

Matematik

OCAK 1992 / CİLT : 1 / SAYI : 5

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik ve Belit Sistemleri

Mehmet Sait Terzioğlu

Olasılık Hesapları

Ali Nesin

1994 Yılına Ait Sihirli Kare

Azize (Bastıyalı) Hayfavi

Yaşayan Bir Dahi: Paul Erdös

Öner Çakar

Erdös - Mordell Eşitsizliği

Hüseyin Demir

Geometrik Eşitsizlikler

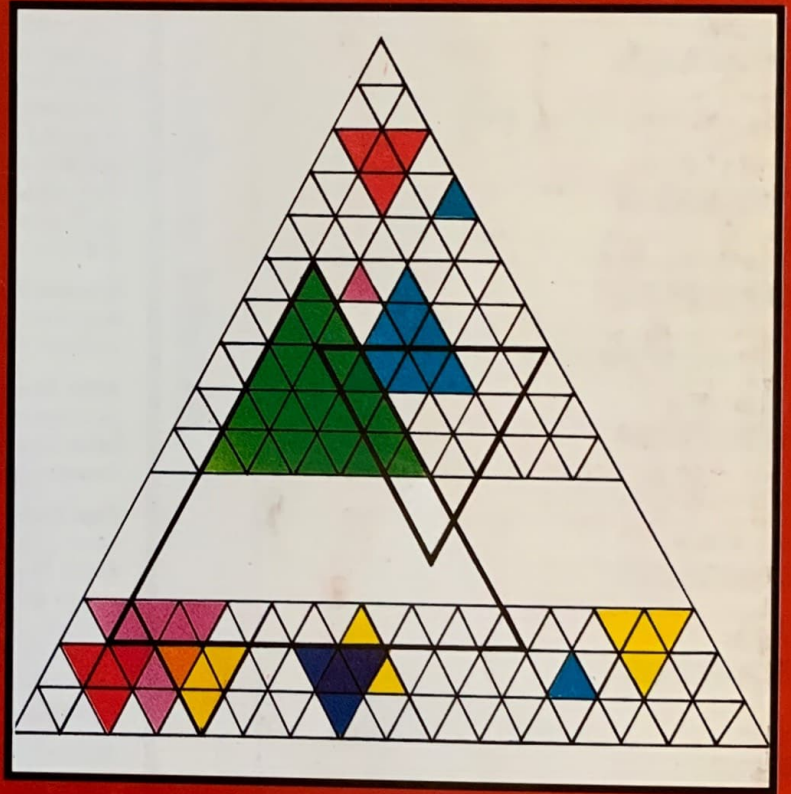
Emre Alkan

Sorular - Çözümler

Bilgisayarlar İspat Peşinde

Acturo Sangalli

Japonya'da Matematik Öğretimi



İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından

Matematik ve Belit Sistemleri

Mehmet Sait Terzioğlu 1

Olasılık Hesapları

Ali Nesin 3

1994 Yılına Ait Sihirli Kare

Azize (Bastıyalı) Hayfavi 7

Yaşayan Bir Dahi: Paul Erdös

Öner Çakar 8

Erdös - Mordell Eşitsizliği

Hüseyin Demir 11

Erdös Sayısı Nedir

14

Matematikte Benzetme

Tuğrul Taner 15

Geometrik Eşitsizlikler

Emre Alkan 17

Sorular

20

Çözümler

22

Bilgisayarlar İspat Peşinde

Acturo Sangalli 28

Kitaplar

30

Japonya'da Matematik Öğretimi

31

Dizin (1. Cilt)

32

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Matematik Dünyası bu sayısıyla birinci cildini tamamlamış bulunuyor. Doğuş devresi olarak niteliyebileceğimiz bu devrede neleri yapabildiğimizi neleri yapamadığımızı ayrıntıyla gözden geçirdik. Gelişme ve kurumlaşma devresi olması gereken önümüzdeki devrede yapılması gerekenleri belirledik. Bu belirlemelere göre yapacağımız düzenlemeler okurun çile çekmeden dergiye ve derginin de gecikmeden okura ulaşmasını sağlayacak. İçerik açısından daha iyiyi yakalayabilmek için lütfen dileklerinizi bize yazmayı sürdürün. Matematik öğretimine daha fazla katkıda bulunabilmemiz için özellikle öğretmen okurlarımızdan öneriler bekliyoruz.

Matematik Dünyasıyla tümleşik nice nitelikli yıllara.

Şimdi yine dergimizin sayfalarına dönelim.

Matematik ve Belit Sistemleri: Bu yazısıyla M. Sait Eroğlu önemli bir diziyi başlatıyor. Amacı mühendis ve sosyal bilimcilerinde çok ilgi duyduğu **Fuzzy (belirsiz, bulanık) Matematik** adı verilen ve matematiği kapsayan yapıya ışık tutmak. Bu dizinin ilk yazısında **matematiğin temeli olan aksiyom (belit) sistemleri** ele alınıyor. Matematiğin temelleriyle ilgili oluşu okumada dikkat isteyebilir. "Çat-pat anlayabildim" diyen okurlara yulınlığa düşmeden bir daha okumalarını öneririz.

Olasılık Hesapları: Ali Nesin tavlayı ana örnek alarak, tavla oynarken bile okunabilecek bir akıcılıkla olasılık kuramını sunuyor. Örneklerle sonsuz olanaklı durum da ele alınıyor.

1994 Yılına Ait Sihirli Kare: Daha önceki sayılarımızda yayınlanan sihirli kareler okurların en çok ilgi gösterdiği yazılardan biri oldu. Azize Hayfavi yazısında bir sihirli kareden nasıl yeni sihirli kareler üretilebileceğini gösteriyor.

Paul Erdös: Bu sayıda yaşayan bir matematikçiye tanıtıyoruz. Öner Çakar'ın yazı başlığı ile söyleyecek olursak, **Yaşayan Bir Dahi: Paul Erdös**. Öner Çakar bu ilginç matematikçinin yaşam öyküsünü ve değişik yaşam biçimini aktarıyor. Topluluklarla düşünen bu gezgin matematikçiyle tanışma imkanı da bulmuş olan Hüseyin Demir bir zamanlar Erdös'ün önerisiyle kendisinin de üzerinde çalıştığı **Erdös-Mordell Eşitsizliğini** tanıtıyor.

Matematikte Benzetme: Tuğrul Taner bu yazısında matematikte benzetmenin gücünü sergiliyor. Doğal olarak kesin sonuç vermez ama kesinleştirilecek güçlü tahminler verir.

Geometrik Eşitsizlikler: Bu kez olimpiyat köşesinin yazarı bir olimpiyatçı. UMO 1991 in başarılı yarışmacısı Emre Alkan geometrik eşitsizliklerle ilgili birbirinden ilginç problemler ve çözümlerini veriyor.

MATEMATİK VE BELİT SİSTEMLERİ

MEHMET SAİT EROĞLU

Herhangi bir matematik kitabını karıştırdığımızda, genelde vurgulanmış olarak yazılan üç kelimeye sıkça rastlarız; bunlar *tanım*, *teorem* ve *kanıt*tır. Her tanımда açıklanan kavram, söz konusu kuramın daha önce açıklanmış kavramları ile yapılırken, her teoremin kanıtı, doğruluğu bilinen önermelere dayanır. Bu durumda besbelli ki *her kavram açıklanmış ve her önerme kanıtlanmış olmaz!* Her matematik kuramın *tanımsız kavramları* ve kanıtsız olarak doğruluğu kabul edilen *belitleri* (*aksiyomları* veya *ilksavları*) olacaktır. En iyisi, bundan sonraki açıklamalara da ışık tutması açısından, işe bir *belit sistemi* vererek başlayalım:

Tanımsız kavramlar (terimler): *pat*, *çat*.

Belit 1: *Her çat, patlardan oluşan bir kümedir.*

Belit 2: *En az iki pat vardır.*

Belit 3: *p ve q pat iseler, p ve q yu içeren bir tek çat vardır.*

Belit 4: *L bir çat ise, L nin ögesi olmayan en az bir pat vardır.*

Bu verilerin tümü B_4 ile göstereceğimiz bir *belit sistemi* oluşturur. Ancak belitlere baktığımızda *her, küme, içermek, iki, bir, var ise* gibi başka tanımsız terimlerin varlığını görüyoruz. Bunlardan ikisi "küme" ve "içerme" kümeler kuramının tanımsız terimleridir. Böyle olmakla birlikte, fazla ayrıntıya girmemek için, belitlerdeki tüm tanımsız terimlerin *mantığın tanımsız terimleri* olduğunu söyleyelim.

Her belit sisteminden uyması gereken isteklerimiz olacak, örneğin *çelişkisizlik* gibi. Bunların tartışılabilmesi için, tam açıklamasını sonraya bırakacağımız iki kavrama gereksinimiz var. B belit sistemi verildiğinde, bu sistemin ve mantığın belirsiz terimleriyle belirli kurallarla (bunlara ilerde değinilecek) oluşturulan önermelere *B-önermeleri* diyeceğiz. Bir B -önermesi olan S eğer *mantıksal biçimde B-den çıkıyorsa* (bunun ne olduğunu aşağı yukarı biliyoruz. İlerde tam olarak açıklanacak) S, B den çıkar diyeceğiz ve S, B sisteminin bir teoremi olur. Örneğin "Her pat en az iki farklı çat tarafından içilir" önermesi B_4 ten çıkar, görelim.

TEOREM 1. Her pat en az iki farklı çat tarafından içilir.

KANIT: p her hangi bir pat olsun. Belit 2 den dolayı bir başka q patı vardır. Belit 3 ten dolayı p ve q yu içeren bir tek L çatı vardır. Belit 4 ten dolayı L nin içermediği bir r patı vardır. Yine Belit 3 ten dolayı p ve r yi içeren bir tek L' çatı vardır. L ve L' pyi içerirler, ancak birbirinden farklıdır.

Eğer bir belit sistemini, belirsiz terimlerine bizi ilgilendiren bir alanda *anlamlar* vererek, belitlerini söz konusu alanda doğru olmasını istediğimiz önermelere dönüştürecek biçimde *yorumlayamıyorsak*, böyle bir belit sistemiyle uğraşmanın hiçbir anlamı kalmaz. B belit sisteminin her Y yorumu bu sistemin bir $M(Y)$ modelini belirler. B den mantıksal biçimde çıkan her önermesi her Y yorumu için $M(Y)$ modelinde bir teoreme dönüşür. İşte bu belitlik yöntemin avantajıdır. Değişik modellerde karşımıza değişik önermeler olarak çıkan teoremlerin ortak yanını bulmak ve bir kanıtla tümünün kanıtını vermek; bu büyük bir kazançtır.

Kuramsal açıklamalara devam etmeden B_4 sistemine dönelim ve bazı yorumlarına bakalım.

Y_2 : Dört farklı a, b, c, d nesnesi patları oluştursun. Çatlar ise $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ kümeleri olsun. Bu yorumda tüm $B_1, \dots, B_4$ belitleri doğru önermelerdir.

Y_1^* Patlar Y_1 deki gibi; çatlar Y_1 deki çatlar ve $\emptyset$ (boş küme).

Y_2 Patlar düzlemdeki noktalar, çatlar düzlemdeki doğrular.

Y_3 Patlar, düzlemde verilen bir açık dairenin, örneğin merkezi orijinde olan birim dairenin çember dışında kalan noktaları, çatlar ise bu dairenin kirisleri.

Y_4 Patlar üç farklı a, b, c nesnesi, çatlar $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Y_5 Patlar bir A şehrinin insanları; çatlar bu insanlar arasında Belit 1 - Belit 4 doğru olacak biçimde oluşturulmuş dernekler.

Yukarıda kanıtlanan teorem $M(Y_2)$ modelinde "Düzlemde her noktadan en az iki doğru geçer", $M(Y_3)$ de "Açık dairenin her noktasından en az iki kiris geçer", $M(Y_5)$ de "A şehrinde herkes en az iki derneğin üyesidir" teoremlerine dönüşür. $M(Y_1)$, $-$, $M(Y_5)$ te beş değişik teorem gibi görünmelerine

karşın hepsi için B_4 sistemindeki teorem ortak tabandır ve salt onun kanıtlanması yeterlidir.

B_4 sistemine

"Belit 5: L bir çatı ve p patını içermiyorsa, p yi içeren ve L ile ortak ögesi olmayan bir ve bir tek L' çatı vardır."

belitini ekleyerek elde ettiğimiz sisteme B_5 diyelim. B_4 sistemine

"Belit 5*: L bir çatı ve p patını içermiyorsa, p yi içeren ve L ile ortak ögesi bulunmayan en az iki farklı çatı vardır."

beliti eklenerek elde edilen sistem B_5^* diyelim. Artık Y_1^* ve Y_4 , B_5 ve B_5^* için bir model oluşturmazlar. Ayrıca aşağıdaki önermeler kolayca B_5 den çıkar.

TEOREM 2: Her çatı en az iki pat içerir.

TEOREM 3: En azından dört pat vardır.

TEOREM 4: En azından altı çatı vardır.

Yine Y_2 , B_5 in bir yorumudur, ancak B_5^* in değil tersine Y_3 , B_5^* in bir yorumudur ancak B_5 in değil. İki çatı, ortak ögeleri yoksa birbirine *koşut* diyelim. L bir çatı ve p patını içeriyorsa, L , p den geçiyor diyelim. Bu tanımlarla Belit 5 şöyle de söylenebilir: L , p patından geçmeyen bir çatı, p den geçen ve L ye koşut olan bir çatı vardır. Kuşkusuz bu aşamada B_5 sistemiyle Öklidik Geometriye, B_5^* sistemiyle Öklidik olmayan geometriye doğru yol almakta olduğumuzu farketmişsinizdir.

Bir B belit sisteminin *çelişkisiz* olmasını isteyeceğiz. Eğer B den bir B önermesi olan S ve onun olumsuzu $\sim S$ çıkarılabiliyorsa bu bir çelişkidir ve böyle bir durumda tüm B -önermeleri B den çıkar ve bu sistem tüm anlamını yitirir. Eğer hiçbir S için B den hem S ve hem de $\sim S$ çıkarılamıyorsa B ye *çelişkisiz* diyeceğiz (burada söz konusu olan S ler B -önermeleridir). İyi ama, bir B belit sisteminin *çelişkisiz olduğu nasıl gösterilir*? Şansımız varsa biraz uğraştan sonra S ve $\sim S$ yi B den elde eder çelişkiye ulaşırız. Onca uğraştan sonra bir çelişkiye ulaşmamışsak, bu B nin çelişkisiz olması anlamına gelir mi? Asla! Genelde elimizde bir B -belit sisteminin doğru önermelerini veya yanlış önermelerini veren yöntemler yoktur; böyle yöntemler varsa B ye *belirlenebilir* diyelim. Gruplar kuramı, cisimler, sıralanmış cisimler, örgüler, sıralanmış yapılar belirlenemez; buna karşın değişimli gruplar ve tümel sıralanmış kümeler belirlenebilir yapılardır. Kuram belirlenebilir bile olsa, tüm teoremleri listelemek

genelde olanaksızdır. Bazan S ve $\sim S$ öyle karmaşık ve değişik biçimde karşımıza çıkabilir ki, bunlar gözümüze bakarken biz çelişkiyi farketmeyebiliriz. Dolayısıyla mantıkçılar ve matematikçiler başka bir yol izliyorlar. B nin bir Y yorumu varsa B ye *yorumlanabilir* diyelim. $M(Y)$ modelini seçtiğimiz B' sistemi çelişkisizse kuşkusuz B de çelişkisiz olacaktır, böylece *görelî çelişkisizlik* kavramına ulaşılır ve çelişkisizliğine güvenimizin fazla olduğu alanlarda modeller aranır. Hatta belirli varsayımlar altında çoğu mantıkçı ve matematikçi için B nin yorumlanabilir olması çelişkisiz olmasıyla eş anlamlıdır.

Bir B belit sisteminin hiçbir beliti, geriye kalan belitlerle oluşturulan sistemden çıkmıyorsa, B ye *bağımsız* denir. B nin belitleri olmayan her B -önermesi S , B nin belitlerine eklenerek elde edilen B' belit sistemi bağımsız değilse, B ye *tam* denir. Başka bir deyişle her B -önermesi S için ya S ya da $\sim S$, B den çıkıyorsa B tamdır. Örneğin B_4 belit sistemi tam değildir, çünkü S olarak Teorem 3 deki önermeyi alırsak B_4 den ne S yi ne de $\sim S$ yi çıkarabiliriz.

Bir belit sisteminin yukarıda sıralanan özellikleri içerisinde en önemlisi ve vazgeçilmez olanı çelişkisizliktir. Bağımsızlık bazan istenmeyebilir; özellikle önemli teoremlere çabuk ulaşmak istendiğinde, veya çok karmaşık bir belit daha kolay parçalara ayrılmak istendiğinde bağımsızlıktan vazgeçilebilir. Ancak tüm isteğimiz belli bir alanın tüm teoremlerini kanıtlamaksa belit sisteminin tam olması zorunludur.

