

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematikte Tanım ve Kanıtlar

Mehmet Sait Eroğlu

Bir Üçgende Noktadaş Dikmeler

Hüseyin Demir

Pokerin Matematiği

Ali Nesin

Evritim

Cem Tezer

Bir Üçgene Ait Çemberler

Cemal Koç

Geometrik Eşitsizlikler

Emre Alkan

Sorular - Çözümler

Öğrenci Gözüyle Matematik Nedir?

Fikri Akdeniz

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 C & \cos^2 B \\ \cos^2 C & 1 & \cos^2 A \\ \cos^2 B & \cos^2 A & 1 \end{vmatrix} = f(S, R) = ?$$

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasında	1
Matematik Dünyasından	1
Matematikte Tanım ve Kanıtlar	
Mehmet Sait Eroğlu	2
Bir Üçgende Noktadaş Dikmeler	
Hüseyin Demir	5
Pokerin Matematiği	
Ali Nesin	8
Evirtim (I)	
Cem Tezer	12
Bir Üçgene Ait Çemberler	
Cemal Koç	17
Geometrik Eşitsizlikler	
Emre Alkan	22
Alıştırma Soruları	24
Yarışma Soruları	25
Çözümler	26
Öğrenci Gözüyle Matematik Nedir?	
Fikri Akdeniz	31
Kitaplar	32

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

BU SAYIYI YAYINA HAZIRLAYAN

ALEV TOPUZOĞLU

YAZI İŞLERİ MÜDÜRÜ

ABDULLAH KAYGUSUZ

DİZGİ ve GRAFİK TASARIM

ENLEM 80 125 94 83

BASKI

TÜRK HAVA KURUMU BASIMEVİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 dergisinin Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 25.000.-TL., Yurtdışı yıllık 50.000.-TL., Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak, dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa siyah-beyaz: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz: 500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen) Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü
06531 ANKARA
Tel: (4) 223 71 00 / 2978 - 2979

MATEMATİK DÜNYASINDA

Bir yıl kadar önce matematiği yaygın bir şekilde tanıtmak ve sevdirmek amacıyla Türk Matematik Derneği olarak **Matematik Dünyası**'nı çıkarmaya başladık. İlk beş sayımıza olan ilgi beklentilerimizi aştı ve bazı sayılarımızı yeniden basmak zorunda kaldık. Yarışma sorularımıza gelen cevapların çokluğu, bize yazan veya telefon eden okurlarımızın yakın ilgileri doğrusu bizleri sevindirdi ve yüreklendirdi. **Matematik Dünyası** başta editörümüz Cemal Koç olmak üzere, yazarlarımızın, yayın kurulumuzun, dergimizdeki yazıları dizgen Zehra Tuğlu'nun özverili çabaları sayesinde ortaya çıktı. UNESCO'nun mali desteği dergiyi başlatmamızı sağladı.

Bu arada dergimizin zaman zaman geç basılması veya bazı abonelerimize geç ulaşması gibi kusurlarımız oldu. Ülke çapında dağıtımımız yetersiz kaldı. Dergimizi yeterince tanıtılabildiğimizi de söyleyemeyiz. Bunları ve benzeri sorunlarımızı çözmek düşüncesiyle özel bir kuruluşla bir anlaşma yaptık. Bu sayıdan başlayarak **Matematik Dünyası** bu kuruluş tarafından basılıp dağıtılacak. Bildiğimiz bu kusur ve eksikliklerin yanı sıra bizim bilmediklerimiz de olabilir. Bize eleştiri ve isteklerinizi bildirirseniz, dergimizin daha iyiye gitmesinde yararlı olursunuz.

Bir yıl boyunca sizlerle birlikte olduk. Bizlere destek olmayı sürdürürseniz daha nice yıllar birlikte oluruz **Matematik Dünyası**'nda...

Tosun Terzioğlu

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Dergimizin yayına başlayışından beri geçen bir yıl içinde okurlarımızdan pek çok mektup aldık. İkinci sayıda yayınladığımız anket formunu çok kişi doldurup bize yolladı. Bunlara dayanan gözlemlerimiz şöyle:

- Bize yazan okurlarımızdan yarıya yakını öğrenci. Ortaokul, lise öğrencileri, üniversite öğrencilerinden çok. Üniversite öğrencilerinin büyük çoğunluğu matematik bölümlerinde. Lise öğretmenleri ile üniversite öğretim üyeleri ise okullarımızın yaklaşık üçte birini oluşturuyor.
- Matematik tarihi, matematiksel mantık ve özellikle matematik eğitimi konularına daha fazla yer vermemiz isteniyor. Öğretmen okurlarımızdan bize bu yönde yardımcı olmalarını ve onların matematik eğitimi ile ilgili görüşlerini yansıtan yazılarını bekliyoruz.
- Bazı okurlarımız derginin güçlükle izlenebildiğini, düzeyinin fazla yüksek olduğunu yazdı. Bazıları yarışma/alıştırma sorularının arttırılmasını istediler.
- Ankete cevap verenlerin büyük çoğunluğu organize edilecek panel/söyleşilere katılmak istediklerini belirttiler. Bu tür etkinlikleri önümüzdeki aylarda gerçekleştirmek üzere çalışmalarımız var.

Bize yazan tüm okurlarımıza teşekkür ederiz; dergide onların fikirleri ışığında yaptığımız/yapacağımız değişiklikler gittikçe belirginleşecek.

Derginin içeriği ile ilgili mektuplarınızı daha önce olduğu gibi **Matematik Dünyası**, ODTÜ, Matematik Bölümü, 06531 Ankara adresine gönderiniz. Sadece abonelik ile ilgili mektuplar için ise adres P.K. 424 Kızılay veya Atatürk Bulvarı 95/1105 Kızılay 06650 Ankara

Anımsatmak istediğimiz bir nokta var; öğrencilerin okul ödevlerine yardımcı olabilmemiz gerçekten olası değil. Bu yöndeki istekleri cevapsız bıraktığımız için özür dileriz.

Bu sayıdaki yazılara gelince:

Matematikte Tanım ve Kanıtlar: Mehmet Sait Eroğlu Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerinden. Mehmet Sait Eroğlu, matematik felsefesi ile soyut matematiğin içine olduğu "Fuzzy - Belirsiz Matematik" konusunda çalışmalarıyla dünyada önde gelen kişilerden. Bu yazısında matematik felsefesinin önemli sorularından biri olan "matematiksel bilgiye nasıl ulaşıldığı" üzerinde tarih boyunca

değişen görüşlere değiniyor; 19. yüzyıl sonu ile 20. yüzyıl başlarında, bu soruyla ilgili ortaya çıkan bunalımlardan sonra Hilbert'in öne sürdüğü formel yöntemi açıklıyor.

Bir Üçgende Noktadaş Dikmeler: Hüseyin Demir, ODTÜ Matematik Bölümü'nden emekli. Hocamızın ilginç yaşam öyküsüne gelecek sayıda yer vereceğiz. Yazısında bir üçgenin kenar doğrularına dik olan üç doğrunun aynı noktadan geçmesi için gerek ve yeter koşulu veren bir teorem ile bu teoremin bazı uygulamalarını anlatıyor.

Pokerin Matematiği: Ali Nesin, ABD, California Üniversitesi'nde öğretim üyesi. Çok beğenilen **Matematik ve Korku** adlı kitabın da yazarı. Geçen sayımızda olasılıklar kuramının tavla oyununa uygulanışına değinmişti, bu sayıda poker oyununu örnek alıyor.

Evirtim (1): ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden olup şimdi Kanada'da Victoria Üniversitesi'nde misafir öğretim üyesi olarak çalışan Cem Tezer iki bölümde yayınlayacağımız yazısının bu kısmında evirtim adı verilen özel bir dönüşümün özelliklerini anlattıktan sonra Euclid geometrisindeki bazı önemli teoremlerin, bu dönüşümün kullanımıyla nasıl kolayca elde edilebildiğini gösteriyor.

Bir Üçgene Ait Çemberler: Cemal Koç ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden. Geçen yıl **Matematik Dünyası**'nın editörlüğünü üstlenmişti; derginin beğeni görmesi kuşkusuz Cemal Koç'un büyük katkıları, zaman zaman özveriye varan çalışmaları sayesinde. Şimdi K.K.T.C. Doğu Akdeniz Üniversitesi'nde misafir öğretim üyesi. Cemal Koç Matematik Olimpiyatlarına Türkiye'den katılan yarışmacıları çalıştıranlar arasında da yer alıyor. Bu yazısında Geometrik Eşitsizliklerle ilgili problemlerin çözümünde kullanılan teoremleri ve ön bilgileri veriyor.

Geometrik Eşitsizlikler (II): Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü öğrencisi olan Emre Alkan 1991'de İsveç'te yapılan Matematik Olimpiyatlarında bronz madalya kazanmıştı. Bu yazısında geometrik eşitsizliklerin kullanımıyla çözülen bazı problemler ve çözümlerine yer veriyor.

Öğrenci Gözüyle Matematik Nedir? Fikri Akdeniz, Çukurova Üniversitesi öğretim üyelerinden. "Matematik deyince ne anlıyorsunuz?" ve "Orta öğretim düzeyinde matematik dersine ilgiyi arttırmak için ne yapılmalıdır?" sorularına lise ve üniversitede eğitim gören 400 öğrencinin verdiği yanıtları özetliyor.

MATEMATİKTE TANIM VE KANITLAR

MEHMET SAİT EROĞLU

Matematik sözcüğünün çağrıştırdığı ilk sözcüklerin arasında *kanıt* gelir. Ancak kanıt salt matematiğe özgü bir şey değildir. Değişik alanlarda, *neden*, *niçin* sorusunu sordüğümüz her yerde bir kanıtın peşindeyiz. Ancak *kanıttan ne anlaşıldığı* alan ve zamana göre değişmiştir. Kanıtın şekli *yetkin kişi(ler) onaydır*. Burada, genelde bir açıklama yapmadan, yetkin kişiler bir önermenin doğruluğu hakkında karar verirler. Eski zamanlarda büyücü, bilge kişi, köy ihtiyar heyeti vb. olarak karşımıza çıkan yetkin kişiler, günümüzde ortadan yok olmuş değillerdir, onlara bilirkişi, öğretmen, komisyonlarda bilim jürilerinde veya bir alanda sivrilmiş otoriteler olarak rastlamaktayız. Ancak yetkin kişilerin elinden çıkan her eserin yetkin olması gerekmez. Hiçbir bilimsel eser Öklid'in Geometrisi kadar hayranlık uyandırıp uzun yıllar didik didik edilip, tüm bilimsel çalışmalara örnek olarak gösterilmemiştir. Buna karşın yazılışından ancak yaklaşık 2000 yıl sonra bu eserdeki kanıtların bazılarında ciddi kusurlar olduğu görülmüş ve bunlar yüzyılımızın başında büyük Alman matematikçisi David Hilbert'in çalışmalarıyla giderilmiştir. Ancak Öklid'e ve aşağıda sözünü edeceğimiz diğer matematikçilere haksızlık etmemek için hemen belirtelim ki Öklid'ten bu yana kanıttan ne anladığımız değişmiş ve bugünkü anlamına binsekizyüzlü yılların sonuna doğru ulaşmıştır. Bunu aşağıda biraz açacağız. Yetkin kişilerin onayı bazen olumsuz sonuçlar verir, örneğin zamanının yetkin kişileri Galois'ı hiç anlamamışlar; Cantor'u ise ilk yıllarda çıldırmanın eşiğine getirmişlerdir. Yine de yetkinlerin zararının en az olduğu alan matematiktir. Yetkin kişi kanıtı günümüzde zayıflamış biçimde *sanı* (conjecture) ve *doktora tezleri* olarak karşımıza çıkar. Belli alanlarda yetkin matematikçiler kanıt vermeden bazı önermeleri çalışmalarına ekler ve bunların doğru olduklarını *sandıklarını* belirtirler. Bu önermelerin, önerme sahiplerinin özel yetenek

ve sezilerine güvenerek doğru olduklarını beklemek genelde yanlış bir tutum değildir. Önce yadırgayabileceğiniz bu yaklaşım biraz yakından bakıldığında aslında gelişimin ana çizgisidir. Kuşkusuz bazı sanılar yanlış çıkmıştır. Ancak doğru çıkanlar çoğunluktadır ve ayrıca çoğu sanıların kanıtlarının bir kaç onyıllık uğraş, hem de çok sayıda yetenekli matematikçinin uğraşını gerektirdiğini düşünürsek yetkin kişi onayının veya sanısının önemi anlaşılır. Belki biraz abartarak diyebiliriz ki, matematikte son yetmiş yılda ortaya konan devasa eserlerin büyük bir kısmı Hilbert'in 1920'lerde ortaya koyduğu problemlerin çözümü için verilen uğraştan kaynaklanmaktadır. Ayrıca bazen bir sanının doğru veya yanlışlığının gösterilmesi sırasında geliştirilen yöntemler bu sanıdan da önemlidir. Örneğin Fermat'ın meşhur sanısı, n ikiden büyük bir doğal sayı olduğunda $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü olmadığı sanısı henüz sonuçlandırılmadı. Ancak bu yolda verilen uğraşlar sırasında geliştirilen ideal teori, kanımızca bu sanıdan çok daha önemlidir; ideal teorisi olmadan cebirsel geometri bu güzellikte oluşamazdı. Yine verilen doktora tezlerinin yüzde doksanının ardında yetkin kişilerin doğru sezileri vardır.

Teoremlerinin mutlak doğruları yansıttığı ve kanıtlarının tartışılmaz olduğu sanılan matematikte, *bir teoremin doğruluğunun ne anlama geldiği* tartışmasını şimdilik bir kenara bırakıp kanıtlara eğileceğiz. Matematik ve Belit Sistemleri (Bkz. Matematik Dünyası Cilt I, Sayı 5, s.1.) adlı yazımızda her ne kadar bir belit sisteminin tanımsız terimlerinin ve belitlerinin yeterince uğraş verilen bir alandan kaynaklansalarda oradaki anlamlarından arındırılması gerektiğini vurgulamıştık. Örneğin Öklid geometrisi için düşünülebilecek bir belit sisteminin bir parçasını oluşturan B_5 belit sisteminde "doğrular" ve "noktalar" yoktur, bunların yerini çatlar ve patlar almıştır.

Dolayısıyla Öklid geometrisine ilişkin herhangi bir önermenin kanıtında bir takım şekiller çizerek “şekilden de apaçık görüldüğü gibidır” irdelemesinin yeri yoktur. Ayrıca bu tür çıkarımların ayıklanabileceği kanıtlanmazsa bu kanıt bizim için bugün geçersiz olur. Eski çalışmalarda bu tür çıkarımlara sıkça başvurulduğunu görüyoruz. Şekillerin ilişki sezdirme ve kavramadaki rolünü yadsımlıyoruz; ancak hiç bir zaman bir kanıtın parçası olamazlar. Bu nedenledir ki bazı eksikliklerine karşın geometri çok önceleri, Öklid zamanında bile hayranlık uyandıran bir düzeyde gelişirken, doğal sayılar hakkında bilgimiz ancak 1900'lere doğru kesinlik kazanmıştır.

Eski çalışmalarda bugün kabul edemeyeceğimiz bir diğer şey kusurlu tanımlardır. Karmaşık sayılar kavramı ancak Gauss'un (1777-1855) çalışmalarıyla açıklık kazanır. Newton ve Leibniz'in oluşturdukları “sonsuz küçükler hesabı”nın mekanikte sağladığı başarıların coşkusuyla kanıt ve tanımlarda gösterilen titizlik açısından Öklid'in çok gerisinde kalmıştır. Bir örnek vermek gerekirse bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı gerçel değerli bir fonksiyonun sürekli olması “grafiğinin sıçrama yapmaması ve kalemi kaldırmadan bir çırpıda çizilebilir ve en fazla sonlu yerde sivrilikler içermesi, yani en fazla sonlu yerde teğeti olmaması” ile tanımlanmaktadır. Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ ise en az bir $c \in (a, b)$ için $f(c) = 0$ dir. Bu teoremin kanıtı ise şöyle verilmektedir: x-eksenin altında kalan bir noktayı, kalemi kaldırmadan x-eksenin üstündeki bir noktayla birleştirirsek, besbelli ki en az bir defa x-eksenini keseriz. Kesim noktasının apsisi aranan c dir. Bugün ne bu tanımı, ne de bu kanıtı kabul edemeyiz. Yine Leibniz, Bernoulli ve Euler gibi ünlü matematikçilerin limit bilgileri yanlıştır ve çoğu zaman bir fizikçi gibi çalışmaktadırlar. Bir takım uğraşlarla bir bağıntı sezinlendiğinde onu kanıtlamak yerine, bu bağıntının doğruluğundan daha önce bilinen doğrulara ne ölçüde ulaşıldığı araştırılmış; ulaşılan doğruların sayısı sezilen bağıntının doğruluğunun güvencesi, bir anlamda kanıtı olarak düşünülmüştür. Örneğin $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ kompleks katsayılı bir polinom ($a_n \neq 0$) ve $z_1, \dots, z_n$ bu polinomun kökleriye $p(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ olarak yazılabilir. Kompleks düzlemde tanımlı $\sin z$

fonksiyonun ise sonsuz tane kökü vardır. Bunlar $k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) dirler. Euler polinomlar için bilinen çarpım ifadesini bu fonksiyonlara aktarmış ve

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

ifadesine ulaşmıştır. Ancak burada bir sonsuz çarpım söz konusudur, Euler'in bunlar hakkındaki bilgisi tam değildir ve unutmayalım ki limit kavramı çok sonraları Cauchy ve Weierstrass'ın çalışmalarıyla açıklığa kavuşmuş, bundan sonra yukardaki bağıntının gerçek bir kanıtı verilebilmiştir. Bu konuda ayrıntılı bir örnek olarak Matematik Dünyası Cilt I, Sayı 5'te yayınlanan Tuğrul Taner'in “Matematikte Benzetme” adlı yazısına bakılabilir.

