikardı. Uzun yıllar konjektür ortada kaldıktan sonra, G. Tarry 1900 yılında $6 \times 6$ ( $k = 1$) halinde birbirlerine dik Latin kare çifti olmadığını doğrulamıştır. Ancak, 1960 yılında R.C. Bose, S.S. Shrikhande ve E.T. Parker, Euler'in konjektürünün $k \geq 2$ için yanlışlığını göstermişlerdir, yani $k \in \mathcal{Z}^+$, $k \geq 2$ olmak üzere $4k+2$ boyutunda en azından bir tane birbirlerine dik Latin kare çifti olduğunu ispatlamışlardır.

Aşağıda verilen üç Latin karenin herhangi ikisinin birbirilerine dik olduğu görülmektedir...

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Şimdi şunu iddia ediyoruz: $n$, 2'den büyük bir doğal sayı olmak üzere, $n \times n$ boyutunda birbirlerine dik Latin karelerinin maksimum sayısı $n-1$'dir. İddiamızın doğruluğunu göstermek için $L_1, L_2, \ldots, L_k$ $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ kümesi üzerinde tanımlı, her biri diğerleri ile dik olan $n \times n$ boyutunda Latin kareleri göz önüne alalım ve $L_m$ $(1 \leq m \leq k)$ karesinin $(i, j)$ elemanını da $a_{ij}^{(m)}$ ile gösterelim. $a_{11}^{(1)} = a$ ve $a_{11}^{(2)} = b$ olsun. $(0 \leq a, b \leq n-1)$. $a$ sayısı $L_1$'in ikinci satırında $j$ numaralı sütunda bulunuyorsa, yani $a_{2j}^{(1)} = a$ $(j \neq 1)$ ise, $L_1$ ve $L_2$ dik olduklarından, $a_{2j}^{(2)} = b$ olamaz. O halde, $a_{2j}^{(2)}$ için kullanılabilecek en fazla $n-1$ sayı var. Bu argümana devamla sonuca gidebiliriz.

Herhangi bir $n$ için birbirleri ile dik en fazla $n-1$ Latin kare yazılabileceğini gösterdik. Peki, ne zaman tam $n-1$ tane böyle Latin kare yazabiliriz? Bu sorunun cevabı da şöyle verilebilir: Eğer $p$ asal bir sayı ve $n = p^t$ $(t, n \in \mathcal{Z}^+, n > 1)$ ise, $n \times n$ boyutunda $n-1$ tane $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ dik Latin kareleri vardır ve $L_m = (a_{ij}^{(m)})$ olmak üzere, bu kareler $a_{ij}^{(m)} = i + mj \mod(n)$ $(0 \leq i, j \leq n-1;\ m = 1, 2, \ldots, n-1)$ şeklinde tanımlanabilir. Bu iddianın ispatına her $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ için $L_k$'nın bir Latin kare olduğunu göstermekle başlayalım... Farzedelim ki, $L_k$ bir Latin kare değildir. O halde, $L_k$'nın belli bir satırında veya sütununda tekrarlanan bir sayı olacaktır. Eğer $t$. sütunda sayı tekrarı varsa, $r \neq s$ olmak üzere öyle $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bulunabilir ki, $a_{rt}^{(k)} = a_{st}^{(k)}$ olur. Tanım gereği, $r + kt = s + kt \mod(n) \Rightarrow r = s$ bulunur ki bu, $r \neq s$ ile çelişir. Bu çelişkiden $L_k$'nın hiçbir sütununda tekrar olmadığı anlaşılır. Tekrarlanma $t$. satırda ise $r \neq s$ olmak üzere öyle $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vardır ki $a_{tr}^{(k)} = a_{ts}^{(k)}$'dir. Buradan $t + rk = t + sk \mod(n)$, yani $rk = sk \mod(n)$ elde edilir. $k \neq 0; r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ve $n = p^t$ olduğundan $r = s$ olur ki bu da bir çelişkidir, yani $L_k$'nın hiçbir satırında da tekrar yoktur. "$L_k$ Latin kare değildir" kabulü çelişkili netice doğurduğundan doğru bir kabul değildir, yani "$L_k$ Latin kare değildir" olamaz, o halde her $k = 1, 2, \ldots, n-1$ için yukarıdaki gibi tanımlanmış $L_k$ bir Latin karedir. Şimdi de bu karelerin dikliğini gösterelim... Farzedelimki $L_k$ ve $L_m$ $(1 \leq k \neq m \leq n-1)$ dik değildir. Bir başka deyişle, $1 \leq i, j, r, s \leq n$ ve $(i,j) \neq (r,s)$ için $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} = a_{rs}^{(k)}$ ve $a_{ij}^{(m)} = a_{rs}^{(m)}$ olduğunu farzedelim. Tanımlardan $i + kj = r + ks \bmod(n)$ ve $i + mj = r + ms \bmod(n)$ elde edilir. İki eşitliğin taraf tarafa farkları alınarak $(k-m)j = (k-m)s \bmod(n)$ yazılır. $k \neq m$ alındığından $k - m \neq 0$ olur ve $n$ de $p^t$ ($p$-asal) tipinde olduğu için $j = s$ olduğu görülür. Bu eşitlik $i + kj = r + ks \bmod(n)$'de yerine konularak $i = r$ bulunur. Yani, $(i,j) = (r,s)$ sonucu elde edilir ki bu da çelişkidir. O halde $L_k$ ve $L_m$ birbirlerine dik karelerdir.

Şimdi, bu metodu kullanarak $5 \times 5$ boyutunda 4 tane dik Latin kare yazalım: $L_1$ karesi $a_{ij}^{(1)} = i + j \bmod(5)$ ile tanımlı, o halde

$$a_{11}^{(1)} = 1 + 1 = 2 \;\; ; \;\; a_{12}^{(1)} = 1 + 2 = 3;$$
$$a_{13}^{(1)} = 1 + 3 = 4 \;\; ; \;\; a_{14}^{(1)} = 1 + 4 = 5 = 0;$$
$$a_{15}^{(1)} = 1 + 0 = 1 \;\; ; \;\; a_{21}^{(1)} = 2 + 1 = 3;$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

ve sonuçta

$$L_1 = \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

bulunur. $L_2$ ise $a_{ij}^{(2)} = i + 2j \bmod(5)$ olarak tanımlı olduğundan

$$a_{11}^{(2)} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \;\; ; \;\; a_{12}^{(2)} = 1 + 2 \cdot 2 = 0;$$
$$a_{13}^{(2)} = 1 + 2 \cdot 3 = 2 \;\; ; \;\; a_{14}^{(2)} = 1 + 2 \cdot 4 = 4;$$
$$a_{15}^{(2)} = 1 + 2 \cdot 5 = 1 \;\; ; \;\; a_{21}^{(2)} = 2 + 2 \cdot 1 = 4;$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$L_2 = \begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

elde edilir. $L_3$ için $a_{ij}^{(3)} = i + 3j \bmod(5)$ ve $L_4$ için de $a_{ij}^{(4)} = i + 4j \bmod(5)$ kullanılarak $L_1, L_2, L_3$ ve $L_4$ dik kareleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

## SERGİ
## "MATEMATİK UFUKLARI"

14 Ekim - 2 Kasım tarihleri arasında İstanbul'da bulunan *'Matematik Ufukları' (Horizons Mathematiques)* adlı sergi 10-30 Aralık tarihleri arasında ODTÜ Kütüphane Sergi Salonu'nda olacak. Kaçırılmaması gereken bir şölen.
Not: Bu sergi ancak rehber eşliğinde ve grup olarak gezilebileceğinden, önceden ODTÜ Matematik Topluluğu'na başvurmanız önemle gerekmektedir.

ODTÜ Matematik Bölümü
Matematik Topluluğu, 06531 Ankara
Tlf: 223 71 00 / 2971, 2972

# MENELAUS VE CEVA TEOREMLERİ

*Öğretmenim Afife Aybek'e*

Cem Tezer

Bu yazıda Thales teoreminin genellemesi sayılabilecek önemli iki teoremden söz edeceğiz. Teoremlerin ifadelerine geçmeden önce yönlü niceliklerin oranlarının gösterimi ile ilgili bir noktaya işaret etmek istiyoruz: (Bu konu H. Demir'in dergimizin gene bu sayısında yer alan yazısında daha da geniş olarak ele alınıyor.) $C \neq D$ olmak üzere aynı bir doğru üzerinde kalan $A, B, C, D$ noktaları için $\vec{AB} = \alpha \vec{CD}$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $\alpha$ reel sayısını $AB/CD$ şeklinde göstereceğiz. (H. Demir'in gösterimiyle $\overline{AB}/\overline{CD}$.) Bizim için önemli olan bazı özel durumları ele alarak konuyu biraz daha açık hale getirmeye çalışalım. $B \neq C$ olsun, $A$ noktası $[BC]$ doğru parçasının orta noktası ise $AB/AC = -1$'dir. $B$ noktası $[AC]$ doğru parçasının orta noktası ise $AB/AC = 1/2$'dir. $C$ noktası $[AB]$ doğru parçasının orta noktası ise $AB/AC = 2$'dir. Eğer $B$ noktası $A$ ile $C$ arasında kalıyorsa ve $|AB| = \frac{1}{2}|BC|$ ise, $AB/AC = 1/3$, $BA/BC = -1/2$ olur. Bu örneklerle (ve H. Demir'in yazısına başvurarak) söz konusu gösterimi kavrayan okuyucu $B \neq C$ olmak üzere $BC$ doğrusu üzerinde hiçbir $A$ noktası için $AB/AC = 1$ olamayacağını anlayacaktır. Ayrıca $A \neq C, A \neq B, A \neq D$ iken

$$\frac{AB}{AC} = -\frac{BA}{AC}$$

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

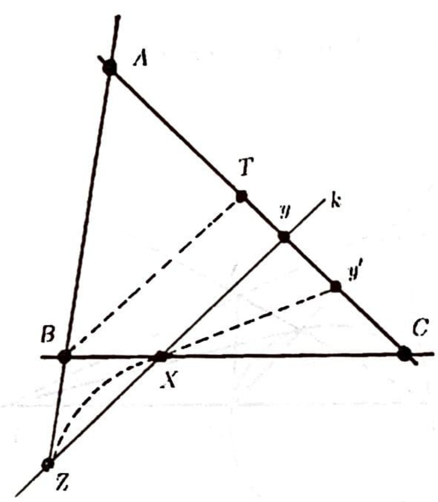
$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1$$

Şimdi M.S. 100 civarında İskenderiye'de yaşayıp, astronomi ve küresel trigonometri ile uğraştığı bilinen Menelaus tarafından elde edilen teoremi ele alalım.