Belit sistemleri nasıl oluşur? Önce ilgilendiğimiz bir alan vardır. Bu alanda yeterince bilgi edindikten sonra, önemli kavramları ve bağıntıları belirleyecek düzeye geliriz. Örneğin söz konusu olan Öklidik Geometrisi olsun. Seçeceğimiz önemli kavramlar belit sisteminin tanımsız terimlerini ve seçtiğimiz temel önermeler belitleri vereceklerdir. Ancak seçilen tanımsız terimler çıkış noktasındaki özel alandaki anlamlardan arındırılacaklardır. Örneğin Hilbert beş tanımsız terim: nokta, doğru, düzlem, arasında, eşleşik kullanırken Pieri iki tanımsız terim (nokta, hareket) ve Veblen iki tanımsız kavram (nokta, sıra) kullanmıştır.

Hiçbir zaman, rastgele bir belit sistemiyle dam üstünde saksakan türü işe başlanmaz. Ancak belli bir alandan çıkarak bir belit sistemine ulaştıktan sonra, ilgi alanını daha iyi kavramaya da yardımcı olduğu için, elde edilen sistemden bazı belitleri çıkararak, değiştirerek veya zayıflatarak yeni belit sistemlerine geçilir. Matematikte bu sıkça izlenen bir yoldur.

OLASILIK HESAPLARI

ALİ NESİN

Olasılık hesaplarıyla günlük yaşamımızda karşılaşırız. Örneğin tavla yada kağıt oyunları oynarken. İki kapıya üstüste gele atmayan tavlacı görmedim hiç. Şansızlık deriz. Elbet, dört kez gele atan, üç kez gele atandan daha şanssızdır. Bu yazının amaçlarından biri de, “daha şanssız” sözcüğüne matematiksel anlam kazandırmak olacak.

Elimize bir zar alalım. Altı yüzlü hilesiz bir zar... Her sayının gelme olasılığı aynıdır: 1 sayısının gelme olasılığı, 2 sayısının gelme olasılığından fazla değildir. Zarın altı yüzü olduğundan, ve her sayının gelme olasılığı aynı olduğundan, örneğin 1 sayısının gelme olasılığına $1/6$ demek mantıklı olur. Eğer $i = 1, \dots, 6$ herhangi bir sayıysa, $o(i)$, i sayısının gelme olasılığı olsun. Sezgilerimize dayanarak yazalım:

$$o(1) = 1/6, o(2) = 1/6, \dots, o(6) = 1/6.$$

Zar hilesiz olduğundan, $o(7) = 0$ da yazabilirdik! Tüm olasılıkların toplamının 1 olduğuna dikkatinizi çekerim. (Günlük yaşamda olasılıklar 100 üzerine hesaplanır, ama matematikte en büyük olasılık 1'dir. Günlük yaşamda kullanılan % 75'in matematikçesi $3/4$ olasılığıdır).

Çift bir sayı atma olasılığını bulalım şimdi; yani, 2, 4, 6 sayılarından birinin gelme olasılığını. Her sayının gelme olasılığı $1/6$ olduğundan, çift sayı gelme olasılığı $o(2) + o(4) + o(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$ 'dir. Ve elbet, tek sayı gelme olasılığı da $1/2$ 'dir.

Olasılık teorikçileri, yukarıdaki sorunda ortaya çıkan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesine *olaylar kümesi* derler. Örneğin, 1 bir olaydır, ve 1 olayının gerçekleşme olasılığı $1/6$ 'dir.

Şimdi işleri biraz zorlaştıracakız ve iki (hilesiz) zar atacağız. İlk önce iki zarı birbirinden ayıralım: zarlardan birine birinci

zar, öbürüne ikinci zar diyelim (dilerseniz zarları boyayın). Her iki zarın da altışar yüzü olduğundan, otuzaltı “olay” var:

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Dikkat ettiyseniz, 1-2 ve 2-1 zarlarını (yani olaylarını) ayrı yazdım, yani iki ayrı olay olarak gösterdim. Çünkü iki zarı birbirinden ayırıyorum: birinci zar 1 sayısını, ikinci zar 2 sayısını gösteriyorsa, gelen zara 1-2 diyorum, tam tersiye 2-1. Zarlar hilesiz olduğundan, her olayın gerçekleşme olasılığı aynı. Dolayısıyla, $o(i-j)$ sayısı, $i-j$ olayının gerçekleşme olasılığıysa, $o(i-j) = 1/36$ 'dır. Örneğin, $o(1-1) = o(1-2) = o(2-1) = o(3-4) = 1/36$ 'dır. Bunu şöyle de gösterebiliriz. Zar atacağımıza, yukarıdaki tabloya rasgele bir taş atalım, 36 hücre olduğundan, ve bir hücrenin öbür hücreye göre bir özelliği olmadığından, taşın, örneğin 3-4 hücresine düşme olasılığı $1/36$ 'dır.

Oysa tavlada zarlar birbirinden ayırdedilmez. Biz de ayırdetmeyelim. O zaman, 1-2 ve 2-1 zarlarını da ayırdetmememiz gerekir, bu iki olayı (1, 2) olarak gösterelim. Olayları yukarıdaki gibi sıralayım (yukarıdaki tabloyu ikiye katlayarak):

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
		(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
			(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
				(5, 5)	(5, 6)
					(6, 6)

21 olayımız var. Ama bu kez her olayın gerçekleşme olasılığı aynı değil. Örneğin (1, 2) olayının gerçekleşme olasılığı $1/36 + 1/36 = 2/36$, çünkü (1, 2) zarı için, ya 1-2 ya da 2-1 gerekli:

$$o(1, 2) = o(1-2) + o(2-1) = 1/36 + 1/36 = 2/36.$$

Öte yandan, (1, 1) zarının gelme olasılığı $1/36$. Demek ki, eğer $i \neq j$ ise,

$$o(i, j) = 2/36$$

dir, ve

$$o(i, i) = 1/36$$

dir. (Özellikle $2/36$ yerine $1/18$ yazmıyoruz, ileride kolaylık olacak). Ahştırma olarak, çeşitli olasılıklar hesaplayalım.

İki kapiya gele atma olasılığı. Bu kapıların 1 ve 2 kapıları olduğunu varsayalım. Demek ki (1, 1), (1, 2) ya da (2, 2) atma olasılığını hesaplayacağız. Bu da $o(1, 1) + o(1, 2) + o(2, 2) = 1/36 + 2/36 + 1/36 = 4/36 = 1/9$ 'dur. İki kez iki kapiya gele atma olasılığıysa $1/9 \times 1/9 = 1/81$ 'dir. Yedi kez iki kapiya gele atma olasılığı ise $(1/9)^7$ 'dir. (Aşağı yukarı, piyangoda en büyük ikramiye çıkma olasılığına eşit!)

1 atma olasılığı.

$$o(1, 1) + o(1, 2) + \dots + o(1, 6) = \frac{1}{36} + 5 \times \frac{2}{36} = \frac{11}{36}$$

Demek ki, 1 atma olasılığı $1/3$ 'ten biraz daha az.

4 atma olasılığı. Yukarıdaki gibi hesaplanır ve $11/36$ bulunur.

Dört hane ilerideki bir pulu kırma olasılığı. Dört hane ilerideki pulu kırmak için ya 4 atmak gerekir, ya (1, 1), ya (1, 3), ya da (2, 2). Demek ki pulu kırma olasılığı

$$11/36 + o(1, 1) + o(1, 3) + o(2, 2) = 11/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 = 15/36 \text{ dır.}$$

n hane ilerideki bir pulu kırma olasılığı. Eğer $n = 13$ ise, bu olasılık sıfırdır elbet. Ama $n = 15$ ise, pulu (5, 5) zarıyla kırabiliriz, ve olasılığı $1/36$ 'dır. Bu olasılıkları bir dizelgeye sokalım:

n=uzaklık	Kırma olasılığı
1	11/36
2	11/36+1/36=12/36
3	11/36+1/36+2/36=14/36
4	11/36+1/36+2/36+1/36=15/36
5	11/36+2/36+2/36=15/36
6	11/36+2/36+2/36+1/36+1/36=17/36
7	2/36+2/36+2/36=6/36
8	6/36
9	5/36
10	3/36
11	2/36
12	3/36
15	1/36
16	1/36
18	1/36
20	1/36
24	1/36

Üç zara geçmeden önce, tavlanın sınırlı bir oyun olduğunu belirtiyim. *Yazdıklarımın, tavlanın yüksek düzeyde bir bilim bilgisi gerektirdiği anlamı çıkmasın. Yani, tavlacı olmanızı salık vermem. Ama illâ tavlacı olacağım diyorsanız kesinlikle olasılık hesaplarını öğrenmeniz gerekir.*

Şimdi üç zar alalım elimize ve yine ilk önce zarları birbirinden ayırđedelim: birinci zar, ikinci zar ve üçüncü zar. $6^3 = 216$ olay var, ve her olayın gerçekleşme olasılığı aynı olduğundan, her zarın gelme olasılığı $1/216$ 'dır. Örneğin,

$$o(1-2-5) = o(1-5-2) = o(2-1-5) = o(2-5-1) = o(5-1-2) = o(5-2-1) = 1/216 \text{ dır.}$$

Ancak, zarları birbirinden ayırdetmemek en doğal olanı ve biz de etmeyelim. Olay sayımız azaldı, çünkü şimdi, örneğin 1-2-5 ve 5-1-2 olayları arasında bir ayırım yapmıyoruz. Bu zara (1, 2, 5) adını verelim. Kolayca görüleceği gibi

$o(1, 2, 5) = o(1-2-5) + o(1-5-2) + o(2-1-5) + o(2-5-1) + o(5-1-2) + o(5-2-1) = 6/216 = 1/36$
dır. Bunun gibi, $o(3, 4, 6)$ da $1/36$ 'ya eşittir. Ama
 $o(2, 2, 5) = o(2-2-5) + o(2-5-2) + o(5-2-2) = 3/216 = 1/72$,

ve

$$o(2, 2, 2) = o(2-2-2) = 1/216$$

dır.

Alıştırma olarak, üç zarla toplam 10 atma olasılığını hesaplayalım:

$$o(1, 3, 6) + o(1, 4, 5) + o(2, 2, 6) + o(2, 3, 5) + o(2, 4, 4) + o(3, 3, 4) = 27/216 \approx 0,13.$$

Yukarıdaki örneklerde olanak sayısı sonluydu. Örneğin, iki zarla 21 olanak vardı. Şimdi, olanak sayımızı sonsuz yapacağız.

Kolay bir soruyla başlayalım: $[0, 1]$ aralığında rasgele seçilen bir (gerçel) sayının, $1/2$ 'den büyük olma olasılığı kaçtır? Yanıt $1/2$ 'dir. Çünkü, $[0, 1]$ deki sayıların "yarısı" $1/2$ 'den büyük, öbür "yarısı" ise $1/2$ 'den küçüktür.

Bir kolay soru daha: $[0, 1]$ aralığında seçilen bir sayının $1/6$ ve $3/7$ arasında olma (olayının gerçekleşme) olasılığı kaçtır? Yanıt $3/7 - 1/6 = 11/42$ 'dir.

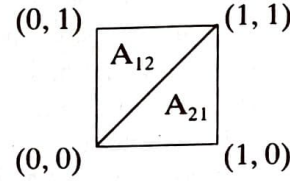
Buraya dek şaşılacak birşey yok.

Peki, $[0, 1]$ aralığında seçilen bir sayının $1/2$ 'ye eşit olma olasılığı kaçtır? Sıfırdır! Önsezi zorlanıyor biraz burada. Çünkü $1/2$ sayısı var, ve bana, "Bal gibi $1/2$ 'yi seçebilirim" diyebilirsiniz. ben de size, "madem öyle, bahse girelim" diyebilirim. bahse girmek istemezsiniz elbet. Çünkü kazanma olasılığınız sıfırdır! Olay sayısı sonsuzsa, ve her olayın gerçekleşme olasılığı aynıysa, o zaman, bir olayın gerçekleşme olasılığı sıfırdır. Şöyle açıklanabilir bu: diyelim $1/2$ 'yi seçme olasılığı 0,0001. O zaman, herhangi bir sayıyı seçme olasılığı da, 0,0001'dir, ve dolayısıyla aşağıdaki

$$1/10.000, 2/10.000, 3/10.000, \dots, 10.000/10.000$$

onbin sayıdan birini seçme olasılığını bulmak için 0,0001'i onbin kez toplarsak, ve 1 buluruz, yani %100 olasılık! Olacak şey değil! Demek ki $1/2$ sayısını seçme olasılığı sıfır olmalıdır.

Şimdi iki sayı seçeceğiz ve sırayla seçeceğiz bu sayıları. Yani birinci sayıyla ikinci sayı arasında ayırım yapacağız. Soru şu: $[0, 1]$ aralığında rasgele ve sırayla iki sayı seçersek, ikinci sayının, birinci sayıdan büyük olma olasılığı kaçtır? Birinci sayıya x adını verelim, ikinci sayıya y . Rasgele (ama sırayla) iki sayı seçmek demek, $[0, 1] \times [0, 1]$ karesinde rasgele bir (x, y) noktası seçmek demektir.



Yukarıdaki resimde $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ karesi üç değişik olay bölgesine ayrılmış:

$$A_{12} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$$

$$A_{21} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x > y\}$$

ve ortadaki çizgi $A_{x=y} = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$.

Resimden de görüldüğü üzere, bir $[0, 1]^2$ karesindeki rasgele bir (x, y) noktasının, A_{12} Bölgesinde olma olasılığı $1/2$ 'dir. A_{21} bölgesinde olma olasılığı da $1/2$ 'dir. $A_{x=y}$ bölgesinde olma olasılığı ise sıfırdır.

Daha da zor bir soru soralım. Üç sayı seçelim, $[0, 1]$ aralığından: x, y, z . x birinci sayı, y ikinci ve z üçüncü. $x < y < z$ olayının gerçekleşme olasılığı kaçtır? Bu üç sayıyı, $[0, 1]^3$ kübünde bir nokta olarak görebiliriz. Yukarıdaki gibi bir resim çizmeye çalışabilirsiniz. Ben denedim beceremedim. Üç boyutta görebilmek kolay değil. Ama şöyle akıl yürütebiliriz: $[0, 1]^3$ kübünü, şu bölgelere ayıralım:

$$A_{123} = \{(x, y, z) : x < y < z\}$$

$$A_{132} = \{(x, y, z) : x < z < y\}$$

$$A_{213} = \{(x, y, z) : y < x < z\}$$

$$A_{231} = \{(x, y, z) : y < z < x\}$$

$$A_{312} = \{(x, y, z) : z < x < y\}$$

$$A_{321} = \{(x, y, z) : z < y < x\}.$$

Birinci bölgenin oylumunu (hacmini) bulmak istiyoruz. Bu altı bölgenin oylumları birbirine eşittir (hiç birinin oylumunun öbüründen büyük olması için bir neden yok). $[0, 1]^3$ kübünden

geriye kalan bölgeler, yukarıdaki bölgelerin “duvarlarıdır” ve oylumları yoktur. Demek ki, bu altı bölgenin oylumlarının toplamı, $[0, 1]^3$ küpünün oylumuna, yani bir bire eşittir. Ve bundan da, her bir bölgenin oylumunun $1/6$ olduğu çıkar. Ne bulduk? $[0, 1]$ aralığından rasgele üç sayı seçersek, ikinci sayının birinci sayıdan ve üçüncü sayının ikinci sayıdan büyük olma olayının gerçekleşme olasılığının $1/6$ olduğunu bulduk.

Şimdi dört sayı seçeceğiz $[0, 1]$ aralığından ve ikinci sayının birinci sayıdan, üçüncü sayının, ikinci sayıdan ve dördüncü sayının üçüncü sayıdan büyük olma olayının gerçekleşme olasılığını hesaplayacağız. Dört boyutta olduğumuzdan resim çizemeyiz artık. Ama yine de yukarıdaki gibi düşünebiliriz.

$$A_{1234} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$$

kümesi olsun. Bunun gibi, örneğin,

$$A_{3142} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : x_3 < x_1 < x_4 < x_2\}$$

kümesini tanımlayalım. Tüm bu kümelerin “oyluları” aynı (dört boyutta oylum integral hesaplarıyla bulunur, ama şu anda önsezi yeterli). Kaç tane bu tür küme var? Teker teker sıralayıp 24 tane olduğunu bulabiliriz kolaylıkla: $A_{1234}, A_{1243}, A_{1324}, A_{1342}, \dots$ Geriye kalan kümeler, bu kümelerin “duvarları” olduklarından oyluları sıfırdır. Demek ki, bulmak istediğimiz olasılık $1/24$ 'dür.