Bu aşamada bir noktayı vurgulamadan geçemeyeceğiz. Doğa hakkındaki yanlış bilgilerimizin matematikteki etkisi olumlu olmuştur. Bugün evrenin sonlu ve ayrık olduğunu biliyoruz. Bir an için evreni bugünkü fizik bilgisi ışığında görebildiğimizi varsayalım: her yönüyle sonlu, süreksiz, ayrık ve bizi ilgilendiren tüm büyüklükleri; zaman, enerji, uzaklık, ağırlık vb... daima temel birimlerin katları olarak karşımıza çıkan bir evren. Böyle bir evrende sonsuza, doğruya, düzleme, ..., gerçel ve kompleks sayılara, sürekliliğe, limite yer yoktur. Böyle bir evrende Öklid geometrisi, analiz, topoloji ... oluşturulamazdı. Olsa olsa rasyonel sayıların dışına çıkmayan sayılar teorisi, olasılık, istatistik gibi alanlarla basit düzeyde işe başlanır ve yetinilirdi uzun süre; belki ileri aşamalarda gruplar teorisine geçilirdi. Ne doğa hakkındaki yanlış bilgimiz, ne de kusurlu tanım ve kanıtlar büyük zararlara yol açmamışlar, aksine ilerde daha sağlam temellere dayandırılan faydalı kuramlara yol açmışlardır. Bu tablonun felsefi yorumunu yapmak istemiyorum.

Matematikte, en sarsıcısı 1900 dolaylarında olmak üzere bir kaç bunalım yaşanmıştır. Bunlara belki bir başka yazımızda değineceğiz. *Matematiğin ne olduğu ve nasıl yapılması* gerektiği hakkında bir fikir birliği yoktur, değişik ekoller vardır. Matematikçiler epeyce bir süredir herhangi bir matematik kuramındaki belitlerin değiştirilebileceğini bilmekteydiler, ancak mantığın evrensel, mutlak ve değişmez olduğunu sanmaktaydılar. Son bunalımın ortaya koyduğu

gerçek evrensel mutlak ve değişmez bir mantığın olmadığıdır. Değişik mantıklar vardır ve kabaca bir matematik kuramı seçilen bir belit sistemi ve seçilen bir mantığın bileşkesidir diyebiliriz; herhangi biri değiştiğinde kuram değişir. En çok kullanılan Aristo mantığıdır, bu arada sezgici mantık (Brouwer) ve son yıllarda belirsiz mantık (Lukasiewicz) kendilerine hatırı sayılır yer yapmışlardır.

Her ne kadar başlangıçta umulânı vermediyse de en çok izlenen Hilbert'in formel yoludur, bunu kısaca verelim. Bir *formel sistem* üç kısımdan oluşur: (1) *Terimler (Kavramlar)*: Bunlar tanımsız kavramlar ve türetilmiş kavramlardır. Örneğin B_5 belit sisteminde çat ve pat tanımsız kavramlarken "koşut" ve "bir noktadan geçme" türetilmiş kavramlardır (terimlerdir). Besbelli ki türetilmiş terimler tanımsız terimlere dayanılarak tanımlanırlar. (2) *Önermeler veya formüller*: Sayılabilir çoklukta imlerin sonlu dizilerinden bir kısmı önermeler olarak belirlenir, genelde bunları veren bir yöntem vardır. Önermelerden bir kısmı belit olarak seçilmiştir. Örneğin Öklid geometrisini formelleştirmek istediğimizde $B_1, \dots, B_5$ ve daha başka birkaç önerme belit olarak seçilebilirler. (3) *Çıkarım kuralları*: Bunlar seçtiğimiz mantığa göre, belitler doğru önermeler olarak alındığında, diğer doğru önermeleri veren kurallardır. Kanıtlar bu kurallara dayanır. Çıkarım kuralları özde önermeler arasında bağıntılardır. Örneğin R bir n -li çıkarım kuralı $A_1, A_2, \dots, A_n$ ve A önermeler olmak üzere $R(A_1, \dots, A_n) = A$ ise A önermesi R kuralına göre $A_1, \dots, A_n$ den *doğrudan çıkar* denir. İncelediğimiz formel sistemi kısaca F ile gösterelim. F de bir kanıt, tanım gereği bir $A_1, \dots, A_n$ önermeler dizisidir, öyle ki her bir A_i ya formel sistemimizin bir belitidir, ya da kendisinden önce gelen önermelerin bir kısmından çıkarım kurallarından birine göre doğrudan çıkar. $A_1, \dots, A_n$ Eğer F de bir kanıtsa A_n önermesi F de bir teoremdir ve bu kanıt A_n nin bir kanıtı denir.

Bir formal sisteme kabaca hiçbir anlamı olmayan bir takım imlerle belli kurallara göre oynanan bir oyun gibi bakabiliriz. Bir örnek oluşturması için Aristo'nun önerme hesabı için bir M formal sistemi verelim.

(1) **Tanımsız terimler**: İlkel bağlaçlar diyeceğimiz $\neg, \Rightarrow, ()$ ve önerme harfleri diyeceğimiz pozitif tam sayılarla damgalanmış $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$

(2) **Önermeler**: (a) Tüm önerme harfleri önermedir, (b) p ve q önerme ise $(\neg p)$ ve $(p \Rightarrow q)$ de bir önermedir, (c) tüm önermeler ancak (a) ve (b) ile elde edilebilenlerdir.

Belitler: p, q ve r önermeler olmak üzere

$$(A1) (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$$

$$(A2) ((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

$$(A3) ((\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow q))$$

(3) **Çıkarım Kuralları**: Bir tek çıkarım kuralımız vardır: p ve $p \Rightarrow q$ dan q dolaysız çıkar. Bu kuralın adı modus ponensdir. Böylece oluşturulan formel sistemi M ile gösterelim. p ve q önermeler olmak üzere üç yeni kavram tanımlayalım:

$$\neg(p \Rightarrow \neg q) \text{ yerine } p \wedge q$$

$$(\neg p) \Rightarrow q \text{ yerine } p \vee q$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \text{ yerine } p \Leftrightarrow q$$

yazacağız. Karşımızda hiç bir iminin özel bir anlamı olmayan bu formal sistem var. Ancak önerme değişkenleri klasik mantıktaki önermeleri gösterdiğine $\neg$ "değil", $p \Rightarrow q$ (p ise q) olarak yorumlandığında $\wedge$ "ve", $\vee$ "veya", $\Leftrightarrow$ "ancak ve ancak" anlamlarını kazanır ve M formal sisteminin teoremleri tamı tamına klasik Aristo önermeler hesabının tüm geçerli önerme kalıplarını (totolojilerini) verir.

BİR ÜÇGENDE NOKTADAŞ DİKMELER

HÜSEYİN DEMİR

"Noktadaş doğrular" deyince, aynı noktadan geçen doğruları, "doğrudaş noktalar" deyince de aynı doğru üzerinde bulunan noktaları anlıyoruz. Buna göre doğrudaş düzlemlerle düzlemdeş şekillerin anlamlarını da vermiş oluyoruz.

Geçen sayıda bir üçgenin kenar doğruları üzerinde bulunan üç noktanın doğrudaş olması için gerek ve yeter koşulu veren Menelaus teoremi ile, bir üçgenin köşelerinden geçen üç doğrunun noktadaş olması için gerek ve yeter koşulu veren Ceva teoremi C. Tezer tarafından ele alınmış ve bu iki teoremin çeşitli uygulamaları verilmişti.

Konuyu tamamlamak için bu yazımızda bir üçgenin kenar doğrularına dik olan üç doğrunun noktadaş olması için gerek ve yeter koşulu veren bir teoremden söz edecek ve bu teoremin birkaç uygulamasına yer vereceğiz.

TEOREM: Bir tam üçgen¹ verildiğinde BC, CA, AB kenarlarına D, E, F gibi üç noktada dik olan üç doğrunun noktadaş olması için gerek ve yeter koşul

$$|DB|^2 - |DC|^2 + |EC|^2 - |EA|^2 + |FA|^2 - |FB|^2 = 0 \quad (1)$$

eşitliğidir.

İSPAT: Tam üçgen ABC ve doğrular da d, e, f olsun.

a) Gereklilik: d, e, f doğruları bir P noktasında kesişsinler. Bu durumda (1) deki u toplamı, Pisagor teoreminden,

$$u = |PB|^2 - |PC|^2 + |PC|^2 - |PA|^2 + |PA|^2 - |PB|^2$$

olup sıfırdır.

b) Yeterlilik: (1) eşitliği geçerli olsun. e ve f doğrularının arakesitine P diyelim. d nin P den geçeceğini göstermeliyiz.

P den BC ye çizilen d dikmesi BC yi D' de kessin. (1) gereğince

$$|D'B|^2 - |D'C|^2 + |EC|^2 - |EA|^2 + |FA|^2 - |FB|^2 = 0 \quad (1')$$

olup (1) ve (1') den

$$|D'B|^2 - |D'C|^2 = |DB|^2 - |DC|^2 \quad (2)$$

elde edilir.

Yönlü uzunlukları (Cilt I, Sayı 4, s. 15) kullanarak (2) nin her iki tarafını çarpanlara ayıralım:

$$(\overline{D'B} - \overline{D'C})(\overline{D'B} + \overline{D'C}) = (\overline{DB} - \overline{DC})(\overline{DB} + \overline{DC}). \quad (3)$$

Burada

$$\overline{D'B} - \overline{D'C} = \overline{CD'} + \overline{D'B} = \overline{CB}$$

$$\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{CB}$$

olup (3) eşitliği

$$\overline{D'B} + \overline{D'C} = \overline{DB} + \overline{DC}$$

yi verir. Buradan da

$$\overline{D'B} - \overline{DB} = \overline{DC} - \overline{D'C}$$

$$\Rightarrow \overline{D'B} + \overline{BD} = \overline{DC} + \overline{CD'}$$

$$\Rightarrow \overline{D'D} = \overline{DD'}$$

$$\Rightarrow \overline{D'D} = -\overline{D'D} \Rightarrow \overline{D'D} = 0 \Rightarrow D' = D$$

elde olunur. Bu da d nin P den geçtiğini, yani d, e, f nin noktadaşlığını gösterir.

Bu teoremin en sade iki uygulaması şunlardır:

Uygulama 1. Bir ABC üçgeninde kenarların orta dikmeleri noktadaştır.

Bildiğimiz bu özellik (1) in kullanılmasıyla hemen çözüm bulur:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0$$

¹ Noktadaş olmayan üç doğrunun oluşturduğu şekil.

Uygulama 2. Bir tam üçgende yükseklikler noktadaştır.

Yüksekliklerin ayakları D, E, F ise (1) eşitliği, Pisagor teoreminden, hemen gerçekleşir.

(1) deki toplamın Σ ile gösterilmesi.

(1) eşitliği, toplama simgesi olan Σ (sigma) ile şöyle gösterilir:

$$\Sigma (|DB|^2 - |DC|^2) = 0 \quad (4)$$

Bu yazılışa anlam veremeyenler için sade örneklerle başlayıp açıklama yapalım:

1. a, b, c gibi üç sayı söz konusu olduğunda Σa toplamını tanımlamak için, a, b, c sayılarıyla ilgili çembersel permutasyon denilen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

permutasyonunun uygulayarak Σa ya şu anlam verilir: Σa toplamı, ilk terimi a, ikinci terimi a'nın dönüştüğü b sayısı, son terimi de b'nin dönüştüğü c sayısının toplamıdır.

$$\Sigma a = a + b + c$$

Aynı toplamın Σb ya da Σc ile de gösterilebileceği açıktır.

2. Yukarıda verilen kuralla Σab toplamı $ab + bc + ca$ dır. Aynı toplam Σbc ya da Σca olarak da gösterilebilir.

$$3. \Sigma(b - c) = b - c + c - a + a + a - b = 0$$

$$4. \Sigma a(b - c) = \Sigma ab - \Sigma ac = \Sigma ab - \Sigma ac = 0.$$

5. $\Sigma bc(b - c) = -(b - c)(c - a)(a - b)$ olduğu gösterilebilir. Gösteriniz.

Eğer a, b, c ve x, y, z gibi üçlü iki grup sayı sözkonusu olursa, çembersel permutasyon her iki gruba ayrı ayrı uygulanır.

$$6. \Sigma a(x - y) = a(x - y) + b(y - z) + c(z - x).$$

$$7. \Sigma(a^2 + cy) = a^2 + cy + b^2 + az + c^2 + bx.$$

A, B, C ve D, E, F gibi üçlü iki grup nokta sözkonusu olduğunda da durum aynıdır:

$$8. \Sigma(|DB|^2 - |DC|^2) = |DB|^2 - |DC|^2 + |EC|^2 - |EA|^2 + |FA|^2 - |FB|^2.$$

a, b, c, d gibi dörtlü bir grup için

$$9. \Sigma ac = ac + bd + ca + db$$

eşitliği geçerlidir.

Uygulama 3. Bir üçgende iç açıortayların ayaklarından, ilgili kenara çizilen dikmelerin noktadaş olması için gerek ve yeter koşul üçgenin ikizkenar olmasıdır.

İSPAT: Üçgen ABC ve iç açıortaylar [AD], [BE], [CF] ve kenar uzunlukları a, b, c olsun.

$$|DB| = \frac{ac}{b+c}, |DC| = \frac{ab}{b+c}$$

olup

$$\Sigma (|DB|^2 - |DC|^2) = 0$$

yazarak a, b, c arasında bir bağıntı elde edelim.

$$|DB|^2 - |DC|^2 = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$= a^2 \frac{c-b}{c+b} \quad \text{den} \quad \Sigma a^2 \frac{c-b}{c+b} = 0$$

ve paydalardan kurtararak da

$$\Sigma a^2 (a+b)(a+c)(c-b) = 0$$

bulunur. $a + b + c = 2s$ yazarsak

$$a^2 (a+b)(a+c)(c-b)$$

$$= a^2 [a^2 + (b+c)a + bc] (c-b)$$

$$= a^2 [a^2 + (2s-a)a + bc] (c-b)$$

$$= 2sa^3 (c-b) + a^2bc (c-b)$$

eşitliğimiz

$$2s\Sigma a^3 (c-b) + abc \Sigma a(c-b) = 0$$

$$0$$

$$\Rightarrow \Sigma a^3 (b-c) = 0$$

olur. Toplamı şöyle çarpanlara ayırırız:

$$a^3 (b-c) + b^3 (c-a) + c^3 (a-b)$$

$$= a^3 (b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)$$

$$= (b-c)[a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)]$$

$$= (b-c)[a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2]$$

$$= (b-c)[-a(c^2 - a^2) + b^2(c-a) + bc(c-a)]$$

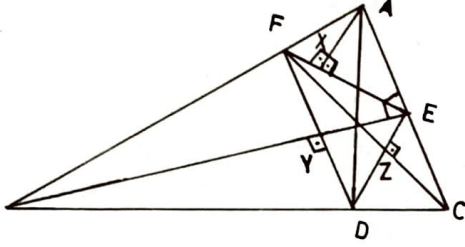
$$= (b-c)(c-a)[-a(c+a) + b^2 + bc]$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

Bunu da sıfıra eşitlersek ispat bitirilmiş olur.

Uygulama 4. Dar açılı bir üçgende köşelerden ortik üçgenin² ilgili kenarlarına çizilen dikmeler noktadadır.

İSPAT: Üçgen ABC ve ortik üçgen DEF olsun. A'nın EF, B'nin FD, C'nin de DE üzerindeki dik izdüşümleri X, Y, Z olsun.