**Menelaus Teoremi:** Bir $ABC$ üçgeninde $A, B, C$ noktalarının hiçbirisiyle çakışmayan ve sırasıyla $BC, CA, AB$ doğrularının üzerinde kalan $X, Y, Z$ noktalarının aynı bir doğru üzerinde kalmaları için gerek ve yeter koşul

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1 \qquad (1)$$

olmasıdır.




**İspat:** Önce, $X, Y$ ve $Z$ noktalarının bir $k$ doğrusu üzerinde kaldıklarını varsayalım. $B$ noktası $k$ doğrusunun dışındadır. $k, AC$'ye paralel olmadığına göre $B$ noktasından $k$'ya çizilen paralel $AC$'yi bir $T$ noktasında keser. $T \neq A$ ve $T \neq C$'dir. (Neden?) Thales teoreminden

$$\frac{XB}{XC} = \frac{YT}{YC}, \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{YA}{YT}$$

olacağından

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = \frac{YT}{YC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{YA}{YT} = 1$$

çıkar, yani (1) bulunur. Şimdi (1)'i varsayalım. $XZ$ doğrusu $AC$ doğrusuna paralel olamaz! Olsaydı Thales teoremi bize

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

verir, bu da (1)'le birleştirilerek mümkün olmadığı bilinen $YC/YA = 1$ bulunurdu. Böylece $XZ$ doğrusu $AC$ doğrusunu bir $Y'$ noktasında kesmelidir. $Y' \neq A, Y' \neq C$'dir. (Neden?) İspatımızın ilk kısmı bize

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{Y'C}{Y'A} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

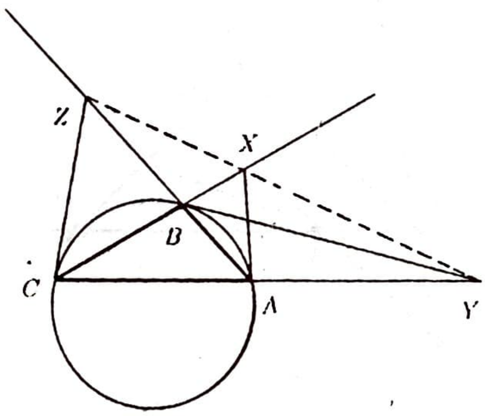
verecektir. Bu eşitlik (1)'le taraf tarafa bölündüğünde

$$\frac{YB}{YC} = \frac{Y'B}{Y'C}$$

yani $Y = Y'$ elde ederiz. Demek ki $X, Y = Y', Z$ noktaları doğrudaş olmalıdır.

Menelaus teoreminin uygulanışına bazı örnekler verelim.

**Örnek 1:** *Çevrel çember teğetleri*




**Teorem:** Bir $ABC$ üçgeninde $A, B, C$ noktalarından çevrel çembere çizilen teğetler $BC, CA, AB$'yi sırasıyla $X, Y, Z$ noktalarında kessin. $X, Y, Z$ noktaları doğrudaştır.

**İspat:** Bunu ispat etmek için okuyucunun

$$\frac{XB}{XC} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

$$\frac{YC}{YA} = \frac{|BC|^2}{|BA|^2}$$

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{|CA|^2}{|CB|^2}$$

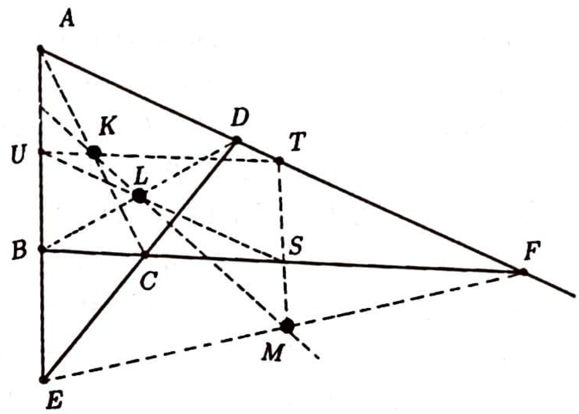
olduğunu gösterip, Menelaus teoremini kullanması yeterlidir.

**Örnek 2:** *Newton Doğrusu*

"Tamdörtgenlerde köşegenlerin orta noktaları bir doğru üzerinde kalır; bu doğruya tamdörtgenin Newton doğrusu denir" şeklinde ifade olunan şu önemli teorem ikinci örneğimiz olacak.

**Teorem:** $AB$ ve $CD$ doğruları $E$'de, $AD$ ve $BC$ doğruları da $F$'de kesişecek şekilde $A, B, C, D$ noktaları alınsın (Şekil 3). $[BD], [AC], [EF]$ doğru parçalarının orta noktaları doğrudaştır.

**İspat:** $[BF], [FA], [AB]$ doğru parçalarının or-




ta noktaları sırasıyla $S, T, U$ olsun. Aynı şekilde $[AC], [BD], [EF]$ doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla $K, L, M$ olsun. Önce $K \neq U, T; L \neq S, U; M \neq T, S$ olduğuna işaret edelim. (Neden?) Thales teoreminden

$$\frac{KT}{KU} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{LU}{LS} = \frac{DA}{DF},$$

$$\frac{MS}{MT} = \frac{EB}{EA}$$

diğer taraftan da $ABF$ üçgeni ve $DE$ doğrusuna Menelaus teoremi uygulanılarak

$$\frac{CF}{CB}, \frac{DA}{DF}, \frac{EB}{EA} = 1$$

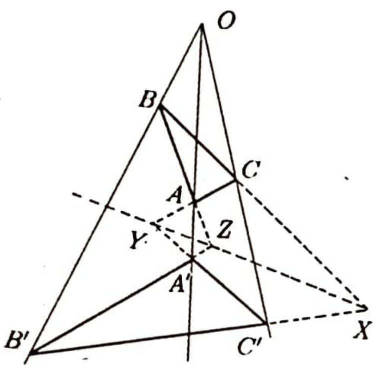
bulunur ki, ikisi birleştirilerek

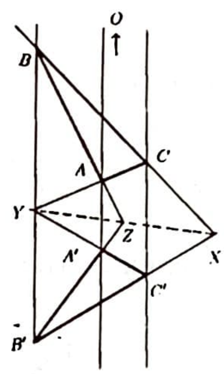
$$\frac{KT}{KU} \cdot \frac{LU}{LS} \cdot \frac{MS}{MT} = \frac{CF}{CB} \cdot \frac{DA}{DF} \cdot \frac{EB}{EA} = 1$$

elde edilir. Menelaus teoremi $STU$ üçgenine uygulandığında $K, L, M$ noktalarının doğrudaş olmaları gerektiği görülür.

**Örnek 3:** *(Eksik) Desargues Teoremi*

Fransız mimar ve matematikçi Gérard Desargues'a (1591-1661) ait olan çok önemli bir teorem üçüncü örneğimiz olacak. Bu teoremi neden "eksik" şekliyle sunmak zorunda olduğumuzu yazının sonunda açıklayacağız.




**Teorem:** $ABC$ ve $A'B'C'$ üçgenlerini gözönüne alalım. $BC, B'C'$ doğruları $X$ noktasında; $CA, C'A'$ doğruları $Y$ noktasında; $AB, A'B'$ doğruları $Z$ noktasında kesişsin. Bu koşullar altında $AA', BB', CC'$ doğrularının aynı bir noktadan geçmeleri veya paralel olmaları için gerek ve yeter koşul $X, Y, Z$ noktalarının doğrudaş olmalarıdır.

**İspat:** Noktaların köşelere rast gelip gelmemesine dair ayrıntıyı bir tarafa bırakıyoruz. Önce $AA', BB', CC'$ doğrularının bir $O$ noktasında kesiştiğini varsayalım. $OBC$ üçgeni ve $B'C'$ doğrusuna Menelaus teoremini uygulayarak

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{C'C}{C'O} \cdot \frac{B'O}{B'B} = 1 \tag{2}$$

aynı şekilde sırasıyla $OCA, OAB$ üçgenleri ve $C'A', A'B'$ doğrularıyla çalışarak

$$\frac{YC}{YA} \cdot \frac{A'A}{A'O} \cdot \frac{C'D}{C'C} = 1 \tag{3}$$

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{B'B}{B'O} \cdot \frac{A'O}{A'A} = 1 \tag{4}$$

bulunacaktır. (1), (2), (3), (4) taraf tarafa çarpılarak

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

elde edilir ki, bu $ABC$ üçgenine göre Menelaus teoreminden $X, Y, Z$ noktalarının doğrudaş olduğunu gösterir. $AA', BB', CC'$ paralel olması durumundaki ispatı okuyucuya bırakıyoruz.

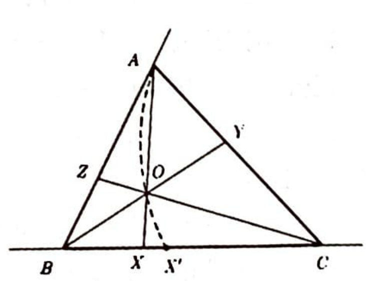
Şimdi $X, Y, Z$ noktalarının doğrudaş olduğunu varsayalım. $ZBB'$ ve $YCC'$ üçgenlerine ispatın ilk kısmı uygulanabilir: Gerçekten de $BC, ZY, B'C'$ doğruları $X$ noktasında kesişmektedir. Diğer taraftan $\{A\} = ZB \cap XC, \{A'\} = ZB' \cap XC'$'dür. Demek ki eğer $BB'$ ve $CC'$ bir $O$ noktasında kesişirse $A, A', O$ doğrudaş olmalı, diğer bir deyişle $AA', BB', CC'$ noktadaş olmalıdır. Eğer $BB', CC'$ doğruları paralelse, $AA'$'de bu doğrulara paralel olmalıdır. Çünkü; $AA', CC'$'yü bir $O$ noktasında kesseydi, yukardaki akıl yürütmeyle, (bu sefer $XCC'$ ve $ZAA'$ üçgenlerini kullanarak) $BB'$'nün de $O$'dan geçmesi gerektiği görülürdü ki $BB'$ ile $CC'$ paralel olduğundan bu mümkün değildir.