Şimdi çok genel bir soru soralım: $[0, 1]$ aralığından n tane rasgele ve sırayla sayı seçiyoruz: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Bu dizinin artan bir dizi olma olasılığı kaçtır? Yani $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ olayının olasılığı kaçtır? Yukarıdaki gibi akıl yürüteceğiz.

$$A_{1,2,\dots,n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

kümesinin oylumunu arıyoruz. Bu tür kümelerden kaç tane olduğunu bulmalıyız. Yani, $1, 2, \dots, n$ sayılarını kaç türlü dizebiliriz? $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ türlü dizebiliriz diyorum. Bunu tümevarımla kanıtlayacağım. İlk önce, ilk $n-1$ sayıyı $(n-1)!$ türlü dizebildiğimizi varsayalım. Bu dizilerden herhangi birini alalım. Şimdi, son sayıyı, yani n sayısını, araya bir yere sokacağız. Başa, ortaya, en ya da sona sokabiliriz: toplam n değişik yere sokabiliriz. Demek ki $1, 2, \dots, n$ sayılarını $(n-1)! \times n = n!$ türlü dizebiliriz. Dediğimi kanıtladım. Bundan da şu sonuç çıkar: *Rasgele $0, 1$ aralığında seçilen $x_1, \dots, x_n$ dizisinin artan bir dizi olma olasılığı $1/n!$ 'dir.*

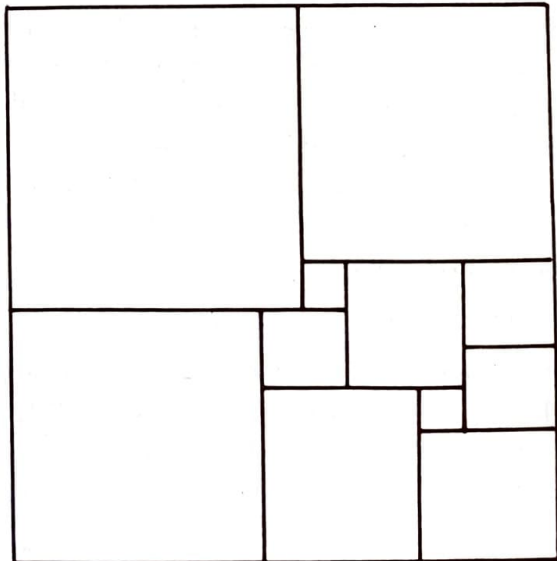
Örneğin $n = 2, 3, 4$ ise yukarıda bulduğumuz $1/2, 1/6, 1/24$ olasılıklarını buluruz. Dikkat ederseniz, n büyüdükçe olasılık azalıyor. Örneğin, $n = 5$ için, $1/5! = 1/120 = 0,00833\dots$ olasılığını buluruz. $n = 6$ için ise, $1/6! = 1/720 \approx 0,0014$ olasılığını.

Şimdi yazının en son sorusuna geldik: $[0, 1]$ aralığında rasgele seçilen sonsuz bir sayılar dizisinin artan bir dizi olma olayının gerçekleşme olasılığı kaçtır? Yanıt kolay:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n! = 0.$$

Soru: Bir kartondan kenar uzunlukları, $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 6, 7$ olan on bir kare kesip, onları yanyana yerleştirerek bir kare elde edebilir misiniz? (cilt 1, Sayı 2, Sayfa 29)

Çözüm: (Ayşe Bozlaker, Torbalı - İzmir)



1994 YILINA AİT SİHİRLİ KARE

AZİZE (BASTIYALI) HAYFAVİ

1'den 16'ya kadar olan sayıları 4×4 bir kare içine belirli bir şekilde yerleştirdiğimiz zaman bu sayıların bir takım özellikleri vardır. Önce 1-16'ya kadar olan sayılar için bu özellikleri sıralayalım:

1	8	12	13
15	10	6	3
14	11	7	2
4	5	9	16

(1) Bütün satır, sütun ve köşegen toplamaları 34'e eşittir.

(2) Küçük alt karelerdeki sayıların toplamı da yine 34'e eşittir.

(3) Büyük karenin köşelerinde bulunan sayıların da toplamı yine 34'dür.

Ayrıca şu eşitlikler de vardır:

(4) (i) Birinci satırdaki sayıların kareleri toplamı dördüncü satırdaki sayıların kareleri toplamına eşittir.

(ii) İkinci ve üçüncü satırdaki sayıların kareleri toplamı da birbirlerine eşittir.

(iii) Birinci ile dördüncü sütundaki sayıların kareleri toplamı eşittir.

(iv) İkinci ve üçüncü sütundaki sayıların kareleri toplamı da yine birbirlerine eşittir.

(5) Köşegenler üzerindeki sayıların kareleri toplamı ve küpleri toplamı da birbirlerine eşittir.

Şimdi 1994 yılına ait karemizi oluşturmaya çalışalım:

Genel olarak bir x tam sayısı için: $x \geq 34$ ise ve $x - 34$ sayısı 4 ile bölünebiliyorsa bu sayıya ait karemizi oluşturabiliriz: Satır, sütun, köşegen üzerindeki sayıların x olması için kullanmamız gereken sayılar şunlar olacaktır:

$$\frac{x-34}{4} + 1, \frac{x-34}{4} + 2, \dots, \frac{x-34}{4} + 16$$

Örnek olarak $x = 1994$ sayısını ele alalım $1994 - 34 = 1960$ dörde bölünebilir bir sayıdır.

(Öyleyse 1991 ya da 1992 yi neden alamayacağımızı anlıyorsunuz) $1994 - 34 = 1960$ dörde bölünebilir bir sayıdır. Öyleyse

$$\frac{1960}{4} \times 1 = 491 \text{ den}$$

$$\frac{1960}{4} + 16 = 490 + 16 = 506 \text{'ya kadar olan}$$

16 adet tam sayıyı karemize uygun bir şekilde yerleştirirsek; satır, sütun, köşegen ve küçük kareler üzerindeki sayıların ve büyük karenin köşelerindeki sayıların toplamı 1994 olacaktır. Karemizi oluşturalım:

491	498	502	503
505	500	496	493
504	501	497	492
494	495	499	506

Başlangıçta sıraladığımız 1'den 7'ye kadar olan tüm özelliklerin bu kare için de geçerli olduğunu sağlayabilirsiniz.

Bu yerleştirme biçimi tek değildir. Herhangi bir yerden başlayarak 16 değişik şekilde yerleştirebilirsiniz. Üzerinde biraz oynayarak yerleştirme kuralını bulabilirsiniz.

Büyüklik ancak akıntıya karşı koymakla olabilir, kürek çekmekle değil.

Franz Wergel

YAŞAYAN BİR DAHİ: PAUL ERDÖS

ÖNER ÇAKAR

Paul Erdös, 26 Mart 1913'de, matematikçi bir anne ve babanın oğlu olarak, Budapeşte'de dünyaya gelmiştir. Doğumunu izleyen bir kaç gün içinde, 3 ve 5 yaşlarındaki iki kız kardeşinin kızıl hastalığı yüzünden ölmesi üzerine, ailenin tüm ilgisi Paul ve daha sonra doğacak olan kızkardeşinin üzerinde yoğunlaşmıştır. 18 aylık iken, babasının bir Rus hücumunda yakalanıp Sibiry'a'da çalışma kamplarına sürülmesi yüzünden eğitiminde annesinin etkisi fazladır. Annesi ilkokulları bulaşıcı hastalıkların kaynağı olarak gördüğünden Paul'ü ilkokula göndermemiş, eğitimi kendisi üstlenmiş, ortaokula ise yıl aşırı göndermiştir.

Annesi kendisinin doktor olmasını arzu ettiği için, daha okumaya başlar başlamaz, kendisini tıbbi ve biyolojik eserlere boğmuş ve O da bunları büyük bir istek ve hevesle okumuştur. Ancak onun doğuştan bir matematik dehası olduğu belliydi. Üç yaşında iken üç basamaklı sayıları akıldan çarpabiliyordu. Dört yaşında ise negatif sayıları keşfetmişti. Bir gün annesine 100'den 250 çıktığında eksi 150 kalır dediğini hatırlıyordu. Her ne kadar, tarih, politika ve biyolojiye ilgi duyuyorsa da matematikçi olmayı aklına koymuştu.

17 yaşında (1930) Budapeşte Üniversitesine giren Erdös'ün dört yıl sonra matematikte doktorasını da almış olarak çıktığını görüyoruz. 1934'de dört yıllık bir doktora sonrası çalışma için İngiltere'ye Manchester'a gider. Bir Macar Yahudisi olması nedeniyle bu gidiş biraz politiktir. Ancak vatan hasreti yüzünden yaz tatillerini sürekli olarak Macaristan'da geçirir. 1938'de ise, Hitler'in Avusturya'ya girmesi üzerine yaz tatilinde İngiltere'de kalır ve olayların daha da genişlemesi sonucu kararı verir ve 1938 sonlarında Amerika'ya gider.

1954'de Uluslararası Matematik Konferansı için davet edildiği Amsterdam'dan geri dönüştü Amerika geri dönüş vizesinde sorun çıkarttığı

için Amerika'yı terk ederek İsrail'e yerleşir. 1960'da Amerika yeniden vize verinceye kadar da orada kalır.

1964'den sonra annesi (84) Erdös'ün, Hindistan hariç, tüm gezilerine katılmaya başlar. Her yemekte beraber olurlar ve her gece annesi uykuya dalıncaya kadar, ellerini avuçlarının içinde tutarak onun uyumasını bekler. Bu yakın birliktelik, 1971'de Erdös'ün Calgary (Kanada)'de bir konferans verirken annesinin 91 yaşında ülserden ölümüne kadar devam eder.

Annesinin ölümü Paul'de büyük bir çöküntü ve boşluk yaratmıştır. Bu çöküntüyü, yakın arkadaşı Paul Turan'ın "En kuvvetli sığınak matematiktir" uyarısı üzerine günde 19 saatini matematik çalışmaya ayırarak gidermeye çalışırsa da bu tempo bile O'na annesinin kaybını unutturamayacaktır.

Ölüm ve yaşlanmaya ilişkin esprilere tutkundur. Benim ikinci büyük keşfim 'ölüm' olmuştur demektedir. Dört yaşında, kendisinin de bir gün öleceğini anlamasından bu yana bu saplantıdan kurtulamamaktadır. Aslında Tanrıyla hep çatışma halindedir. Tanrı'nın, gözlüklerini saklayıp, Macar pasaportunu çalarak ve en önemlisi, tüm matematiksel problemlerin kusursuz çözümlerini içeren 'kitabı' kendisinden saklayarak eziyet çektiğini söyler. 1976'da yakın arkadaşı Paul Turan'ın ölümü üzerine "Tanrı, ortak çalışmalarımı ikiye ayırmakta, ölen kişilerle yaptıklarımı terazinin bir kefesine, hayatta olanlarla yaptıklarımı ise diğer kefesine koymaktadır. Ölenlerin bulunduğu kefe ağır bastığında beni de oraya çağıracaktır." demektedir. Ölüm konusundaki tek tesellisi, sözünü ettiği 'kitabı' ele geçireceği fırsatı bulabilmek ve ayrıca Archimedes ve Euclid ile çalışabilmek düşüncesidir.

Matematik tarihinde, Onun kadar değişik alanda, Onun kadar çok kişiyle ve Onun kadar farklı problem üzerinde çalışan bir başka kişi bulmak

zordur. Sayılar kuramı, karmaşık Analiz, Olasılık kuramı, Geometri, Cebir, Kümeler kuramı. Kombinatorik ve daha pek çok konu kendisinin çalışma alanı içine giren temel dallardır. Kişisel ya da ortaklaşa 1200'den fazla çalışmaya imzasını atmış, 250'den fazla kişiyle ortak yayın yapmıştır. Yalnızca 1987 yılında, 74 yaşındayken yaptığı yayınların sayısı 50 olup, bu sayı pek çok ünlü matematikçinin bir ömür boyu yaptığı toplam çalışma sayısından fazladır. Bununla da matematiğin yalnızca bir genç adam oyunu' olmadığını göstermiştir. Yapılan araştırmalar, dünyadaki her yedi matematikçiden birinin Erdös'ün çalışmalarına dayanan bir çalışma yaptığını ortaya koymaktadır. Bu bağlamda matematikçilerin "Erdös sayısı" çıkmaktadır ortaya.

Erdös hayatını, matematiğe ayırdığı zamanı maksimum hale getirecek şekilde planlamıştır. Ne eşi, ne çocuk, ne çekip çevirecek bir evi, ne bir işi, ne de bir hobisi vardır. Yemek içmek ve bir kaç saat uyumanın dışında matematiksiz geçen hiç bir anı bulunmamaktadır. Onun, hayatında sanat, roman, film gibi havai (!) şeylere ayıracak zamanı yoktur. Gerçek anlamda, matematiksel bir keşiftir. Fiziksel ve maddesel zevklerden vazgeçmiş, bütün yaşantısını matematiksel gerçekleri keşfetmeye ayırmıştır. 1940 yılından bu yana roman okumamış, son 30 yılda bir kez olsun sinemaya gitmemiştir.

Hayatı çılgın bir hızla, Üniversiteler ve araştırma merkezleri arasında seyahatle geçer. Gittiği her yerde daha kapının eşiğinde başlayan çalışma, ya kendisi usanuncaya dek, ya da karşısındaki bırakıp kaçuncaya dek bir ya da iki gün sürer. Ertesi gün bir başka yere gitmek üzere yola koyulur.

Gittiği yerlerde toplantılarını küçük bir otel odasında beş altı kişiyle yapar. Problemler belirlenir. Diğerleri kendi aralarında tartışırken, O bir köşeye çekilir, koltuğa oturur ve başını ellerinin arasına alarak dalar gider. Ancak her bir kaç dakikada bir başını kaldırır ve odadakilerden birisine bir çözüm önerisi ya da yolu gösterir ve o kişi bu öneri doğrultusunda çalışırken, O yine köşesinde dalmış, bir başka probleme çözüm aramaktadır.

Böyle bir toplantının ardından, O'nu bekleyen, iki üç saatlik bir dinlenme ve 3-4 kıtada, 10-15 merkezi kapsayan yeni bir gezidir.

Tüm eşyası, eski pejmürde bir küçük bavul ile, Budapeşte'de bulunan Centrum Aruhaz mağazasına ait portakal renkli eski bir plastik çantanın içine sığacak kadardır. Bütün bu özelliklerine ve daima bekar yaşamış olmasına karşın, arkadaş canlısı, samimi ve merhametlidir. Maaşını çalışma arkadaşlarına ve öğrencilerine dağıtır. Yaklaşık 10 yıl önce Wolf Ödülü olarak 50.000 Dolar kazandığında, kendisine yalnızca 720 Dolar ayırmış, gerisini ailesi adına, burs olarak dağıtmak üzere, İsrail'e göndermiştir. İki kez davet edildiği Hindistan'da aldığı ücreti ise, hayatta hiç görmediği bir bayana, S. Ramanujan'ın dul eşine göndermiştir.

Matematik dışında hiç bir becerisi yoktur. İlk kez kahvaltıda kendi başına ekmeğine yağ sürdüğünde 21 yaşındaydı. Zira o güne kadar bu işi daima annesi yapmıştır. Annesinin ölümünden sonra, Erdös'ün bakımını, Amerika'da olduğu süre içinde, Bell Laboratuvarlarının yöneticisi olan Graham Ronald üstlenmiştir. Parasının idaresinden, yayınlanmış 1200'den fazla çalışmasının saklanması ve dağıtılmasına kadar pek çok işi O'nun adına G. Ronald yapmaktadır. Çeklerine bile Ronald imza atar.

Asırlardır matematikçileri mistik bir güçle kendine çeken Asal Sayılar, Erdös'ün en yakın arkadaşlarıdır. Hiç kimse onları O'nun kadar iyi tanımamıştır. İlk kez Euclid tarafından verilen ve asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu ifade eden teoremin ispatını, 10 yaşında iken babasından öğrenen Erdös, kendi deyimiyle, 'oltaya yakalanmış' ve 7 yıl sonra P.L. Chebyshev tarafından, 1850'de ispatlanan ve $n > 1$ olmak üzere n ve $2n$ sayıları arasında mutlaka bir asal sayının bulunduğunu ifade eden teoremin çok basit bir ispatını vermiştir. Asal sayılar üzerindeki en büyük zaferini ise 1949'da elde etmiştir. Asal sayıların istatistiksel dağılımına ilişkin olup, asal sayı teoremi olarak bilinen ve ağır işlemler gerektiren, kısaltılamayacağı konusundan 1896'dan bu yana hemen hemen tüm matematikçilerin hem fikir olduğu ünlü teoremi, o sıralarda henüz pek tanınmamış ve meslekdaşı olan A. Selberg ile birlikte çok elemanter bir yolla ispatlamıştır.

Erdös için Matematik, san'at ve bilimin göz kamaştırıcı bir birleşimidir. O'nun için önemli

olan şey, ortaya atılan bir fikri ispat etmektir. Ayrıca bu ispatın bir de estetik yönü olmalıdır. Belirli bir sonucun sadece 'doğru' olduğunu değil, aynı zamanda 'neden doğru' olduğunu da ortaya koymalıdır.

Erdös'ün problemlere yaklaşımı çok farklıdır. Hiç bir zaman sayfalar dolusu denklemler ve formüllerle problem çözmeye çalışmaz. Probleme çok kısa ve öz bir düşünce şekliyle yaklaşır ve bu hakimiyeti kendi çalışma alanları dışında kalan dallarda da gösterir. Bu konuda Prof. G. Purdy'nin bir anısını anlatmadan geçemeyeceğiz. 1976'da, Erdös Teksas A & M Üniversitesinin Matematik Bölümü çay odasındaki tahtada yazılı bir fonksiyonel analiz problemi görür. Bu alan Erdös'ün hiç bir şey bilmediği ve çalışma yapmadığı bir alandır. Adı geçen Bölümde görevli iki analizci ise, o gün, 30 sayfalık bir çalışma sonucu problemi çözmüş ve büyük bir gurur duymaktadırlar. Erdös yanında oturan Purdy'ye döner ve tahtadaki ne olduğunu ve problemin ifadesinde geçen bazı sembollerin anlamını sorar. Purdy'nin açıklamalarından sonra, yerinden kalkar, yavaş yavaş tahtaya yaklaşır ve tahtaya yalnızca iki satırlık bir şey yazar. Yazdığı problemin doğrudan doğruya çözümünden başka bir şey değildir.