DEF üçgeninde

$$u = \Sigma(|XE|^2 - |XF|^2)$$

toplamının sıfır olduğunu görmek gerekir:

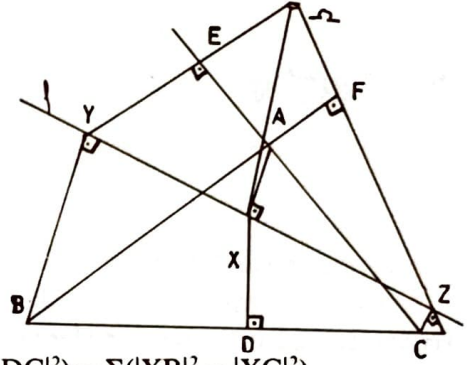
$$\begin{aligned} u &= \Sigma(|EA|^2 - |FA|^2) \\ &= \Sigma(|DC|^2 - |DB|^2) = 0 \end{aligned}$$

Uygulama 5. Tam bir ABC üçgeni ile bunun bir ℓ keseni verildiğinde A, B, C den ℓ ye çizilen dikmelerin X, Y, Z ayaklarından üçgenin karşılıklı kenarlarına çizilen dikmeler noktadadır (bir Ω noktasında kesişirler).

Bu Ω (omega) noktasına ℓ nin ABC ye göre ortopol³ü deniliyor.

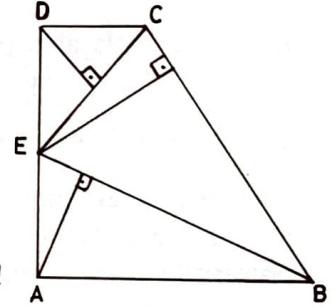
² Yüksekliklerin ayaklarını köşe kabul eden üçgen

İSPAT: Dikmelerin kenarlar üzerindeki ayakları D, F, F ise



$$\begin{aligned} \Sigma(|DB|^2 - |DC|^2) &= \Sigma(|XB|^2 - |XC|^2) \\ &= \Sigma(|BY|^2 + |YX|^2 - |CZ|^2 - |ZX|^2) \\ &= \Sigma(|BY|^2 - |CZ|^2) + \Sigma(|XY|^2 - |YZ|^2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Uygulama 6. A ve D açıları dik olan bir yamukta [AD] nin ortası E ise A dan EB ye, D den EC ye ve E den BC ye çizilen dikmeler noktadadır.



İspatını kendiniz yapınız!

ÇÖZMECE KÖŞESİ

Farklı harfler 10 tabanına göre farklı rakamları gösterdiğine göre, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan sayıları bulunuz

$$\left. \begin{array}{l} EKEİSLSOİ \times 7 \\ LBİAEİOKİ \times 11 \\ LAASÇKAEİ \times 13 \end{array} \right\} = \text{LOBAÇEVSKİ}$$

Hazırlayan: Med. Dr. Bahri Kaderoğlu

(Cevabı 21. sayfada)

POKERİN MATEMATİĞİ

ALİ NESİN

Bu yazıda pokerin matematiğini öğreneceğiz. Poker, dört oyuncuyla ve yediliden as kadar olan 32 kâğıtla oynanır. Her oyuncuya önce beş kâğıt dağıtılır, sonra her oyuncu elindeki beş kâğıttan istediği kadarını değiştirebilir (isterse hiç değiştirmez). En iyi beş kâğıdı olan kazanır, ve oyun yinelenir. Elbet, “en iyi” sözcüğünün tanımlanması gerekir. Örneğin, beş kâğıt aynı renktense, diyelim hepsi maça (♠), bu “iyi” bir eldir. Aynı renkten beş kâğıda *renk* adı verilir. Bu yazıdaki amaçlarımızdan biri de pokerde ilk dağıtılan beş kâğıdın renk olma olasılığını hesaplamak. Önce ciddi matematik yapacağız.

Bir tanımla başlayalım. Eğer n bir doğal sayıysa, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ sayısına eşittir. Örneğin,

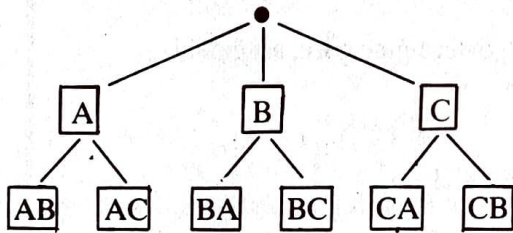
$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720$$

dir. $0! = 1$ olarak tanımlanır. Bu ilk bakışta pek doğal gelmeyen tanımın nedenini yazının ortalarında bulabilirsiniz.

Elimizde A, B ve C harfleri var, ve bu harflerden iki değişik harfli sözcük yapmak istiyoruz. Kaç sözcük yapabiliriz? Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri —abece sırasına göre— sıralayalım.

AB, AC, BC, BA, CA, CB

Bu sözcüklerin oluşumunu şöyle de gösterebiliriz:



Önce ilk harfleri koyuyoruz: A, B ve C. Sonra ikinci harfleri: eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçenek var: B ve C. Dolayısıyla A budağına iki dal ekliyoruz: B ve C dallarını. Demek ki toplam $3 \times 2 = 6$ sözcük yazabiliriz.

Şimdi bu soruyu genelleştirelim. Elimizde n değişik harf var:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

ve bu n harften, r değişik harfli sözcükler üretmek istiyoruz (yani her harfi en çok bir kez kullanabiliriz). Kaç sözcük üretebiliriz? Yukarıdaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapalım. Ağacın ilk budağından n dal çıkar: A_1 dalı, A_2 dalı, ... ve A_n dalı. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların ucuna $n - 1$ dal gelir (yani ikinci harfler). Örneğin, A_1 dalına, $A_2, \dots, A_n$ dalları gelir, ve bu yeni dallar $A_1A_2, \dots, A_1A_n$ sözcüklerini oluştururlar. Böylece $n \times (n - 1)$ dal elde etmiş oluruz. Demek ki $n \times (n - 1)$ iki harfli sözcüklerin sayısıdır. Sürdürelim ağacı. Bu $n \times (n - 1)$ dala şimdi $n - 2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin, A_1A_2 dalına, $A_3, \dots, A_n$ dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların her birinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürsek, $A_1, \dots, A_n$ harflerinden $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (r - 1))$ tane r harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da $\frac{n!}{(n-r)!}$ sayısına eşittir. İlk teoremimizi kanıtladık:

TEOREM 1: Eğer $r \leq n$ iki doğal sayıysa, $A_1, \dots, A_n$ harflerini en çok bir kez kullanarak

$$\frac{n!}{(n-r)!} \text{ tane sözcük yazılır.}$$

Biraz alıştırmaya bakalım:

1. SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harflik sözcük yazabiliriz?

Yukarıdaki teoremi uygulayarak

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ sözcük buluruz.}$$

Başka bir soru: SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane beş harflik sözcük yazılır?

Yine yukarıdaki teoremi uygulayalım:

$$\frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!}, \text{ ve } 0! = 1 \text{ eşitliğini kullanarak,}$$

$5! = 120$ tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

2. MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz? Yukarıdaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki E harfi var. Önce iki E'yi ayıralım, ve ME_1LE_2K "sözcüğünün" tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukarıdaki gibi $5! = 120$ 'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında E_1 harfi, E_2 harfinden önce gelir; öbür yarısında E_2 harfi, E_1 harfinden önce gelir. Demek ki, MELEK sözcüğünün tüm harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3. Yukarıdaki alıştırmaya benzeyen, ama biraz daha zor olan bir alıştırma daha: KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz?

Yukarıdaki yöntemi kullanalım, ve önce $K_1E_1LE_2BE_3K_2$ sözcüğünü ele alalım. Bu sözcükten $7!$ sözcük üretebiliriz. Şimdi, $K_1 = K_2$ ve $E_1 = E_2 = E_3$ yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse $3! = 6$ 'ya. Demek ki, KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek $7!/2 \times 6 = 420$ sözcük yazabiliriz.

4. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sözcüklerinden

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

tane üç harfli sözcük yazabiliriz.

Şimdi yeni bir soru soralım. Elimizde n öğesi olan bir küme var:

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}.$$

$r \leq n$, n 'den küçük bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane r öğesi olan altkümesi vardır? Bu sayıyı hesaplayacağız. Bu sayıya (her neyse) $\binom{n}{r}$ adını verelim.

Örnek: $n = 5$ ve $r = 3$ olsun. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesinin 3 öğeli alt-kümeleini bulalım:

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\{A_1, A_2, A_4\}$$

$$\{A_1, A_2, A_5\}$$

$$\{A_1, A_3, A_4\}$$

$$\{A_1, A_3, A_5\}$$

$$\{A_1, A_4, A_3\}$$

$$\{A_2, A_3, A_4\}$$

$$\{A_2, A_3, A_5\}$$

$$\{A_2, A_4, A_5\}$$

$$\{A_3, A_4, A_5\}$$

Demek ki $\binom{5}{3} = 10$ 'dur. Bu sayının da $\frac{60}{3!}$

olduğuna dikkatinizi çekerim. Bu rasgele bir eşitlik değildir, ve aşağıda bu eşitliğin nedenini göreceksiniz.

Birinci soruyla arada şu ayrım var: birinci soruda $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk. Oysa bu sorumuzda, sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerinin herbirinin harflerinden $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$$\left. \begin{array}{l} A_1A_2A_3 \\ A_1A_3A_2 \\ A_2A_1A_3 \\ A_2A_3A_1 \\ A_3A_1A_2 \\ A_3A_2A_1 \end{array} \right\} \text{ sözcükleri } \{A_1, A_2, A_3\} \text{ kümesini oluştururlar.}$$

Yukarıdaki örnekten yararlanacağız soruyu yanıtlamak için. Birinci teoreme göre, r harfli sözcük sayısı $\frac{n!}{(n-r)!}$ 'dir. Bu sözcüklerden kaç tanesinin aynı kümeyi verdiğini hesaplayalım. Yine birinci teoreme göre r harfle yazılan $r!$ sözcük olduğuna göre, $\frac{n!}{(n-r)!}$ sözcüklerden $r!$ tanesi aynı kümeyi veriyor. Demek ki

$$\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

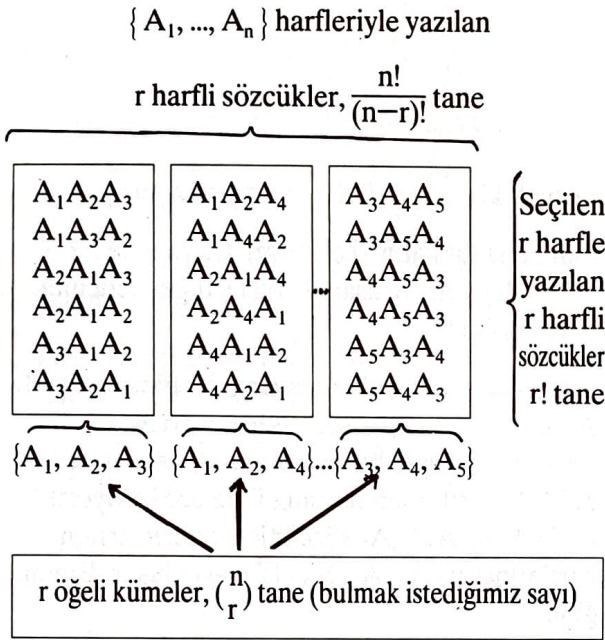
dir.

TEOREM 2. n ögesi olan bir kümenin, r ögelik alt-kümelerinin sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

dir.

Bu teoremin kanıtının, $r = 3$, $n = 5$ için, bir resmini yapalım:



Toplam poker eli sayısı. Şimdi toplam poker eli sayısını hesaplayabiliriz. 32 kâğıttan kaç tane 5 kâğıtlık el çıkar? Yani 32 ögelik bir kümenin kaç tane 5 ögelik alt kümesi vardır? Teorem 2'ye göre,

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{27!5!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 201 \cdot 376$$

tane, yani ikiyüzbinden fazla poker eli vardır.

Renk sayısı. Şimdi de kaç tane "renk" eli olduğunu hesaplayalım. Önce kaç tane maça ($\spadesuit$) eli olduğunu bulalım. Sekiz tane maça var. Bu sekiz maçadan, beş tane seçeceğiz. Teorem 2'ye göre

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

tane salt maça olan el vardır. Toplam dört renk olduğundan ($\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$), bu sayıyı dörtle çarparsak, toplam renk eli sayısını buluruz:

$$56 \times 4 = 224.$$

Ama bu sayıdan, toplam "floş" (aynı renkten ve sürekli kâğıtlar) sayısını çıkarmalıyız. Maçadan floşlar, asla (A, 7, 8, 9, 10), yediliyle; sekizliyle, dokuzluyla ya da onluyla (10, J, Q, K, A) başlayabilir. Demek maçadan beş tane floş var, ve toplam floş sayısı $5 \times 4 = 20$. Böylece, gerçek renk sayısı,

$$224 - 20 = 204$$

dür.

Olasılık olarak düşünersek, elden renk gelme olasılığı

$$\frac{204}{201.376} \approx 0,001013$$

dür. yani aşağı yukarı binde bir.

Kare sayısı. Elden kare gelme, yani beş kâğıttan dördünün aynı sayı olma olasılığını bulalım. Önce dört tane ası olan el sayısını bulalım. Dört tane asın yanına gelebilecek kâğıt sayısı $32 - 4 = 28$ 'dir. Demek 28 tane dört aslı el var. Toplam sekiz tür kâğıt olduğundan,

$$28 \times 8 = 224$$

tane kare el vardır. Bu sayı, renk sayısından biraz daha fazla olduğundan, renk kareyi yener diye düşünebilirsiniz. Nitekim, eğer pokerde kâğıt değiştirme olmasaydı, düşündüğünüz gibi olurdu. Ama kâğıt değiştirme olasılıkları da değiştirir. Örneğin, üç ası olan, öbür iki kâğıdını değiştirerek, dört as olma olasılığını arttırır. Bunun gibi eline dört maça gelen, beşinci kâğıdını değiştirerek, renk olasılığını arttırır. Yani poker oyununun sonundaki olasılıklar, ilk beş kâğıdın olasılıklarından değişikdir.

"Ful" sayısı. Eğer bir elde bir türden üç tane, bir başka türden iki tane kâğıt varsa, o ele "ful" denir. Örneğin, üç as ve iki papazdan oluşan bir el fuldür. Elin ful olma olasılığını bulalım. Bu biraz daha zor. Önce elden üç as, iki papaz gelme olasılığını bulalım. Dört astan üçünü seçeceğiz, yani dört ögelik bir kümeden üç ögelik bir küme seçeceğiz. Teorem 2'ye göre

$$\binom{4}{3} = 4$$

seçeneğimiz var aslar için. Şimdi de dört papazdan ikisini seçeceğiz. Yine Teorem 2'ye göre

$$\binom{4}{2} = 6$$

seçeneğimiz var. Demek ki toplam

$$4 \times 6 = 24$$

tane üç as ve iki papazlı el var. Üç papaz ve iki aslı el de 24 tane. Yani as ve papazlarla

$$24 + 24 = 48$$

tane ful el vardır. Bu hesaplar salt as ve papazlar için değil, tüm iki tür kâğıtlar için de geçerli.

Örneğin yedililer ve dokuzlularla da 48 tane ful el vardır. Kaç tane iki tür kâğıt var? Toplam sekiz tür var. Bunlardan iki tür seçeceğiz.

Teorem 2'ye göre

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki tür var. Demek ki toplam ful el sayısı

$$48 \times 28 = 1344$$

dür.

“Üç” sayısı. Bir elde üç tane aynı kâğıt varsa, o ele “üç” adı verilir. Ama kare ve fuller üç sayılmaz. Üç sayısını hesaplayalım. Önce üç aslı üç sayısını bulalım. Teorem 2'ye göre

$$\binom{4}{3} = 4$$

çeşit üç as seçebiliriz. Bu üç asın yanına iki kâğıt gelecek, ama herhangi iki kâğıt değil: hiçbirisi as olmayacak ve aynı kâğıt olmayacaklar. As dışında $32 - 4 = 28$ kâğıt var. Bunlardan iki

tane seçelim: $\binom{28}{2} = 378$ tane seçenek var.

Ama bu seçeneklerden bazıları iki tane aynı tür kâğıttan oluşuyor. Bu sayıyı bulup 378'den çıkartalım. Kaç tane iki papaz seçebiliriz?

$\binom{4}{2} = 6$ tane. As dışında yedi tür kâğıt var.

Demek ki, 378 seçenektan $6 \times 6 = 42$ tanesi iki tane aynı tür kâğıttan oluşuyor. Dolayısıyla, seçilen üç asın yanına,

$$378 - 42 = 336$$

tane iki kâğıtlık el koyabiliriz. Dört tane üç as seçilebildiğinden, aslı üç sayısı

$$336 \times 4 = 1.344$$

dür. Bu hesap as dışındaki öbür kâğıtlar için de geçerli: yani “üç” el sayısı

$$1344 \times 8 = 10.752$$

dir.

Öbür olasılık hesaplarını okura alıştırmaya bırakıyoruz. Yanıtları aşağıdaki dizelgede bulacaksınız. Matematiksel şeytanınız bol olsun.