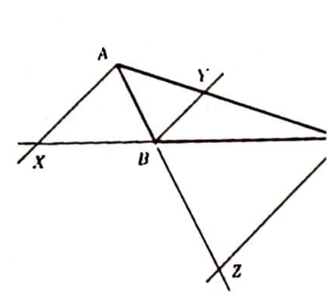
Şimdi de Menelaus teoremine büyük benzerlik taşıyan ve onu tamamlayan bir teoremi inceleyeceğiz. Bu teorem, ömrünün büyük kısmını Mantua şehrinde geçirmiş olan İtalyan matematikçi Giovanni Ceva (1648-1734) tarafından bulunmuş ve 1678 yılında yayınlanmıştır. Bu yayında, o güne kadar unutulmuş bulunan Menelaus teoremi de yeniden keşfedilmiştir.

**Ceva Teoremi:** Bir $ABC$ üçgeninde $A, B, C$ noktalarının hiçbirisiyle çakışmayan ve sırasıyla $BC, CA, AB$ doğrularının üzerinde bulunan $X, Y, Z$ noktaları alındığında $AX, BY, CZ$ doğrularının aynı bir noktadan geçmeleri veya paralel olmaları için gerek ve yeter koşul

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = -1 \tag{5}$$

olmasıdır.



**İspat:** Önce $AX, BY, CZ$ doğrularının bir $O$ noktasında kesiştiklerini varsayalım. $ABX$ üçgeni ve $ZC$ doğrusuna Menelaus teoremini uygulayarak

$$\frac{CB}{CX}\cdot\frac{OX}{OA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1;$$

aynı şekilde $AXC$ üçgeni ve $BY$ doğrusuna Menelaus teoremini uygulayarak

$$\frac{BC}{BX}\cdot\frac{OX}{OA}\cdot\frac{YA}{YC}=1$$

ve nihayet bu son iki eşitliği taraf tarafa bölerek de

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{BC}{CB}=-1$$

bulunur. Eğer $AX, BY, CZ$ doğruları paralelse, Thales teoremi doğrudan uygulanarak, gene

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{AB}{AZ}\cdot\frac{BZ}{BA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=-1$$

elde edilir. Şimdi de (5)'i varsayalım: $BY$ ve $CZ$ doğruları bir $O$ noktasında kesişirlerse $AO$ doğrusu da $BC$'yi bir $X'\neq B, C$ noktasında kesmelidir. (Aksi halde $AO, BC$'ye paraleldir. Thales teoremi ve (5), imkânsız olduğu bilinen $XB/XC=1$ verir.) İspatımızın ilk kısmından

$$\frac{X'B}{X'C}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=-1$$

buluruz. Bunu (5) ile taraf tarafa böldüğümüzde

$$\frac{XB}{XC}=\frac{X'B}{X'C}$$

elde edilir ki, bu ancak $X = X'$ durumunda mümkündür. Böylece $AX = AX', BY, CZ$ doğruları $O$ noktasında kesişirler. $BY$ ve $CZ$ doğrularının paralel olmaları durumunda $AX$ doğrusunun da bunlara paralel olması gerekir. Çünkü, diyelim ki $AX, BY$'yi kesseydi, yukarıdaki akıl yürütmeye göre $CZ$'nin de aynı kesim noktasından geçmesi gerekir di ki bu $BY$ ve $CZ$ paralel olduklarından imkânsızdır.

Şimdi de Ceva teoreminin kullanılışına birkaç örnek verelim:

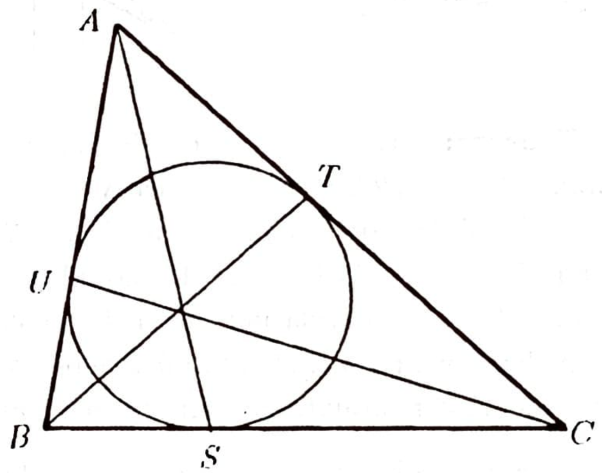
**Örnek 4:** *Kenarortayların noktadaşlığı*
Bu çok basit, fakat düşündürücü bir örnek.

**Teorem:** Bir $ABC$ üçgeninde $X, Y, Z$ sırasıyla $[BC], [CA], [AB]$ doğru parçalarının orta noktalarıysa, $AX, BY, CZ$ doğruları aynı bir noktadan geçer.

**İspat:**

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-1$$

**Örnek 5:** *Gergonne noktası*




**Teorem:** Bir $ABC$ üçgeninde iç teğet çemberin $BC, CA, AB$ kenarlarına değme noktaları sırasıyla $S, T, U$ ise $AS, BT, CU$ doğruları noktadaştır. (Bu ortak nokta üçgen geometrisinde önemli bir yere sahip olup, Gergonne noktası olarak anılır.)

**İspat:**

$$|UB|=|SB|, |SC|=|TC|, |TA|=|UA|$$

olduğu hatırlanırsa

$$\frac{SB}{SC}\cdot\frac{TC}{TA}\cdot\frac{UA}{UB}=-1$$

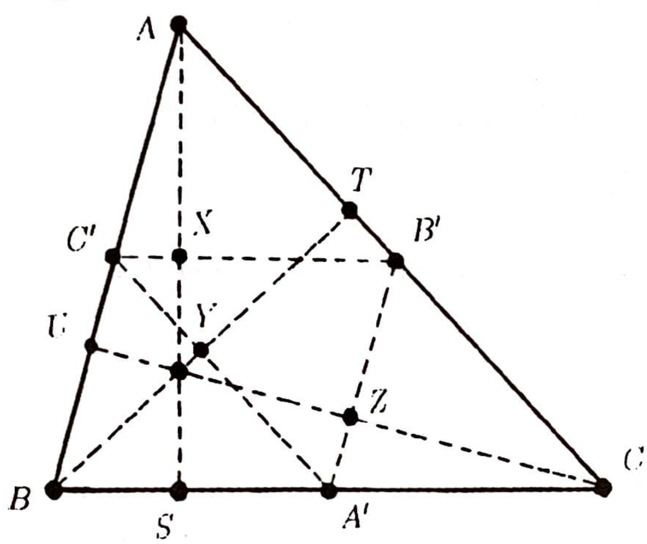
bulunur.

**Örnek 6:** *İşaretin Önemi*
Bazı kaynaklarda Ceva teoremindeki (-1)'in işareti önemsenmeyerek 1 olarak yazılmaktadır. Aşağıdaki örnek Menelaus ve Ceva Teoremlerinden birinde işaretin + diğerinde - oluşunun

önemini vurgulamaktadır. Bu işaret farklılığından yararlanarak H. Demir'e ait bir problemin çözümü verilmektedir.

**Problem:** ([1]) Hangi üçgenlerde yüksekliklerin orta noktaları doğrudaştır?

**Çözüm:**




$[BC], [CA], [AB]$ doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla $A', B', C'$ olsun. $A, B, C$'den sırasıyla $BC, CA, AB$'ye indirilen dikmelerin ayakları $S, T, U$ olsun. Bu suretle $AS, ABC$ üçgeninin $A$'dan geçen yüksekliği olup, $[AS]$ doğru parçasının (yüksekliğin!) orta noktasına $X$ dersek $\{X\} = AS \cap B'C'$'dür. Benzer şekilde $BT, CU$ diğer iki yüksekliği teşkil eder ve $\{Y\} = BT \cap C'A', \{Z\} = CU \cap A'B'$ şeklindeki $Y, Z$ noktaları sırasıyla $[BT], [CU]$ doğru parçalarının orta noktaları olurlar. Eğer

$$X \neq B', C'; Y \neq C', A'; Z \neq A', B' \qquad (6)$$

ise, aynı zamanda

$$S \neq B, C; T \neq C, A, U \neq A, B$$

olur. $AS, BT, CU$ yani üç yükseklik aynı bir noktadan geçtiğinden, Ceva teoremi bize

$$\frac{XB'}{XC'} \cdot \frac{YC'}{YA'} \cdot \frac{ZA'}{ZB'} = \frac{SC}{SB} \cdot \frac{TA}{TC} \cdot \frac{UB}{UA} = -1 \qquad (7)$$

verir. Şimdi ayrıca, $X, Y, Z$'nin doğrudaş olduklarını da varsayarsak Menelaus teoremini $A'B'C'$ üçgeninde uygulayarak

$$\frac{XB'}{XC'} \cdot \frac{YC'}{YA'} \cdot \frac{ZA'}{ZB'} = 1$$

olmalı ki bu (7) ile çelişir. Demek ki (6)'daki altı eşitsizliğin en az biri yanlış olmalıdır. Bu ise ancak üçgen dik üçgense mümkündür. (Nasıl?)