Son yirmi yıldır, günde 19 saat çalışan, bol miktarda koyu espresso kahve ve kafein tabletleri içen Erdös, matematikçiyi "Kahveyi teoreme dönüştüren kişi" olarak

tanımlamaktadır. Biraz yavaşlamasını ve dinlenmesini tavsiye eden arkadaşlarına verdiği cevap ise hep aynıdır: "Mezarda dinlenecek çok zamanım olacak".

Mutlaka olması gereken katarakt ameliyatını ise, çalışmalarından bir hafta süreyle uzak kalmasına neden olacağı gerekçesiyle reddetmektedir.

1970'lerin başında, 55 yaşında iken, adının sonuna PGOM harflerini yazmaya başladı. Bunlar "Poor Great Old Man" yani, "Zavalı Büyük Yaşlı Adam" ifadesinin başharfleriydi. 60'ında bunlara LD (living Dead - Yaşayan Ölü) ekleyip PGOMLD yaptı. 65'inde PGOMLDAD'ye dönüştü. Yeni eklenen AD, Archaeological Discovery - Arkeolojik Keşif anlamındaydı. 70'inde ise, bu harflere LD (legally Dead - Yasal olarak ölü) eklenerek PGOMLDADLD oldu. 75'inde bunlara bir de CD harfleri katıldı. CD (Count Dead - Ölü Sayılıyor) anlamındaydı. Çünkü 200 üyesi bulunan Macar Bilimler Akademisi 75 yaşını bitiren üyelerine her türlü hakkı tanıyor, ancak onları artık üye olarak kabul etmiyordu.

Kendisine daha çok harfler ekleyecek bir ömür dileyerek iki harf de biz eklemek istiyoruz. Kuşkusuz Matematik tarihine damgasını vurmuş böyle bir kişinin adına ekleyeceğimiz harfler yalnızca ND (Never Dead - Asla Ölmez) olacaktır.

Kaynak: S. Ulam, Adventures of a Mathematician, Scribner's, 1976.

Matematikçiler asal sayılar dizisinde bir düzen keşfetmeye boşuna uğraşıp duruyorlar. Bunun insan zihninin asla nüfuz edemeyeceği bir sır olarak kalacağı konusunda pek çok nedenimiz vardır.

L. Euler

ERDÖS - MORDELL EŞİTSİZLİĞİ

HÜSEYİN DEMİR

Macar matematikçisi Paul Erdös (1913) ve ünlü eşitsizliği ile tanışmam, Columbia Üniversitesi Bölümü'nün son sınıfında bulunduğum 1944 yılına rastlar. Kendisiyle bir matematik toplantısında tanıştım. Tahtaya geçip bir üçgen çizerek içinde bir nokta aldı ve tam ifadesi aşağıda verilen eşitsizliğini benden ispatlamamı istedi. Problemi ilginç bulduğum için ispatlamaya çalıştım da başarılı olamadım. Çalışmam yan bir ürün verdi. Onu 1944'te bir dergide yayınladım. Sonraları ün yapmış olan bu eşitsizliğin bir ispatını vermiş olmayı ne kadar isterdim.

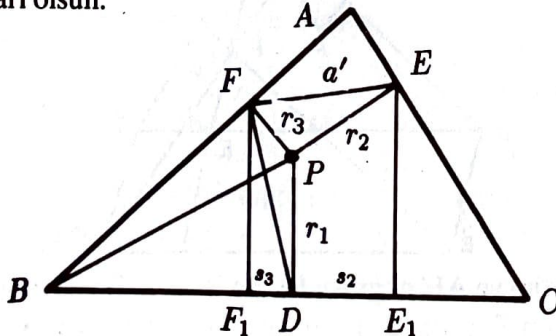
TEOREM (ERDÖS) . ABC bir üçgen ve P bunun içinde ya da üzerinde bir nokta olsun. P nin köşelerinden olan R_1, R_2, R_3 uzaklıkları ve kenarlardan olan r_1, r_2, r_3 uzaklıkları

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik ancak üçgen eşkenar ve P merkezinde olduğunda geçerlidir.

Bu teorem ilk kez bir tahmin olarak 1935 yılında American Mathematical Monthly dergisinde yayınlanmış ve ilk ispatı 1937 yılında Mordell tarafından verilmiştir. Bu nedenle bugün eşitsizlik Erdös-Mordell Eşitsizliği olarak tanınmaktadır. Bu eşitsizliğin üç ispatını aşağıda bulacaksınız. Kanımca bunlardan en güzeli Kazarinoff tarafından verilen III. ispatır.

İSPAT I (Leon Bankoff, 1958). $\triangle ABC$ üçgeni içinde alınan P noktasının BC, CA ve AB kenarları üzerindeki izdüşümleri sırasıyla D, E ve F noktaları olsun.



Şekildeki gibi,

$$|PD| = r_1, |PE| = r_2, |PF| = r_3,$$

$$|EF| = a', |FD| = b', |DE| = c'$$

$$|PA| = R_1, |PB| = R_2, |PC| = R_3$$

diyelim.

E ve F noktalarının BC üzerindeki dik izdüşümlerine sırasıyla E_1 ve F_1 deyip yazış kolaylığı için $|F_1D| = s_3, |E_1D| = s_2$ koyalım. $FBDP$ dörtgeni kirisler dörtgeni olduğu için

$$m(\widehat{FBP}) = m(\widehat{FDP}) = m(\widehat{DFE_1})$$

elde edilir ve $\widehat{DFE_1} \sim \widehat{PBF}$ olduğu görülür. Buradan

$$s_3 = \frac{b'}{R_2} r_3$$

ve benzer biçimde

$$s_2 = \frac{c'}{R_3} r_2$$

çıkar. Demekki $|FE| \geq |F_1E_1|$ oluşunu ve diğer izdüşümleri de düşünürsek

$$1 \geq \frac{1}{a'} \left(\frac{b'}{R_2} r_3 + \frac{c'}{R_3} r_2 \right)$$

$$1 \geq \frac{1}{b'} \left(\frac{c'}{R_3} r_1 + \frac{a'}{R_1} r_3 \right) \quad (1)$$

$$1 \geq \frac{1}{c'} \left(\frac{a'}{R_1} r_2 + \frac{b'}{R_2} r_1 \right)$$

elde edilir. Bunları sırasıyla R_1, R_2, R_3 ile çarpıp toplayarak yeni bir düzenleme ile

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &\geq r_1 \left(\frac{R_2 c'}{R_3 b'} + \frac{R_3 b'}{R_2 c'} \right) \\ &\quad + r_2 \left(\frac{R_3 a'}{R_1 c'} + \frac{R_1 c'}{R_3 a'} \right) \\ &\quad + r_3 \left(\frac{R_1 b'}{R_2 a'} + \frac{R_2 a'}{R_1 b'} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

buluruz. Oysa parantez içlerinden herbiri $x + \frac{1}{x}$ biçiminde olup

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

eşitsizliği nedeniyle

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (3)$$

dir. Bunun (2) de kullanılması ile istenen

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq (r_1 + r_2 + r_3) \quad (4)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi eşitliğin hangi durumda olacağını inceleyelim. Üçgen eşkenar ve P merkez nokta ise eşitliğin olacağı açık. Karşıt olarak, (4)'te eşitlik ancak (1), (2) ve (3)'te eşitlik varsa mümkündür. Bu ise

$$EF \parallel BC, FD \parallel AC, DE \parallel AB \quad (5)$$

$$\frac{R_2 c'}{R_3 b'} = \frac{R_3 a'}{R_1 c'} = \frac{R_1 b'}{R_2 a'} = 1 \quad (6)$$

olması demektir. (5)'ten, örneğin ABCB paralelkenarını kullanırsak $|BA| = a' = |DC|$ elde ederiz yani D ve benzer şekilde E ile F kenar-

ların orta noktalarıdır. Yani P, $\triangle ABC$ nin çevrel çember merkezidir. $R_1 = R_2 = R_3$ olduğunda (6)'dan $a' = b' = c'$ ve dolayısıyla $a = b = c$ elde edilir, yani üçgen eşkenardır.

İSPAT II. (L. J. Mordell, 1937) P nin ABC ye göre ayak üçgeni DEF ve bunun kenar uzunlukları a', b', c' olsun (İspat I'deki şekil).

AEPF kirisler dörtgeni ve sinüs teoreminden

$$R_1 = \frac{a'}{\sin A} \quad (7)$$

bulunur. PEF ye uygulanan kosinüs teoreminden ise

$$\begin{aligned} a'^2 &= r_2^2 + r_3^2 + 2r_2 r_3 \cos A \\ &= r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos (B + C) \\ &= r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 (\cos B \cos C - \sin B \sin C) \\ &= (r_2 \sin C + r_3 \sin B)^2 + (r_2 \cos C - r_3 \cos B)^2 \\ \Rightarrow a'^2 &\geq (r_2 \sin C + r_3 \sin B)^2 \\ \Rightarrow a' &\geq (r_2 \sin C + r_3 \sin B) \end{aligned} \quad (8)$$

ABC nin kenar uzunlukları a, b, c ise (1) den

$$R_1 \geq \frac{\sin C}{\sin A} r_2 + \frac{\sin B}{\sin A} r_3$$

$$\Rightarrow R_1 \geq \frac{c}{a} r_2 + \frac{b}{a} r_3 \quad (9)$$

elde olunur. Eşitlik hali ancak

$$r_2 \cos C - r_3 \cos B = 0$$

iken var olup $AP \perp BC$ olacağı gösterilebilir.

(3) eşitsizliği benzer olarak R_2 ve R_3 için yazılırsa

$$R_2 \geq \frac{a}{b} r_3 + \frac{c}{b} r_1$$

$$R_3 \geq \frac{b}{c} r_1 + \frac{a}{c} r_2$$

elde olunur. Bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &\geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) r_2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) r_3 \\ &\quad + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) r_1 \end{aligned} \quad (10)$$

bulunur. Eşitlik, ancak, $AP \perp BC$, $BP \perp CA$, $CP \perp AB$ iken yani P ortosantr olduğunda vardır.

Şimdi, $x, y > 0$ için

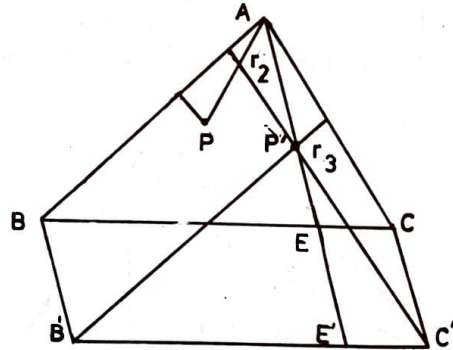
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (*)$$

eşitliğini kullanalım. Bu, $(x - y)^2 \geq 0$ a denk olup doğrudur ve eşitlik ancak $x = y$ iken vardır. O halde (4) ten

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

elde edilir ve eşitlik ancak P noktasının ortosantr ve ABC nin eşkenar olması halinde geçerlidir.

İSPAT III. (D. K. Kazarinoff, 1957) P nin A köşesine ait iç açıortayına göre simetriği P' olsun. P'ACC' ve P'AB B' paralelkenarlarını



çizelim ve AP' doğrusu BC ve B'C' yü E ve E' de kessin. Paralelkenarların alanları ile ilgili olarak

$$|P'AC C'| + |P'AB B'| = |EC C'E'| + |B B'E'E'|$$

$$= |BC C'B'| \leq |BC| |CC'| = aR_1 \text{ elde olunur ve}$$

$$br_3 + cr_2 \leq aR_1$$

$$\Rightarrow R_1 \geq \frac{c}{a}r_2 + \frac{b}{a}r_3$$

çıkar. Eşitlik ancak $CC' \parallel BC$ iken yani $AP \parallel BC$ olduğunda geçerlidir.

Bir ABC üçgeninde H ortosantr ve O çevrel merkez ise $\angle HAC = \angle OAB$ olduğu bilindiğinden, AP doğrusu O dan geçmiş olur.

R_1 için elde edilen eşitlik R_2 ve R_3 için yazılıp üç eşitsizlik taraf tarafa toplandığında

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)r_1$$

$$+ \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)r_2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)r_3$$

bulunur ki (*) dan

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

elde olunur. Eşitlik ise ancak ABC eşkenar ve P çevrel merkezi olduğunda geçerli olur.

ERDÖS'İN KİNE BENZER EŞİTSİZLİKLER

Matematikçilerde benzetme ya da genelleme ile bir teoremden başka teoremler elde etme eğilimi vardır. Durum, konumuz olan eşitsizlik için de geçerlidir. Söz gelimi,

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3) \quad (1)$$

yazılışındaki toplamaların simetrik fonksiyonlar oluşumu gözönüne alan A. Oppenheim R_1, R_2, R_3 ve r_1, r_2, r_3 ün simetrik fonksiyonlarıyla çeşitli eşitsizlikler kurmuştur. Bunların üçünü verelim:

$$R_2R_3 + R_3R_1 + R_1R_2 \geq 4(r_2r_3 + r_3r_1 + r_1r_2) \quad (2)$$

$$R_1R_2R_3 \geq 8r_1r_2r_3 \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \quad (4)$$

Bunların ispatını öğrenmek isteyenler Kaynak kitabına başvurabilirler.

Öte yandan Macar matematikçisi Fejes Toth (1) eşitsizliğini n-genlere genelleyerek (5) i elde etmiştir.

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n \geq \left(\sec \frac{\pi}{n}\right) (r_1 + r_2 + \dots + r_n) \quad (5)$$

Bunun $n = 3$ için özel hali (1) dir.

(1) in uzayda bir genellemesi neden olmasın? Dört yüzlüler için şu tahmini yapamaz mıyız?

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geq 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \quad (6)$$

Bu tahmin yanlış da çıkabilir.

ALİŞTIRMALAR

Bir ABC üçgeninde P noktası yerine

a) O çevrel merkezi

b) I iç merkezi

c) H ortosantr

d) C ağırlık merkezi

aldığınızda (1) eşitsizliği hangi eşitlikleri verir?

ERDÖS'ÜN BAŞKA BAZI EŞİTSİZLİKLERİ

1. Çevrel yarıçapı R ve dış yarıçapları r_a, r_b, r_c olan bir ABC üçgeninde

$$\frac{3}{2}R \leq \max(r_a, r_b, r_c) \quad (1949)$$

2. Geniş açılı olmayan, çevrel ve iç yarıçapları R, r, yükseklikleri h_a, h_b, h_c olan bir ABC üçgeninde

$$R + r \leq \max(h_a, h_b, h_c)$$

3. Bir ABC üçgeninde içteki bir P noktasını köşelere birleştiren doğrular karşıt kenarları D, E, F de keserse

$$|PD| + |PE| + |PF| \leq \max(a, b, c) \quad (1935)$$

4. P, düzgün bir $A_1 A_2 \dots A_n$ n-geninin bir iç noktası ise

$$\frac{n-1}{n} \pi < \angle A_1 P A_2 \leq \pi \quad (1943)$$

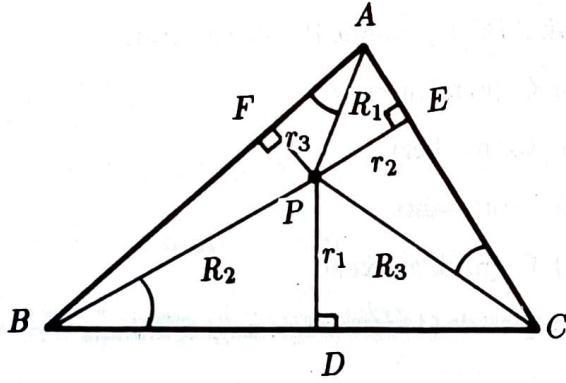
BİR UYGULAMA

Şimdi de Erdös-Mordell eşitsizliğini 1991 Uluslararası Matematik Olimpiyatı (IMO 1991) sorularından birine uygulayarak ne ölçüde kullanışlı olduğunu görelim.

SORU: Bir ABC üçgeni ile bu üçgenin içinde herhangi bir P noktası verilmiş olsun.

$\widehat{PAB}$, $\widehat{PBC}$, $\widehat{PCA}$ açılarından en az birinin

30° den küçük ya da eşit olduğunu gösteriniz.



ÇÖZÜM: Her üç açının da 30° den büyük olduğunu varsayalım. Bu durumda üçünün toplamı 180° den küçük ikisinin toplamı 60° den büyük olacağı için açılardan herbiri 120° den küçük olacaktır. Böylece 30° ile 120° arasında kalan bu açılar için

$$\sin \alpha_1 = \frac{r_3}{R_1} > \frac{1}{2}, \sin \alpha_2 = \frac{r_1}{R_2} > \frac{1}{2},$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{r_2}{R_3} > \frac{1}{2}$$

elde edilir. Demek ki

$$R_1 < 2r_3, R_2 < 2r_1, R_3 < 2r_2$$

ve dolayısıyla da

$$R_1 + R_2 + R_3 < 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

elde edilir. Bu ise Erdös-Mordell eşitsizliği ile çelişir. Öyleyse açılardan en az biri 30° den küçük ya da eşit olmalıdır.