El türü	El sayısı	Bin üzerine olasılığı (± 0, 005)
Floş	20	0,10
Renk	204	1,01
Kare	224	1,11
Ful	1,344	6,67
Kent ¹	5.100	25,33
Üç	9,792	53,39
Döper ²	24.192	120,13
Per ³	107.520	533,93

¹ Bir elin kâğıtları peşpeşe, örneğin 7, 8, 9, 10, V ise, o ele “kent” denir. Kentte renkler dikkate alınmaz.

² Bir elde iki farklı çift varsa, o ele “döper” denir.

³ Bir elde tek bir çift, örneğin A, A varsa o ele “per” denir.

EVİRTİM (I)

CEM TEZER

Bu yazıda, aslında Euclid geometrisinin (izometrilere, homotetilere vb. gibi) gerçek anlamda malı olmayan, fakat hem bu geometrideki bazı uygulamaları, hem de Euclid-dışı geometrilere verilecek en basit örneklerin kuruluşu açısından büyük öneme sahip bir dönüşümü, “evirtim”i ele alacağız.

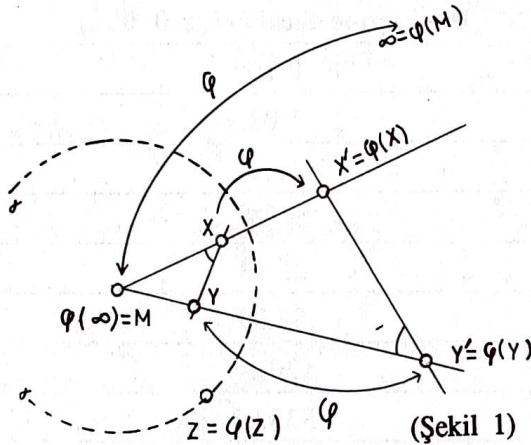
Euclid düzlemini Δ ile gösterelim. Bir $M \in \Delta$ noktası ve bir $\rho \neq 0$ gerçel sayısı gözönüne alalım. “M merkezli ve ρ kuvvetinde bir evirtim” dediğimiz zaman

$$\varphi : \Delta - \{M\} \rightarrow \Delta - \{M\} \quad (1)$$

şeklinde (yani düzlemin M dışındaki noktalarını gene düzlemin M dışındaki noktalarına dönüştüren) her $X \in \Delta - \{M\}$ noktasını MX doğrusu üzerinde bulunan ve

$$\overline{MX} \cdot \overline{MX'} = \rho$$

denklemini sağlayan bir tek $X' \in \Delta - \{M\}$ (neden?) noktasına gönderen dönüşümü anlıyoruz. (Şekil 1)
 $X' = \varphi(X)$ noktasına “X in evriği” diyeceğiz.



Evirtimin en basit özelliklerine işaret edelim:

- a) (1) denkleminde, Hüseyin Demir’in bu dergide incelediği “yönlü uzunluklar” kullanılmakta ([1]). Demek ki $\rho > 0$ ise X ve X’ noktaları MX doğrusu üzerinde M nin aynı tarafında, $\rho < 0$ ise ters tarafında kalmaktadırlar.

- b) (1) denkleminde X ve X’ birbirleriyle yer değiştiği zaman, söz konusu denklem değişmeyecektir. Demek ki $\varphi(X) = X'$ iken $X = \varphi(X')$ dür. Yani bir noktanın evriğinin evriği daima kendisidir.
- c) $\rho > 0$ olsun. Merkezi M, yarıçapı $\rho^{1/2}$ olan γ çemberini ele alalım. φ evirtimi altında, γ nın içindeki noktalar (M hariç) γ nın dışına, dışındakiler de içine gidecektir. Tabii bu arada γ üzerindeki her nokta sabit kalacaktır.
- Yorum:** b) ve c) de bahsedilen hususlar evirtimin yansımaya benzerliklerini ortaya çıkarıyor. Gerçekten de evirtimi, bir doğruya göre değil de bir çembere göre yansıma olarak görmek mümkün (dilimizdeki eski metinlerde evirtimin “akis” olarak adlandırılmasının nedeni herhalde bu).
- d) Neden, evirtim için “Euclid geometrisinin gerçek anlamda malı değil!” dedim? Bu derin konuya sadece dokunmak istiyorum: Örneğin, bu dönüşüm her zaman doğruları, doğrulara dönüştürmez: Yukardaki gösterimle φ evirtimi γ çemberinin dışını içine gönderiyor; bu koşullarda γ nın dışında bir doğru, doğru olarak kalabilir mi? Mızrak çuvala sığmayacaktır.

- e) Yukardaki gösterimle, $\rho > 0$ halinde γ çemberi φ evirtimini tamamen belirlemekte. Bu nedenle φ ye “ γ çemberine göre evirtim” diyeceğiz. Aynı şekilde pozitif kuvvetli belirli bir evirtim sözkonusu iken, o evirtimi belirten çemberi “evirtim çemberi” olarak anacağız. Evirtim çemberinin evirtim altında sabit kalan noktalardan oluştuğuna tekrar işaret edelim.

Yorum: Okuyucu yarıçapı sanal çemberlere bir anlam biçebiliyorsa bu söz dağarcığını kuvveti negatif evirtimlere de genişletilebilir.

- f) Evritim merkezinin evriğinin bulunmaması bir eksiklik hissi veriyor. Bu eksiklikten kurtulmanın bir yolu da var: Düzlemde hareketli bir noktanın evritim merkezine gittikçe yanaştığını düşünelim. Bu noktanın evriği evritim merkezinden istenildiği kadar uzağa gidecektir. Düzlemimizi ∞ ile göstereceğimiz “sonsuzdaki nokta”yı eklemekle genişletirsek, evritim merkezi ve ∞ evrik noktalar addolunabilir.

Şimdi evirtimi biraz daha derinlemesine inceleyebiliriz:

Yardımcı Teorem 1:

M merkezli bir evritmi alalım. $X, Y \neq M$ noktalarının evrikleri sırasıyla X', Y' olsun. X, Y, X', Y' noktaları ya doğrudur ya da çemberdedir.

İspat: (Şekil 1) Evritim kuvveti ρ olsun. Bu noktaların doğrudur olmadıklarını varsayalım.

$$\overline{MX} \cdot \overline{MX'} = \rho = \overline{MY} \cdot \overline{MY'}$$

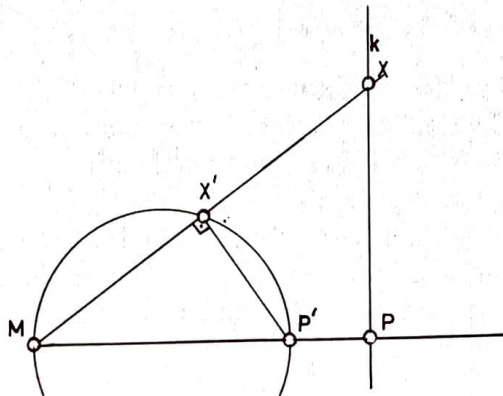
den OXY ve $OY'X'$ üçgenlerinin ters benzer oldukları, bu nedenle de

$$\angle(XX', XY) = \angle(YX', Y'Y)$$

olduğu görülür. (Dikkat: “Doğrular arasındaki açı”, bkz. [3]). Demek ki X, Y, X', Y' noktaları çemberdedir.

Teorem 1:

- a) Bir evritim, evritim merkezinden geçen bir doğruyu kendisine dönüştürür.
- b) Bir evritim evritim merkezinden geçmeyen bir doğruyu, evritim merkezinden geçen bir çembere dönüştürür. Bu çemberin evritim merkezinden geçen çapı doğruya diktir.
- b') Bir evritim evritim merkezinden geçen bir çemberi, bu çemberin evritim merkezinden geçen çapına dik bir doğruya dönüştürür. (Şekil 2)



(Şekil 2)

İspat:

- a) Evritim merkezi M olsun. M den geçen bir s doğrusu alalım. (Bu Şekil 2’de yok!) s doğrusu üzerindeki herhangi bir $X \neq M$ noktasının evriği (evritimin tanımından!) gene $MX = s$ doğrusu üzerinde kalmalıdır. Demek ki s doğrusu kendine dönüşmektedir. (Dikkat: Doğru üzerindeki noktalar yer değiştiriyor ama doğru bütün olarak sabit kalıyor!)

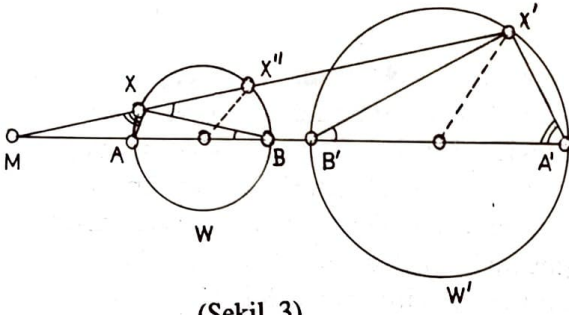
- b) k, M den geçmeyen bir doğru olsun. M den k ye indirilen dikmenin ayağı P olsun. P nin evriği MP üzerinde bir P’ noktasıdır. Şimdi k doğrusu üzerinde herhangi bir X noktası düşünelim. X in evriği X’ olsun. Yardımcı Teorem 1’e göre X, X', P, P' noktaları çemberdedir. MP, k ye dik olduğuna göre $X'P'$ de MX' ye dik olmalıdır. Böylece X’ daima $[OP']$ çaplı çember üzerinde kalacaktır.

- b'). Bir noktanın evriğinin evriği kendisi olduğundan bu, b) den aşıkardır.

Yorum: Teorem 1 b') nün önemli bir sonucu olarak evritim merkezinde birbirine teğet olan iki çember, paralel iki doğruya dönüşecektir.

Yorum: Teorem 1 doğruları çemberlere dönüştürüyor; yani bir anlamda bizi doğruları çember olarak görmeye yönlendiriyor. Gerçekten de M noktası hariç çember üzerindeki noktalar doğru üzerindeki noktalarla birebir ilişki içinde bulunuyor. Doğru üzerinde ise M ye karşılık gelen bir nokta yok! Eğer, düzlemimize ∞ noktasını ekler, düzlemimizdeki her doğrunun da ∞ dan geçtiğini düşünürsek bu durum ortadan kalkar. Yani evritim konusunda doğruları ∞ dan geçen çemberler olarak görmek yararlı olacaktır. Bundan önceki yorumun ışığında da paralel doğrular ∞ da birbirine teğet çemberler olarak anlaşılabilir.

Teorem 2: Bir evritim, evritim merkezinden geçmeyen bir çemberi evritim merkezinden geçmeyen bir çembere çevirir. Evritim merkezi aynı zamanda bu iki çemberin bir homoteti merkezidir. (Evritim kuvveti pozitifse dış, negatifse iç homoteti merkezi.) bkz. [1]).



(Şekil 3)

İspat: (Şekil 3) M merkezli bir evirtim ve M den geçmeyen bir ω çemberi alalım. ω nın M den geçen çapı $[AB]$ olsun. A, B nin evrikleri sırasıyla A' , B' olsun. ω üzerinde herhangi bir $X \neq A, B$ noktası için AX, BX e diktir. X', X noktasının evriği ise Yardımcı Teorem 1'den A, X, X' , A' noktaları çemberde olup

$$\angle(XM, XA) = \angle(A'X', A'B') \quad (2)$$

Aynı şekilde B, X, X' , B' noktalarının çemberdeşliğinden

$$\angle(XB, XX') = \angle(B'A', B'X') \quad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) denklemlerinin sol taraflarının toplamı bir dik açı, sağ taraflarının toplamı da $\angle(A'X', B'X')$ vereceğinden, $A'X'$ daima $B'X'$ ne dik olmalıdır. Yani ω çemberi üzerindeki her X, noktasının evriği (yani X') daima $[A'B']$ çaplı ω' çemberi üzerinde kalmalıdır. Şimdi, M noktasının ω, ω' çemberlerinin homoteti merkezi olduğunu göstermek kalıyor: MX doğrusu ω yı X haricinde bir de X'' de kessin. (Özel hal: MX, ω ya teğetse $X = X''$). Evirtimin kuvveti $\rho > 0$ olsun. ($\rho < 0$ hali benzer şekilde ele alınabilir.)

$$\overline{MX} \cdot \overline{MX'} = \rho \quad (4)$$

dur. Ayrıca MXB ve MAX'' üçgenlerinin ters benzerliğinden

$$\overline{MX} \cdot \overline{MX''} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = d > 0 \text{ (sabit!)} \quad (5)$$

dir. (4) ve (5) bölünerek (nasıl?)

$$\overline{MX'} : \overline{MX''} = \rho/d = \text{sabit} > 0$$

bulunur. Demek ki M, ω ve ω' nün dış homoteti merkezidir.

Yorum: Doğruları da genelleştirilmiş çemberler olarak görürsek, Teorem 1 ve 2 "Bir evirtim çemberleri çemberlere dönüştürür!" şeklinde sloganlaştırılabilir.

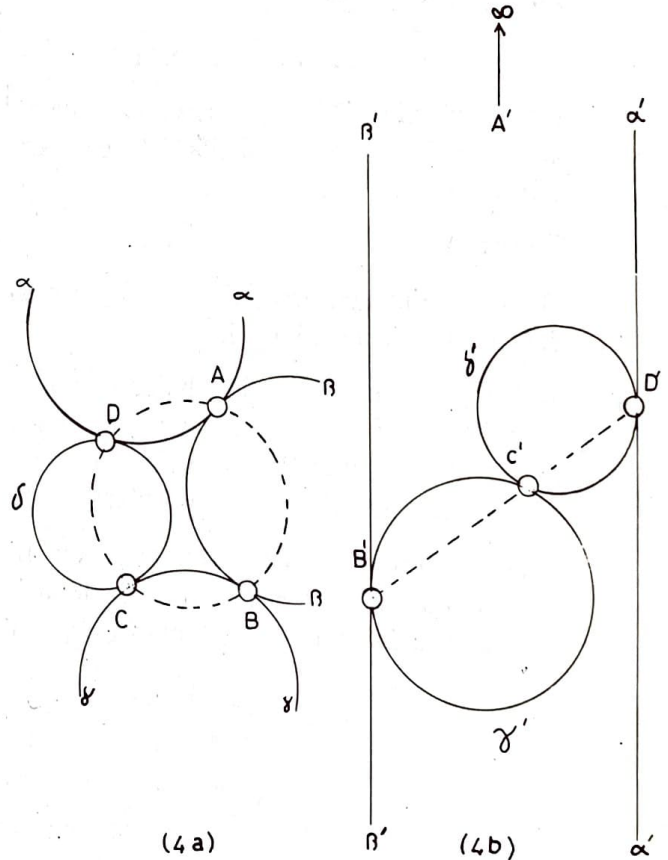
Okuyucuyu uyaralım: Genel olarak çember merkezleri, çember merkezlerine dönüşmez.

Yorum: Teğet iki çember bir evirtim altında gene teğet iki çembere dönüşür. Değme noktasının evriği, evrik çemberlerin değme noktasıdır. Okuyucu bunu evirtimin bire-bir bir dönüşüm olması gerçeğinden yola çıkarak, kolayca ispat edebilir.

Örnek I:

İçinde çok sayıda çember bulunan problemler evirtim sayesinde basitleştirilebilir:

Problem 1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ çemberlerini gözönüne alalım. α ve β, β ve γ, γ ve δ, δ ve α sırasıyla A, B, C, D noktalarında teğet olsun. (Şekil 4a) A, B, C, D noktalarının çemberdeş olduklarını gösteriniz.

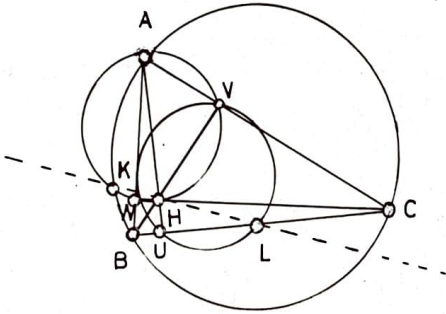


Çözüm: A noktası merkez olmak üzere bir evirtim alalım. α ve β çemberleri α' , β' paralel doğrularına dönüşecektir. γ , δ çemberlerinin evrikleri γ' , δ' ise α' doğrusu δ' çemberine D nin evriği olan D' de, β' doğrusu γ' çemberine B nin evriği olan B' de değerken, β' ve γ' çemberleri de C nin evriği C' noktasında birbirlerine teğet olurlar. (Şekil 4b) Şimdi işimiz B', C', D' noktalarının bir doğru (yani A'nın evriği olan ∞ dan geçen bir çember) üzerinde kaldığını göstermeye kalıyor. Bunu okuyucu kolayca yapabilir. (İpucu: C' deki teğet B'C' ve C'D' kırımlarıyla aynı açılar yapar.)

Örnek II

İlk örneğimizde evirtimin kuvveti önemli değildi. Bazen evirtim kuvveti akılcıca seçilirse, problemler basitçe çözülebilir.