Yukarıda, elden geldiğince çekici örneklerle sunmaya çalıştığımız Menelaus ve Ceva teoremlerinin aslında Thales teoreminin basit genellemeleri olmakla birlikte çok kullanışlı ve önemli olduklarına okuyucuları ikna edebildiğimizi sanıyorum. Yazıyı bitirmeden önce diğer bir noktayı belirtelim. Bu teoremlerin bence asıl önemi "projektif geometri"ye bir giriş teşkil etmeleridir: Ceva teoreminde ve "eksik" diye nitelediğimiz Desargues teoreminde "bir noktada kesişir veya paralel olur" şeklinde bir ifadeye rastlıyoruz. Bu durum düzlem Euclid geometrisinde belli bir düzeyden sonra sık sık ortaya çıkar. En nihayet iki doğrunun paralel olmasını, bu doğruların "sonsuz uzakta" gerçek olmayan bir noktada kesişmeleri şeklinde yorumlamak gereği doğar. Diyebilirim ki, bu geometri tarihinin en önemli ve verimli fikri olmuştur. Gerçek olmayan noktaların ve bu noktalardan oluşan "sonsuzdaki doğru"nun düşünülmesiyle projektif geometri yaratılarak, geometriye büyük bir birlik ve zerafet getirilmiştir. Okuyucuya, bu genişletilmiş anlamda "noktadaşlık" kavramından yola çıkarak Ceva teoreminin daha zarif, Desargues teoreminin de "eksik olmayan" şeklini bulmasını öneririz.

**Kaynak:** [1] H. Demir: Proposal 1197, *Mathematics Magazine* **57** (1984) 238.

## OLİMPİYAT HABERLERİ

1991 Matematik Olimpiyatı İsveç'in Sigtuna kentinde yapıldı. Takımımızdan Emre Alkan, Mustafa Arslan, Tolga Etgü ve Şahin Arafat Bronz Madalya; Çetin Ürtiş ise Mansiyon kazandı. Takım olarak, katılan 56 ülke arasında 24. olduk.

## BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Albert K. Erkip

Bu yazımızda ele alacağımız eşitsizlikler belli koşullar altında tüm reel sayıların sağladığı bir takım bağıntılar. Bu tür temel eşitsizlikler problem çözümlerinde ara adım olarak kullanılıyor ve göreceğimiz gibi yeni eşitsizlikler bulmakta işe yarıyorlar.

Belki de en temel diyebileceğimiz eşitsizlik, herkesin tanıdığı mutlak değer için üçgen eşitsizliği.

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Üçgen eşitsizliği her $x, y$ reel sayısı için doğru. Daha az bilinen bir eşitsizlik ise $0 \leq (x-y)^2$ bağıntısını açarak elde edilen, her $x, y$ için doğru olan

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

eşitsizliği. Burada $a = x^2$, $b = y^2$ alırsak her pozitif $a, b$ için

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

bağıntısı çıkar. (1) az sonra göreceğimiz *Aritmetik-Geometrik-Harmonik ortalama eşitsizliklerinin* özel bir hali.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif reel sayıları için

$$H = n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1}$$

$$G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \quad A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

değerlerine sırasıyla bu sayıların harmonik, geometrik ve aritmetik ortalaması adı verilir. Bu ortalamalar arasında her zaman

$$H \leq G \leq A \tag{2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dahası, (2)'deki eşitsizliklerden birinin (ve dolayısıyla tümünün) eşitlik olması ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ durumunda mümkündür. Bu dediklerimizin kanıtlarını vermeyip, kanıtların bir kısmı ile bu ortalamaların geometrik anlamlarını Matematik Dünyası'nın ilk sayısında Hüseyin Demir'in "Bazı Ortalamalar" adlı yazısında okuduğunuzu hatırlatalım.

Matematikte çokça kullanılan bir diğer eşitsizlik de *Cauchy-Schwarz eşitsizliği.* Tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reel sayıları için

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \tag{3}$$

bağıntısı geçerli. Bu eşitsizliğin zarif bir kanıtı var. $x$ değişkeni için

$$p(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \tag{4}$$

polinomunu tanımlayalım. Kareleri açarak

$$\begin{aligned} M &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ N &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ K &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

olmak üzere

$$p(x) = Mx^2 - 2Nx + K \tag{6}$$

olduğu görülür. Öte yandan (4) bize her reel $x$ için $p(x) \geq 0$ olduğunu söyler, o halde diskriminant $\Delta \leq 0$ olmalıdır. Diskriminantı (6)'dan hesaplayalım, $\Delta = 4N^2 - 4MK \leq 0$ buluruz ki bu da (3) eşitsizliğini verir.

Kanıtımız bize Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik durumunu da inceleme olanağı tanır; şöyle ki (3)'te eşitlik varsa $N^2 = MK$'dır, (6)'dan dolayı

$$p(x) = Mx^2 - 2\sqrt{MK}x + K = (\sqrt{M}x - \sqrt{K})^2$$

olur. Yani $x_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$ için $p(x_0) = 0$'dır. Bu ise (4)'e göre ancak ve ancak

$$a_1x_0 = b_1, \quad a_2x_0 = b_2, \quad \ldots, \quad a_nx_0 = b_n \tag{7}$$

durumunda olur. Özetlersek Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik ancak ve ancak $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ çiftleri (7)'deki gibi birbirleriyle orantılı iseler vardır.

Yine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reel sayılarıyla başlayalım. (5)'teki gösterimle

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2 = M + 2N + K$$

eşitliği açıktır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $N \leq \sqrt{MK}$ olduğunu biliyoruz, o halde

$$M + 2N + K \leq M + 2\sqrt{MK} = (\sqrt{M} + \sqrt{K})^2$$

ve karekök alırsak, yukarıdaki eşitlikten:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \tag{8}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe *Minkowski* ya da *üçgen eşitsizliği* adı verilir.

Vektörleri gözönüne alırsak Minkowski eşitsizliğinin geometrik anlamını çıkarabiliriz. Düzlemde $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2)$ vektörlerini ele alalım. $n = 2$ için Minkowski eşitsizliğini vektör uzunlukları cinsinden $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$ şeklinde yazabiliriz, bu da (8)'e neden aynı zamanda üçgen eşitsizliği denildiğini açıklar.

Yine vektörler dilinde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini anlamaya çalışalım; yukarıdaki $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri için $a_1b_1 + a_2b_2$ değeri $\vec{A} \cdot \vec{B}$ iç çarpımıdır. Öte yandan bu iki vektör arasındaki açı $\theta$ ise iç çarpım için $\vec{A} \cdot \vec{B} = \cos\theta |\vec{A}|\,|\vec{B}|$ bağıntısını biliyoruz. Bunları birleştirirsek $n = 2$ için Cauchy=Schwarz eşitsizliği bildiğimiz $|\cos\theta| \leq 1$ eşitsizliğine denktir. Eşitlik durumu $|\cos\theta| = 1$ halidir ki bu da $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ radyan, yani $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri birbirlerine paralel demektir.

Üçgen eşitsizliğinde eşitlik durumunu ve bunun geometrik anlamını incelemeyi size bırakalım.

Verdiğimiz bu birkaç temel eşitsizlikle bile çok sayıda problemi çözmek ve yeni eşitsizlikler türetmek mümkün. Bazı örnekler verelim.

1. *Çevresi verilen üçgenler arasında alanı en büyük olanı bulunuz.*
   Üçgenin kenarları $a, b, c$ ise yarı çevre $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ cinsinden alan için

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

bağıntısını biliyoruz. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden:

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a) + (s-a) + (s-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

Yani;

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{s^3}{27} = \frac{s^4}{27}.$$

Alan için $A \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ üst sınırını bulduk. Öte yandan eşkenar üçgen için $A = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ olduğundan, çevresi verilen üçgenler içinde en büyük alanı olanın eşkenar üçgen olduğunu kanıtlamış olduk. $a = b = c$ eşkenar üçgen durumunun $s-a = s-b = s-c$ hali, yani Aritmetik-Geometrik eşitsizlikte eşitlik hali olduğuna dikkat ediniz.

2. *$a, b, c$ pozitif sayıları için $(1+abc)^3 \le (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)$ eşitsizliğini kanıtlayınız.*

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) = 1 + (a^3+b^3+c^3) + (a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) + a^3b^3c^3$$

Aritmetik-Geometrik eşitsizlikten:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge abc$$

$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}{3} \ge (a^3b^3b^3c^3c^3a^3)^{1/3} = (abc)^2$$

elde ederiz. Bunları yerine koyarsak aradığımızı elde ederiz.

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \le 1 + 3abc + 3(abc)^2 + (abc)^3 = (1+abc)^3$$

Eşitlik halini irdeleyelim; iki Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinde de eşitlik olmalıdır, bu ise ancak $a = b = c$ durumunda olur.

3. *Pozitif $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sayıları için*

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \le \frac{4}{k^2(k+1)^2}\left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{k^2}{a_k}\right)$$

*eşitsizliğini kanıtlayınız.*

İstenen Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizliğinin ters çevrilmiş halini andırıyor, ancak biraz oynamak gerekecek.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \cdots + \frac{a_k}{k}$$

yazalım, sağ tarafta $n = \frac{k(k+1)}{2}$ terim var. Bu terimlere Aritmetik-Harmonik eşitsizliği uygularsak isteneni bulduğumuzu görüyoruz.

$$\frac{n}{1/a_1 + 2/a_2 + 2/a_2 + \cdots + k/a_k + \cdots + k/a_k} \le \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \cdots + \frac{a_k}{k}}{n}.$$

Bu eşitsizlikteki eşitlik durumunu inceleyiniz.

4. *$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ koşulu altında*

$$d = \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}$$

*sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.*

Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanmamız gerekecek. Bunun için aşağıdaki gruplamayı yapacağız.

$$1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 - x_1 + \sqrt{2}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n}\frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Cauchy-Schwarz eşitliğinden:

$$1 = \left(1 - x_1 + \sqrt{2}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 \le (1+2+\cdots+n)\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}\right)$$

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ olduğundan; $d \geq \frac{2}{n(n+1)}$ olduğunu gösterdik. Şimdi uygun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ için $d=\frac{2}{n(n+1)}$ değerini elde etmeye çalışalım. Bu Cauchy-Schwarz eşitsizliğindeki eşitlik durumudur ki ancak

$$(1, x_1), \left(\sqrt{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right), \ldots, \left(\sqrt{n}, \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$$

çiftleri orantılı ise, yani $x_2 = 2x_1, \ldots, x_n = nx_1$ ise olur. Öte yandan $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ olduğundan;

$$x_1 = \frac{2}{n(n+1)}, \quad x_2 = 2x_1, \ldots, x_n = nx_1$$

için $d=\frac{2}{n(n+1)}$ bulunur.