Kaynak

Bottama ve diğerleri, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Gromingen, 1969, The Netherlands.

ERDÖS SAYISI NEDİR?

Paul Erdös başkalarıyla birlikte çalışmayı çok seven bir matematikçi. Ayda 15 yer dolaşan Erdös'ün ortak makale yazdığı matematikçilerin sayısı 200'ün çok üstünde. Egale edilmesi bile düşünülemeyecek bir rekor. Erdös'e şu ya da bu ölçüde yakın birçok matematikçinin bulunuşu bu yakınlığın ölçüsünü belirten "Erdös sayısı"nı çıkarmış ortaya. Bunu şu v fonksiyonu ile tanımlayalım:

M bir matematikçi olduğuna göre,

M Erdös ise $v(M) = 0$

M Erdősle ortak makale yazmışsa $v(M) = 1$

M Erdősle ortak makale yazmamış ama Erdősle ortak makale yazan biriyle ortak makale yazmışsa $v(M) = 2$, v. b...

Eğer $v(M) = m$ ise "Matematikçi M nin Erdös sayısı m dir" diyoruz,

Söz gelimi Einstein'ın Erdös sayısı 2, çünkü Einstein Erdősle ortak makale yazmamış ama Straus'la yazmış, Straus da Erdősle yazmış. $v(\text{Gauss})$ ın tanımlı olup olmadığı henüz belirlenememiş. Şimdiye dek belirlenebilen en büyük Erdös sayısı 12. Peki siz Erdös sayınızı biliyor musunuz?

MATEMATİKTE BENZETME

TUĞRUL TANER

İsviçre'li bir matematikçi olan Jaques Bernoulli (1654-1705) toplamı bilinmeyen pek çok serinin toplamını ilk kez hesaplayabilmiş ancak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

serisinin toplamını bulmak için harcadığı bütün çabaların boşa gittiğini, eğer birisi bu toplamı hesaplayabilirse kendisine yazmasını istemiştir.

Bernoulli ile aynı kasabada doğmuş olan L. Euler (1707-1783) bir benzetmeden yararlanarak toplamın tam değerini hesaplamıştır. Burada Euler'in hatalı da olabilecek bu cesur benzetme tekniğini inceleyeceğiz.

Baş katsayısı a_n olan

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

polinomunun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ köklerinin herbiri 0'dan farklı olsun.

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

eşitliği geçerlidir. $x = \frac{1}{y}$ yazarak

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \frac{1}{y^n} (a_n + a_{n-1}y + \dots + a_0y^n)$$

elde ederiz. Bu eşitliğin ikinci yanında bulunan parantez içindeki ifade

$$a_0(y - \frac{1}{\alpha_1})(y - \frac{1}{\alpha_2}) \dots (y - \frac{1}{\alpha_n})$$

çarpımına eşit olacağından

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_0(1 - \frac{x}{\alpha_1})(1 - \frac{x}{\alpha_2}) \dots (1 - \frac{x}{\alpha_n}) \quad (2)$$

eşitliği de geçerlidir. Bu eşitlikte x 'in katsayılarını eşitleyerek

$$a_1 = -a_0(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}) \quad (3)$$

bulunur.

Bu sonuçları sıfırdan farklı kökleri $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \dots, \beta_n, -\beta_n$ olan

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^nb_nx^{2n} \quad (4)$$

polinomuna uygulamak için önce (2)'den

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^nb_nx^{2n} = b_0(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2})(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}) \dots (1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}) \quad (5)$$

yazıp iki yanda x^2 'nin katsayılarını eşitleyerek (3)'deki gibi

$$b_1 = -b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \dots + \frac{1}{\beta_n^2} \right) \quad (6)$$

bulunur. Euler,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

sonsuz toplamını (4) polinomuna benzeterek ve $\frac{\sin x}{x}$ 'in köklerinin

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

olduğunu gözönüne alarak (6)'dan benzetme yoluyla

$$-\frac{1}{3!} = - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \dots + \frac{1}{(n\pi)^2} + \dots \right) \quad (7)$$

ve buradan da

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (8)$$

olmasını ummuştur.

Euler başka yollardan sağdaki toplamı ondalık ilk 6 basamağa kadar doğru olarak hesaplamış ve bunun $\frac{\pi^2}{6}$ ile ondalık ilk 6 basamağa kadar aynı olduğunu saptamıştır. Ancak bu bir kanıt değil, kanıtlamak için uğraşmaya değer bir ifadenin elde edilişidir. Euler, aynı tekniği kullanarak toplamı bilinen başka serilerin toplamını doğru olarak elde etmiştir. Doğal olarak bunlar da kanıt değildir. En sonunda başka bir yoldan (8) eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlamıştır.

Kaynak: Thomas Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser 1986, s. 108-110.

ÇÖZMECE

Abecetik olarak adlandırabileceğimiz bu tür harfler yerine eşitliği sağlayacak biçimde rakamlar bulunması istenmektedir. (. çarpmayı göstermektedir.)

a) M . K . (ATA+TÜRK) = (10 + 11) . 1938

b) M . K . (ATA+TÜRK) = 10.11.1938

(Hazırlayan H. Demir)

Yanıtlar 28 inci sayfadadır.

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

EMRE ALKAN

Bu yılki Olimpiyat takımımızın elemanlarından Emre Alkan bir dizi geometri problemini derleyip kendi çözümleriyle beraber Matematik Dünyası'na yolladı.

Çözümlerin güzelliği bir yana geçen sayıda gördüğünüz eşitsizliklerin kullanılması da ilginç.

Aşağıda bu problemlerden bir demet bulacaksınız. Kısa bir açıklama: Bir ABC üçgeninde h_a, h_b, h_c yükseklikleri, r içteğet çemberin yarıçapını,

R çevrel çemberin yarıçapını,

$u = \frac{1}{2}(a + b + c)$ yarıçevreyi ve S alanı gösteriyor.

1. Bir üçgenin yüksekliklerinden en az biri içteğet çemberin yarıçapının üç katından büyük veya eşittir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM: Önce $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

olduğunu gösterelim. Üçgenin alanı için

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c = ur$$

bağıntılarından:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{2u}{2ur} = \frac{1}{r}.$$

Üç pozitif sayının toplamı $1/r$ ye eşitse, en az biri $1/3r$ den küçük eşit olmak zorundadır, yani h_a, h_b, h_c den en az biri $\geq 3r$ olmalıdır.

2. Bir üçgenin içteğet çemberinin kenarlara değdiği noktalardan herbirinin karşısındaki köşe ile birleştirildiğinde oluşan doğru parçalarının uzunlukları s_a, s_b, s_c olsun.

$$18 S^2 \leq R(s_a + s_b + s_c)(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: s_a, s_b ve s_c yi kullanmak zor olacağından daha kolay uğraşılacak uzunluklar bulmalıyız. $h_a \leq s_a, h_b \leq s_b, h_c \leq s_c$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$(h_a + h_b + h_c)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \leq$$

$$(s_a + s_b + s_c)(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$$

bulunur. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğine göre,

$$3 \sqrt[3]{h_a h_b h_c} \leq h_a + h_b + h_c$$

$$3 \sqrt[3]{h_a^2 h_b^2 h_c^2} \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$$

Taraf tarafa çarparsak

$$9h_a h_b h_c \leq (h_a + h_b + h_c)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2).$$

Kanıtı tamamlamak için son olarak

$2S^2 = Rh_a h_b h_c$ bağıntısını gösterelim. Bunun için

$$S = \frac{abc}{4R} \text{ eşitliğinden yararlanacağız:}$$

$$8S^3 = abch_a h_b h_c = 4RSh_a h_b h_c$$

O halde

$$2S^2 = Rh_a h_b h_c.$$

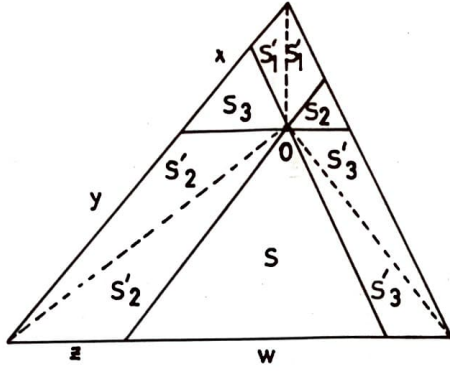
Eşitlik durumunun ancak eşkenar üçgende olduğunu kolayca görebiliyoruz.

3. Bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir O noktasından kenarlara paraleller çiziliyor. Oluşan üçgenlerin alanları S_1, S_2, S_3 olsun. büyük üçgenin alanı S olmak üzere,

$$(SS_1 S_2 S_3)^{1/2} \leq S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Alan ve kenarları şekildeki gibi adlandıralım.



Benzerlikten $\frac{y}{x+y} = \frac{w}{w+z}$, dolayısıyla

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \text{ buluruz.}$$

Alanları S_2' ve S_3 olan üçgenlerin yükseklikleri aynıdır; o halde

$$\frac{S_3}{S_2'} = \frac{x}{y}, \text{ benzer yolla } \frac{S_2'}{S_1} = \frac{z}{w}$$

bulunur. Yukardaki eşitlikten,

$$\frac{S_3}{S_2'} = \frac{S_2'}{S_1}, \text{ yani } S_2' = \sqrt{S_3 S_1} \text{ çıkar.}$$

Diğer üçgenler için de yaparsak

$$S_1' = \sqrt{S_2 S_3}, S_3' = \sqrt{S_1 S_2} \text{ ve}$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + 2S_1' + 2S_2' + 2S_3' \\ = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

elde edilir. Bu durumda göstermek istediğimiz eşitsizlik;

$$(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \sqrt{S_1} \sqrt{S_2} \sqrt{S_3} \leq S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1$$

eşitsizliğine dönüşür.

$x, y, z > 0$ için $2xy \leq x^2 + y^2$ eşitsizliğini z^2

ile çarpalım; $2xyz^2 \leq x^2 z^2 + y^2 z^2$. Aynı işlem y, z ve z, y için yapıp toplanırsa

$$(x + y + z)xyz = x^2 yz + xy^2 z + xyz^2 \\ \leq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2,$$

$x = \sqrt{S_1}, y = \sqrt{S_2}, z = \sqrt{S_3}$ alınırsa da istenen eşitsizlik gösterilmiş olunur.

Bu problemde eşitlik hali $S_1 = S_2 = S_3$ iken, bunun sonucu olarak da O noktası üçgenin ağırlık merkeziyken vardır.

BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER: Geçen sayıdaki sorulara yanıtlar:

Albert Erkip

1. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanıyoruz:

$$d^2 = (2x + 3y)^2 = (2 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot 2y)^2 \\ \leq (2^2 + (\frac{3}{2})^2) \cdot (x^2 + 4y^2) = \frac{25}{4}$$

O halde $-\frac{5}{2} \leq d \leq \frac{5}{2}$ olmalıdır. Eşitsizliğin

eşitlik durumu $x^2 + 4y^2 = 1$ koşulu altında

incelenirse $(x, y) = \pm (\frac{4}{5}, \frac{3}{10})$ için d nin

$\pm \frac{5}{2}$ değerlerini aldığı görülür., yani maksimum

ve minimum d değerleri $\pm \frac{5}{2}$ dir. Problemin

geometrik yorumu için $x^2 + 4y^2 = 1$ elipsi ile $2x + 3y = d$ doğrularının konumunu inceleyiniz.

2. k-tane n-tane

$$a^k b^n = \overbrace{a \dots a}^k \cdot \overbrace{b \dots b}^n \leq$$

$$\left(\frac{\overbrace{a + \dots + a}^k + \overbrace{b + \dots + b}^n}{k + n} \right)^{k+n}$$

$$= \left(\frac{ka + nb}{k + n} \right)^{k+n}$$

Burada Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullandık.

3. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini iki kere kullanacağız:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i d_i \right)^4 = \left(\sum_{i=1}^n (a_i b_i) (c_i d_i) \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 d_i^2 \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n d_i^4 \right)$$

4. Üçüncü problemde a_i, b_i, c_i, d_i yerine

$(a_i b_i c_i)^{1/4}, a_i^{3/4}, b_i^{3/4}, c_i^{3/4}$ alalım.

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i b_i c_i)^{1/4} a_i^{3/4} b_i^{3/4} c_i^{3/4} \right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^3 \right)$$

gerekli sadeleştirmeleri yapınca sonuç çıkacak.

5. $x + y + z = 1$ ve herbiri pozitif

olduğundan x, y, z den en az biri $\frac{1}{2}$ den

küçük olacaktır. İfade x, y, z ye göre simetrik olduğundan buna x diyebiliriz. yani $x < \frac{1}{2}$

$$d = xy + yz + xz - 2xyz = x(y + z) + (1 - 2x)yz.$$

Soldaki eşitsizlik $0 < d$ bu durumda hemen görülüyor. Sağ taraf için Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliği ile $y + z = 1 - x$ olduğunu kullanırsak;

$$d = x(y + z) + (1 - 2x)yz \leq x(y + z) + (1 - 2x) \left(\frac{y+z}{2} \right)^2$$

$$= x(1-x) + (1-2x) \left(\frac{1-x}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + x^2 - 2x^3).$$

Yine Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullanalım;

$$x^2 - 2x^3 = x \cdot x \cdot (1 - 2x) \leq \left(\frac{x + x + 1 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

Birleştirirsek,

$$d \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{27} \right) = \frac{7}{27}$$

bulunur. Burada eşitlik ancak $y = z$ ve

$x = x = 1 - 2x$, yani $x = y = z = \frac{1}{3}$ durumunda vardır.

6. Orta satıra Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayacağız:

$$a^6 = \left(\sum_{n=1}^5 n^3 x_n \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^5 (n x_n)^{1/2} \cdot (n^5 x_n)^{1/2} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^5 n x_n \right) \left(\sum_{n=1}^5 n^5 x_n \right) = a \cdot a^5 = a^6$$

Demek ki eşitlik durumundayız, bu da

$$(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_1}), (5\sqrt{2x_2}, \sqrt{2^5 x_2}), (\sqrt{3x_3}, \sqrt{3^5 x_3}),$$

$(\sqrt{4x_4}, \sqrt{4^5 x_4})$ ve $(\sqrt{5x_5}, \sqrt{5^5 x_5})$ çiftlerinin orantılı olmasını gerektiriyor.

Bu durum için ise x_n lerden en az dördünün sıfır olması gerekiyor. Denklemlerde yerine koyarak tüm $(x_1, x_2, \dots, x_5)$ çözümlerini bulabiliriz, bunlar:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0, 0), a &= 0; \\ (1, 0, 0, 0, 0), a &= 1; \\ (0, 1, 0, 0, 0), a &= 2; \\ (0, 0, 1, 0, 0), a &= 3; \\ (0, 0, 0, 1, 0), a &= 4; \\ (0, 0, 0, 0, 1), a &= 5. \end{aligned}$$

*Bilimde mutlu raslantı ona hazır
kafalar için vardır.*

L. Pasteur

ALİŞTIRMA SORULARI

A21. x, y, z sayıları $(0, \pi)$ açık aralığında olduğuna göre

$$\cos x \cos y - \cos z = 0$$

$$\sin x \sin y - \sin z = 0$$

sisteminin çözüm kümesi nedir?

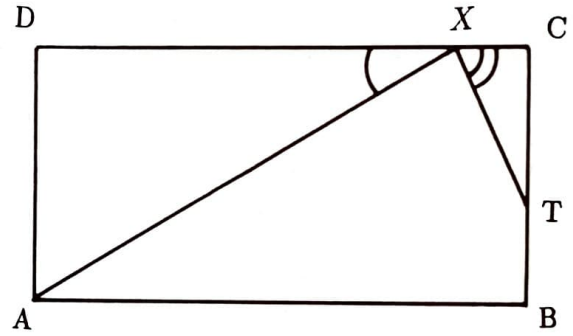
A22. a sayısı 10 tabanına göre bütün rakamları 1 olan $2m$ basamaklı bir sayı, b sayısı ise bütün rakamları 4 olan m basamaklı bir sayı ise

$\sqrt{a + b + 1}$ in tamsayı olacağını gösteriniz. Bu tamsayı kaç basamaklıdır?

(Hazırlayan: Hakan Çanlı)

A23. Bir ABCD bilardo masasında, [BC] bandına bir T noktasında yapışık duran bir top soldan falso ile vuruluyor. [CD] bandının bir X noktasına α açısıyla çarpan top $\alpha/2$ açısıyla uzaklaşarak A köşesine varıyor. X noktasını cetvel ve pergelle çizin.

(Bu problem, Sait Boztepe'nin bir önerisinden yararlanılarak hazırlanmıştır.)