Problem 2: Bir ABC üçgeninde üç yüksekliğin kesişme noktası H, sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerindeki yükseklik ayakları da U, V, W olsun. [HA] çaplı çember ABC üçgeninin çevrel çemberini bir $K \neq A$ noktasında, UVW üçgeninin çevrel çemberi de BC doğrusunu bir $L \neq U$ noktasında kessin. K, H, L noktalarının doğrudan olduklarını gösteriniz.



(Şekil 5)

Çözüm: (Şekil 5) Önce

$$\overline{HA} \cdot \overline{HU} = \overline{HB} \cdot \overline{HV} = \overline{HC} \cdot \overline{HW} \quad (6)$$

olduğunu hatırlayalım. (Örneğin HAV ve HBU üçgenlerinin benzerliğinden ilk eşitlik, HCV ve HBW üçgenlerinin benzerliğinden de ikinci eşitlik bulunabilir.) Sonra da H merkezli ve $\rho = \overline{HA} \cdot \overline{HU}$ kuvvetinde bir evirtim alalım. (6) eşitliğine göre U, V, W sırasıyla A, B, C nin evrikleridir. Öte yandan ABC nin çevrel çemberi

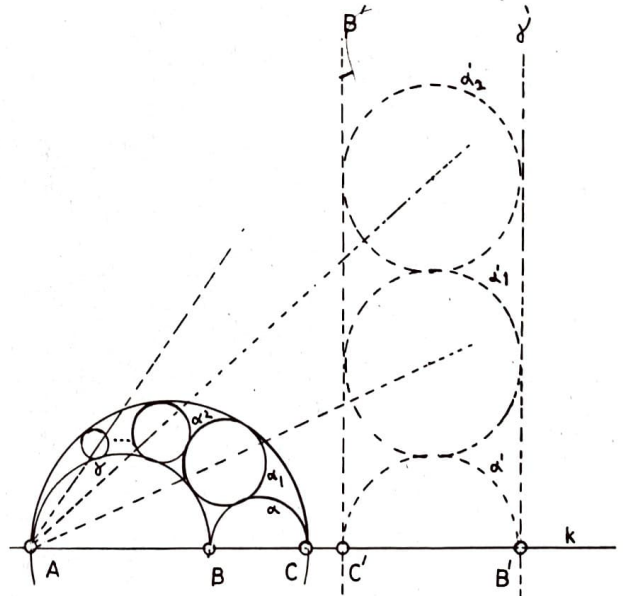
UVW nin çevrel çemberine dönüşecektir. En nihayet [HA] çaplı çember aynı zamanda V ve W den de geçtiği için (Neden?) BC doğrusuna dönüşmelidir. Demek ki ABC nin çevrel çemberiyle [HA] çaplı çemberin A olmayan kesişim noktası K, söz konusu evirtim altında UVW nin çevrel çemberiyle BC doğrusunun U olmayan kesişim noktasına yani L ye gitmelidir. Bir nokta, evirtim merkezi ve evrik nokta daima doğrudan olduğundan, K, H, L noktaları da doğrudandır.

Yorum: Bilgili okuyucu UVW nin çevrel çemberini ABC üçgeninin dokuz nokta çemberi olarak tanıyacaktır. Ayrıca L noktası da [BC] nin orta noktasıdır. Dokuz nokta çemberini ve ilgili dokuyu az ilerde kısaca tanıtacağız.

Yorum: Geniş açılı üçgenlerde $\rho = \overline{HA} \cdot \overline{HU} > 0$ olduğundan, yukarıda sözkonusu olan evirtimde, H merkezli ve $\rho^{1/2}$ yarıçaplı çembere evirtim çemberi olarak bakılabilir. Bu önemli çembere üçgenin kutup çemberi adı verilir. Tabii, dar açılı üçgenlerde kutup çemberi sanaldır.

Örnek III

Evirtim uzaklıkları saklı tutmamakla birlikte, bu yönde de önemli ipuçları sağlayabilir. Okuyucu bu örnekte, evirtim merkezinin aynı zamanda evrik çemberlerin homoteti merkezi olduğu hususunun nasıl etkili bir araç olduğunu görecektir. Örneğimiz, Pappus'a (M.S. 4. Yüzyıl) izafe edilen bir teorem olacak. Önce biraz karışık olan dokuyu açıklayalım: (Şekil 6)



(Şekil 6)

Bir k doğrusu üzerinde birbirlerinden farklı A, B, C noktaları alalım. B noktası, A ile C arasında bulunsun. α, β, γ sırasıyla $[BC], [CA], [AB]$ yarıçaplı, k nin aynı tarafından kalan yarıçemberler olsun. Böyle üç çemberin oluşturduğu şekil eski Yunan matematikçileri tarafından incelenmiş ve ayakkabıcı bıçağı anlamında “arbilos” olarak adlandırılmıştır. (“Arbilos” hakkında birkaç güzel teorem Arşimed’in (M.Ö. 3. yüzyıl, Ölüm 212) aslı değil Arapça aktarmaları bulunan bir eserinde görülmekte [2]). Şimdi “arbilos”un içine α, β, γ yarı çemberlerinin her birine teğet bir α_1 çemberi yerleştirelim. Bundan sonra gene “arbilos”un içine α_1 çemberine ve β, γ yarı çemberlerine teğet bir α_2 çemberi yerleştirelim. Devamla “arbilos”un içine α_2 çemberine ve β, γ yarıçemberlerine teğet olup α_1 olmayan bir α_3 çemberini yerleştirelim. Tanımımızı tümevarımla tamamlayalım. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ çemberlerinin tanımlandığını varsayarak α_{n+1} i “arbilos”un içinde kalıp, α_n çemberine ve β, γ yarıçemberlerine teğet olup α_{n-1} olmayan tek çember olarak tanımlayalım.

TEOREM 3: α_n çemberinin k doğrusuna uzaklığı, bu çemberin çapının n katıdır.

İSPAT: Püf noktasını teşkil eden evirtimi verip, ispatı okuyucuya bırakacağız: A merkezli bir evirtim alalım. (Şekil 6’da pozitif kuvvetli bir evirtim tasvir ediliyor.) B ve C nin evrikleri C' ve B' olsun. β ve γ yarıçemberleri k doğrusuna sırasıyla C' ve B' de dik yarıdoğrulara dönüşürken α yarıçemberi $[B'C']$ çaplı α' yarıçemberine dönüşecektir. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ çemberlerinin evrikleri de β' ve γ' doğrularına teğet olup α' yarıçemberinin üzerine bir kule şeklinde istif edilmiş çemberler olacaktır. Son ipucu: A noktası α_n ve α_n nün homoteti merkezidir.

KAYNAKLAR:

- 1) H. Demir, “Homoteti ve Benzerlik”, *Matematik Dünyası*, Sayı 4, s. 2-7.
- 2) E.J. Dijksterhuis, “Archimedes”, *Ejnar Munksgard*, Kopenhag, 1956. (c. Dikshorn tarafından Felemenkçe aslından İngilizce’ye tercüme)
- 3) C. Tezer, “Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri”, *Matematik Dünyası*, Sayı 1, s. 3-6.

BOZUK TERAZİ



Kefe kollarının uzunlukları farklı olan bozuk bir terazi ile bir maddeyi doğru olarak nasıl tartarsınız.

BİR ÜÇGENE AİT ÇEMBERLER

CEMAL KOÇ

Bu sayımızda Enre Alkan'ın derlediği problemlere devam edeceğiz. Ancak bunlar geçen sayıda-
kilere göre daha fazla ön bilgi gerektiriyor. Bütünlük sağlamak için önce Cemal Koç'un
"Bir üçgene ait çemberler" konulu yazısına yer verdik.

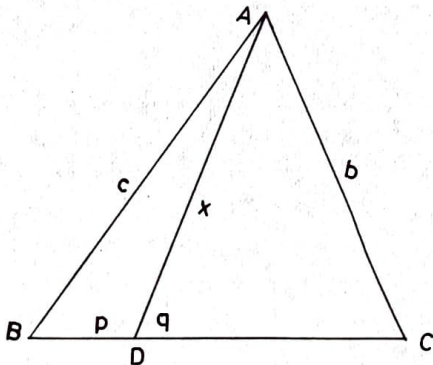
Bir üçgene ait çevrel çember, dış teğet çemberler ve dokuz nokta çemberi üçgenin en önemli öğelerindendir. Bu yazıda amacımız, gerekli ön bilgilerle birlikte söz konusu çemberlere ilişkin bazı önemli özellikleri sunmak.

Kolaylık sağlamak için, yazımız boyunca sık sık kullanacağımız gösterimleri verelim:

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ açılar ve açı ölçüleri
 V_a, V_b, V_c kenar orta noktaları
 N_a, N_b, N_c açı ortayların karşı kenarları kesim noktaları
 H_a, H_b, H_c yükseklik ayakları
 H ortosantr, G ağırlık merkez O çevrel çember merkezi
 I, I_a, I_b, I_c iç ve dış merkezler
 E dokuz nokta çemberinin merkezi.
 a, b, c kenar uzunlukları
 v_a, v_b, v_c kenar ortaylar
 n_a, n_b, n_c açıortay uzunlukları
 h_a, h_b, h_c yükseklikler
 S alan, $u = \frac{a+b+c}{2}$ yarı çevre
 R çevrel yarıçap
 r, r_a, r_b, r_c iç ve dış yarıçaplar

STEWART TEOREMİ VE SONUÇLARI

Stewart teoremi bir üçgene ait kenar ortay açıortay vb. öğelerin uzunluk formüllerini hemen verebilen kullanışlı bir sonuç.



TEOREM 1: (Stewart) Bir $\triangle ABC$ üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde bir nokta D olsun. Eğer

$$|DA| = x, |DB| = p, |DC| = q$$

ise

$$ax^2 = pb^2 + qc^2 - apq \quad (1)$$

olur.

İSPAT: $\hat{ADB}$ ve $\hat{ADC}$ açılarının ölçülerine sırasıyla α ve $\pi - \alpha$ diyerek $\triangle ADB$ ve $\triangle ADC$ üçgenlerine kosinüs teoremini uygularsak

$$c^2 = p^2 + x^2 - 2px \cos \alpha$$

$$b^2 = q^2 + x^2 + 2qx \cos \alpha$$

elde ederiz. Birincinin her iki yanını q , ikincisinin her iki yanını p ile çarpıp toplarsak ispat biter.

Bu teoremden $p = q = \frac{a}{2}$ alacak olursak x kenar

ortay uzunluğunu verir. Açıortay uzunluğunu bulmak için ise açıortay bağıntısı adı verilen

$$\frac{p}{c} = \frac{q}{b} = \frac{a}{c+b}$$

eşitliklerini kullanmak yeterlidir. Buna göre şu sonucu verebiliriz.

SONUÇ: Bir $\triangle ABC$ üçgeninin A köşesine ilişkin kenarortay v_a ve açıortay n_a ise

$$v_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad (\text{kenar ortay bağıntısı}) \quad (2)$$

$$n_a^2 = cb - pq; \left(p = \frac{ac}{b+c}, q = \frac{ab}{b+c} \right) \quad (3)$$

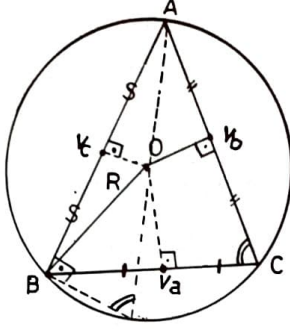
$$n_a^2 = \frac{4bcu(u-a)}{(b+c)^2}; \quad (4)$$

olur.

Şimdi üçgenlerdeki çemberleri tek tek ele alalım.

ÇEVREL ÇEMBER

Bir $\triangle ABC$ üçgeninin köşelerinden geçen tek bir çember vardır;



Merkezi kenar orta dikmelerinin O kesim noktası olan bu çembere çevrel çember diyoruz. aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C, \quad (\sinüs teoremi) \quad (5)$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R} \quad (6)$$

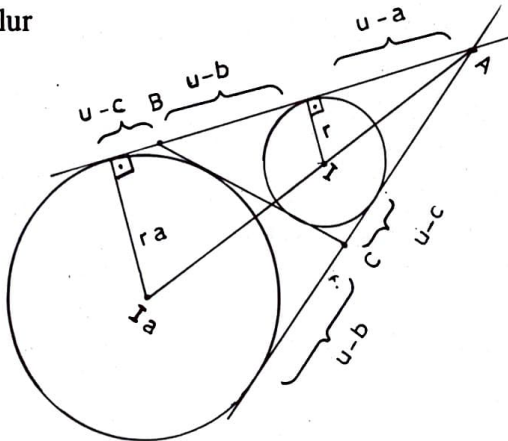
TEĞET ÇEMBERLER

Bir $\triangle ABC$ üçgeni için, her üç kenara da teğet olan dört çember vardır. Doğal olarak bu çemberlerin merkezleri iç ya da dış açıortayların kesim noktalarıdır. İki iç açıortay üçgen içinde, iki dış açıortay da üçgen dışında keseceklerinden bu dört çemberden birinin I merkezi üçgen içinde, diğer üçünün karşılık geldikleri köşeye göre I_a, I_b, I_c ile gösterilen merkezleri üçgen dışındadır. Benzer biçimde yarıçaplar için de r, r_a, r_b, r_c gösterimleri kullanılır. Buna göre A, B, C köşelerinden

(i) iç çembere olan teğet uzunlukları sırasıyla $u-a, u-b, u-c$

(ii) I_a merkezli dış çembere olan teğet uzunlukları $u, u-c, u-b$

olur



Böylece hemen şu sonuçları yazabiliriz:

$$S = ru = r_a(u-a) \quad (7)$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{u-a} \quad (8)$$

Alıştırmalar:

$$1) \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{u}{r}$$

bağıntılarını kurunuz.

(2) İç teğet çemberin [BC] ye değme noktası D ise,

$$|V_a D| = \frac{|b-c|}{2}$$

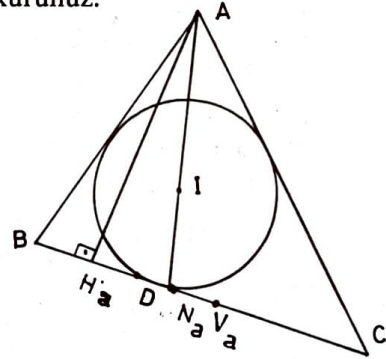
$$|V_a N_a| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

$$|V_a H_a| = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$$

olduklarını göstererek

$$|V_a D|^2 = |V_a N_a| |V_a H_a|$$

bağıntısını kurunuz.



3) $\triangle ABC$ üçgeninin AN_a açıortayı çevrel çemberi A_1 noktasında keserse

$$|A_1 B| = |A_1 I| = |A_1 C|$$

olduğunu gösteriniz.

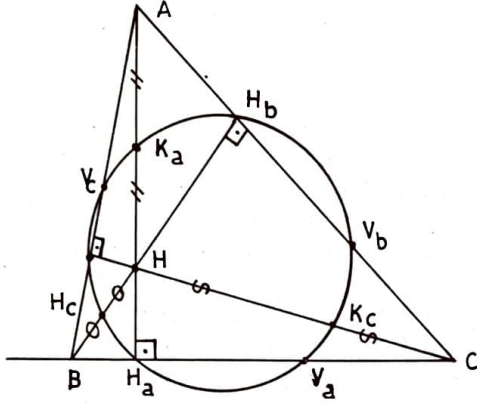
DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ

Bir $\triangle ABC$ üçgeninin H ortosantrını köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla K_a, K_b, K_c olsun. Açı hesaplamalarıyla $H_a, H_b, H_c, V_a, V_b, V_c$ noktalarından herbirinin $[V_a K_a]$ doğru parçasını dik açı altında gördükleri kolayca gerçekleştirilebilir. Bu çember $[V_b K_b]$ ve $[V_c K_c]$ çaplı çemberlerle aynıdır. Öyleyse dikme

ayakları, kenar orta noktaları ve K_a, K_b, K_c den oluşan dokuz nokta bir çember üzerindedir. Bu çembere dokuz nokta çemberi, Euler çemberi ya da Feuerbach çemberi denir.

Dokuz nokta çemberinin E merkezi $[OH]$ in orta noktası ve yarıçapı $R/2$ dir. Önce yarıçapın $R/2$ olduğunu görelim. Bunun için $\frac{1}{2}$ benzeşim

oranıyla $\triangle V_a V_b V_c \sim \triangle ABC$ oluşunu düşünmek yeterli. $[V_a K_a]$ nın orta noktası olan E merkezini belirlemek için ise şu saptamaları yapalım:



$$(a) V_c K_a \parallel BH \text{ ve } V_c V_a \parallel AC \Rightarrow V_c K_a \perp V_c V_a \\ V_c V_b \parallel BC \Rightarrow AK_a \perp V_c V_b.$$

Demek ki K_a noktası $\triangle V_c V_b$ üçgeninin ortosantrıdır.