Temel eşitsizlikler, genellemeleri ve kullanılmaları ile ilgili önerebileceğimiz kaynaklar arasında bu derginin birinci sayısında tanıtılan Matematik Derneği yayınlarından P.P. Korowkin'in "Eşitsizlikler" ve E. Beckenbach ile R. Bellman'ın "Eşitsizliklere Giriş" adlı kitapları var. Yine geçen sayıda, bu köşede değindiğimiz "The U.S.S.R. Olympiad Problem Book" çok sayıda eşitsizlik problemi içeriyor.

Yazıyı aralarında iki olimpiyat problemi yer alan birkaç soru ile bitirelim.

1. $x^2+4y^2=1$ koşulu altında $d=2x+3y$ sayısının alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz. Problemin geometrik anlamını inceleyiniz.

2. $a, b$ pozitif reel sayıları ve $n, k$ tam sayıları için

$$a^k b^n \leq \left(\frac{ka+nb}{k+n}\right)^{n+k}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

3. $a_i, b_i, c_i, d_i$ reel sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^4\right)$$

eşitsizliğini kanıtlayınız, eşitlik durumunu irdeleyiniz.

4. $a_i, b_i, c_i$ pozitif reel sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

5. (1984 Olimpiyat Sorusu)
$x, y, z$ pozitif reel sayıları için $x+y+z=1$ ise $0 < xy+yz+xz-2xyz \leq \frac{7}{27}$ eşitsizliklerini kanıtlayınız.

6. (1979 Olimpiyatı Sorusu)

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 &= a \\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5 &= a^3 \\ x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5 &= a^5 \end{aligned}$$

denklem takımının tüm $a$ ve negatif olmayan $x_1, x_2, \ldots, x_5$ çözümlerini bulunuz.

# SORULAR

## ALIŞTIRMA SORULARI

**A16.** $a, b, c, a', b', c'$ sıfırdan farklı gerçel sayılar ve

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

ise

$$aa' = bb' + cc'$$

olduğunu ispatlayıp ayrıca geometrik yorumunu yapınız.

**A17.** 1'den 1991'e kadar (1991 dahil) olan tek sayıların 1991'inci kuvvetleri toplamı olan

$$1^{1991} + 3^{1991} + \cdots + 1991^{1991}$$

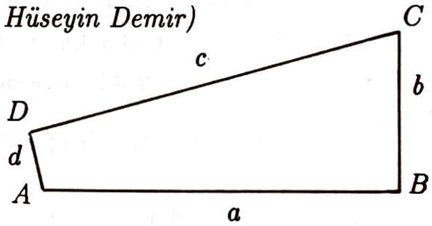
sayısının birler basamağındaki sayı kaçtır?

**A18.** Bir $OAB$ üçgeni $O$ köşesi etrafında pozitif yönde $90°$ döndürülerek $OA'B'$ üçgeni elde ediliyor. $[A'B]$'nin ortası $E$ ise $OE \perp AB'$ olduğunu ispatlayınız.

**A19.** Ardışık kenar uzunlukları $a, b, c, d$ olan ve $B, D$ açıları dik olan bir $ABCD$ dörtgeninde

$$\frac{a+d}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{\cos\frac{C}{2}}$$

olacağını ispatlayınız.
*(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*




**A20.** $a, b, c, d$ pozitif sayılar ve $a+b+c+d = 8$ ise $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} < 6$ olacağını gösteriniz.

## YARIŞMA SORULARI

**Y16.** $a, b, c$ herhangi gerçel sayılar olduğuna göre

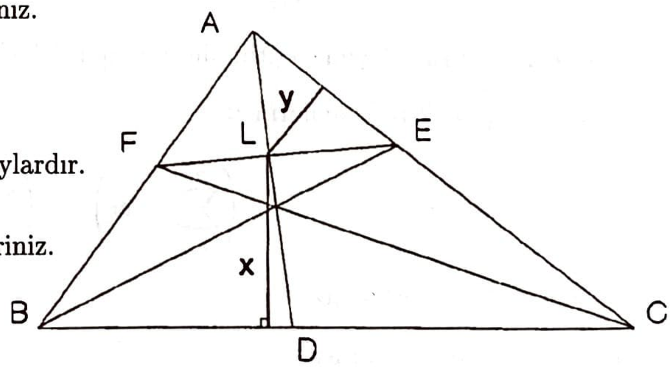
$$\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2} + \sqrt[3]{a^4c^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{b^4c^2} + \sqrt[3]{b^4a^2}} + \sqrt{c^2 + \sqrt[3]{c^4a^2} + \sqrt[3]{c^4b^2}} = (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})^{3/2}$$

olacağını ispatlayınız. *(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*

**Y17.** $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ polinomunu ($a, b, c$'nin mümkün olan en küçük dereceli ve tam katsayılı polinomlarının çarpımı olarak) çarpanlara ayırınız.

**Y18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = ?$

**Y19.** Bir $ABC$ üçgeninde $[AD], [BE], [CF]$ iç açıortaylardır. $AD \cap EF = L$ ise $L$'nin $BC$'ye uzaklığı $x$ ve $AC$'ye uzaklığı da $y$ ise, $x = 2y$ olduğunu gösteriniz.
*(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*




**Y20.** Düzgün bir dokuzgenin en uzun ve en kısa köşegenleri farkının kenar uzunluğu kadar olduğunu gösteriniz.
*(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*

Gönderilecek çözümlerde önemle dikkat edilmesi gereken noktalar:
1) Her sorunun çözümünün ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır biçimde yazılması;
2) Kağıdın sağ üst köşesine adınızın, soyadınızın, adresinizin ve öğrenci iseniz okul ve sınıfınızın yazılması;
3) Çözümlerin yazımına redaksiyon gerektirmeyecek biçimde özen gösterilmesi;
4) Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin *1 Ocak 1992* tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi.

# ÇÖZÜMLER

**A6.** P. Fermat (1601-1665) tarafından verilen $\left[\frac{b(2a^3-b^3)}{a^3+b^3}\right]^3 - \left[\frac{a(2b^3-a^3)}{a^3+b^3}\right]^3 = a^3 - b^3$ özdeşliğini ispatlayınız.

**Çözüm** (Alim Yılmaz, Manisa):

Bazı özdeşlikleri kullanarak,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{b(2a^3-b^3)}{a^3+b^3}\right]^3 - \left[\frac{a(2b^3-a^3)}{a^3+b^3}\right]^3 &= \frac{b^3(2a^3-b^3)^3 - a^3(2b^3-a^3)^3}{(a^3+b^3)^3} = \frac{a^{12}-b^{12}+2a^9b^3-2a^3b^9}{(a^3+b^3)^3} \\
&= \frac{a^{12}-b^{12}+2a^3b^3(a^6-b^6)}{(a^3+b^3)^3} = \frac{(a^6-b^6)(a^6+b^6+2a^3b^3)}{(a^3+b^3)^3} \\
&= \frac{(a^6-b^6)\cdot(a^3+b^3)^2}{(a^3+b^3)^3} \\
&= a^3-b^3
\end{aligned}$$

elde ederiz.

**A7.** $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-2} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm** (Namık Gök, İzmir):

$\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-2} = 0$ denklemini $(x+2)^{1/3} + (x-2)^{1/3} = x^{1/3}$ şeklinde ifade edelim ve iki tarafın kübünü alıp sadeleştirelim:

$$x+2+x-2+3(x+2)^{2/3}(x-2)^{1/3} + 3(x+2)(x-2)^{2/3} = x.$$

Buradan

$$3(x+2)^{1/3}(x-2)^{1/3}\left((x+2)^{1/3}+(x-2)^{1/3}\right) = -x$$

veya

$$3(x+2)^{1/3}(x-2)^{1/3}x^{1/3} = -x$$

elde edilir. İki tarafın kübünü alarak,

$$27x(x^2-4) = -x^3$$

denklemi , yani

$$x(28x^2-108) = 0$$

denklemi bulunur. Çözüm kümesi olarak da

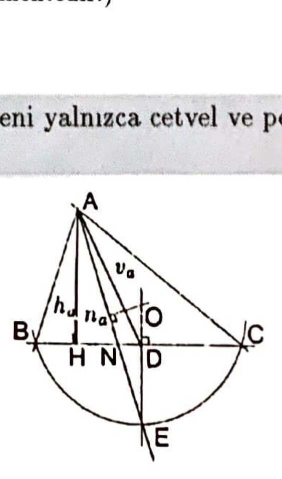
$$\left\{-\sqrt{27/7}, 0, \sqrt{27/7}\right\}$$

bulunur.

(Gerçel sayılarda $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ oluşu nedeniyle yapılan işlemlerde yabancı kök girmemektedir.)

**A8.** Bir kenarına ait $h_a$ yüksekliği, $n_a$ açıortayı ve $v_a$ kenarortayı verilen bir üçgeni yalnızca cetvel ve pergelle çiziniz.

**Çözüm** (Ahmet Ok, İstanbul):



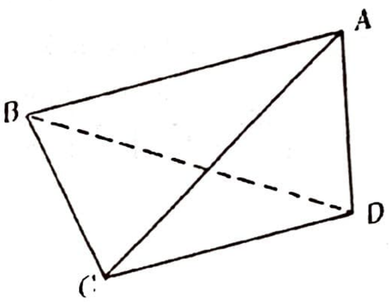

$\overset{\triangle}{AHN}$ çizilir. $|AD| = v_a$'dan $D$ bulunur. $[HD]$'ye $D$'den çizilen dikmenin açıortayı kestiği nokta olarak $E$ bulunur. $[AE]$'nin orta dikmesi ile $[ED]$'nin uzantısı $O$'da kesişir. $O$ merkezli ve $|OE|$ yarıçaplı çember çizilerek $B$ ve $C$ bulunur.

**A9.** $ABCD$ bir dikdörtyüzlü (yani $DB \perp DC$, $DC \perp DA$, $DA \perp DB$) ise $ABC$ üçgeninin $d$ alanını $DBC, DCA, DAB$ üçgenlerinin $a, b, c$ alanları türünden bulunuz.