A24. $\forall n, k \in \mathbb{N}^+$ için

$$\frac{\sum_{i=1}^k \prod_{l=0}^n (in + l)}{(n + 1)!}$$

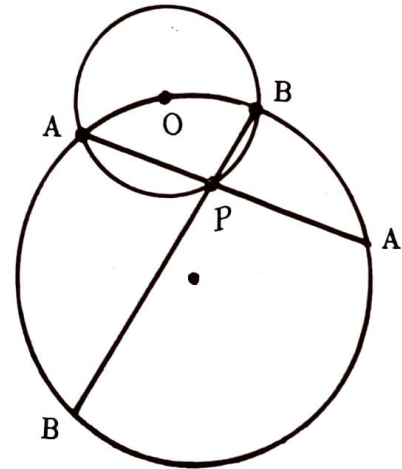
oranının (ifadesinin) tamsayı olduğunu gösteriniz.

(Hazırlayan: Kazım Önder Yıldırım, Gaziantep Fen Lisesi)

A25. O' merkezi bir (O, R) çemberi üzerinde olan bir (O', R') çemberi (O, R) yi A, B de kesmektedir. (O', R') nün bir P noktasının A, B ye birleştiren doğrular (O, R) yi A', B' de keserse R, R' yarıçapları için

$$\frac{|PA|}{|PA'|} = \frac{|PB|}{|PB'|} = \frac{R'}{R}$$

olduğunu gösteriniz.



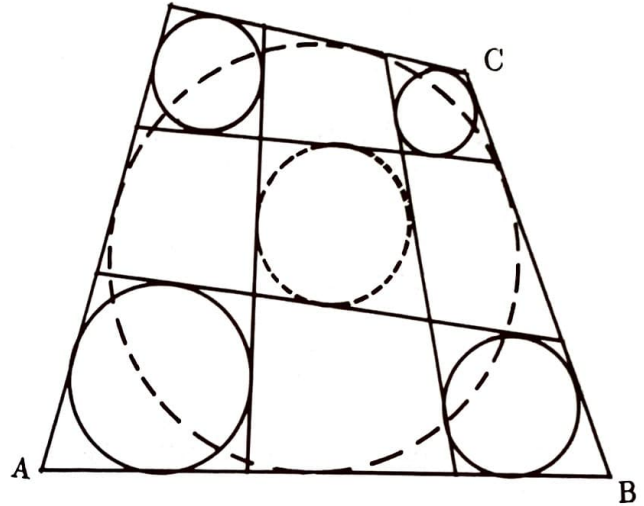
YARIŞMA SORULARI

Y21. Birbirini dik kesen iki sokakla çevrili bir bölgenin içinde bulunan bir anıtın bu sokaklardan uzaklıkları a ve b metredir. Anıttan geçen doğrusal bir yolla sokaklar birbirine bağlanmak istenirse açılacak yolun uzunluğu en az kaç metre olur?

(Hazırlayan: H. Demir)

Y22. Bir ABCD teğetler dörtgeni veriliyor. Dörtgenin her bir ardışık kenar çiftine teğet, iç bölgede kalan, birbirinin tamamen dışında dört çember çiziliyor. Bu çemberlerden her bir ardışık çiftin diğer dışteğeti alınarak elde edilen dörtgenin de teğetler dörtgeni olacağını gösteriniz.

(Hazırlayan: H. Demir)

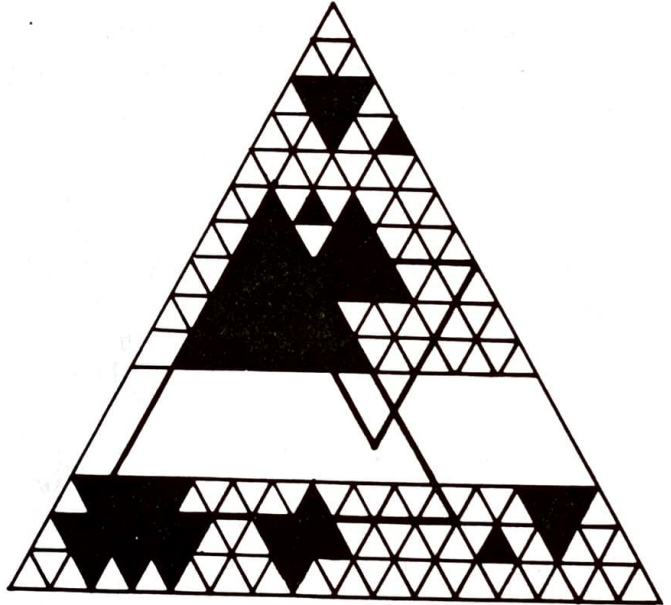


Y23. A açısı 60° olan eşkenar bir ABCD dörtgeninde A dan geçen bir doğru [CD] yi E de BC yi F de kesiyor. $BE \cap DF = P$ olduğuna göre BPD açısını hesaplayınız.

$$Y24. \frac{1}{\cos x - \cos 3x} + \frac{1}{\cos x - \cos 5x} + \dots + \frac{1}{\cos x - \cos 405x} = \frac{1}{1 - \cos 2x}$$

denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

Y25. Eşkenar bir üçgende her kenar (noktalarla) birbirine eş olan n parçaya bölünmüştür. Bu noktaları kenarlara paralel doğru parçalarıyla birleştirerek elde edilen bütün eşkenar üçgenlerin sayısını bulunuz.



Not: Her taşın altında 6174 başlıklı yazıyla ilgili bazı yanlış anlamalar olduğu anlaşılmaktadır. İşlem yaptığımız sayılar daima dört rakamla yazılacaktır. Örneğin,

$$1111 - 1112 = 0999, 9990 - 0999 = 8991.$$

A11. A boş olmayan n ögeli bir küme olsun. Bu küme üzerinde kaç tane

- a) simetrik ve yansıyan olan,
 - b) simetrik ve yansıyan olan fakat ters simetrik olmayan
 - c) ters simetrik olan
- bağıntı vardır? (Öneren: Namık Gök)

ÇÖZÜM (Matematik Dünyası):

a) $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ kümesi üzerindeki simetrik ve yansıyan olan bağıntıları bulmak için, (yansıyanlığı sağlayan) $\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \dots, (a_n, a_n)\}$ kümesine $i < j$ olmak üzere (a_i, a_j) (ve birlikte (a_j, a_i)) biçiminde ikililer katmamız gerekiyor. Bu katmanların sayısı ise $\{(a_i, a_j) \mid i < j; i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ kümesinin alt kümeleri sayısı olan

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

dir.

b) Simetrik, yansıyan ve ters simetrik olan tek bağıntı

$$\{(a_1, a_1), \dots, (a_n, a_n)\}$$

olacağından simetrik ve yansıyan olan ama ters simetrik olmayan bağıntı sayısı yukarıda elde edilenin bir eksiği yani

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} - 1$$

olur.

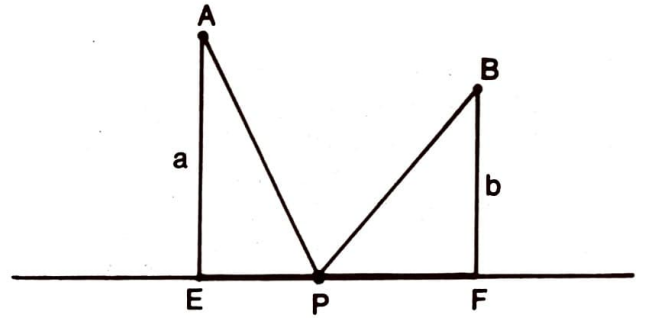
c) Ters simetrik bağıntıları oluşturmak için (a_i, a_i) türü ve $(a_i, a_j), i < j$, türü ikililere bakmamız gerekiyor. n tane olan (a_i, a_i) türü bir ikili için bağıntıda var ya da yok diyebiliriz; $\frac{n(n-1)}{2}$ tane olan $(a_i, a_j), i < j$, türü bir ikili için ise *kendi bağıntıda var, tersi (yani (a_j, a_i)) bağıntıda var ya da ne kendi ne de tersi bağıntıda var* diyebiliriz. Yani üç imkan sözkonusudur. Böylece oluşturulacak bağıntı sayısının

$$\underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{n \text{ tane}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \dots 3}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ tane}} = 2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

olduğunu görürüz.

Not: Bu soruya bazı çözümler gelmişse de uzun oluşları nedeniyle onları yayınlamıyoruz.

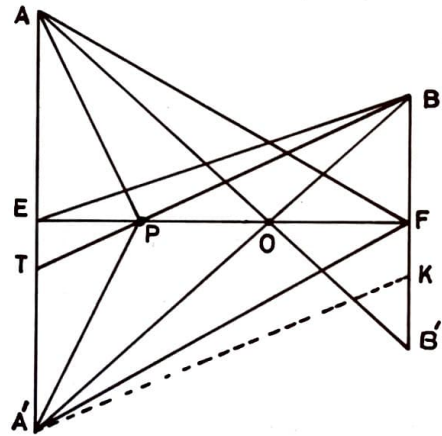
A12. Bir d doğrusunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta alınıyor. A ve B nin d üzerindeki izdüşümleri E, F ve d den uzaklıkları a ve b dir. ($a > b$). $[E F]$ ye ait hangi P noktası için $|AP| + |BP|$ toplamı en büyüktür? Geometrik bir ispat da verebilir misiniz?



(Hazırlayan: Nadir Şener)

ÇÖZÜM (Atasagun Baykal, Ankara):

$\overline{EF}$ ye göre A nın simetriği A' , B ninki B' olsun.



$\overline{AB'}$ ve $\overline{JBA'}$, $\overline{EF}$ yi O da kessinler. $\triangle A'PB$ de:

$$|A'P| + |PB| = |AP| + |PB| > |A'B|$$

$$= |A'O| + |OB| = |AO| + |OB|$$

Demek ki P, O da iken toplam enküçüktür. Şimdi de bilinen bir özellik olmakla birlikte $P \in [OE]$ iken $|A'E| + |EB| > |A'P| + |PB|$ olacağını

görelim. $\triangle ETB$ de

$$|TE| + |EB| > |TB| = |TP| + |PB| \quad (1)$$

$\triangle TPA'$ de

$$|A'T| + |TP| > |A'P| \quad (2)$$

(1) ile (2) yi toplarsak

$$|A'T| + |TP| + |TE| + |EB| > |A'P| + |TP| + |PB| \rightarrow |A'E| + |EB| > |A'P| + |PB| \rightarrow |AE| + |EB| > |AP| + |PB|$$

Demek ki P noktası $\overline{EF}$ üzerinde O noktasının solunda ise P, E noktası ile çakışınca en büyük toplam ortaya çıkıyor.

P noktası, O nun sağında olunca da aynı şekilde en büyük toplam F noktasında elde edilir. Yani $|BF| + |FA| > |AP| + |PB|$.

Şimdi bu iki toplamdan hangisinin daha büyük olduğunu gösterelim:

A' den $\overline{EB}$ ye paralel çizelim, $\overline{BF}$ yi K da kessin.

$\triangle A'FK$ de

$$|A'F| < |A'K| + |KF|$$

$$\Rightarrow |A'F| + |FB| < |A'K| + |KF| + |FB|$$

$$\Rightarrow |A'F| + |FB| < |A'K| + |KB|$$

$$\Rightarrow |AF| + |FB| < |BE| + |EA|$$

(Bu işlemlerde $|A'F| = |AF|$, $|A'K| = |BE|$, $|KB| = |A'E| = |EA|$ olduğu gözönüne alındı.) Demek ki E noktasında $|AE| + |EB|$ toplamı en büyük olmaktadır.

A13. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^4 + a(x+a)(2x+a)(3x+a)$$

olarak tanımlı f fonksiyonunun grafiğinin x-eksenini kestiği noktalarda eksene teğet olduğunu gösterip değme noktalarını bulunuz. (Bu soru, hekim Bahri Kaderoğlu'nun bir özdeşliğinden yararlanılarak hazırlanmıştır.)

ÇÖZÜM: (Ruhi Tabur, İzmit)

$a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^4 + a(x+a)(2x+a)(3x+a)$$

$$= \left(x + \frac{3a+a\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{3a-a\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

biçiminde yazıldığına göre f(x) fonksiyonunun grafiği x-eksenine teğettir.

($x = x_0$ için $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ ise $y = f(x)$ fonksiyonu x eksenine $x = x_0$ apsisli noktada teğettir.) Bu fonksiyonun x-eksenine teğet olduğu noktalar iki katlı kök olan:

$$x_1 = -\frac{a(3+\sqrt{5})}{2}, \quad x_2 = -\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$$

apsisli noktalardır.

$$\mathbf{A14.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n[e^x - (1 + \frac{x}{n})^n] = ?$$

(Hazırlayan: Nurettin Ergun)

ÇÖZÜM (Gökçe Tahtakılıç, Ankara):

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[e^x - (1 + \frac{x}{n})^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x - (1 + \frac{x}{n})^n}{\frac{1}{n}}$$

olur.

$u = \frac{1}{n}$ dersek, $n \rightarrow \infty$ için $u \rightarrow 0$ olacağından

istenilen limit

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + xu)^{1/u}}{u}$$

olur. L'Hospital kuralıyla,

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-D_u(1 + xu)^{1/u}}{1}$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0} (1 + xu)^{1/u} \left[\frac{xu - (1+xu)\ln(1+xu)}{u^2 + xu^3} \right]$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0} (1+xu)^{1/u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{xu - (1+xu)\ln(1+xu)}{u^2 + xu^3}$$

$$= - e^x \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{x - [\ln(1+xu)x + x]}{2u + 3xu^2}$$

$$= + e^x \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+xu)}{2u + 3xu^2}$$

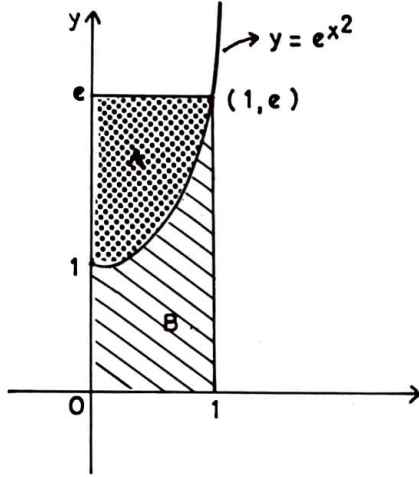
$$= xe^x \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+xu}}{2 + 6xu} = xe^x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

çıkar.

A15. $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = ?$

ÇÖZÜM: (Aykut Arapoğlu, Ankara)

İntegrallerde söz konusu aralıklar için e^{x^2} ve $\sqrt{\ln x}$ fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonlarıdır.



Buna göre,

dersek $B = \int_0^1 e^{x^2} dx$, $A = \int_1^e \sqrt{\ln x} dx$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = B + A = 1e = e$$

olduğu görülür.

Not: Bu soruya hem bu yöntemle hem de kısmi integrasyon yöntemiyle güzel çözümler gönderilmiştir.

Y11. Düzlemde, köşeleri a, b, c karmaşık sayılarına karşılık gelen bir üçgenin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$ olduğunu gösteriniz. (Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM: (Ümit Uzel, Tuzla, İstanbul)

$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$ eşitliğini $\frac{c-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-b}$ biçiminde yazabiliriz. $\triangle abc$ ni eşkenar üçgen olsun. Bu takdirde

$$\{b-a\} = \{c-b\} = \{a-c\} = k, (k > 0, \text{ reel})$$

dir.

Şekilden $\beta - \gamma = \frac{\pi}{3}$; $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ tür.

Diğer Yandan;

$$b - a = -k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$c - b = k(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$a - c = -k(\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

dır. Son üç eşitlikten

$$-\frac{c-b}{a-c} = -\frac{b-a}{c-b} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

olur. Veya içler dışlar çarpımı sonucunda $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ bulunur.

Tersine olarak, a, b, c kompleks sayıları arasında

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac \text{ yani } \frac{c-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-b} = p$$

(p kompleks sayı) olsun. Orantı özelliğinden

$$\frac{c-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-b} = \frac{c-a}{a-b} = p \text{ yazabiliriz. Buradan}$$

$$\{c-b\} = \{p\} \cdot \{a-c\}$$

$$\{b-a\} = \{p\} \cdot \{c-b\}$$

$$\{c-a\} = \{p\} \cdot \{a-b\}$$

Bu üç eşitliği taraf tarafa çarparsak $\{p\}^3 = 1 \Rightarrow \{p\} = 1$ elde edilir. Bu değer yerine yazılırsa $\triangle abc$ nin üç kenarı için

$$\{a-b\} = \{b-c\} = \{c-a\}$$

bulunur ki bu da $\triangle abc$ nin eşkenar olduğunu ifade eder.

Not: Diğer çözümler ya bir kısmı eksik ya da gereğinden fazla uzun olduğundan gözönüne alınmamışlardır.

Y12. Kenarları a, b, c, d olan hangi dörtgenlerde

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

olur?

ÇÖZÜM I (Alper Halbutoğulları, Ankara)

Not: Aşağıda okların yanındaki sayılar okların çıktığı satır veya sütunun kaç ile çarpılıp işaret edilen satır veya sütuna eklendiğini göstermektedir.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ a+c & b+d & a+c & b+d \\ b+d & a+c & b+d & a+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b-d & c & d \\ b-d & c-a & d & a \\ 0 & 0 & a+c & b+d \\ 0 & 0 & b+d & a+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & c-a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{vmatrix}$$

Buna göre,

$$D = -[(a-c)^2 + (b-d)^2] [(a+c)^2 - (b+d)^2]$$

$$D = -[(a-c)^2 + (b-d)^2] [a+b+c+d] [(a+c) - (b+d)]$$

olup, $D = 0$ için

i) $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c, b = d \Leftrightarrow$
dörtgen paralel kenardır.

ii) $a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$
(dörtgen yok)

iii) $a + c = b + d \Leftrightarrow$ dörtgen teğetler dörtgenidir.

Demek ki paralelkenar ve teğetler dörtgeninde $D = 0$ olur.

ÇÖZÜM II: (Seyyit Seyyidoğlu, İskenderun; Erhan Gürel, Ankara)

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b+c+d) & (a+b+c+d) & (a+b+c+d) & (a+b+c+d) \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ (b+d) & (c+a) & (b+d) & (c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ (d-b) & (a-c) & d & a \\ (a-c) & (b-d) & a & b \\ 0 & 0 & (b+d) & (c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} (d-b) & (a-c) & a \\ (a-c) & (b-d) & b \\ 0 & 0 & (c+a) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} (d-b) & (a-c) & d \\ (a-c) & (b-d) & a \\ 0 & 0 & (b+d) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) [(c+a)((a-b)(b-d) - (a-c)^2) - (b+d)((b-d)(d-b) - (a-c)^2)]$$

$$= (a+b+c+d) [-(b-d)^2 - (a-c)^2] (c+a-b-d)$$

$$= -(a+b+c+d) [(b-d)^2 + (a-c)^2] (b+d-c-a) = 0$$

bulunur.

$D = 0$ oluşu aşağıdaki durumlardan birini gerektirir:

- (i) $b = d$ ve $a = c$ ise dörtgen paralelkenar,
- (ii) $b + d = a + c$ ise dörtgen teğetler dörtgeni olmaktadır.

Not: Burada b ile d ve a ile c karşılıklı kenarlar olarak alınmıştır.

Y13. $f(x) = (1+x+\dots+x^{2n}) - (-1)^n x^n$ polinomu, x in hangi değerleri için pozitif, hangileri için negatif, hangileri için sıfır değerler alır?

ÇÖZÜM: (Ataşğun Baykal, Ankara)

n tek ise

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x+x^2+\dots+x^{2n})-(-1)^n x^n \\
 &= 1+x+\dots+x^n+x^n+x^{n+1}+\dots+x^{2n} \\
 &= (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+x^n)(x^n+1) \\
 &= [(1+x)+x^2(1+x)+\dots+x^{n-1}(1+x)](x^n+1) \\
 &= (1+x)(1+x^2+x^4+\dots+x^{n-1})(x^n+1)
 \end{aligned}$$

$x=-1$ için $f(x)=0$, $x>-1$ için $1+x>0$, $1+x^2+x^4+\dots+x^{n-1}>0$, $x^n+1>0$, o halde $f(x)>0$

$1+x<0$, $1+x^2+x^4+\dots+x^{n-1}>0$, $x^n+1<0$

o halde $f(x)>0$.

n çift ise

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x+x^2+\dots+x^{2n})-(-1)^n x^n \\
 &= 1+x+\dots+x^{n-1}+x^n-x^n+x^{n+1}+\dots+x^{2n} \\
 &= (1+x+\dots+x^{n-1})(x^{n+1}+1) \\
 &= [(1+x)+x^2(1+x)+\dots+x^{n-2}(1+x)](x^{n+1}+1) \\
 &= (1+x)(1+x^2+x^4+\dots+x^{n-2})(x^{n+1}+1)
 \end{aligned}$$

Burada da durum yukardaki gibidir. Yani $x=-1$ için $f(x)=0$, $x \neq -1$ için $f(x)>0$ olur.

Diğer çözenler: N. Aydın Ünverdi, Alper Halbutoğlu, Ahmet Ceylan

Y14. Banach'ın kibrit kutusu problemi:

Bir adam, her birinin içinde n tane kibrit bulunan iki kutu kibrit alır ve cebine koyar. Her ihtiyaç duyduğunda iki kutudan birini rastgele seçerek, bir kibrit kullanır. Aradan bir süre geçtikten sonra kutulardan birini eline alıp açtığında kutunun boş olduğunu görür. Bu sırada diğer kutuda tam olarak k tane ($0 \leq k \leq n$) kibrit kalmış olması olasılığını hesap ediniz. (Adamın boş kutudaki son kibriti kullandıktan sonra kutuyu dalgınlıkla tekrar cebine koymuş olduğu varsayılmaktadır.)

ÇÖZÜM: (C. Alparslan Ertuğ, İstanbul)

Bu problemin, bir para atışında m adet atışta $m-r$ adet yazı ve r adet tura gelmesi olasılığını hesaplamaktan farkı yoktur. Ancak burada konu şöyle ele alınacaktır: Birinci kutuyu Y ile, ikinci kutuyu T ile göstereyim. Birinci kutuda k tane kibrit kalmış olması, n tane T , $(n-k)$ tane Y gelmiş olması anlamına gelecek ve toplam atış

sayısı ise; $(n-k)+n=2n-k$ olacaktır. O halde $(2n-k)$ tane atışta, $(n-k)$ tane Y gelmesi olasılığı; yani birinci kutuda k tane kibrit kalması olasılığı, şöyle olacaktır:

$$P = \frac{(2n-k)!}{2^{(2n-k)} \cdot (n-k)!n!}$$

Diğer çözüm: Aykut Arapoğlu, Ankara.

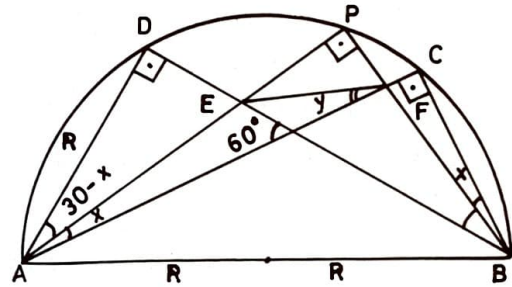
Y15. $[AB]$ çaplı bir yarıçember C, D ile eş üç parçaya bölünmüştür. $\widehat{CD}$ yayına ait bir P noktasını A ile B ye birleştiren doğrular BD ile AC yi E ve F de kesmektedir. $\angle CAP = x$ ise $\angle FEP = 3x$ olduğunu gösteriniz. (Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM I: (Erhan Gürel, Ankara)

$$\{EF\} = a$$

$$\{AE\} = R/\cos(30-x)$$

$$\{BF\} = R/\cos x$$



$\triangle AEF$ ve $\triangle BFE$ üçgenlerinde sinüs teoremini uygularsak;

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{R/\cos(30-x)}{\sin y}, \frac{a}{\sin(30-x)} = \frac{R/\cos x}{\sin(60-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y \cos(30-x)} = \frac{\sin(30-x)}{\cos x \sin(60-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x}{2} \cdot \sin(60-y) = \frac{\sin(60-2x)}{2} \sin y$$

$$\frac{1}{4} (\cos(60-y+2x) - \cos(60-y-2x))$$

$$= \frac{1}{4} (\cos(60+y-2x) - \cos(60-y-2x))$$

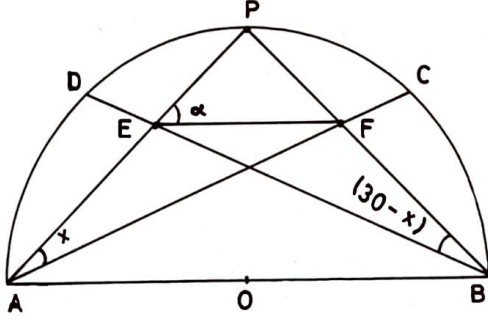
$$\cos(60 + 2x - y) = \cos(60 + y - 2x)$$

$$\Rightarrow 60 + 2x - y = 60 + y - 2x$$

$$2x = y \Rightarrow \widehat{PEF} = x + 2x = 3x$$

olur.

ÇÖZÜM II: (Didem Vurgeç, İstanbul; Alper Halbutoğulları, Ankara)



$$[\tan x / \tan(30-x)] = \frac{PF}{AP} \cdot \frac{BP}{EP}$$

$$= \frac{PF}{EP} \cdot \frac{BP}{AP} = \tan \alpha \cdot \tan(30+x)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan x}{\tan(30-x) \cdot \tan(30+x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \tan x \\ b = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \text{koyarsak}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{\left(\frac{b-a}{1-ab}\right) \cdot \left(\frac{b+a}{1+ab}\right)} = \frac{a}{\frac{b^2-a^2}{1-a^2b^2}}$$

$$= \frac{a(1-a^2/3)}{\frac{1}{3}-a^2} = \frac{a \cdot (3-a^2)}{1-3a^2}$$

$$= \frac{a(1-a^2)+2a}{(1-a^2)+(-2a^2)}$$

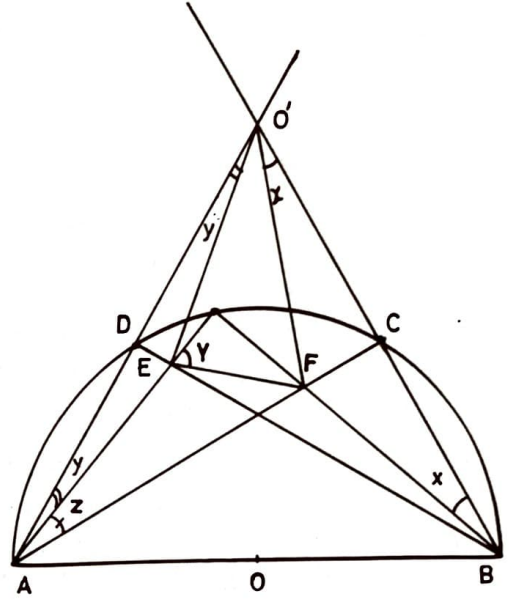
$$= \frac{a + \frac{2a}{1-a^2}}{1 - \frac{2a}{1-a^2}} = \frac{a + \tan 2x}{1 - a \cdot \tan 2x}$$

$$= \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \cdot \tan 2x} = \tan 3x,$$

x dar açı olduğundan $\alpha = 3x$ bulunur.

ÇÖZÜM III: (Saim Ericek, İstanbul)

$AD \cap BC = O'$ olsun. Önce O' nün EF den uzaklığını R ye eşit olduğunu gösterelim.



BCF üçgeninin AC ye göre simetriği $O'CF$ olur ve $\angle FO'C = x$ çıkar.

ADE nin BD ye göre simetriği $O'DE$ olup $\angle EO'D = \angle EAD = y$ olsun. $x + y = 30^\circ$. Şimdi $[O'C]$ nin $O'F$ ye göre simetriği $[O'C']$ ve $[O'D]$ nin de $O'E$ ye göre simetriği $[O'D']$ olsun. $2(x + y) = 60$ nedeniyle $O'C', O'D'$ doğruları çakışır. Öte yandan $O'C' \perp CF, O'D' \perp DE$ olup C', D' noktaları EF üzerinde bir H noktasında çakışır ve O' nün EF den uzaklığı $|O'C| = R$ olur.

$\angle PEF = \varphi$ koyalım. Bu açının kenarları PB, PE ye diktir. O halde $O'H \cap PB = K$ ise PBO' üçgeninde K daki dış açı φ olur. Bu da $\varphi = \angle KBO' + \angle KO'B = x + 2x = 3x$ verir.

Diğer Çözenler:

N. Aydın Ünverdi - İstanbul,
Serkan Kaya - İstanbul,
Doğan Mersin - İstanbul,
Murat Beybağa - İstanbul,
Ataşağın Baykal - Ankara,
Murat Limoncu - Ankara,
Seyyid Seyyidoğlu - İskenderun,
Kazım Önder Yıldırım - Gaziantep,
Namık Gök - İzmir,
C. Alparslan Ertuğ - İstanbul,
Aykut Arapoğlu - Ankara, Önder Sayı - İstanbul.

BİLGİSAYARLAR İSPAT PEŞİNDE

ARTURO SANGALLI

ÇEVİREN: HASAN DAVULCU

Yakın zamana kadar herhangi bir ispatın doğruluğunu matematikçiler kendileri kontrol edebiliyorlardı. Ancak uzun yıllar çözümsüz kalan bazı problemlerin çözümü için bilgisayarlardan yararlanmaya başladıklarında artık bu yolla elde ettikleri yanıtları kimse kontrol edemiyor (bilgisayar hariç).

1976 yılında, Illinois Üniversitesinden iki matematikçi, Kenneth Appel ve Wolfgang Haken dört-renk problemini çözdüler. (Bkz. Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 2, Sayfa 7) Dört-renk problemi 1852'de Londra Üniversitesinin bir öğrencisi olan Francis Guthrie tarafından, kağıda çizilebilecek herhangi bir haritanın renklendirilmesinde, birbirine komşu iki ülkenin farklı renklerde olması koşuluyla, boyanabilmesi için dört rengin yeterli olduğunu sezinlemesi ile ortaya atılmıştı. Sonra bunun matematiksel olarak ispatlanıp ispatlanamayacağını sordu. Yüz yıldan uzun bir süre uğraşıldığı halde, Appel ve Haken dört rengin yeterli olduğunu ispatlayana kadar, kimse bu soruya cevap veremedi. fakat Guthrie'nin kafasındaki ispatın Appel ve Haken'in ispat yöntemi olduğunu hiç sanmıyoruz. İspatın bazı bölümlerinin bilgisayar yardımı ile yapılmasının yanında, onun doğruluğunu veya yanlışlığını da bilgisayar yardımı olmaksızın anlamamız imkansız.

Daha önce örneği görülmemiş bir deneyim olan bilgisayarların matematiksel ispatlar için kullanılması matematikçiler arasında şiddetli münakaşalara yol açtı ve birçok teorik ve felsefi soruları ortaya çıkardı. Bilgisayarın veya programcısının bir hata yapmadığını nereden bilebiliriz? Bu ispatlar bazı yönleri ile geleneksel kalem-kağıt ispatlarından farklı mı? Acaba bazı matematiksel doğruluklar 'a priori' değil de deneyime mi bağlı?

İlerleyen yıllarda bilgisayar yardımı ile yapılan diğer ispatlar önerildi ve bunların geçerliliğine

dair tartışmalar sürdü durdu. Aralık 1988 tarihli bir New York Times gazetesinin makalesinin başlığında soruluyordu; "Bir matematiksel ispat, eğer onu kimse kontrol edemiyorsa bir ispat mıdır?" Makalede, geometrinin ikiyüz yıllık bir sorusu olan 10. dereceden projektif düzlemlerin var olup olmadığı probleminin sonunda bir süper bilgisayarın hiç de küçümsenemeyecek yardımıyla, böyle bir düzlemin var olmadığı şeklinde ispatlanması konu ediliyordu. Bilgisayarla yapılan bir matematiksel ispat nedir? Genelde matematiksel ispat nedir?

1928 yılında ünlü İngiliz matematikçisi George Hardy matematiksel ispatların doğalarını ve amaçlarını daha çok şişsel bir dille şöyle açıkladı.

Hardy matematikçiyi ilerideki sıradağlara dikkatle bakan bir gözlemciye benzetiyordu. Hardy'nin amacı ise mümkün olduğu kadar çok sayıda zirveyi hiçbir kuşkuya yer bırakmayacak şekilde ayırd etmek. 'Eğer onu bir başkasının da görmesini istiyorsam', diyor Hardy, 'onu direkt olarak işaret ederim veya beni ona götüren zirveler zincirini, gösteririm. Bir diğerinin gözü de onu gördüğü zaman, araştırma, tartışma veya ispat tamamlanmış olur.' Bu benzetme bize bir ispatın esas amacının ikna etmek olduğunu gösteriyor.

Bir matematiksel ispat mantıksal tündengelim ile yeni bir doğruluğun bilinen doğruluklardan eldesidir. Bu bilinen doğruluklar açık olanlar veya daha önce ispatladığımız doğru önermeler olabilirler. Yazılı birçok ispat, bir iki satırdan sayfalarca olanlara kadar değişebilirler. Bazıları çok daha uzundurlar. Örneğin, tüm tek dereceli grupların çözülebilir olduğunu gösteren Walter Feit ve John Thompson'un basılı ispatlı 251 sayfayı doldurmaktadır. Hatta ünlü Ramanujan öngörüsünün ispatı 2000 sayfayı aşmaktadır.

Genellikle, bir ispatın sunuluşu, yeterince sabırlı ve bilgili bir matematikçinin onu doğrulayabileceği şekilde olmalıdır.

Matematikteki bu gereklilik, deneysel bilimlerdeki tekrarlanılabilirliğe eşdeğerlidir. Tabii ki, bir ispat kontrol edildiği halde bile yanlış olabilir. Bu, bir avukat ve Londra Matematik Derneği üyesi olan Alfred Kempe'nin dört-renk problemi ile ilgili ispatı için de söylenebilir. Yayınlanışından 11 yıl sonra, 1890'da, matematikçiler Kempe'nin argümanında bir hata buldular. Ve böylece, daha önce 1879'da çözülmüş olduğu sanılan dört-renk problemi yeniden gündeme geldi.

1920 yılında Alman matematikçisi David Hilbert ve onun çalışma grubu, matematiksel ispatın, formal teorisini geliştirdi. Bu sistemde, önce matematiksel önermeler formal dildeki ifadeler halinde yazılır. Bu ifadeler -en azından görünürde- anlamsızdırlar, dolayısıyla doğruluklarından veya yanlışlıklarından da ösz edilemez. Bazı belirli çıkarım kurallarıyla belli ifadelerin oluşturulması için, gerek ve yeter şartların diğerlerince sağladığı ispatlanabilir. Bu tip ispatlar salt biçimsel bir şekilde, sadece ifadelerin biçimleri referans alınarak oluşturulan mantık silsileleri halindedirler. Hatta, bell ibir ispat baz alınarak, prensipte, mekanik olarak onu doğrulamak bile söz konusudur: örneğin bir makineyi bu işi yapmak üzere programlayabiliriz.

Hilbert'in amacı kurduğu bumatematiğin iç çelişkilerden uzak olduğunu göstermekti. Başaramadı. Gerçekte, birkaç yıl sonra Avusturya'lı mantıkçı Kurt Gödel matematiğin tutarlılığını ispatlamaya çalışan her denemenin başarısızlığa mahkum olduğunu ispatladı. Ancak formal yaklaşım matematiğin temel özelliklerini, asıllarını bulmaya yöneliktir; ve bugün yapılan birçok ispat formal bir sistem içindeki formal çıkarım metodlarının uygulamalarının bir özeti halindedirler.

Herkes geçerli bir matematiksel ispatın ne olduğu konusunda fikir birliği içinde değildir. "Sezgiciler (Intuitionistic) okulu" diye bilinen

matematikçiler, sıradan matematikçinin doğru diye kabul ettiği mantıksal ilkeleri uzun uzun sorgulamışlardır. Bunlardan biri: P verilen herhangi bir önerme olmak üzere; ya P doğrudur ya da onun tersi olan $\sim P$ doğrudur. Bu matematikçilerin yaklaşımı, bugün kullanılmakta olan bir çok ispat yöntemini reddetmek yönündedir.

İspatlar konusunda, 1977 yılında Sovyet matematikçi Yuri Manin şöyle yazmıştır. "*Bir ispat ancak kamuoyun tarafından bir ispat olarak kabul edilebilir bulunulduktan sonra ispat sayılabilir. Ve bu matematikte olduğu gibi fizik, dilbilim veya biyoloji için de geçerlidir.*"

Bilgisayarların yeri nedir? Bilgisayarlar matematikçilere pek çok şekilde yardımcı olmaktadır: hesaplama, çözme, simülasyon, ve grafik çizimleri gibi. Matematiksel gerçeklerin ispatlanmasında da yardımcı olmaktadır. Biz bilgisayar destekli ispattan, verilen herhangi bir matematiksel önermenin ispatında bilgisayar kullanılarak elde edilen verilere dayanan ve geleneksel ispatlarda olduğu gibi 'elle' kontrol etme imkanımızın olmadığı ispatları anlıyoruz.

Örnek olarak, Pensilvania Üniversitesinden, Herbert Wilf ve Doron Zeilberger'in yazmış oldukları, bazı kombinatorik özdeşlikleri ispatlayan bir programı verebiliriz. (Bkz. "The Automatic Profig Machine", *New Scientist*, 21 Ekim 1989) Fakat bu ispatlar bizim anladığımız anlamda bilgisayar destekli ispatlar değil. Çünkü bilgisayar çıktısı sıradan kalem-kağıt ispatları şekline çevrilebilir. Kısaca, sadece bilgisayara inanmak zorunda kaldığımız durumlardaki ispatlara bilgisayar destekli ispat diyoruz.

(New Scientist, 1991)

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Yazan: NICHOLAS P. KAZARINOFF

Çeviren: A. YÜKSEL ÖZEMRE

Geometrik Eşitsizlikler dört bölümden oluşan 163 sayfalık bir kitap. İlk bölüm gerçel sayıların genel özellikleriyle Aritmetik - Geometrik ortalama eşitsizliğini içeriyor. Bölüm 2 izoperimetri problemleri adı verilen eş çevreli şekiller arasında en büyük alanlı bulma problemlerine ayrılmıştır.

Bölüm 3 yansıma ilkesine ayrılmış olup bu ilke yardımıyla Dido problemi ve koniklerin bazı

özellikleri verilmiş, üçgenlere ilişkin bazı ilginç özellikler bu arada da bu sayımızda ayrıntılarıyla ele aldığımız Erdös - Mordell eşitsizliği ispatlanmıştır. Kitap okuru harekete geçirmek amacıyla bölüm aralarına serpiştirdiği problemlere ipuçları ve çözümler veren Bölüm 4 ile son buluyor.

SAYILAR TEORİSİNE GİRİŞ

Yazan: Prof. Dr. HEINRICH W. E. JUNG

Çeviren: ORHAN Ş. İÇEN

Dokuz bölümden oluşan kitap sayılar kuramına ait bir ders kitabı yapısında. Konuları örnek ve dizelgelerle sistematik biçimde ele alıyor.

Bölüm I, II ve III tam sayılarda bölme, asal sayı, OBEB, OKEK kavramlarına ve bölünebilme kurallarına ayrılmış. Bölüm IV de n modülüne göre tam sayıların toplam ve çarpım tabloları veriliyor. Bunlardan yararlanarak $ax + by = c$ biçimindeki Diofant denklemlerin nasıl çözülebileceği belirtiliyor. Bölüm V ve VI'da Euler ϕ fonksiyonu tanıtılıp ünlü Euler Teoremi ve onun özel durumu olan Küçük Fermat Teoremi veriliyor. Bölüm VII karesel kalan (kuadratik

rezidü) ve Legendre simgesi kavramlarına ayrılmış. **Karesel karşılıklık teoremi**, Jacobi simgesi ve n modülüne göre karekök hesabı da bu bölüm kapsamında. Bölüm VIII asal modüllere göre kuvvet dizelgelerini ele alarak üslü ve logaritmik fonksiyonların bu konudaki benzerlerini işlemeye çalışıyor. Son bölüm olan Bölüm IX de rasyonel sayıların devirli ondalıklar olarak gösterilişi veriliyor.

Kitap tamsayılar ve modüler aritmetik hakkında sistematik bilgi edinmek isteyen okurlara hitap ettiği gibi konuların bir kısmı üstünde ayrıntıya girmek isteyen okurlara da karşılık veriyor.

Cevaplar:

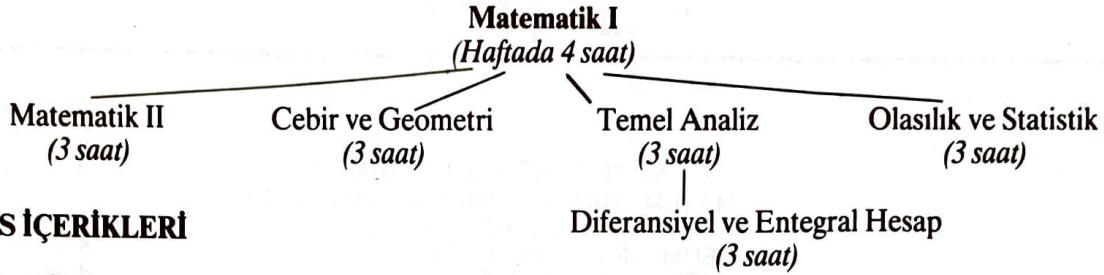
- a) $2.5.(494 + :165) = 110 . 1938$
 $5.2.(797 + 9862) = 110 . 1938$
- b) $2.6.(515 + 1746) = 21.1938$
 $7.1.(353 + 5461) = 21.1938$
 $7.3.(515 + 1423) = 21.1938$

İsteme Adresi:

Prof. Dr. Hülya SENKAN
 Türk Matematik Derneği
 Fen Fakültesi Matematik Bölümü
 Vezneciler - İSTANBUL

JAPONYA'DA MATEMATİK ÖĞRETİMİ

Japonya'da okutulmakta olan matematik dersleri ve bunların birbirine bağılılıkları aşağıdaki şemada olduğu gibidir. Şema ayrıca öğrencilerin nasıl seçimler yapabileceğini de göstermektedir.



DERS İÇERİKLERİ

Matematik I

- Sayılar ve Cebirsel İfadeler:** Sayılar ve kümeler; tamsayılar, rasyonel sayılar, gerçel sayılar; polinomlar, rasyonel ifadeler; ikinci dereceden denklemler, daha yüksek dereceli basit denklemler denklem sistemleri; ikinci dereceden eşitsizlikler; karmaşık sayılar.
- Fonksiyonlar:** İkinci dereceden fonksiyonlar, basit rasyonel ve irrasyonel fonksiyonlar, ters fonksiyon kavramı.
- Geometrik Şekiller:** Trigonometrik oranlar (sinüs, kosinüs, tanjant); sinüs ve kosinüs teoremleri; koordinatlar, doğru ve çember denklemleri.

Matematik II

- Olasılık ve Statistlik:** Permütasyon ve kombinasyonlar, olasılık, statistik.
- Vektörler:** Vektörler ve vektörlerle işlemler, uygulamalar.
- Türev ve Tümlen Hesabı:** Diferansiyel katsayısının anlamı, türev ve uygulamaları, tümlenmenin anlamı, belirli ve belirsiz tümlen.
- Diziler:** Aritmetik ve geometrik diziler.
- Çeşitli fonksiyonlar:** Üstel, logaritmik, trigonometrik fonksiyonlar.
- Bilgisayar ve Grafikler:** Bilgisayarların işlevi, algoritma ve grafikler.

Cebir ve Geometri:

- Konikler:** parabol, elips ve hiperbol
- Düzlemde vektörler:** vektörlerle işlemler, iç çarpım, vektörlerin doğru denklemi ve çember denklemi çıkarmada kullanılışı.
- Matrisler:** Matrisler ve matrislerle işlemler, ters matris, doğrusal dönüşümler.
- Uzayda geometri:** Uzayda nokta, doğru ve düzlem; uzayda koordinat sistemi; uzayda vektörler, doğru, düzlem ve küre denklemleri.

Temel Analiz:

- Diziler:** Basit diziler (Aritmetik dizi, geometrik dizi vb.); tümevarım.
- Fonksiyonlar:** Üstel fonksiyon; logaritmik fonksiyon; trigonometrik fonksiyonlar (genelleştirilmiş açı kavramı, çembersel ölçü, trigonometrik fonksiyonlar, periyot, toplam teoremleri v.b.)
- Fonksiyon değerlerinin değişimi:** diferansiyel katsayısının anlamı; türev ve uygulamaları; tümlen ve uygulamaları.

Diferansiyel ve Entegral Hesap

- Limit:** dizilerde limit yakınsallık, ıraksallık; fonksiyonlarda limit
- Türev ve uygulamaları:** Türev fonksiyonların çarpım ve bölümünün türevi, bileşkenin türevi, ters fonksiyonun türevi; trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonların türevleri; teğet doğrusu, fonksiyonların artan ya da azalan oluşu, hız, ivme; ikinci türev, dönüm noktası.
- Tümlen ve uygulamaları:** İntegralin anlamı, değişken değiştirme ve parçalara ayırma ile integral hesabı, çeşitli fonksiyonların integrali, alan hacim ve yay uzunluğu hesabında integralin kullanılışı; diferansiyel denklem kavramı, $\frac{dy}{ds} = ky$ türünden basit denklemlerin çözümü.

Olasılık ve İstatistik

- Verilerin düzenlenmesi:** dağılım, standard sapma vb.
- Olası durumların sayısı:** permütasyonlar, kombinasyonlar binom teoremi.
- Olasılık:** tanım ve temel kuralları; bağımsız olaylar; koşullu olasılık.
- Olasılık dağılımları:** rassal değişken ve olasılık dağılımı, normal dağılım.
- İstatistiksel Yorumlar:** populasyon ve örnekleme istatistiksel yorum kavramı.

DİZİN (Cilt I)

YAZAR	YAZI	SAYI	SAYFA
AKBÜLUT, F. AKYOL, A.	BÖLÜNEBİLMEDE YENİ YÖNTEMLER MATEMATİK ÖĞRETİMİ PROGRAMLARINDA YAPILAN DEĞİŞİKLİKLER	3 2	10 i
ALKAN, E. ALPAY, Ş. BERKMAN, A.-DOĞANAKSOY, A. -KEYMAN, E.	GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER MATEMATİK ÖDÜLLERİ DÖRT RENK PROBLEMİ	5 4 1	17 30 7
ÇAKAR, O. DEMİR, H. DEMİR, H. DEMİR, H. DEMİR, H. DEMİR, H. DOĞANAKSOY, A. DOĞANAKSOY, A.-BERKMAN, A. -KEYMAN, E.	YAŞAYAN BİR DAHİ: PAUL ERDÖS BAZI ORTALAMALAR İZOMETRİLER İZOMETRİLERİN ÇARPIMI HOMOTETİ VE BENZERLİK ERDÖS-MORDELL EŞİTSİZLİĞİ SİHİRLİ KARELER	5 1 2 3 4 5 2	8 17 16 12 2 11 6
ERGUN, N. ERKİP, A. ERKİP, A.	DÖRT RENK PROBLEMİ KÜMELERİN NİCELİĞİ DOĞRUSAL İNDİRGEMELİ DİZİLER DOĞRUSAL İNDİRGEMELİ DİZİLER VE SİÇRAYAN KURBAĞALAR	1 3 1 2	7 2 24 21
ERKİP, A. ERKİP, A. EROĞLU, M. S. GÜLOĞLU, I. GÜLOĞLU, I. HAYFAVİ (BAŞTIYALI), A. KARAÇAY, T. KEYMAN, E.-BERKMAN, A. -DOĞANAKSOY, A.	32. MATEMATİK OLİMPİYATLARINA DOĞRU BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER MATEMATİK VE BELİT SİSTEMLERİ PERGEL VE CETVELLE YAPILAMAYAN ÇİZİMLER PERGEL VE CETVELLE YAPILAMAYAN ÇİZİMLER II 1994 YILINA AİT SİHİRLİ KARE SONSUZLUĞUN OLAGANÜSTÜ ÖZELLİKLERİ	3 4 5 1 2 5 1	18 20 1 11 10 7 15
MATEMATİK DÜNYASI MATEMATİK DÜNYASI MATEMATİK DÜNYASI MATEMATİK DÜNYASI NESİN, A. NUTKU Y. ÖKTEM, F. ÖZLUK, O.-ŞAHİN, A.-TEZER, C. ŞAHİN, A.-ÖZLUK, O.-TEZER, C. ŞANGALLI, A. SEÇKİN, A.-ŞENSES, F.-ÜNAL, B. ŞENSES, F.-ŞEÇKİN, E.-ÜNAL, B. TANER, T. TANER, T. TERZİOĞLU, T. TERZİOĞLU, T. TEZER, C. TEZER, C. TEZER, C.-ÖZLUK, O.-ŞAHİN, A. TOPUZOĞLU, A. TOPUZOĞLU, A. TOPUZOĞLU, A. ÜNAL, B.-SEÇKİN, E.-ŞENSES, F.	DÖRT RENK PROBLEMİ AZERBAYCAN'DA MATEMATİK ÖĞRETİMİ FRANSA'DA MATEMATİK ÖĞRETİMİ İNGİLTERE'DE MATEMATİK ÖĞRETİMİ JAPONYA'DA MATEMATİK ÖĞRETİMİ OLASILIK HESAPLARI PASCAL ÜÇGENİ BİR EŞİTSİZLİK ÜZERİNE PİSAGOR TEOREMİNİN ÇEŞİTLİ İSPATLARI PİSAGOR TEOREMİNİN ÇEŞİTLİ İSPATLARI BİLGİSAYARLAR İSPAT PEŞİNDE LATİN KARELER LATİN KARELER GERÇEL SAYI NEDİR? MATEMATİKTE BENZETME MATEMATİK DÜNYASINDA 1, 2, 3, VEYA SÜRAT FELAKETTİR DÜZLEM GEOMETRİDE AÇILAR VE ÖLÇÜLERİ MENALAUS VE CEVA TEOREMLERİ PİSAGOR TEOREMİNİN ÇEŞİTLİ İSPATLARI PİSAGOR TEOREMİ; YA ÖNCESİ? WARING PROBLEMİ FERMAT'NIN SON TEOREMİ LATİN KARELER	1 4 1 2 5 5 2 3 3 5 4 4 2 5 1 1 1 4 3 2 3 4 4	7 31 30 30 31 3 29 21 6 6 29 11 11 2 15 2 15 6 26 29 8 11

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR

CEMAL KOÇ

YAYIN KURULU

OKAY ÇELEBİ
HÜSEYİN DEMİR
ALİ DOĞANAKSOY
HALİL ERDEM
YAŞAR ERSOY
İSMAİL GÜMÜŞEL
TİMUR KARAÇAY

DİZGİ ve GRAFİK TASARIM

ENLEM 80 125 94 83

BASKI

TÜRK HAVA KURUMU BASİMEVİ

*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu
Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk.
K.İ.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi
uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 25.000.-TL., Yurtdışı yıllık 50.000.-TL.,

Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin Dergi adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.

Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.

Dergi içi, tam sayfa siyah-beyaz: 1.000.000.-TL.

Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.

Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz: 500.000.-TL.

ADRES

Atatürk Bulvarı 94/14 Kızılay 06440 ANKARA

Tel: (4) 118 60 71

Fiatı: 10.000.-TL.