(b) $OV_a \perp V_c V_b$ ve $OV_c \perp V_a V_b$ dir yani O noktası $\triangle V_a V_b V_c$ üçgeninin ortosantrıdır. $\triangle V_c V_b$ ile $\triangle V_a V_b V_c$ eş olduklarından

$$|OV_a| = |AK_a| = |K_a H|$$

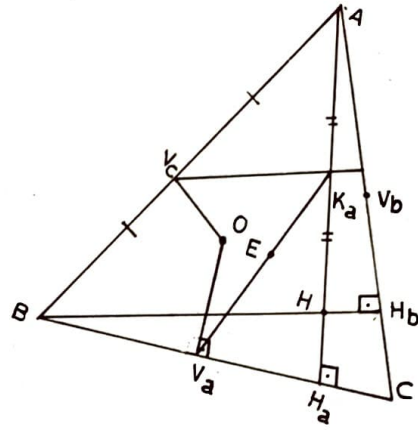
elde edilir. Böylece hem $OV_a H K_a$ dörtgeninin paralelkenar olduğunu hem de kendi başına da önemli olan

$$|OV_a| = \frac{|HA|}{2} \quad (9)$$

bağıntısını elde etmiş oluruz. Bu paralelkenarın OH köşegeninin ortası $[K_a V_a]$ nın E orta noktasıdır.

EULER DOĞRUSU

Şimdi OH ve AV_a doğrularının kesim noktasına K diyelim (Şekil 7).

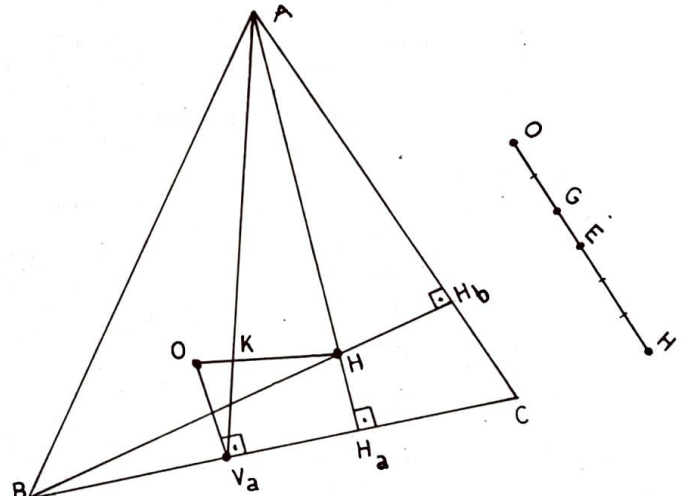


$$(9) \text{ uyarınca } \frac{|KV_a|}{|KA|} = \frac{|OV_a|}{|HA|} = \frac{1}{2}$$

olduğundan K noktası $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezi yani $K = G$ dir. Demek ki G noktası OH üzerinde olup

$$\overline{OH} = 3\overline{OG}$$

eşitliği sağlanır. Böylece O, H, G, E nin doğrudaki olduklarını görmüş bulunuyoruz. Bu noktaların üzerinde bulunduğu doğruya Euler doğrusu denir. Şekil 8'de bu noktaların Euler doğrusu üzerindeki konumları görülmektedir.



Vektörel bir yazışla,

$$\vec{OH} = 3\vec{OG} = 2\vec{OE}. \quad (10)$$

EULER TEOREMİ

Önce şu teoremleri işleyelim:

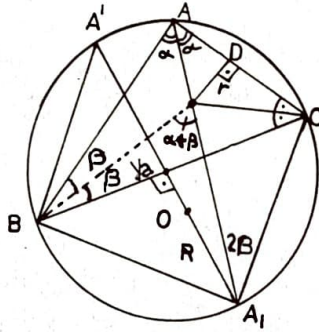
TEOREM: Bir $\triangle ABC$ üçgeninin AI açıortayı çevrel çemberi A_1 noktasında keserse aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

(i) $|A_1B| = |A_1I| = |A_1C|$

(ii) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ (11)

İSPAT: Açılara bakacak olursak,

$$\begin{aligned} \widehat{IBA_1} &= \widehat{ABA_1} - \widehat{ABI} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{CBA_1} - \widehat{ABI} \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) \\ &= \widehat{BIA_1} \end{aligned}$$



olup $\widehat{A_1IB}$ nin ikizkenarlığı çıkar. Benzer biçimde $\widehat{A_1IC}$ ikizkenardır. İkinci kısım için ise OA_1 in çevrel çemberi kestiği diğer noktaya A' diyerek,

$$|A_1I| = |A_1B| = 2R \sin \frac{A}{2}$$

$$|IC| = 2|A_1I| \sin \beta = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$r = |IC| \sin \frac{C}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

elde edilir.

Artık çevrel çember merkezinin iç ve dış merkezlerden olan uzaklıklarını veren Euler teoremini ele alabiliriz.

Teorem (Euler) Bir $\triangle ABC$ üçgeninin O çevrel çember merkezi ile I iç merkezi ve I_a dış merkezi arasındaki uzaklıklar

$$|OI|^2 = R(R - 2r), |OI_a|^2 = R(R + 2r_a) \quad (12)$$

eşitlikleri ile belirlidir.

İSPAT: Şekil 9'u kullanacak olursak, I'nın AC üzerindeki dik izdüşümü D olmak üzere $\widehat{AID} \sim \widehat{A'A_1B}$ den $\frac{|AI|}{2R} = \frac{r}{|BA_1|}$ çıkar. Yukardaki teoremden $|BA_1| = |IA_1|$ yazarsak

$$|AI| |IA_1| = |AI| |BA_1| = 2Rr$$

ve I'nın çembere göre kuvvetini ya da Stewart Teoremini kullanırsak

$$|AI| |IA_1| = R^2 - |OI|^2$$

elde ederiz. Böylece

$$R^2 - |OI|^2 = 2Rr$$

ve sonuç olarak

$$|OI|^2 = R(R - 2r)$$

istenen bağıntısı çıkar.

Dış teğet çember için ispatı okura bırakıyoruz.

BAZI GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Euler teoreminin çok açık bir sonucu $R \geq 2r$ eşitsizliği. Burada eşitliğin olabilmesi için O ile I'nın çakışması yani üçgenin eşkenar olması gerekir ve yeter. Şimdi bu ana eşitsizliği ve bundan elde edilen bazı eşitsizlikleri verelim.

SONUÇ: Bir $\triangle ABC$ üçgeni için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir. Bu eşitsizliklerde eşitlik durumunun olması için üçgenin eşkenar olması gerekir ve yeter.

1) $R \geq 2r$ (13)

2) $2u^2 \geq 27Rr$ (14)

3) $3\sqrt{3}r \leq u \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (15)

4) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ (16)

5) $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ (17)

6) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ (18)

İSPAT: 1) Açık

2) Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(2u)^3 = (a+b+c)^3 \geq 27abc = 108RS = 108Rru$$

dan istenen $2u^2 \geq 27Rr$ elde edilir.

3) (13) ve (14) den dolayı,

$$2u^2 \leq 27Rr \leq 27(2r)r$$

çıkar ve birinci eşitsizlik elde edilir.

4) (11) ve (13) den hemen çıkar.

$$5) \cos A + \cos B + \cos C =$$

$$1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

oluşu nedeniyle (16) isteneni verir.

$$6) (17) \text{ den } \cos A \cos B \cos C \geq$$

$$\left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \right)^3 \geq \frac{1}{8}$$

5)'ten 3)'ün ikinci bir kanıtını verebiliriz: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$ eşitliğini kullanacak olursak

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 8R^2 (1 + \cos A \cos B \cos C) \text{ olur. şimdi (18) eşitsizliğinden}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 9R^2$$

elde edilir. Oysa

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 =$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0$$

oluşunu kullanırsak

$$2u = a + b + c \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 3\sqrt{3}R$$

elde edilir ve (15) deki ikinci eşitsizlik gösterilmiş olur. Eşitlik durumlarını irdelemeyi okura bırakıyoruz.

ALİŞTIRMALAR: Aşağıdaki eşitsizlikleri gösteriniz:

$$1) \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3}{8} \sqrt{3}$$

$$2) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \leq \sqrt{3}$$

$$3) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$4) \sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

FEUERBACH TEOREMİ

Konunun bütünlenmesi açısından Feuerbach teoremi zorunlu. 1800 ve 1834 yılları arasında yaşayan ve Almanya'nın Erlangen kentinde lise öğretmenliği yapan Feuerbach 1822'de yayınladığı bir kitapçıkta üçgenlere ait çemberlerle ilgili birbirinden güzel birçok bağıntı vermiş. Bunların en ilgi çekenini kendi adıyla anılır olmuş.

Teorem (Feuerbach) Dokuz nokta çemberi iç çembere ve dış çemberlere teğettir.

İspata girmeyip ilgilenen okura Cem Tezer'in gelecek sayımızdaki yazısını önereceğiz.

Son olarak iki soru:

1. (1991 Olimpiyatı) Verilen bir ABC üçgeninde iç çemberin merkezi I olsun. A, B, C açılarının iç açıortaylarının karşı kenarları kestikleri noktaları sırasıyla A', B', C' ile gösterelim. Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

2. $\triangle ABC$ bütün kenarları farklı uzunlukta bir üçgen, G üçgenin ağırlık merkezi, I iç merkez ve H ortosantr ise $\widehat{GIH} > 90^\circ$ olduğunu gösteriniz.

Kaynaklar:

- R.A. Johnson, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin Company 1929.

- L.S. Shively, *An Introduction to Modern Geometry*, John Wiley and Sons, Inc. London 1939.

ÇÖZMECE - ÇÖZÜM

$$\left. \begin{array}{l} 393062670 \times 7 \\ 250130790 \times 11 \\ 211649130 \times 13 \end{array} \right\} = 2751438690$$

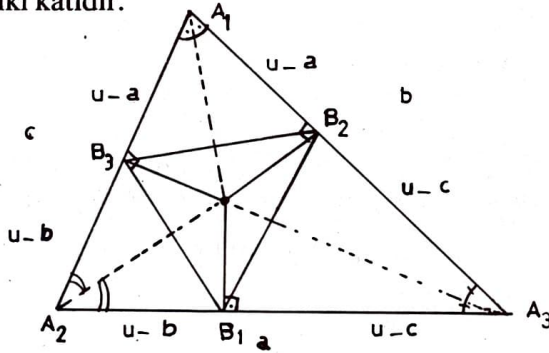
GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

EMRE ALKAN

Bir $AB \dots F$ çokgeninin alanını $|AB \dots F|$ ile göstereceğiz.

Problem 1: Köşeleri A_1, A_2, A_3 olan üçgenin içteğet çemberi kenarlara sırayla B_1, B_2, B_3 te değmektedir. $A_1 B_1$ içteğet çemberi C_1 de kessin C_2 ve C_3 te benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri gösteriniz:

- i) $A_1 A_2 A_3$ ün alanı $B_1 B_2 B_3$ ün alanının en az dört katıdır.
- ii) $A_1 A_2 A_3$ ün çevresi $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$ ün çevresinin en az $\sqrt{3}$ katıdır.
- iii) $A_1 A_2 A_3$ ün alanı $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$ ün alanının en az iki katıdır.



Çözüm 1: i) $|A_1 A_2 A_3| \geq 4 |B_1 B_2 B_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$|A_1 A_2 A_3| = u \cdot r$, $A_1 A_2 A_3$ ün içteğet çemberi $B_1 B_2 B_3$ ün çevrel çemberidir.

$$B_1 B_2 = 2(u - c) \cdot \sin \frac{A_3}{2}$$

$B_2 B_3$ ve $B_3 B_1$ de benzer şekilde yazılarak

$$|B_1 B_2 B_3| = \frac{2}{r} (u - a)(u - b)(u - c).$$

$$\sin \frac{A_1}{2} \cdot \sin \frac{A_2}{2} \cdot \sin \frac{A_3}{2}$$

eşitsizliği çıkar.

sonuç olarak, C. Koç'un yazısındaki (11) ve (16) kullanılırsa istenen

$$|B_1 B_2 B_3| = 2|A_1 A_2 A_3| \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3}{2} \leq \frac{1}{4} |A_1 A_2 A_3|$$

eşitsizliği çıkar.

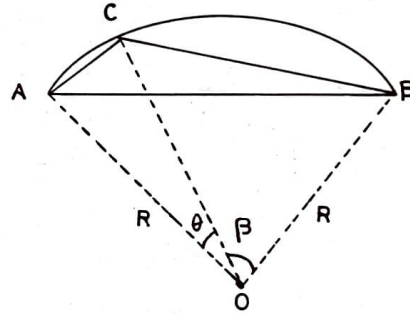
ii) Şu iki ifadeye bakalım:

* " $A_1 A_2 A_3$ eşkenar olduğundan $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$ 'ün çevresi maksimum değerini alır.

** "İçteğet çemberleri eş olan üçgenler iinde minimum çevreli üçgen eşkenardır."

* ve **'yi gösterirsek, $A_1 A_2 A_3$ eşkenar olduğunda bir minimumla bir maksimumu aynı anda yakalamış oluruz. Bu ise derhal problemin ii) ve iii) kısımlarını gösterecektir.

*'in ispatı: $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$ 'ün bir düzgün altıgen olması gerektiğini göstereceğiz.



$\widehat{ACB}$ üzerinde öyle bir C bulalım ki $AC + BC$ maksimum olsun.

$$AC + BC = 2R \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

R ve $\frac{\theta + \beta}{2}$ sabittir.

$$\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} = \underbrace{2 \sin \frac{\theta + \beta}{4} \cdot \cos \frac{\theta - \beta}{4}}_{\text{sabit}}$$

ancak ve ancak $\theta = \beta$ olduğunda $AC + BC$ maksimum olur. C , $\widehat{ACB}$ yayının orta noktası olmalıdır.

Buradan şu sonucu çıkarabiliriz. Düzgün olmayan bir altıgenin çevresi büyütülebilir.

Aynı bir çember içinde maksimum çevreli düzgün altıgendir.

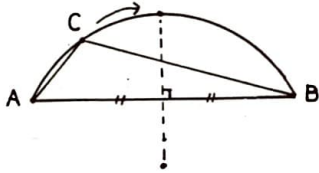
****ise C. Koç'un yazısındaki (15) eşitsizliğinin bir yorumundan ibarettir. Şu halde içteğet çemberleri eş üçgenler ailesi içinde minimum çevreli eşkenar üçgendir. $A_1A_2A_3$ eşkenar olduğu zaman**

$$\text{çevre } (A_1A_2A_3) = \sqrt{3} \text{ çevre } (B_1C_2B_3C_1B_2C_3)$$

olduğu görülebilir. Bu ii)'yi ispatlar.

iii) $S = u \cdot r$ olduğundan eş bir içteğet çemberi için minimum alanlı üçgen de eşkenardır. Maksimum alanlı altıgenin düzgün olduğu gösterilerek iii) ispatlanır.

Düzgün altıgenin maksimum alanlı olduğunu görmek için bir yay üzerindeki ortak tabanlı üçgenlerden maksimum alana sahip olanın ikizkenar olduğunu gözlemek yeterlidir.



Problem 2. Birinci problemde $B_1C_3, B_2C_3, B_2C_1, B_3C_1, B_3C_2, B_1C_2$ uzunluklarından en az birinin $12^{-3/4} \cdot \left(\frac{abc}{r}\right)^{1/2}$ ifadesinden küçük veya eşit

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 2: Birinci problemde olduğu gibi $A_1A_2A_3$ 'ün içteğet çemberini sabit turalım. $A_1A_2A_3$ 'ün çevrel çember yarıçapı R olsun.

$$|A_1A_2A_3| = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c \Rightarrow$$

$a \cdot b \cdot c = 4R \cdot |A_1A_2A_3|$ elde ederiz. $A_1A_2A_3$ eşkenar olduğundan $|A_1A_2A_3|$ alanının minimum olduğunu 1. problemde bulduk. Euler Teoremine göre $R \geq 2r = \text{sabit}$ ve eşitlik ancak üçgen eşkenarsa vardır. Şu halde $A_1A_2A_3$ eşkenarsa R 'de minimum olmaktadır. Bundan dolayı $a \cdot b \cdot c$ ifadesi üçgen eşkenarsa minimum olur.

Şimdi şunu gösterelim: Bir çember içine çizilen altıgenlerden kenarları çarpımı maksimum olan düzgün altıgendir.

$AC \cdot BC$ 'nin ne zaman maksimum olacağına bakalım.

$$|ABC| = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \theta$$

yazılabilir. $C, \widehat{ACB}$ 'nin orta noktası ise ABC alanı maksimum iken $\sin \theta$ sabit olduğundan dolayısıyla $AC \cdot BC$ 'de maksimum olur. Şu halde düzgün altıgenin kenarları çarpımı maksimumdur. Böylece $A_1A_2A_3$ eşkenarken bir maksimumla bir minimum yakaladık. Böylece,

$$B_1C_3 \cdot B_2C_3 \cdot B_2C_1 \cdot B_3C_1 \cdot B_3C_2 \cdot B_1C_2 \leq (a \cdot b \cdot c)^2 / 3^3 \cdot 4^3 \quad (1)$$

elde ederiz. Ceva teoremi yardımıyla

$$\frac{u-a}{u-b} \cdot \frac{u-b}{u-c} \cdot \frac{u-c}{u-a} = 1$$

olduğundan A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 doğruları bir noktada kesişirler. Benzerlikten

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{x_2}{x_4} \quad \frac{a_3}{a_6} = \frac{x_4}{x_6} \quad \frac{a_5}{a_2} = \frac{x_6}{x_2}$$

yazılıp taraf tarafa çarpılırsa

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = a_2 \cdot a_4 \cdot a_6$$

$$\Rightarrow B_3C_1 \cdot B_1C_2 \cdot B_2C_3 = B_3C_2 \cdot B_1C_3 \cdot B_2C_1$$

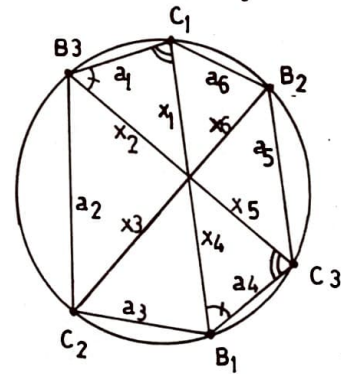
elde edilir.

Altıgenin kenarlarını böylece çarpımları eşit iki kümeye ayırmış olduk. Altıgenin kenarlarından en az biri içteğet çember yarıçapından büyük veya eşit olmalıdır. Genelliği bozmadan $B_3C_1 \geq r$ kabul edelim. (1) eşitsizliğinden, $B_3C_1 \cdot B_1C_2 \cdot B_2C_3 \leq abc/24\sqrt{3}$, $B_3C_1 \geq r$ olduğu kullanılırsa, $r \cdot B_1C_2 \cdot B_2C_3 \leq abc/24\sqrt{3}$, genelliği bozmadan $B_1C_2 \leq B_2C_3$ alalım.

$$\Rightarrow (B_1C_2)^2 \leq \frac{abc}{r} \cdot \frac{\sqrt{3}}{72} \Rightarrow$$

$$B_1C_2 \leq 12^{-3/4} \cdot \left(\frac{abc}{r}\right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.



Alıştırma: Bir üçgenin kenarları a, b, c alanı da S olsun.

$$a^2 + b^2 + c^2 > 6 \cdot S$$

olduğunu gösteriniz.

ALİŞTIRMA SORULARI

A26. $\{1, 2, \dots, n\}$ doğal sayılar kümesinin 2 ögeli bütün altkümelerinde geçen sayıların toplamı kaçtır?

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Haziran 1992 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir.

A27. Bir ABC üçgeninde $L \in [BC]$, $\ell = |AL|$, $|AC| = b$, $|AB| = c$,

$\beta = \angle BAL$, $\gamma = \angle CAL$ ise

$$\frac{\sin A}{\ell} = \frac{\sin \beta}{b} + \frac{\sin \gamma}{c}$$

olduğunu ispatlayınız.

A28. Karmaşık sayı düzleminde z, i, iz noktaları doğrudan ise z nin geometrik yeri nedir?

A29. Bir ABC üçgeninde $[BE]$ ve $[CF]$ iç iki açıortay ise, BCEF nin bir

a) kirişler dörtgeni

b) teğetler dörtgeni

olup olamayacağını araştırınız ve olması halinde üçgeni belirleyiniz. (Hazırlayan: H. Demir)

A30. Her n doğal sayısı için

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğunu gösteriniz. (Burada $\binom{n}{k}$ simgesi n ögeli bir kümenin k ögeli altkümeleri sayısını göstermektedir.)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kâğıdın sağ üst köşesine adınız-soyadınızı adresinizi, ve öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

YARIŞMA SORULARI

Y26. $-x^4 - y^4 - z^4 - t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8xyzt$ polinomunu, birinci dereceden tam katsayılı polinomların çarpımı olarak yazınız.

Y27. Bir ABCDEF dışbükey kirişler altıgeninde

$$|AB| = |BC|, |CD| = |DE|, |EF| = |FA|$$

ise alanlar için

$$|BDF| = \frac{1}{2} |ABCDEF|$$

eşitliğini ispatlayınız.

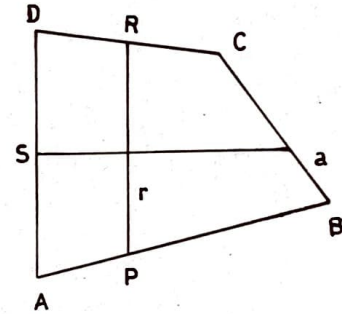
Y28. Bir ABCD dışbükey dörtgeninin kenarları üzerinde

$$\lambda = \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|RD|}{|RC|}, \mu = \frac{|QB|}{|QC|} = \frac{|SA|}{|SD|}$$

olmak üzere P, Q, R, S noktaları alınıyor.
 $PR \cap QS = T$ ise

$$\frac{|TS|}{|TQ|} = \lambda, \frac{|TP|}{|TR|} = \mu$$

olduğunu ispatlayınız.



Y29. p asal sayı, $p > 2$ ve

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}; \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

ise m nin p ile bölünebileceğini gösteriniz.

Y30. A, B, C bir üçgenin açıları olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 C & \cos^2 B \\ \cos^2 C & 1 & \cos^2 A \\ \cos^2 B & \cos^2 A & 1 \end{vmatrix}$$

determinantını üçgenin S alanı ve R çevrel yarıçapı türünden hesaplayınız. (Hazırlayan: C. Koç, H. Demir)

A 16. a, b, c, a', b', c' sıfırdan farklı gerçel sayılar ve

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

ise

$$aa' = bb' + cc'$$

olduğunu ispatlayıp ayrıca geometrik yorumunu yapınız.

ÇÖZÜM: (Atasagun Baykal, Ankara)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \text{ dersek } a = ka', b = kb', c = kc'.$$

Bunları $a^2 = b^2 + c^2$ de yerlerine koyalım:

$$k'a' \cdot a = k'b' \cdot b + k'c' \cdot c \Rightarrow aa' = bb' + cc'$$

Geometrik Yorum: $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$

eşitlikleri, Pisagor Teoreminin iki ayrı dik üçgene uygulanışdır.

Üçgenler, karşılıklı kenarları orantılı olduğundan benzerdirler.

Demek ki ispatladığımız bağıntıya göre benzer iki dik üçgenin, eşit dar açıları karşısındaki kenarlarının çarpımları toplamı, hipotenüslerin çarpımına eşittir.

A 17. 1'den 1991'e kadar (1991 dahil) olan tek sayıların 1991'inci kuvvetleri toplamı olma

$$1^{1991} + 3^{1991} + \dots + 1991^{1991}$$

sayısının birler basamağındaki sayı kaçtır?

ÇÖZÜM: (Ruhi Tabur, İzmit)

$$1^{1991} \equiv 11^{1991} \equiv 21^{1991} \equiv 3^{1991} \equiv \dots \equiv$$

$$\underbrace{1981^{1991} \equiv 1991^{1991} \equiv 1 \pmod{10}}_{200 \text{ tane}}$$

$$3^{1991} \equiv 13^{1991} \equiv 23^{1991} \equiv 33^{1991} \equiv \dots \equiv$$

$$\underbrace{1983^{1991} \equiv 7 \pmod{10}}_{199 \text{ tane}}$$

$$5^{1991} \equiv 15^{1991} \equiv 25^{1991} \equiv 35^{1991} \equiv \dots \equiv$$

$$\underbrace{1985^{1991} \equiv 5 \pmod{10}}_{199 \text{ tane}}$$

$$7^{1991} \equiv 17^{1991} \equiv 27^{1991} \equiv 37^{1991} \equiv \dots \equiv$$

$$\underbrace{1987^{1991} \equiv 3 \pmod{10}}_{199 \text{ tane}}$$

$$9^{1991} \equiv 19^{1991} \equiv 29^{1991} \equiv 39^{1991} \equiv \dots \equiv$$

$$\underbrace{1989^{1991} \equiv 9 \pmod{10}}_{199 \text{ tane}} \text{ olmak üzere}$$

$$1^{1991} + 3^{1991} + 5^{1991} + \dots + 1991^{1991} \equiv$$

$$200 \cdot 1 + 199 \cdot 7 + 199 \cdot 5 + 199 \cdot 3 + 199 \cdot 9 = 1 + 199 \cdot (1 + 7 + 5 + 3 + 9) = 1 + 199 \cdot 25 = 4976$$

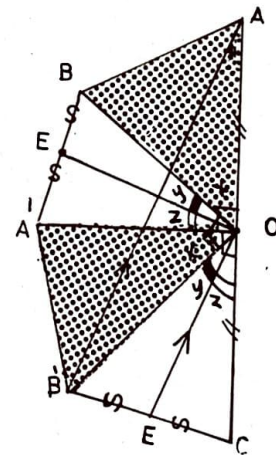
olup mod 10'a göre bu toplam

$$4976 \equiv 6 \pmod{10} \text{ olur.}$$

Sayının birler basamağı 6 olur.

A 18. Bir OAB üçgen O köşesi etrafında pozitif yönde 90° döndürülerek OA'B' üçgeni elde ediliyor. [A'B']'nin ortası E ise $OE \perp AB'$ olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM: (M. Necati Üstünay, Ankara)



$[OA'] \perp [OC]$ ve

$|OA| = |OA'| = |OC|$ olacak biçimde bir c noktası alalım.

$$\left. \begin{array}{l} m\widehat{AOA'} = m\widehat{A'OC} \\ m\widehat{AOB} = m\widehat{A'OB'} \end{array} \right\} \Rightarrow m\widehat{BOA'} = m\widehat{B'OC}$$

$$|OB| = |OB'| \text{ ve } |OA'| = |OC| \text{ ise}$$

$$\widehat{BOA'} \cong \widehat{B'OC} \text{ ve}$$

$$\widehat{BOE} \cong \widehat{B'OE'} \Rightarrow m\widehat{BOE} = m\widehat{B'OE'} = y$$

$$\widehat{EOA'} \cong \widehat{E'OC} \Rightarrow m\widehat{EOA'} = m\widehat{E'OC} = z$$

$$x + y + z = 90^\circ \Rightarrow m\widehat{EOE'} = 90^\circ$$

$$\widehat{AB'C} \text{ de ... } |AO| = |OC|$$

$$|B'E'| = |E'C|$$

$$\text{ise } OE' // [AB']$$

$$\text{ve } [OE] \perp [OE']$$

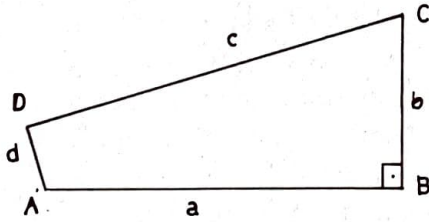
$$\text{ise } [OE] \perp [AB']$$

A 19. Ardışık kenar uzunlukları a, b, c, d olan ve B, D açıları dik olan bir $ABCD$ dörtgeninde

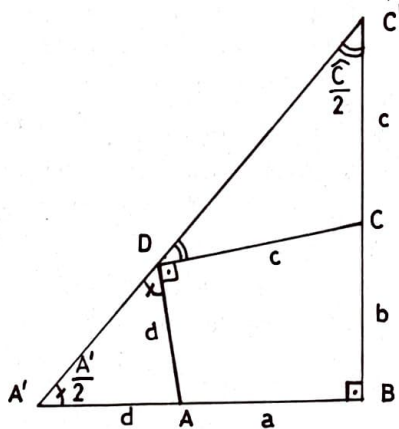
$$\frac{a+d}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{b+c}{\cos \frac{C}{2}}$$

olacağını ispatlayınız.

(Hazırlayan: Hüseyin Demir)



ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)



AB 'yi A' 'dan itibaren d kadar, BC 'yi de C' 'den itibaren c kadar uzatalım.

$$\widehat{CC'D} = \widehat{C'DC} = \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\widehat{AA'D} = \widehat{A'DA} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ \text{ olduğundan}$$

$[A'C']$ doğrusaldır.

Oluşan $A'BC'$ dik üçgeninde

$$\tan \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{a+d}{b+c} \text{ olur.}$$

$$\sin \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{a+d}{b+c}$$

$$\cos \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{a+d}{b+c}$$

$$\cos \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{a+d}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a+d}{\cos \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{b+c}{\cos \frac{\widehat{C}}{2}} \text{ olur.}$$

A 20. a, b, c, d pozitif sayılar ve

$$a + b + c + d = 8 \text{ ise}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} < 6 \text{ olacağını gösteriniz.}$$

ÇÖZÜM: (Namık Gök, İzmir)

Cauchy - Schwarz eşitsizliğini kullanalım,

$$(\sqrt{a} \cdot 1 + \sqrt{b} \cdot 1 + \sqrt{c} \cdot 1 + \sqrt{d} \cdot 1)^2 \leq$$

$$(a + b + c + d)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \leq 8 \cdot 4$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 4\sqrt{2} < 6$$

Sonuç olarak

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} < 6 \text{ olur.}$$

Y 16. a, b, c herhangi gerçel sayılar olduğuna göre

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2+3\sqrt{a^4b^2+3\sqrt{a^4c^2}}} \\ & + \sqrt{b^2+3\sqrt{b^4c^2+3\sqrt{b^4a^2}}} \\ & + \sqrt{c^2+3\sqrt{c^4a^2+3\sqrt{c^4b^2}}} \\ & = (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})^{3/2} \text{ olacağını ispatlayınız.} \\ & \text{(Hazırlayan: Hüseyin Demir)} \end{aligned}$$

ÇÖZÜM

(Volkan Doğan, Gaziantep)

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2+3\sqrt{a^4b^2+3\sqrt{a^4c^2}}} \\ & + \sqrt{b^2+3\sqrt{b^4c^2+3\sqrt{b^4a^2}}} \\ & + \sqrt{c^2+3\sqrt{c^4a^2+3\sqrt{c^4b^2}}} \\ & = [a^{4/3} (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})]^{1/2} \\ & + [b^{4/3} (b^{2/3} + c^{2/3} + a^{2/3})]^{1/2} \\ & + [c^{4/3} (c^{2/3} + a^{2/3} + b^{2/3})]^{1/2} \\ & = (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})^{1/2} (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}) \\ & = (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})^{3/2} \end{aligned}$$

Diğer Çözenler:

M. Necati Üstünay, Ömer Acımert, Zeliha Çetin, Erhan Gürel, Fatih Kılıç, Emre Acar, Hakan Kaşlı, Taner Kahveci, Muharrem Kocakuşak, Cem Ammiller, Murat Limoncu, Selda Tıraş (Ankara) – Vehted Kılınc, Ümit Uzel, Hasan Çetinkaya, Ufuk Yavuz, Aynur Baysoy, Mert Güzelbağ, Oğuz Akyıldit, Cem İyigün, Selda Hasanbaş, Çiğdem Karabulut, Zafer Polat, Aydın Ünverdi (İstanbul) – Tolga Atay, Bilal Yurdakul, Namık Gök (İzmir) – Levent Irak, İnci Damar (Çorum) – Erol Gedikli, Serap Yılmaz (Trabzon) – Seçim Kayar (Diyarbakır) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Selim Çetintürk (Balıkesir) – Sercan Çevikol (Antalya) – Ruhi Tabur (İzmit)

Y 17. $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ polinomunu (a, b, c'nin mümkün olan en küçük dereceli ve tam katsayılı polinomlarının çarpımı olarak) çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM I: (M. Necati Üstünay, Ömer Acımert, Ankara)

$a-b=x$, $b-c=y$ alınırsa
 $c-a=-(x+y)$ olur.

$$\begin{aligned} & (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \\ & = x^3 + y^3 - (x+y)^3 \\ & = x^3 + y^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 \\ & = -3xy(x+y) \\ & = 3xy[-(x+y)] \\ & = 3(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

ÇÖZÜM II: (Yusuf Macun, Ankara)

$P(a; b; c) = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ en fazla üçüncü dereceden bir polinomdur, dolayısıyla en fazla 1. dereceden üç çarpanı vardır.

$a=b$, $b=c$ ve $c=a$ için polinomun değeri sıfıra eşittir, dolayısıyla $(a-b)$, $(b-c)$ ve $(c-a)$ polinomun çarpanlarıdır. Bu üç çarpan birbirinden farklı olduğuna ve polinomun en fazla üç çarpanı olduğuna göre,

$$P(a; b; c) = \lambda (a-b)(b-c)(c-a), \lambda \in \mathbb{R}.$$

a^2 nin katsayısı $3(c-b)$ olduğuna göre, $\lambda = 3$

$$\text{ve } P(a; b; c) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

(Basit özdeşliklerle de aynı sonuç bulunabilir)

Diğer Çözenler:

Erhan Gürel, Turan Bulut, Tamer Kahveci, Emre Acar, Fatih Kılıç, Atasagun Baykal, Ahmet Ceyhan, Fatih Meriç, Lokman Kuzu, Alper Halbutoğulları, Murat Limoncu, Ercan Şahin (Ankara) – Önder Sayı, C. Alparslan Ertuğ, Aynur Baysoy, Ufuk Yavuz, Selda Hasanbaş, İbrahim Çanak, Çiğdem Karabulut, Aydın Ünverdi, Doğan Mersin (İstanbul) – Tolga Atay, Bahri Akyol, Ş. Emrah Aydın, Namık Gök, Bilal Yurdakul (İzmir) – Selim Çetintürk, Serkan Kurtuluş (Balıkesir) – Levent Irak (Çorum) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Ali Işıtan (Samsun) – Ruhi Tabur, Serkan Darcan (İzmit) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Alim Yılmaz (Manisa) – Sait Ulutepe (Bursa) – Hasan Çetinkaya (Afyon) – Selim Kayar (Diyarbakır) – Can Mavruk (Adana) – Erol Gedikli (Trabzon) – Işın Celkan (Erzurum) – Nilüfer Özcan (Mardin)

Y 18. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3 \left(\frac{\pi}{3^n} \right) = ?$

ÇÖZÜM: (Ali Işıtan, Samsun)

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, buradan:

$$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

eşitliği yardımıyla

$$3\sin^3(\pi/3) = \frac{3^2}{4}\sin(\pi/3) - \frac{3}{4}\sin\pi$$

$$3^2\sin^3(\pi/3^2) = \frac{3^3}{4}\sin(\pi/3^2) - \frac{3^2}{4}\sin(\pi/3)$$

$\vdots$

$$3^k\sin^3(\pi/3^k) = \frac{3^{k+1}}{4}\sin(\pi/3^k) - \frac{3^k}{4}\sin(\pi/3^{k-1})$$

taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{n=1}^k 3^n \sin^3 \left(\frac{\pi}{3^n} \right) = \frac{3^{k+1}}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3^k} \right) \cdot (\sin \pi = 0)$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3 \left(\frac{\pi}{3^n} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k 3^n \sin^3 \left(\frac{\pi}{3^n} \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{3^{k+1}}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3^k} \right) \right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/3^k)}{\pi/3^k}$$

$\frac{\pi}{3^k} = y$ dersek, $k \rightarrow \infty$ iken $y \rightarrow 0$ olur. O halde

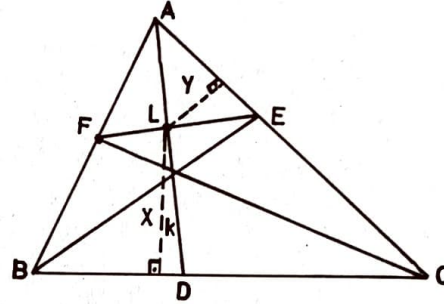
$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3 \left(\frac{\pi}{3^n} \right) = \frac{3\pi}{4} \text{ bulunur.}$$

Diğer Çözenler:

M. Necati Üstünay, Atasagun Baykal, Alper Halbutoğulları, Murat Limoncu, Yusuf Macun (Ankara) – Cem Mutlugün, Doğan Mersin, İbrahim Çanak, Aydın Ünverdi (İstanbul) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Hasan Çetinkaya (Afyon) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Ruhi Tabur (İzmit)

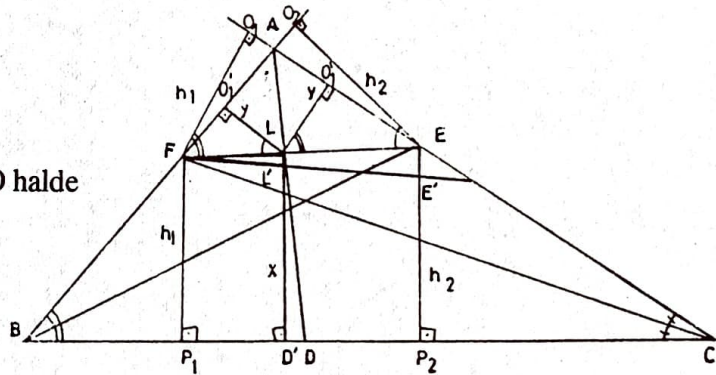
Y 19. Bir ABC üçgeninde [AD], [BE], [CF] iç açıortaylarıdır. $AD \cap EF = L$ ise L'nin BC'ye uzaklığı x ve AC'ye uzaklığı da y ise, $x = 2y$ olduğunu gösteriniz. (Hazırlayan: Hüseyin Demir)



ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)

F ve E den BC'ye iki dik indirelim. Diklerin uzunluğu h_1 ve h_2 olsun.

$$\frac{[EL]}{[FL]} = k \text{ olsun.}$$



CF açıortay olduğundan $[FO_1] = h_1$ olur.

BE açıortay olduğundan $[EO_2] = h_2$ olur.

$$\triangle O_1LE \sim \triangle O_1FE \Rightarrow$$

$$\frac{y}{h_1} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow h_1 = y \frac{(k+1)}{k}$$

$$\triangle O_2LF \sim \triangle O_2EF \Rightarrow$$

$$\frac{y}{h_2} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow h_2 = y(k+1)$$

F'den BC ye paralel çizelim. Bu doğru LD' yü L' de, EP₂ yi de E' de kessin.

$$\widehat{FL'L} \sim \widehat{FE'E} \Rightarrow \frac{[LL']}{[EE']} = \frac{1}{k+1} \text{ olur.}$$

$$[LL'] = x - h_1$$

$$[EE'] = h_2 - h_1 \text{ olur.}$$

$$\frac{x - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{x - y \frac{(k+1)}{k}}{y(k+1) - y \frac{(k+1)}{k}} = \frac{1}{(k+1)} \Rightarrow \frac{xk - y(k+1)}{y(k+1)(k-1)} = \frac{1}{(k+1)}$$

$$xk - y(k+1) = y(k-1)$$

$$xk = y(k-1 + k+1)$$

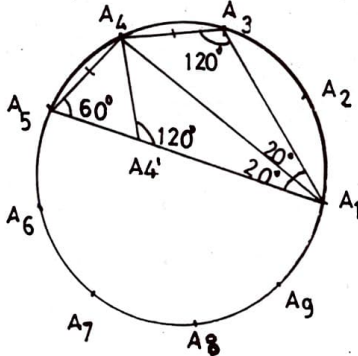
$$x = 2y$$

Diğer Çözenler:

Hasan Çetinkaya (Afyon) – Atasagun Baykal, Alper Halbutoğulları (Ankara) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Aydın Ünverdi, Alpaslan Ertuğ (İstanbul).

Y 20. Düzgün bir dokuzgenin en uzun ve en kısa köşegenleri farkının kenar uzunluğu kadar olduğunu gösteriniz. (Hazırlayan: Hüseyin Demir)

ÇÖZÜM I : (Erhan Gürel, Ankara)



A_1A_5 te $A_4'A_5 = A_4A_5$ olacak A_4' noktası alalım.

Simetriden dolayı; $[A_1A_4'] = [A_1A_3]$ olur.

$$[A_1A_4'] = [A_1A_5] - [A_4A_5]$$

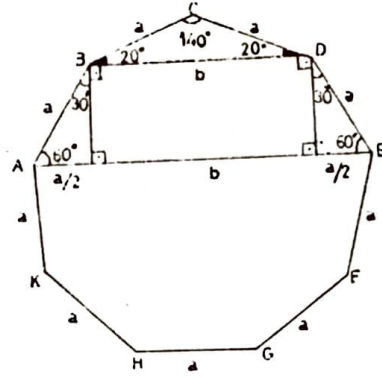
$$[A_4A_5] = [A_1A_2]$$

$$[A_1A_4'] = [A_1A_5] - [A_1A_2]$$

$$[A_1A_3] = [A_1A_5] - [A_1A_2]$$

$$\Rightarrow [A_1A_5] = [A_1A_2] + [A_1A_3] \text{ olur.}$$

ÇÖZÜM II : (Aziz Kalender, Tokat)



Şekildeki dokuzgenden de görüldüğü gibi en uzun köşegen $|AE|$ ve en kısa köşegen $|BD|$ dir.

Dokuzgenin iç açısı

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \text{ formülünden } 180^\circ - \frac{360^\circ}{9} = 140^\circ$$

bulunur.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$|AE| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + |BD| \quad b = |BD|$$

$$|AE| = a + b \text{ buradan}$$

$$a = |AE| - |BD| \text{ bulunur.}$$

Diğer Çözenler:

Ömer Acımer, Tamer Kahveci, Erhan Gürel, Engin Der, Fatih Kılıç, Onur Kıymaz, Lokman Kuzu, Emre Acar, Atasagun Baykal, Alper Halbutoğulları, Murat Limoncu, Yusuf Macun (Ankara) – Önder Sayı, Doğan Mersin, Cem Mutlugün, Oğuz Akyıldit, Hasan Çetinkaya, Ümit Uzel, Aydın Ünverdi, Alpaslan Ertuğ, Ufuk Yavuz (İstanbul) – Tolga Atay, Ş. Emrah Aydın, M. Sacit Çetiner, Tanju Kılıç, Murat Beybağa (İzmir) – Serkan Kurtuluş (Balıkesir) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Ruhi Tabur (İzmit) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Alim Yılmaz (Manisa) – Işın Celkan (Erzurum) – Mustafa Devşiren (Bursa) – (Nilüfer Özcan, Mardin)

ÖĞRENCİ GÖZÜYLE MATEMATİK NEDİR?

FİKRİ AKDENİZ

Adana'daki liselerden üçünde matematik ağırlıklı öğrenim gören bazı son sınıf öğrencileri ve Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünün çeşitli dönemlerde kayıtlı öğrencilerinden toplam 400 öğrencilik bir örnek oluşturularak kendilerine yazılı olarak yanıtlamaları istenen aşağıdaki iki soru yöneltilmiştir.

- a) Matematik deyince ne anlıyorsunuz?
- b) Orta öğretim düzeyinde matematik dersine ilgiyi arttırmak ve daha verimli olması için sizce ne yapılmalıdır?

Yazımızın amacı, öğrencilerin verdikleri yanıtları birleştirerek onların matematik bilimine bakış açılarını ve öğrenim gördükleri okullarda karşılaştıkları sorunları da gözönünde tutarak daha iyi bir matematik öğretimi için önerilerini dile getirmektir.

Matematik nedir?

Oyuncuları sayılar olan ve belli kurallara göre oynanan bir oyundur. *Sayılarla düşünmektir.* Sayı ve işlem bilimidir. *Beyin cimnastiğini en iyi gerçekleştiren bilim dalıdır.* Sayıların ve işlemlerin oluşturduğu karmaşık bir bütündür. *Sayıların ve çeşitli kümelerin ilişkilerinin sistematik biçimde incelenmesidir.* Düşünce sistemidir. *Hayatın sayılarla ilgili bölümüdür.* İnsan beynini geliştirecek düzeyde işlemler ve sayılar sentezidir. *İnsan yaratıcılığının sınırlarını aşmasına katkısı olan bilim dalıdır.* İnsanı düşünmeye iten kavramlar bütünüdür. *Bulmaca gibi görmemiz gereken bir takım işlemler bütünüdür.* Sayıların mantık ve doğrular üzerine kurallı olarak yazılıdır. *İnsanın düşüncelerinin gelişmesini ve hayal dünyasının aydınlanmasını gerçekleştiren bilim dalıdır.* İnsanı düşündüren, zekasını kullanmayı öğreten ve bunları yaparken de sonuca varabilmek için tüm yolları kullanmamızı amaçlayan bilim dalıdır. *Kavramlar ve sayılar arasında mantıksal bağlantılar kurma.*

Orta öğretim düzeyinde matematik dersine ilgiyi arttırmak ve dersin daha verimli olması için sizce ne yapılmalıdır?

Kitaplar yeniden gözden geçirilerek gereksiz bilgiler çıkarılıp konulara açıklık getirilmelidir.

Konular açık, kitaba bağlı kalmadan değişik bilgilerden yararlanarak işlenmelidir. Karmaşık yön-

temler ortadan kaldırılmalıdır. *Konular basitten zora doğru giden örneklerle anlatılmalı, her konu hakkında mümkün olduğunca her türden örnek çözülmelidir.* Matematik dersleri ilk saatlerde olmalıdır. *Öğrenciye konuyu kavratacak düzeyde anlamlı örnekler çözülmelidir.* Sınıf mevcutları azaltılmalıdır. *Öğrencilerin dikkati 20-25 dakika sonra dağıldığından geri kalan ders saati için ilginç yöntemler geliştirilmelidir.* Türkiye çapında her okulda bir matematik laboratuvarı kurularak, bilgisayarlı eğitime geçilmelidir. *İki saatlik dersler birleştirilmemelidir.* Öğrenciler sadece kapalı kuralların, formüllerin arasına sıkıştırılmamalıdır. *Öğretmenlerin de matematiği sevmeleri gerekir.* Öğrenciye matematiği sevdirecek, öğrencinin aklında en küçük bir kuşku bırakmayacak öğretmenlerin yetiştirilmesi gerekir. *Değişik konulara, değişik öğretmen girmesi düşünülebilir.* Yani konular üzerinde daha bilgili bir öğretmen öğretmelidir. *Öğrenci, öğretmen iletişimi iyi olmalı, anlayış ve hoşgörü ortamı yaratılmalıdır.*

Sınıf içinde rekabet ortamı yaratmalı, kısa zamanda çok örnek çözülebilmelidir. Her derste bir konu içerikli ders programı düzenlenmelidir. *Öğretmenler ders anlatmak üzere sınıfta bulunduklarını öğrencilere hissettirmelidir.* Konular, verilmiş formülleri ezberletme yerine neden ve niçinlere yanıt verecek biçimde işlenmelidir. *Öğretmenler ders anlatmaktan kaçınarak sadece formülleri vererek örnek çözme yolunu seçmemelidirler.* Temelden itibaren iyi bir öğretim yöntemi uygulayarak ezbercilikten uzaklaşılmalıdır. *Matematik çok zor bir ders gibi gösterilmemelidir.* Öğrencilerin dersi korkusuz işleyebilmeleri için rahatça soru sorup diyalog kurabilecekler öğretmenler olmalıdır. *Öğretmen-öğrenci arasında dengeli bir ilişki olmalıdır.* Öğrenci küçümsenmemelidir. Derste tüm öğrencilere eşit fırsat verilmelidir. *Sınıflarda grup yarışması düzenlenebilir.* Orta öğretimde belli bir noktaya gelindiğinde artık branşlaşma başlamalı ve matematikle devam edebilecek kadar onu sevenler daha ileri matematik görmelidirler.

Siz ne dersiniz?

SAYILAR TEORİSİNDEN PROBLEMLER

(Matematik Sohbetleri II)

Yazan: Prof. Dr. E. B. DYNKIN, W.A. USPENSKI

Çeviren: A. NAZMİ İLKER

Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı 3, İstanbul 1968.

Bu kitap 1945-1947 yıllarında Moskova Üniversitesi'nde oluşturulmuş bir çalışma grubunun üzerine eğildiği bazı problemleri kapsıyor. Yapılan toplantılarda amaç, katılanlara yeni bilgiler öğretmek değil, lise düzeyindeki bu kişilerin kendilerine sorulan problemler aracılığıyla matematiğe ilgilerini arttırarak, matematikle yaratıcı bir ilişki kurmalarına yardımcı olmaktır.

Kitap, kalan sınıfları aritmetiği, m-adik ve p-adik sayılar üzerinde gerekli ön bilgileri veriyor. Fibonacci dizisi ve Pascal üçgeni ile ilgili uygulamalara değiniyor ve çözümler için verilen bilginin yeterli olduğu 129 problemi kapsıyor. Ayrıca problemlerin çözümleri de verilmiş. "Matematikle uğraşmayı" sevenler için gerçekten zevk alınacak bir kitap.

İNDİRGEMELİ DİZİLER

Yazan: A. I. MARKUSCHEWITSCH

Çevirenler: A. R. ÖZBEK, M.A. ÖZKAN

Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı 18, İstanbul 1968.

Matematik Dünyası Dergisi'nin 1. ve 2. sayılarında Albert Erkip'in, Matematik Olimpiyatları sorularına ilişkin yazılarında değindiği indirgemeli diziler hakkında geniş bilgi edinmek için gerçekten yararlı bir kaynak. Doğrusal indirgemeli dizi denince akla ilk gelen örnek olan Fibonacci dizisinin de pek çok ilginç özelliği üzerinde duruluyor. Klasik uygulamaları dışında, son yıllarda "Şifreleme Teorisi", "Kodlama Teorisi", rastgele sayıların üretimi gibi

değişik konularda yaygın uygulamaları nedeniyle güncelleşmiş bir konu.

İsteme Adresi:

Prof. Dr. Hülya ŞENKON
Türk Matematik Derneği
Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Vezneciler - İSTANBUL

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yillardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