**Çözüm** (Atasağun Baykal, Ankara):

$C\overset{\triangle}{D}B$ dik üçgeninde $\overline{BC}^2 = p^2 + m^2$. Alan hesabından

$$\frac{p \cdot m}{\sqrt{p^2+m^2}} = h.$$




$AD$'den geçen $BC$'ye dik düzlemin $BC$'yi kestiği noktaya $O$ ve $|OA| = H$ ve $|OD| = h$ dersek şunları elde ederiz:

$$AO \perp BC$$

, $S(A\overset{\triangle}{B}C) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BC}$.

$$n^2 + h^2 = H^2 \Rightarrow n^2 + \frac{p^2m^2}{p^2+m^2} = H^2.$$

$$H^2 = \frac{n^2p^2 + n^2m^2 + p^2m^2}{p^2+m^2}, \quad \overline{BC}^2 = m^2 + p^2$$

$$S(A\overset{\triangle}{B}C) = d = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2p^2 + n^2m^2 + p^2m^2}{m^2+p^2}} \cdot \sqrt{m^2+p^2}$$

$$pm = 2a,\ mn = 2b,\ pn = 2c \Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4b^2+4c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

**A10.** $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = ?$

**Çözüm** (Ahmet Ok, İstanbul):

$\arctan\frac{1}{5} = x$, $\arctan\frac{1}{239} = y$ denirse

$$\tan x = \frac{1}{5}, \ \tan y = \frac{1}{239}$$

olur; buna göre

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4x = \frac{2\tan 2x}{1+\tan^2 2x} = \frac{120}{119}$$

elde edilir ve

$$\tan(4x-y) = \frac{\tan 4x - \tan y}{1+\tan 4x \cdot \tan y} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = 1$$

çıkar. Demek ki

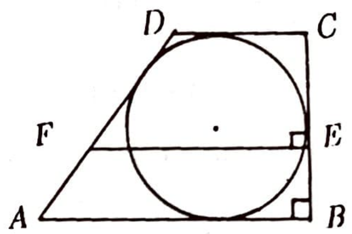
$$4x - y = \frac{\pi}{4}$$

yani

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

olur.

**Y6.** Bir teğetler dik yamuğu tabanlara paralel bir doğru ile kesiştirilerek çevre uzunlukları eşit $ABEF, FECD$ yamukları elde edilmiştir. $|EF|$ uzunluğunun $ABCD$'nin kenarlarından birine eşit olduğunu gösteriniz.
*(Hazırlayan: Hüseyin Demir.)*




**Çözüm** (Atasağun Baykal, Ankara):

Çemberin yarıçapı $r$, $\overline{HD} = \overline{DG} = X$, $\overline{HA} = \overline{AM} = y$, $\overline{FP} = u$ olsun.

$\overset{\triangle}{DNA}$ dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa

$$4r^2 + (y-x)^2 = (y+x^2), \text{ yani } r^2 = yx$$

çıkar. Şimdi $\overset{\triangle}{DFP}$ ve $\overset{\triangle}{DAN}$ üçgenlerinin benzeşim oranına $k$ dersek,

$$\overline{FP} = k \cdot \overline{AN} = k(y-x)$$

$$\overline{FD} = k \cdot \overline{AD} = k(x+y), \quad EC = 2rk$$

$$\overline{FA} = (1-k)AD = (1-k)(x+y),$$

$$EB = (1-k)2r, \ \overline{GC} = \overline{MB} = r$$

olur. Yamukların çevre uzunlukları eşit olacağından

$$EF + FD + DG + GC + EC = EF + FA + AM + MB + BE$$

$$(y+x|k + x + 2rk = (y+x)(1-k) + y + 2r(1-k)$$

$$k = \frac{r+y}{2r+y+x}$$

elde edilir. $y = \dfrac{r^2}{x}$'den

$$k = \frac{rx + r^2}{2rx + r^2 + x^2} = \frac{r(r+x)}{(r+x)^2} = \frac{r}{r+1}.$$

$$EF = FP + x + r = k(y-x) + x + r = \frac{r}{r+x}(y-x) + x + r$$

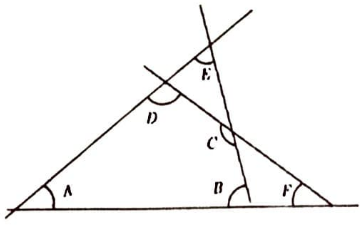
$$= \frac{r}{r+x}\left(\frac{r^2}{x} - x\right) + x + r = \frac{(r-x)r + rx}{x} + x$$

$$= \frac{r^2}{x} + x = y + x = AH + HD = AD$$

istenen sonucu çıkar.

**Diğer çözenler:** Önder Sayı, Ufuk Yavuz, Barış Tuncer - Onur Kutlu, Namık Gök, Alparslan Eltuğ, Murat Limoncu, Ahmet Ok, Doğan Metin, Atasağun Baykal.

**Y7.** Yandaki tamdörtgende (genel durumlu dört doğrunun oluşturduğu şekilde) belirtilen açılar arasında
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2} = \cos\frac{E}{2}\cos\frac{F}{2}$$
eşitliğinin geçerli olduğunu gösteriniz.
*(Hazırlayan: Hüseyin Demir.)*



**Çözüm** (Erhan Gürel, İzmir):

$$A+B+C+D=360°,\quad E=180°-(A+B),\quad F=180°-(A+D)$$

oluşundan, dönüşüm ve ters dönüşüm formülleriyle

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{B+D}{2}+\cos\frac{B-D}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{B-D}{2}\right)=\cos\frac{A+B-(C+D)}{2}\cos\frac{A+D-(B+C)}{2}$$

$$=\cos\frac{2(A+B)-360°}{2}\cos\frac{2(A+D)-360°}{2}=\cos\left(-\frac{E}{2}\right)\cos\left(-\frac{F}{2}\right)=\cos\frac{E}{2}\cos\frac{F}{2}$$

bulunur.

**Y8.** $a,b,c$ sıfırdan farklı gerçel sayılar olduğuna göre

$$\left(\frac{b}{x}+1+\frac{x}{c}\right)^{-1}+\left(\frac{c}{x}+1+\frac{x}{a}\right)^{-1}+\left(\frac{a}{x}+1+\frac{x}{b}\right)^{-1}=1$$

denklemini çözünüz.
*(Hazırlayan: Hüseyin Demir.)*

**Çözüm** (Erhan Gürel, İzmir):

$$\left(\frac{b}{x}+1+\frac{x}{c}\right)^{-1}+\left(\frac{c}{x}+1+\frac{x}{a}\right)^{-1}+\left(\frac{a}{x}+1+\frac{x}{b}\right)^{-1}=1\Rightarrow\frac{xc}{x^2+xc+bc}+\frac{xa}{x^2+xa+ac}+\frac{xb}{x^2+xb+ab}=1.$$

Paydaları eşitleyip içler dışlar çarpımı yaparsak

$$x^5(a+b+c)+2x^4(ab+bc+ac)+x^3(6abc+c^2a+a^2b+b^2c)+2x^2(a^2bc+b^2ac+c^2ab)+x(a^2c^2b+a^2b^2c+b^2c^2a)$$

$$=x^6+x^5(a+b+c)+2x^4(ab+bc+ac)+x^3(4abc+a^2b+c^2a+b^2c)+2x^2(a^2bc+b^2ac+c^2ab)+x(b^2c^2a+a^2b^2c+a^2c^2b)+a^2b^2c^2$$

olur. Gerekli sadeleştirmeyi yaparsak

$$x^6-x^3\cdot 2abc+a^2b^2c^2=0$$

yani,

$$(x^3-abc)^2=0$$

çıkar ve sonuç olarak

$$x=\sqrt[3]{abc}$$

çözümü bulunur.

**Diğer çözenler:** Atasağun Baykal, Barış Tuncer - Onur Kutlu, Alpaslan Eltuğ, Doğan Mersin, Aydın Ünverdi.

**Y9.** $t=-1+\sqrt{2}$ olduğuna göre

$$\int_{1/t}^{t}\frac{dx}{(x^2+1)(x^t+1)}$$

integralinin değeri nedir?

**Çözüm** (Önder Sayı, İstanbul - Aydın Ünverdi, İstanbul):

Önce, $t = \sqrt{2} - 1$ için $\frac{1}{t} = \sqrt{2} + 1$ olacaktır. Şimdi $I = \int_{1/t}^{t} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^t)} dx$ integralinde $x = \frac{1}{p}$ değişken değiştirmesini yapalım:

$$I = -\int_{t}^{1/t} \frac{\frac{1}{p^2}}{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^t}\right)} dp = \int_{1/t}^{t} \frac{p^t}{(1+p^2)(1+p^t)} dp = \int_{1/t}^{t} \frac{(p^t+1)-1}{(1+p^2)(1+p^t)} dp$$

$$= \int_{1/t}^{t} \frac{(p^t+1)}{(1+p^2)(1+p^t)} dp - \underbrace{\int_{1/t}^{t} \frac{1}{(1+p^2)(1+pt)} dp}_{I}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{1/t}^{t} \frac{1}{1+p^2} dp - I.$$

Böylece

$$2I = \arctan p|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left\{\left[\arctan(\sqrt{2}-1)\right] - \left[\arctan(\sqrt{2}+1)\right]\right\}$$

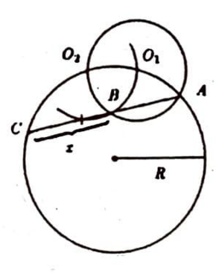
çıkar. $\arctan(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$; $\arctan(\sqrt{2}+1) = \frac{3\pi}{8}$ olduğuna göre, buradan integralin değeri elde edilir:

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{8}\right) = -\frac{\pi}{8}.$$

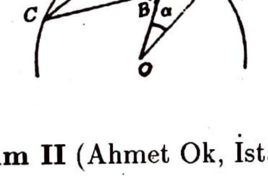
(Ya da $\tan 2I = \tan(\arctan(\sqrt{2}-1) - \arctan(\sqrt{2}+1)) = -1$ den $2I = -\frac{\pi}{4}$ ve $I = -\frac{\pi}{8}$ sonucuna varılır.)

**Diğer çözenler:** Doğan Mersin, Murat Limoncu.

**Y10.** Merkezi $O$ ve yarıçapı $R$ olan bir çemberin üzerinde bir $O_1$ noktası alınıp çizilen $(O_1, r)$ çemberi $(O, R)$'yi $A$ ve $O_2$ de kesiyor. $(O_2, r)$ çemberi $(O_1, r)$'yi $(O, R)$'nin içinde $B$ de, $AB$ doğrusu da $(O, R)$'yi $C$ de keserse $|BC| = R$ olduğunu gösteriniz.



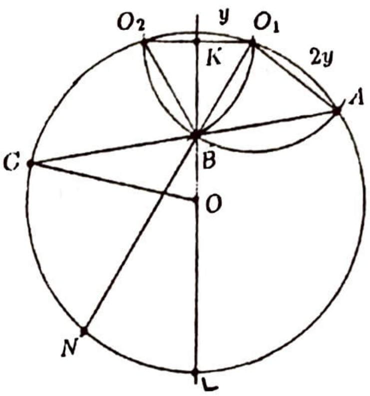

**Çözüm I** (Erhan Gürel, İzmir): $|BC| = x$ ve $\widehat{AOO_1} = \alpha$ olsun. $\widehat{AO_1}$ ve $\widehat{O_1O_2}$ yaylarının eşitliğinden $\widehat{ACO_2} = \alpha$ olur. $AO_1O_2C$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Bu nedenle; $\widehat{AO_1B} = 120 - \alpha$ olur. Böylece $\widehat{ABO_1} = 30 + \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBO_2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CO_2B} = 90 - \frac{\alpha}{2}$ olur. $\overset{\triangle}{AOO_1}$ üçgeni ile $\overset{\triangle}{BCO_2}$ üçgeninin açılarını karşılaştırarak benzerliği $\alpha$ karşısındaki kenarın $r$ oluşundan de eşliği elde ederiz. Demekki $x = |BC| = |AO| = R$ olmaktadır.




**Çözüm II** (Ahmet Ok, İstanbul):
$\overset{\triangle}{O_1O_2B}$ eşkenar olup $[O_1O_2]$ orta dikmesi $B$ ve $O$'dan geçer. $\overset{\frown}{KO_1} = \overset{\frown}{KO_2} = y$ koyduğumuzda $\overset{\frown}{O_1A} = 2y$ ve $\overset{\triangle}{O_1BA}$ ikizkenar $(|O_1B| = |O_1A|) \Rightarrow m(\widehat{O_1AB}) = m(\widehat{O_1BA})$ olup

$$\frac{\overset{\frown}{CN} + \overset{\frown}{O_1A}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CO_2} + \overset{\frown}{O_2O_1}}{2} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{CN} + 2y}{2} = \frac{\overset{\frown}{CO_2} + 2y}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{CO_2}$$

elde olunur. Öte yandan $\overset{\triangle}{O_1O_2B}$ eşkenar, $\widehat{O_2O_1B} = 60° \Rightarrow \overset{\frown}{CN} + \overset{\frown}{CO_2} = 120° \Rightarrow \overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{CO_2} = 60°$ bulunur. O halde




$$\widehat{KBO_1} = 30° \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{NL} + y}{2} = 30° \Rightarrow \overset{\frown}{NL} = 60 - y,$$

$$m(\widehat{COK}) = \overset{\frown}{CO_2} + y = 60° + y$$

$$m(\widehat{CBO}) = \frac{\overset{\frown}{CN} + 60 - y + 3y}{2} = \frac{120 + 2y}{2} = 60 + y$$

bulunur ki, bu $COB$ üçgeninin ikizkenar olması yani $|CB| = |CO| = R$ olması demektir.

**Diğer çözenler:** Murat Limoncu, Önder Sayı, Alpaslan Eltuğ.

## MATEMATİK ÖDÜLLERİ

Şafak Alpay

Matematiğin evrenselliği, kalıcılığı, estetiği gibi güzellikleri paylaşan matematikçiler bunları paylaşmak, anlamak için bölgesel, ulusal ve uluslararası toplantılar düzenleyerek bir araya gelip "matematik yaparlar". Kalıcılık için esas olan geleneksel matematik yapma ise üretilen matematiğin dergilerde yayınlanması ile oluyor. Matematik araştırması basan 250 civarında dergide senede 100 bin teorem kanıtlandığı düşünülürse, bunlar arasından olağanüstü önemli olanlarının ödüllendirilmesi ile kalıcı eser verme çabasının özendirildiği düşünülebilir. Gerçekten, matematikte ileri olan ülke, kişi ve kurumların aynı güzel sanatlar ve edebiyatta olduğu gibi matematiği özendirmek için de çeşitli ödüller koyduklarını, matematik üretilmesine olanak tanıyacak ortamların yaratılmasına katkı yaptıklarını biliyoruz. Volkswagen şirketinin Alman kara ormanlarında kurduğu ve tüm dünya matematikçilerine açık olan enstitü bunun bir örneğidir.

İsveç Bilimler Akademisi'nin kendisine layık gördüğü Crafoord ödülünü kabul etmeyen çağımızın önde gelen matematikçilerinden A. Grothendieck akademi başkanına yazdığı mektupta, ödüllere karşı olduğunu, bir matematik araştırmasının değerinin kazandığı ödüllerle değil, verdiği yeni sürgünlerle ölçülmesi gereğini savunmuştu. Karşı fikirler olmasına rağmen ödüllerin genç araştırmacıları özendirdiği yadsınamaz.

Matematik dünyasının en büyük toplantısı 1897 yılından itibaren her 4 yılda bir toplanan Uluslararası Matematik Kongresi'dir. Bu toplantılarda, sunulan yüzlerce bildirinin yanısıra, matematiğin Nobel ödülü kabul edilen Fields Madalyaları da dağıtılmaktadır. 1928 Toronto Kongresi'nde J.C. Fields tarafından önerilen ödül fikri, bu nedenle Fields Madalyaları adı ile anılıyor ve 1936 Oslo toplantısından bu yana veriliyor.

Ulusal ödüllerin en eskisi 1967 yılında verilmeğe başlanan TÜBİTAK Teşvik, Bilim ve Hizmet ödülleridir. Teşvik ödülleri her yıl 40 yaşını aşmamış araştırmacılara son beş yıl içinde ürettikleri üstün düzeydeki çalışmaları için veriliyor. Bu ödülü kazanan matematikçiler A. Aşkar, T. Başar, T. Terzioğlu, İ. Dibağ, A.O. Asar, E. Akyıldız, T. Önder, M. Demiralp, Z. Nurlu ve H. Bor. Araştırmalarının tümü ile matematiğe uluslararası düzeyde yaptığı önemli katkılar nedeni ile verilen Bilim ödüllerinin sahipleri ise C. Arf, O. İçen, E. Şuhubi, M.G. İkeda, H. Demiray ve T. Terzioğlu. Matematiğin ülkemizdeki gelişmesine yaptıkları katkılar nedeni ile K. Erim ve N. Terzioğlu'na Hizmet ödülleri verilmiştir.

Sedat Simavi Vakfı Fen Bilimleri ödülleri 1977'de başladı. Özgün katkıları nedeni ile bu ödülü kazanan matematikçiler; T. Başar, M. İdemen, M. Demiralp, İ. Dibağ, Y. Avcı, A.Aytuna, M. Kocatepe ile ödülü bu yıl paylaşan Yılmaz ve Ersan Akyıldız kardeşlerdir. İlk defa bu yıl bir matematikçiye ödül veren Parlar Vakfı ödülünün sahibi ise M. Tezer oldu.

Ülkemizde yazılan üstün nitelikli Doktora tezlerine verilen Nazım Terzioğlu ödülünü kazananlar S. Koray, M.H. Oryan, İ. Güloğlu ve M. Kirezci'dir.

Balkan Matematikçiler Birliği'nin ödülünü M. Orhon, T. Terzioğlu, A. Erkip, E. Akyıldız ve M. Kocatepe kazanmışlardır.

Gelişmiş ülkelerle karşılaştırıldığında oldukça az sayıda olduğu görülen matematik ödüllerinin, bu bilime ayrılan kaynakların azlığının göstergesi olarak kabul edebiliriz. Kaynakların arttırılması ile gelişecek matematiğin kalkınmamızda yapacağı etki, gelişmiş ülkelerde yaşanan bir gerçektir.

## AZERBAYCAN'DA MATEMATİK ÖĞRETİMİ

Aşağıda Azerbaycan'daki ortaöğretimin (V sınıftan XI sınıfa kadar) matematik müfredatı özgün biçimiyle ve bizdeki deyişle verilmektedir. Böylece, iki yanlı yararlanmanın sağlanacağını umuyoruz. Bu müfredat, geçmiş yıllarda SSCB'nin tümünde kullanılmıştır.

### V Sınıf

RİYAZİYAT *(Haftada 6, cemi 204 saat)*
1. Naturel adedler ve onlar üzerinde ameller (32 saat)
2. Naturel adedler üzerinde hesab amellerinin hasseleri (26 saat)
3. Kesir adedler (20 saat)
4. Onluk kesirler (17 saat)
5. Onluk kesirler üzerinde hesab amelleri (44 saat)
6. Faiz (20 saat)
7. Hendesî kemiyyetlerin ölçülmesi (25 saat)
8. Tekrar. Mesele halli (20 saat)

### V Sınıf

MATEMATİK *(Haftada 6, toplam 204 saat)*
1. Doğal sayılar ve doğal sayılarla işlemler (32 saat)
2. Doğal sayılarla işlemlerin özellikleri (26 saat)
3. Kesirler (20 saat)
4. Ondalık kesirler (17 saat)
5. Ondalik kesirlerle işlemler (44 saat)
6. Yüzde hesapları (20 saat)
7. Geometrik niceliklerin ölçülmesi (25 saat)
8. Tekrar. Problem çözümü (20 saat)

### VI Sınıf

RİYAZİYAT *(Haftada 6, cemi 204 saat)*
1. Kesrin esas hassesi (24 saat)
2. Adi kesirler üzerinde hesab amelleri (36 saat)
3. Tenasüb (12 saat)
4. Müsbet ve menfi adedler (10 saat)
5. Müsbet ve menfi adedler üzerinde hesab amelleri (38 saat)
6. Rasyonel adedler (26 saat)
7. Müstevi üzerinde düz bucaklı koordinat sistemi (13 saat)
8. Bir meçhüllü hetti tenlikler (25 saat)
9. Tekrar. Mesele halli (20 saat)

### VI Sınıf

MATEMATİK *(Haftada 6, toplam 204 saat)*
1. Kesirlerin ana özellikleri (24 saat)
2. Adi kesirlerle ilgili işlemler (36 saat)
3. Oran (12 saat)
4. Pozitif ve negatif sayılar (10 saat)
5. Pozitif ve negatif sayılarla ilgili işlemler (38 saat)
6. Rasyonel sayılar (26 saat)
7. Düzlemde dik koordinat sistemi (13 saat)
8. Bir bilinmeyenli doğrusal denklemler (25 saat)
9. Tekrar. Problem çözümü (20 saat)

### VII Sınıf

*(Haftada 6 saat, cemi 204 saat)*

CEBR *(Haftada 4 saat, cemi 136 saat)*
1. Hetti tenlikler (34 saat)
2. Naturel üstlü kuvvet (14 saat)
3. Birhedliler ve çohhedliler (28 saat)
4. Muhteser vurma dusturları (30 saat)
5. Takribi hesaplamalar (20 saat)
6. Tekrar. Mesele halli (10 saat)

### VII Sınıf

*(Haftada 6, toplam 204 saat)*

CEBİR *(Haftada 4, toplam 136 saat)*
1. Doğrusal denklemler (34 saat)
2. Üstlü çokluklar (14 saat)
3. Tek terimliler ve çok terimliler (28 saat)
4. Özdeşlikler (30 saat)
5. Yaklaşık hesaplamalar (20 saat)
6. Tekrar. Problem çözümü (10 saat)

HENDESE *(Haftada 2 saat, cemi 68 saat)*
1. Hendeseye giriş (16 saat)
2. Üçbucaklar (12 saat)
3. Pergel ve hetkeşin kemeyile kurmalar (12 saat)
4. Düz hetlerin paralelliği (12 saat)
5. Çevre ve daire (10 saat)
6. Tekrar. Mesele halli (6 saat)

VIII Sınıf
*(Haftada 6, cemi 204 saat)*

CEBR *(I. yarımyılda haftada 4, II. yarımyılda haftada 3 saat, cemi 119 saat)*
1. Cebri kesirler (30 saat)
2. Kuadrat kökler (30 saat)
3. Kuadrat tenlikler (29 saat)
4. Rasyonel tenlikler (14 saat)
5. Tekrar. Mesele halli (16 saat)

HENDESE *(I. yarımyılda haftada 2, II. yarımyılda haftada 3, cemi 85 saat)*
1. Dört bucaklılar (18 saat)
2. Vektörler ve koordinatlar (18 saat)
3. Metrik teoremler (27 saat)
4. Hareket (12 saat)
5. Tekrar. Mesele halli (10 saat)

IX sınıf
*(Haftada 6 saat, cemi 204 saat)*

CEBR *(Haftada 4 saat, cemi 136 saat)*
1. Hetti berabersizlikler ve sistemler (10 saat)
2. Adedi fonksiyonlar (20 saat)
3. Kuadrat fonksiyonlar (14 saat)
4. Tenliklerin ve berabersizliklerin halli (30 saat)
5. Trigonometrianın elementleri (30 saat)
6. Silsileler (12 saat)
7. Cebr kursunun umumileştirici tekrarı. Mesele halli (20 saat)

HENDESE *(Haftada 2 saat, cemi 68 saat)*
1. Üçbucakların okşarlığı (18 saat)
2. Çokbucaklıların sahaları (14 saat)
3. Çevrenin uzunluğu, dairenin sahası (6 saat)
4. Üçbucakların halli (15 saat)
5. Hendesenin mantıgî kurulması, riyaziyatta aksiyomatik metod hakkında musahabe. Hendese kursunun umumileştirici tekrarı. Mesele halli (15 saat)

GEOMETRİ *(Haftada 2, toplam 68 saat)*
1. Geometriye giriş (16 saat)
2. Üçgenler (12 saat)
3. Pergel ve cetvelle çizimler (12 saat)
4. Doğruların paralelliği (12 saat)
5. Çember ve daire (10 saat)
6. Tekrar. Problem çözümü (6 saat)

VIII Sınıf
*(Haftada 6, toplam 204 saat)*

CEBİR *(1. yarıyılda haftada 4, 2. yarıyılda haftada 3, toplam 119 saat)*
1. Cebirsel kesirler (30 saat)
2. Karekökler (30 saat)
3. İkinci dereceden denklemler (29 saat)
4. Rasyonel denklemler (14 saat)
5. Tekrar. Problem çözümü (16 saat)

GEOMETRİ *(1. yarıyılda haftada 2, 2. yarıyılda haftada 3, toplam 85 saat)*
1. Dörtgenler (18 saat)
2. Vektörler ve koordinatlar (18 saat)
3. Ölçmeyle ilgili formüller (27 saat)
4. Geometrik dönüşümler (12 saat)
5. Tekrar. Problem çözümü (10 saat)

IX Sınıf
*(Haftada 6, toplam 204 saat)*

CEBİR *(Haftada 4, toplam 136 saat)*
1. Doğrusal eşitsizlikler ve eşitsizlik sistemleri (10 saat)
2. Sayısal fonksiyonlar (20 saat)
3. İkinci dereceden fonksiyonlar (14 saat)
4. Denklem ve eşitsizliklerin çözümü (30 saat)
5. Trigonometriye ait ilk bilgiler (30 saat)
6. Aritmetik ve Geometrik diziler (12 saat)
7. Cebire ait genel tekrar. Problem çözümü (20 saat)

GEOMETRİ *(Haftada 2, toplam 68 saat)*
1. Üçgenlerin benzerliği (18 saat)
2. Çokgenlerin alanları (14 saat)
3. Çemberin çevresi, dairenin alanı (6 saat)
4. Üçgenlerin çözümlenmesi (15 saat)
5. Geometrinin mantıksal kuruluşu, matematikte aksiyometrik yöntemler. Geometriye ait genel tekrar. Problem çözümü (15 saat)

**X Sınıf**
*(I. yarımyılda haftada 4 saat, II. yarımyılda haftada 5 saat, cemi 253 saat)*

CEBR VE ANALİZİN BAŞLANGICI *(I. yarımyılda haftada 2 saat, II. yarımyılda haftada 3 saat, cemi 85 saat)*
1. Trigonometrik funksiyolar (12 saat)
2. Trigonometrik tenlikler (20 saat)
3. Töreme (18 saat)
4. Töremenin tatbigi (22 saat)
5. Tekrar. Mesele halli (13 saat)

HENDESE *(haftada 2 saat, cemi 68 saat)*
1. Stereometriye giriş (6 saat)
2. Düzhat ve müstevi paralelliği (20 saat)
3. Düz hat ve müstevi perpendikülarlığı (24 saat)
4. Çoküzlüler (10 saat)
5. Tekrar. Mesele halli (8 saat)

**XI Sınıf**
*(Haftada 4 saat, cemi 136 saat)*

CEBR VE ANALİZİN BAŞLANGICI *(Haftada 2 saat, cemi 68 saat)*
1. Integral ve onun tatbigleri (17 saat)
2. Rasyonel üslü kuvvet (14 saat)
3. Üslü ve logaritmik fonksiya (22 saat)
4. Cebr ve analizin başlangıcı kursunun umumileştirici tekrarı, mesele halli (15 saat)

HENDESE *(Haftada 2 saat, cemi 8 saat)*
1. Hareket (8 saat)
2. Fırlanma cisimleri (16 saat)
3. Çoküzlülerin hacmi (16 saat)
4. Fırlanma cisimlerinin hacmi (12 saat)
5. Hendese kursunun umumileştirici tekrarı (6 saat)

**X Sınıf**
*(1. yarıyılda haftada 4, 2. yarıyılda haftada 5, toplam 253 saat)*

CEBİR ve ANALİZE GİRİŞ
*(1. yarıyılda haftada 6, 2. yarıyılda haftada 3, toplam 85 saat)*
1. Trigonometrik fonksiyonlar (12 saat)
2. Trigonometrik denklemler (20 saat)
3. Türev (18 saat)
4. Türevin uygulamaları (22 saat)
5. Tekrar. Problem çözümü (13 saat)

GEOMETRİ *(Haftada 2, toplam 68 saat)*
1. Uzay geometriye giriş (6 saat)
2. Doğru ve düzlemlerin paralelliği (20 saat)
3. Doğru ve düzlemlerin dikliği (24 saat)
4. Çokyüzlüler (10 saat)
5. Tekrar. Problem çözümü (8 saat)

**XI Sınıf**
*(Haftada 4, toplam 136 saat)*

CEBİR VE ANALİZE GİRİŞ
*(Haftada 2, toplam 68 saat)*
1. İntegral (tümlev) ve uygulamaları (17 saat)
2. Rasyonel üsler (14 saat)
3. Üslü ve logaritmik fonksiyonlar (22 saat)
4. Cebir ve analize giriş dersinin genel tekrarı. Problem çözümü.

GEOMETRİ *(Haftada 2, toplam 8 saat)*
1. Geometrik dönüşümler (8 saat)
2. Dönel cisimler (16 saat)
3. Çokyüzlülerin hacmi (16 saat)
4. Dönel cisimlerin hacmi (12 saat)
5. Geometrinin genel tekrarı (6 saat)

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adiectis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

ϛ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ ἑνὸς μο β. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μονάδας δ τριπλασίονας εἶναι μο β. καὶ ἔτι ὑπερέχειν μο ι. τρὶς ἄρα μονάδες β μετὰ μο ι. ἴσαι εἰσὶν ϛοῖς δ μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο γ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο γ. ὁ δὲ μείζων μο ε. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

### *IN QVAESTIONEM VII.*

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

## QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto a 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter vero $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ιϛ μο πλευρά. ἔστω ϛϛ β λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ. ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

## OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

*CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

## QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille vero 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ιϛ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ϛ ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ϛϛ ὅσων δήποτε λείψει μο ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ϛϛ β λείψει μο δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ μο ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μο ιϛ. δυνάμεις ἄρα ε μο ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ ἴσαι μο ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων.