

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Prof. Dr. Feza Gürsey

Metin Gürses

**Bazı Kavram, Tanım, Bağını ve
Simgeler Üzerine**

Hüseyin Demir

Evritim (II)

Cem Tezer

Bourbaki, Nicolas

Talat Tuncer

Başarıya Doğru Bir Başka Yol

Huriye Önder

**Orta Öğretimde Matematik Eğitimi
Üzerine Bazı Düşünceler**

Aydın Aytuna

**Çekmeceler, Çoraplar ve Matematik
Problemleri**

Albert Erkip

Sorular - Çözümler

$$n! = m^2 (m > 1, m \in \mathbb{Z}^+)$$

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından	1
Prof. Dr. Feza Gürsey	
Metin Gürses	2
Bazı Kavram, Tanım, Bağıntı ve Simgeler Üzerine	
Hüseyin Demir	4
Evirtim (II)	
Cem Tezer	8
Bourbaki, Nicolas	
Talat Tuncer	13
Başarıya Doğru Bir Başka Yol	
Huriye Önder	15
Orta Öğretimde Matematik Eğitimi Üzerine Bazı Düşünceler	
Aydın Aytuna	19
Çekmeceler, Çoraplar ve Matematik Problemleri	
Albert Erkip	22
Alıştırma Soruları	25
Yarışma Soruları	26
Çözümler	27

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

BU SAYIYI YAYINA HAZIRLAYAN
ALBERT ERKİP

YAYIN KURULU

CEMAL KOÇ, OKAY ÇELEBİ,
HÜSEYİN DEMİR, ALİ DOĞANAKSOY,
HALİL ERDEM, YAŞAR ERSOY,
İSMAİL GÜMÜŞEL, TİMUR KARAÇAY,
ALEV TOPUZUĞLU

YAZI İŞLERİ MÜDÜRÜ

ABDULLAH KAYGUSUZ

DİZGİ ve GRAFİK TASARIM

ENLEM 80 125 94 83

BASKI

TÜRK HAVA KURUMU BASİMEVİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu
Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk.
K.İ.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi
uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 25.000.-TL., Yurtdışı yıllık 50.000.-TL.,

Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.

Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.

Dergi içi, tam sayfa siyah-beyaz: 1.000.000.-TL.

Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.

Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz: 500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105

(Gökdelen) Kızılay 06650 ANKARA

Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İşerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA

Tel: (4) 223 71 00 / 2978 - 2979

MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Nisan ayında Türkiye bilim dünyasının sayılı isimlerinden biri olan Feza Gürsey'i kaybettik. Feza Gürsey, Teorik Fizik konusunda dünyanın önde gelen fizikçilerinden biri olmanın yanı sıra, çok yönlü kişiliği, bilime saygısı ve özellikle genç insanlara inancıyla çok kişiyi etkileyen bir insan. Türkiye'deki aktif teorik fizikçilerin çoğunluğu Feza Gürsey'in öğrencisi olmuşlar, O'nun desteğini almışlar; adından esinlenmişler. Feza Gürsey'in eski öğrencilerinden biri olan Bilkent, Matematik Bölümü öğretim üyesi Metin Gürses, O'nu tanıtan bir yazı hazırladı.

Matematik Dünyası ilk sayısından beri çeşitli ülkelerin ortaöğretim matematik programlarına yer vermekte. Dünyanın pek çok yerinde eğitim programları sık sık tartışılır, yeni fikirler denenir. Amacımız Türkiye'de böyle bir tartışma başlatmaktır. Bu yazımızda eğitimle ilgili öneriler getiren iki yazımız var.

Alper Halbutoğulları Yarışma Soruları köşesini izleyenlerin tanıyacağı, sık sık çözüm yollayan bir isim. Kendisi eski bir Matematik Olimpiyatçısı, şimdi Bilkent, Fizik Bölümü'nde öğrenci; Matematik Olimpiyatı hazırlık ekibinde de bulunuyor. Alper Halbutoğulları Matematik Dünyası ekibine de katıldı. Artık çözüm göndermiyor, gelen çözümleri değerlendiriyor.

Yarışma sorularında ilk yılın son çözümleri bu sayıda yayınlanıyor. İlk yıl sonundaki bilanço, yani en çok doğru çözüm gönderenlerin listesi ve ödülleri önümüzdeki sayıda yer alacak.

Bu arada hatalar konusuna değinelim. Gözden kaçan dizgi yanlışları oluyor, bu konuda okurlarımızdan düzeltmeler alıyoruz; onlara teşekkür ederiz. Her ne kadar bu yanlışlar dikkatli bir göz tarafından kolayca düzeltilebiliyorsa da, olmamaları daha iyi.

Bu sayıdaki diğer yazılara ve yazarlarına kısaca göz atalım:

► **Bazı Kavram, Tanım, Bağntı ve Simgeler Üzerine:** Hüseyin Demir, matematikte, özellikle orta öğretim sıralarında kullanılan bazı kavram, tanım, bağntı ve simgeler için yeni öneriler getiriyor. Hüseyin Demir'in kendi deyimiyle bir "problem üretme hastalığı" var. Bu orta okulun son yılında başlamış ve hâlâ sürüyor. Çeşitli dergilerde yayınlanmış 130'u aşkın özgün problemi var. Hüseyin Demir Hoca'nın yaşamı da ilginç; 1935'te Darüşşafaka Lisesi'ni bitirip İTÜ'ye girmiş, kısa bir süre sonra Devlet burslusu olarak Maden Mühendisliği okumak üzere Fransa'ya gönderilmiş ama savaşın çıkması ile eğitimi tamamlamak üzere ABD'ye gitmiş. Burada Columbia Üniversitesi'nde Maden Mühendisliği'nin yanı sıra Matematikte yüksek lisans yapmış ve 1944'te Türkiye'ye dönmüş. 1961'e kadar Zonguldak'ta mühendis olarak çalışmış; bu sırada geometriye ilgisi, problem üretme hep sürmüş. 1961'den bu yana

da ODTÜ Matematik Bölümü'nde, 1984'te emekli olması Hüseyin Demir'in çalışmalarında bir şey değiştirmemiş. Yine problem çözüyor, problem üretiyor. **Matematik Dünyası**'nda en sık göze çarpan isim.

► **Evirtim (II):** Cem Tezer'in yazısının ilk bölümü geçen sayımızda yayınlanmıştı. Bu yazıda evirtim dönüşümünün diğer özelliklerinin yanı sıra Euclid geometrisinin iki önemli sonucu, Batlamyus ve Feuerbach Teoremlerinin de evirtim yolu ile kanıtları veriliyor.

► **Bourbaki, Nicolas:** Matematik öğrencileri üniversite sıralarında meşhur matematikçilerin isimleriyle karşılaşır. Bourbaki bu ünlü matematikçilerden (!) biri. Bourbaki'yi diğerlerinden ayıran özellik bir kişi değil, Fransa'da bir matematikçiler topluluğunun takma adı oluşu. Yüzyılımızın en etkili ekollerinden biri sayılabilecek Bourbaki, matematik araştırmaların ötesinde üniversite ve öncesi eğitimi de önemli bir şekilde etkilemiş bir düşünce okulu. Özellikle 60'lı yıllarda tüm dünyayı saran "modern matematik" fikrinin temeli Bourbaki'de yatıyor. Talat Tuncer, yazısında Bourbaki grubunun kuruluşunu nasıl çalıştığını ve katkılarını anlatıyor. Talat Tuncer, İstanbul Üniversitesi'nde Matematik Bölümü'nden emekli, aynı zamanda çeşitli ansiklopedi çalışmalarına katılmış bir matematikçi.

► **Başarıya Doğru Bir Başka Yol:** Huriye Önder, ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden. Geçtiğimiz yıllarda ABD'de, yazısında sözünü ettiği "yeni" matematik programlarında çalışmış bir kişi. Değişen dünya ve gereksinimlerin matematik eğitime nasıl yansıtılacağı çok kişinin üzerinde durduğu güncel bir soru. Huriye Önder, yazısında ABD'de denenmekte olan bu tür bir projeyi tanıtıyor.

► **Orta Öğretimde Matematik Eğitimi Üzerine Bazı Düşünceler:** Ülkemizde her yıl yapılan Ulusal Matematik Sempozyumlarında matematikçiler yeni bulgularını sunmanın yanı sıra diğer konulara da değinirler. Matematik eğitimi bu konuların çoğu kez başında yer alır. 1990 sempozyumunda orta öğretimde matematik eğitimi konusunda bir panel yapılmıştı. ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Aydın Aytuna'nın konuşması aradan 2 yıla yakın bir süre geçmesine rağmen güncelliğini korumakta. Aydın Aytuna müfredat programlarının amaç ve içerikleri hakkındaki düşüncelerini belirtiyor.

► **Çekmeceler, Çoraplar ve Matematik Problemleri:** Olimpiyat köşesinde "çekmece ilkesi" ve bununla ilgili problemler var. Albert Erkip, ODTÜ Matematik Bölümü'nde öğretim üyesi; Olimpiyat hazırlık ekibinde yer alıyor.

PROF. DR. FEZA GÜRSEY**(7 Nisan 1921 - 13 Nisan 1992) Teorik Fizikçi****METİN GÜRSES**

Yunus imdi sen tek otur
Dâva manasını yetür
FEZA gibi bir er getir
Hiç cihana gelmez ola¹

Feza Gürsey'i 13 Nisan 1992'de kaybettik. Teorik Fizik, özellikle de Parçacık Fiziği ve doğadaki simetriler konularında dünyanın en önde gelen fizikçileri arasında yer alan Feza Gürsey, Türkiye'nin yetiştirdiği az sayıda dünya çapında bilim adamlarından birisiydi.



7 Nisan 1921'de doğan Feza Gürsey, orta öğrenimini Galatasaray Lisesi'nde tamamladı. 1944'te İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü'nü bitirdi. Doktora derecesini 1950 yılında İngiltere'de "Imperial College"den aldıktan sonra Türkiye'de ve yurt dışında çeşitli Üniversitelerde araştırmalarını sürdürdü. 1961 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde Profesör olarak ODTÜ Fizik Bölümü'nün kurucuları arasında yer aldı. 1973 yılına kadar ODTÜ'nün yanı sıra ABD'de Princeton İleri Araştırma Enstitüsü ve Yale Üniversitelerinde bulundu. 1973 yılında ODTÜ'nden ayrılmak zorunda kalarak Yale Üniversitesi'ne yerleşti. 1991 yılında buradan emekliye ayrılan Gürsey Türkiye'ye dönüp ailece İstanbul'a yerleşme hazırlığı içindeydi.

Feza Gürsey'in bilimsel açıdan en belirgin özelliği matematiği fizikte en etkin bir şekilde kullanmasının yanı sıra Teorik Fiziğin aşağı yukarı her alanında kalıcı eser bırakmasıdır. Zamanımızda gelişmelerin çok hızlı olmasından dolayı bilim adamları belirli konularda uzmanlaşmak zorunda kalmaktadırlar. Örneğin fiziğin farklı dallarında çalışan bir çok değerli fizikçi birbirlerinin yaptıklarını anlamakta zorluk çekerler. Fiziğin her konusunda uzman olan bilim adamı sayısı çok azdır. İşte Feza Gürsey bunlardan biriydi.

Elektromanyetik, zayıf ve kuvvetli etkileşmeler, doğadaki simetriler, kuvvetlerin birleştirilmesi ve birleşik alan kuramları üzerine yazdığı makalelerle derin izler bırakan Gürsey, bütün bu konularda liderler arasında yer almış ve çoğunlukla gelişmelere yön vermiştir. Bilhassa grup teorisinde dünyanın en önde gelen fizikçileri arasında yer almakta ve bu konudaki tarihsel sıralama Lie, Weil, Wigner, Gellman,

Nambu, Salam, Weinberg ve Gürsey olarak bilinmektedir. Pion parçacığı ve çekirdek içi parçacıkların etkileşmelerini açıklamak için ortaya attığı doğrusal olmayan sigma modeli bugün teorik fiziğin bir çok alanında, hem klasik hem de kuantal anlamda, önemli yer tutmaktadır.

Geç farkedilmesine rağmen, gazlarda bir boyutlu faz geçişleri üzerine yaptığı çalışmalar konunun ilkleri arasında kaynak olarak gösterilir.

Genel görelelik kuramına ayrı bir ilgisi olan Gürsey'in sık sık anılan iki çalışması (Mach prensibi ve Kerr Geometrisi üzerine yazdıkları) bu konuda önemli yer tutmaktadır.

Gürsey'in değişik amaçlarla yazdığı bir çok eseri matematiksel fizik dalında yer alır. Grup temsilleri, kuaternion ve octonian cebirleri, kuaternionik analitisite, integre edilebilir sistemler, süpersimetri, süperuzay ve komütativ olmayan geometri konularında klasik eserleriyle artık dergi ve kitaplarda yaşamını sonsuza kadar sürdürecektir.

Matematikteki bilinen her yapının fizikte muhakkak bir önemi olduğuna, bugün kullanılsa bile, matematikteki her buluşun gelecekte fizikte önemli gelişmelere neden olacağına inanırdı. Tarihte bunun bir çok örnekleri bulunmaktadır. Gürsey'in eserlerinin bir çoğu ilerisi için böyle örnekler olacak niteliktedir. Kuaternionik analitisite, istisnai grup'lar ve octonion'lar üzerine yazdıkları bunlardan bazılarıdır.

¹ "Yunus Emre'nin Bir Şaraptan İçmek Gerek şiirinin son kıtasının Feza'ya uyarlanması". Uyarlayan: Cihan Saçlıoğlu

Feza Gürsey'e, Teorik Fizik üzerine yaptığı çalışmalarından ötürü şu ödüller verilmiştir: TÜBİTAK Bilim Ödülü (1968), Oppenheimer Ödülü (1977), Einstein Madalyası (1979), New York Bilimler Akademisi Doğal Bilimler Marrison Ödülü (1981), İstanbul Üniversitesi Madalyası ve Onur Doktorluğu Ünvanı (1981), College de France Madalyası (1981), Grup Kuramı Vakfı'nın Wigner Madalyası (1987), Mustafa Parlar Vakfı Bilim, Hizmet ve Onur Ödülü (1989).

Yaşantısının önemli bir kısmı Türkiye dışında geçmesine rağmen Feza Gürsey, Türkiye'de fizik konumu açısından son derece önemli bir yere sahiptir. Gürsey yurt dışında olduğu dönemlerde Türkiye ve özellikle ODTÜ ile ilişkisine çok önem verdi ve bu ilişkiyi hiç kesmedi. ODTÜ'de bulunduğu yıllarda bir çok öğrenci yetiştirmiş, verdiği lisans ve lisansüstü derslerde pek çok öğrenciyi etkilemiş, yurt dışı kurumlarda doktora yapmalarına yardımcı olmuştur. Bugün Türkiye'deki aktif teorik fizikçilerin çoğunluğu Feza Gürsey'in Türkiye'de olduğu sıralarda ya onun öğrencileri olmuş ya da ondan herhangi bir şekilde yardım görmüşler, yani onun dergahından geçip feyz almışlardır.

Onun öğrencisi olmuş bütün fizikçilerin bir ortak görüşü Feza Gürsey'in çok üstün araştırmacılığının yanı sıra, derslerini mükemmel bir şekilde vermesidir. Her verdiği ders bir bütünlük içinde olup ilgili konulardaki son gelişmeleri de anlatarak öğrencilerin fiziğe olan ilgilerini daha da güçlendirirdi.

1975'ten sonraları Türkiye'ye yaptığı kısa ziyaretlerde ODTÜ, Boğaziçi Üniversitesi ve Gebze'deki Fizik Bölümlerine uğrar hem kendi yaptıkları hakkında hem de teorik fizikteki son gelişmeler hakkında bizlerle tartışmaktan zevk alır, çeşitli seminerler verirdi. Türkiye'de düzenlenen uluslararası teorik fizik toplantılarının hepsine katılmış, arkadaşlarına katılmaları için tavsiye etmiş ve bu toplantıları sürekli desteklemiştir. 1991'in Aralık ayında hastalığına rağmen Boğaziçi'nde, ODTÜ'nde, Bilkent'te ve Trakya Üniversitesi'ndeki konferanslarda uzun ve yorucu konuşmalar yapmaktan çekinmedi.

Güzel olan her şeyi seven Gürsey, sanata bilhassa şiire çok ilgi duyardı. Kendisine modern derviş denmesinden hoşlandığını anlamak zor değildi. Şiirde matematiksel bir güzellik görür müydü bilmez, ama fizikle matematikteki son gelişmelerle bu iki disiplinin artık çakışmaya başladığını görmekten zevk aldığını açıkça belirtirdi. İyi fizik, iyi ve sağlam matematik yapı ile olur görüşünü her zaman korudu ve bunu eserlerinde yansıttı.

Gürsey'in altmışıncı doğum yıldönümü münasebetiyle Yale'de düzenlenen toplantının kitabında (Symmetries in Particle Physics, Edited by Itzhak Bars, Alan Chodos and Chia-Hsiung Tze. Plenum Press (1984)), fizik dünyasının önde gelen bilim adamlarının Gürsey'in hem bilimsel hem de insanı yanları hakkındaki yazıları, onun fizikteki yerini açık bir şekilde göstermektedir. Her Türk bilim adamının okuması gereken bir kitap. Onun artık doğum günlerini onunla birlikte kutlayamayacağız ama bize örnek ve önder olmaya devam edecektir. İyi ki Doğdu Feza.

Matematiksel bilimler, özellikle düzen, simetri ve sınırlılık sergilerler; bunlar güzelin en görkemli biçimleridir.

ARİSTO

BAZI KAVRAM, TANIM, BAĞINTI VE SİMGELER ÜZERİNE

HÜSEYİN DEMİR

Ortaöğretim ile ilgili olarak bazı kavram, tanım, bağıntı ve simgeler üzerinde durmak istiyoruz. Bunlardan bir kısmı yıllardır kafamızı kurcalamış ve çözüm arayışına girmiştir. Bu doğrultuda matematiğin güzelliğine yaraşır bazı önerilerimizi bu yazımızda sunmak istiyoruz. Bu önerilerimizin benimseneceğine de inanıyoruz.

Herhangi bir nokta kümesine şekil dendiğini bilmekteyiz. Önerilerimiz maddeler halinde aşağıda sunulmuştur:

1. Nokta, doğru ve düzlem

Hilbert'e uyarak noktaları A, B gibi büyük harflerle, doğruları a, b gibi küçük harflerle ve düzlemleri de α , β gibi küçük Yunan harfleriyle gösterelim. Böyle yapmakla yazılmış bir metni ve çizilmiş bir şekli daha iyi anlamış oluruz.

2. Noktadaşlık, doğrudaşlık, düzlemdeşlik

Bir doğru üzerinde bulunan noktalara doğrusal noktalar deniliyor. Benzer olarak bir noktadan geçen doğrulara da noktasal doğrular denmesi gerekirse de bunun aynı noktadan geçen doğrular anlamına geldiği pek söylenemez. Bu bakımdan şu anlamlı sözleri benimsiyoruz: Aynı noktadan geçen doğrulara (düzlemlere) noktadaş doğrular (düzlemler), aynı doğru üzerinde bulunan noktalara (düzlemlere) doğrudaş noktalar (düzlemler) ve aynı düzlem üzerinde bulunan nokta ve doğrulara da düzlemdeş noktalar (doğrular) diyoruz.

3. Açılar, üçgenler ve uzaklıklar

Açılar için $\angle AOB$ simgesi yerine $\angle AOB$ simgesini, üçgenler için de $\triangle ABC$ simgesi yerine

$\triangle ABC$ simgesini öneriyoruz. Böyle yapmakla hem sadeliğe gitmiş hem de kitaplarda satır aralıklarını korumuş oluruz.

Ölçülere gelince

$m(\angle AOB)$ yerine $\star AOB$

$m(\triangle ABC)$ yerine $|ABC|$

simgelerini benimseyebiliriz.

Ayrıca, bir P noktasının bir A noktasından, bir a doğrusundan ve bir α düzleminden uzaklıklarını sırasıyla

$|PA|$, $|Pa|$, $|P\alpha|$

olarak gösterebiliriz.

4. Orta üçgen, değme üçgeni, ortik üçgen

Bir üçgende kenarların orta noktalarını köşe kabul eden üçgene orta üçgen, iç çemberin kenarlara değdiği noktaları köşe kabul eden üçgene değme üçgeni ve yüksekliklerin kenarlar üzerindeki ayaklarını köşe kabul eden üçgene ortik üçgen adını veriyoruz.¹ Orta üçgen kavramı kolayca çokgenlere ve değme üçgeni kavramı da teğetler çokgenine genelleştirilebilir.

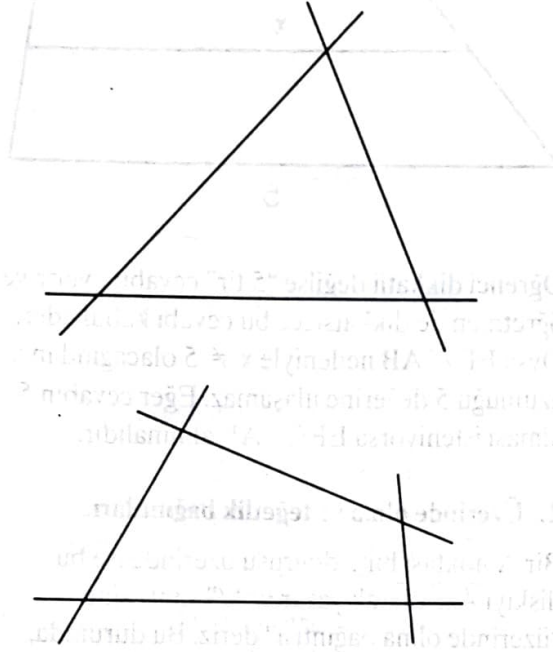
Üçgende dış çemberler ile ilgili olarak değme dış üçgenlerinden söz edilebilir.

5. Tam üçgen, tam dörtgen

Geometride tam dörtgen kavramı yer almaktadır ve şöyle tanımlanıyor: Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve herhangi ikisi kesişen dört doğrunun oluşturduğu bir şekle tam dörtgen denir. Bu ise bir dörtgende kenarlar uzatılarak elde edilen şekildir.

¹ Bu yabancı terim karşılığı olarak, Türkçe terim önerilerinizi bekliyoruz.

Peki, neden tam üçgen kavramı geometride yer almasın? Bunu da şöyle tanımlarız: Noktadaş olmayan üç doğrunun oluşturduğu bir şekle tam üçgen denir. Bu da bir üçgende kenarların uzatılmasıyla elde edilen şekildir.

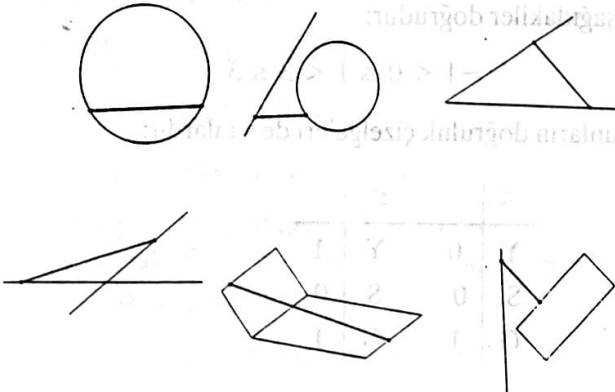


Üçgenlerde pek çok teorem aslında tam üçgenlerle ilgilidir. Örneğin dış çemberler, Menelaus ve Ceva teoremleri, gerek açık üçgende ortik üçgen bunlardan birkaçıdır. İlk ve ortaokullarda öğrencilerin geniş açılı bir üçgende yükseklikleri çizememeleri, tam üçgen kavramına yer verilmemiş olmasıdır. Sanıyorum tam üçgen verilirse çizimde başarılı olabilirler.

6. Kiriş kavramı

Çemberlerde tanımlanan kiriş kavramı kolaylıkla çokgenlere, kapalı öteki eğrilere ve hatta şekil çiftlerine genelleştirilebilir.

Aşağıda kapalı birkaç şekil ve şekil çiftleri verilmiş ve bunlardan tanımlanabilen kirişler çizilmiştir.



Böylece, bir üçgenin, bir dörtgenin, bir açının bir doğru çiftinin, bir doğru ile bir düzlemin, bir nokta ile bir doğrunun kirislerinden söz edebiliriz.

Kiriş kavramının böylece genelleştirilmesi ile pek çok teorem ve problem daha kolay olarak ifade edilebilir.

7. Yamuk Kavramı

“Yamuk” sözcüğünün sözlük anlamı, kitaplarda yamuğun şöyle tanımlanmasına yol açıyor: “Sadece karşılıklı iki kenarı birbirine paralel olan bir dörtgene yamuk denir”.

Bu tanım, paralelkenar ve dolayısı ile eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kareyi dışlamaktadır. Oysa, yamuktaki, her özellik bu özel şekillerde geçerlidir, yani bunlar da birer yamuktur. Örneğin yamuğun alan formülü dışlanmış olan bu özel şekillerde geçerli kalmaktadır.

Buna göre yamuğun tanımı şu olmalıdır:

“Karşılıklı iki kenarı paralel olan dışbükey bir dörtgene yamuk denir”. Böylece paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare birer yamuk olur.

Sanıyorum, aynı durum dikdörtgenlerde de var. Bunun tanımı da kareyi dışlıyor. Gerçekten, ilkökul üçüncü sınıftan bir öğrenciye aşağıdaki soruyu sorduğumda aldığım cevap bunu gösterdi.

Soru: Bir kenarının uzunluğu 4 cm ve çevre uzunluğu 16 cm olan bir dikdörtgende öteki kenarın uzunluğu kaç cm dir?

Çocuk, zihnen yaptığı hesap sonucunda buna şu cevabı verdi: Böyle bir dikdörtgen olamaz!

Dikdörtgenlerden söz edilirken uzun kenar, kısa kenar terimleri kullanılmamalı. Örneğin şöyle denmeli: Kenar uzunlukları 6 ve 4 cm olan bir dikdörtgenin alanı kaç cm^2 dir?

Yamukta paralel kenarlardan birine taban denirse ötekine üst taban, öteki iki kenara da yan kenarlar ve açılardan tabanla ilgili olanlara taban açıları deniliyor.

İkizkenar yamuğu tanımlayalım: Taban açıları eş olan bir yamuğa ikizkenar yamuk denir. (Yan kenarları eş olan bir yamuk ikizkenar yamuk olmayabilir. Gerçekten her paralelkenar ikizkenar yamuk değildir.)

Yamukta taban kavramını genişletebiliriz. Yamuğun, tabana paralel olan bir kirişine ara taban denir. Orta taban bunlardan biridir.

BAĞINTILAR

1. Parallellik ve eşparalellik

İki doğrunun paralellliği şöyle tanımlanıyor: Düzlemede olup kesilmeyen a ve b gibi iki doğruya paralel doğrular denir ve bu bağıntı $a//b$ olarak gösterilir.

Bu tanım a ile b nin çakışması dışlanmaktadır. Bu tanım, çakışma durumunu kapsayacak biçimde genelleştirilebilir ve bu durumda doğrulara eşparalel doğrular denir ve bağıntı $a//b$ olarak gösterilebilir. O halde tanım şu olur:

$$a//b \Leftrightarrow a/b \vee a=b$$

Bu iki bağıntının doğruluk çizelgesi

//		///	
Y	0	Y	1
S	1	S	1
G	0	G	1

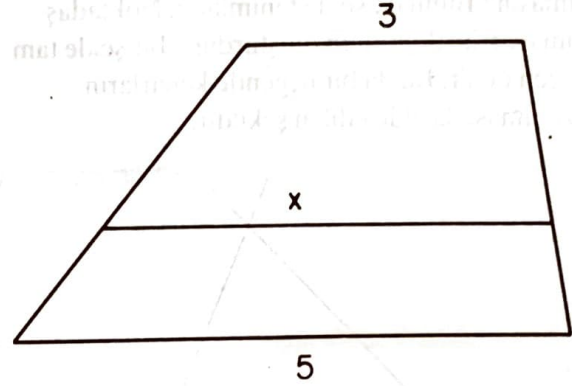
olup eşparalellik bir denklik bağıntısıdır. (Çizelgede Y yansıma, S simetri ve G geçişme özelliğini gösteriyor)

Sanıyorum, dikkatsiz olduğunda eğitimde paralellik kavramı eşparalellik anlamında kullanılabilmektedir.

Eşparalellik kavramının kullanılması teorem ve problem ifadelerinin yazılmasında bazı kolaylıklar sağlar. Örneğin öteleme dönüşümü ile ilgili olarak "Bir öteleme, bir doğruyu ya kendisine ya da buna paralel bir doğruya dönüştürür" ifadesi şöyle yazılır: "Bir öteleme bir doğruyu buna eşparalel olan bir doğruya dönüştürür".

İkinci bir örnek olarak bir öğretmenin bir öğrenciye sorduğu şu problemi ele alalım:

Soru: Şekilde, taban uzunluklar 5 ve 3 birim olan bir yamukta uzunluğu x olan değişken bir [EF] aratabanının alabileceği en büyük değer nedir?



Öğrenci dikkatli değilse "5 tir" cevabını verir ve öğretmen de dikkatsizce bu cevabı kabul eder. Oysa $EF//AB$ nedeniyle $x \neq 5$ olacağından x uzunluğu 5 değerine ulaşamaz. Eğer cevabın 5 olması isteniyorsa $EF//AB$ alınmalıdır.

2. Üzerinde olma ve teğetlik bağıntıları

Bir A noktası bir a doğrusu üzerinde ise bu ilişkiyi A/a olarak yazar ve "/" simgesine "üzerinde olma bağıntısı" deriz. Bu durumda, a/A da yazar ve bunu "a doğrusu A noktasından geçer" ya da "a doğrusu A üzerindedir" olarak yorumlarız. Bu açıklamalara göre A/a , a/A , d/a , a/d bağıntıları anlam kazanmış olur.

Aynı "/" simgesine teğetlik bağıntısı da der ve d/T simgesini "d doğrusu T çemberine teğettir" olarak yorumlarız.

3. Sıralama bağıntısı

Gerçel sayılar için tanımlı ve eşitliği içeren "S" bağıntısına cebirciler sıralama bağıntısı ya da eşitlik bağıntısı diyorlar.

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

olup "<" bağıntısına da öz sıralama bağıntısı ya da öz eşitsizlik bağıntısı diyebiliriz.

Aşağıdakiler doğrudur:

$$-1 < 0 \leq 1 < 3 \leq 3.$$

Bunların doğruluk çizelgeleri de şunlardır:

<		≤	
Y	0	Y	1
S	0	S	0
G	1	G	1

Karmaşık sayılarla sıralama bağıntısının geçersizliğini gösterebiliriz. Gerçekten bağıntının geçerli olduğunu kabul ederek bir çelişkiye varalım:

$(0,1) = i$ sayısı sıfır olmayıp ya $i > 0$ ya da $i < 0$ dır. Birinci halde

$$i > 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0 \quad (\text{yanlış})$$

İkinci halde

$$i < 0 \Rightarrow -i > 0 \Rightarrow (-i)^2 > 0 \\ \Rightarrow -1 > 0 \quad (\text{yanlış})$$

O halde karmaşık sayılarda eşitsiz bağıntısı geçersizdir.

4. Kümelerde kapsanma bağıntısı

Bazı matematikçiler kümelerde kapsanma bağıntısı için " $\subset$ " simgesini, bazıları da " $\subseteq$ " simgesini benimsiyorlar. bize göre bu simgeler, gerçel sayılarda tanımlı " $<$ " ve " $\leq$ " simgelerine benzediği ve genelde " $\leq$ " eşitsizlik simgesi kullanıldığı için kümelerde de kapsanma bağıntısı için " $\subseteq$ " simgesi kullanılmalıdır.

Ekonomi yarattığı için " $\subset$ " simgesini savunanlar var. Peki ekonomi için " $\leq$ " yerine " $<$ " yi kullanıyor muyuz?

" $\subseteq$ " bağıntısını benimsediğimize göre " $\subset$ " simgesine bir ad vermeliyiz. Bu ad da şudur: "Öz kapsanma bağıntısı".

" $\subseteq$ " simgesinin benimsenmesi, A kümesinin B nin öz altkümesi olmasını sade biçimde $A \subset B$ olarak yazma kolaylığını sağlar. Özetle

$A \subseteq B$: A kümesi B nin bir altkümesidir.

$A \subset B$: A kümesi B nin bir öz altkümesidir.

BAŞKA NOKTALAR

1. Trigonometride altı oran

Bazı matematikçiler bu altı oranı

$$\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}, \sec, \operatorname{cosec}$$

olarak yazıyorlar. Matematikteki güzelliği bozmamak için bu kısaltmaların herbirini üçer harfli olarak şöyle yazalım:

$$\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$$

2. ∞ yerine $+\infty$, örneğin 5 yerine $+5$ yazalım mı?

Hayır, yazmayalım.

3. Sonlu kümelerin niceliği

A sonlu küme ise farklı öğelerinin sayısı $n(A)$ ya da $s(A)$ olarak gösteriliyor. Bence liselerde bunlar yerine $|A|$ simgesi benimsenmelidir. Örneğin

$$A = \{-1, 0, \sqrt{2}\} \Rightarrow |A| = 3$$

7. Kümelerde öğeler tekrar etmeli mi yoksa etmemeli mi?

Bu soru kafamızı yıllarca kurcalamıştır. Ülkemizde çağdaş matematiğin benimsendiği 60'lı yıllarda kümelerden öğelerin farklı olacağına parmak basılmıştır. Kuşularımızı gidermek için bu soruyu yabancı bir analiziye yönelttiğimizde aldığım cevap şu oldu: Neden tekrarlanmasın? İşte bugün bugündür bir kümede öğelerin tekrar edebileceklerini savunur olmuştumdur. Buna göre $A = \{0, 1, 1, 3\}$ simgesi bir kümedir ve bu kümenin niceliği $|A| = 3$ tür.

Şu örneği ele alalım:

$$B = \{6, \sqrt{49 + 29\sqrt{2}} + \sqrt{49 - 29\sqrt{2}}\}$$

Bu bir kümedir. Niceliğini bulmak için iki öğenin eşit olup olmadığı incelenmelidir. İnceleme ise $|B| = 1$ veriyor. Hem neden öğeleri değişken olan

$$P = \{-2, x^3 - 1, x^2 - 3\}$$

gibi kümelerden söz etmeyelim? Bu değişken kümenin $|P|$ niceliği x in değerlerine göre 1, 2 ya da 3 olur.

Alıştırma 1: $P = \{-2, x^3 - 1, x^3 - 3\}$ ise

a) $|P| = 2$ denklemini çiziniz,

b) $y = |P|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Alıştırma 2: Bir DEF üçgenini

a) orta üçgen b) doğru üçgeni, c) ortak üçgen olarak kabul eden ABC üçgenini çiziniz.

Alıştırma 3: Doğruluk çizelgeleri

	0	1	0	0	0	1	1	1
Y	0	1	0	0	0	1	1	1
S	0	0	1	0	1	0	1	1
G	0	0	0	1	1	1	0	1

olan geometrik ikişer bağıntı bulunuz.

EVİRTİM (II)

CEM TEZER

Geçen sayıdaki Evirtim (I) başlıklı yazıda kaldığımız yerden devam ediyoruz.

Örnek IV

Evirtim sayesinde bilinen teoremlerden yeni teoremler elde edilebilir.

Önce üçgen eşitsizliğini hatırlayalım:

Üçgen Eşitsizliği: Düzlemde birbirinden farklı herhangi A, B, C noktaları için

$$|AC| \leq |AB| + |BC|$$

olup, eşitlik ancak ve yalnız A, B, C doğrudan olup, B, A ve C arasında kalırsa doğrudur.

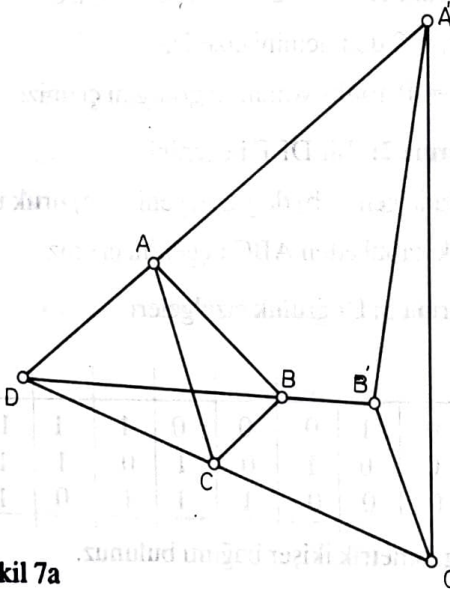
Şimdi de önemli bir teoremi üçgen eşitsizliğinin evirtim altında görünüşü olarak elde edelim:

Teorem 4. ("Batlamyus (M.S. 2. yüzyıl) Teoremi") Birbirinden farklı ve doğrudan olmayan herhangi A, B, C, D noktaları için

$$|AC| |BD| \leq |AB| |CD| + |BC| |AD|$$

olup, eşitlik ancak ve yalnız A, B, C, D noktalarının çemberde olup, AC, BD doğrularının da sözkonusu çember içinde kesişmeleri halinde doğrudur.

Şekil 7a



İspat: (Şekil 7a, 7b) Noktalardan bir tanesi geri kalan üç çiftten hiçbirisiyle doğrudan olmayacaktır (Neden?) D nin bu özelliğe sahip olduğunu varsayalım. D merkezli bir evirtim alalım. Evirtimin kuvvetini (burada birşey değiştirmemekle beraber) ρ ile gösterelim. A, B, C nin evrikleri sırasıyla A', B', C' olsun (Şekil 7a). DAB ve DB'A' üçgenlerinin benzerliğinden ve $|DA| |DA'| = |\rho|$ dan

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|DA'|}{|DB|} = \frac{|DA'| |DA|}{|DA| |DB|} = \frac{|\rho|}{|DA| |DB|}$$

ve

$$|A'B'| = \frac{|AB|}{|DA| |DB|} |\rho| \quad (7)$$

bulunur. Aynı şekilde

$$|B'C'| = \frac{|BC|}{|DB| |DC|} |\rho| \quad (8)$$

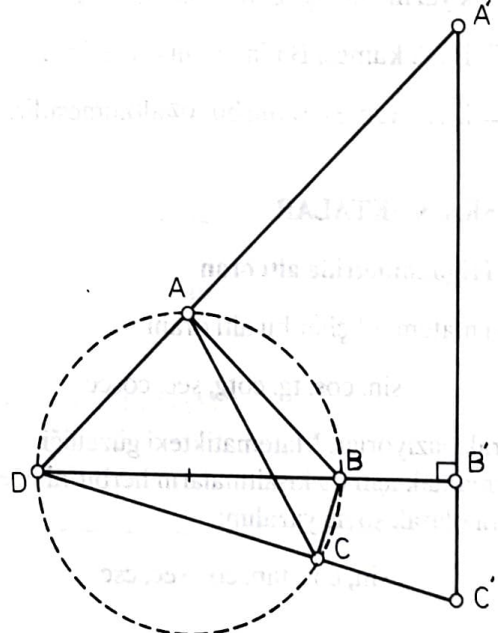
$$|A'C'| = \frac{|AC|}{|DA| |DC|} |\rho| \quad (9)$$

elde edilir. A'B'C' üçgeninde üçgen eşitsizliği yani

$$|A'C'| \leq |A'B'| + |B'C'| \quad (10)$$

ve (7), (8), (9) yardımıyla

$$\frac{|AC|}{|DA| |DC|} |\rho| \leq \frac{|AB|}{|DA| |DB|} |\rho| + \frac{|BC|}{|DB| |DC|} |\rho|$$



Şekil 7b

bundan da her tarafı $|DA| |DB| |DC|$ ile çarpıp $|p|$ ile bölmek suretiyle aranılan eşitsizlik

$$|AC| |BD| \leq |AB| |CD| + |BC| |AD|$$

bulunur. Bu eşitsizliğin eşitlik haline düşmesi için gerek ve yeter şart (10) eşitsizliğinin eşitlik haline düşmesidir. Yani A', B', C' doğrudan olmalı ve B', A' ve C' arasında kalmalıdır. Bu da ancak ve yalnız A, B, C, D nin çemberdaş olup AC ve BD doğrularının söz konusu çember içinde kesişmeleriyle mümkündür (Şekil 7b).

Evirtim konusunu biraz daha açıp son örneğime geçmeden önce okuyucunun, Batlamyus teoremi yardımıyla çözebileceği üç problem sunmak istiyorum:

Problem 3: ABC bir eşkenar üçgen, X de ABC nin çevrel çemberi üzerinde B yi C ye birleştiren kısa yay üzerinde bir nokta ise

$$|XA| = |XB| + |XC|$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 4: Kenar uzunluğu 1 olan bir düzgün beşgenin köşegen uzunluğunun $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğunu ispat ediniz.

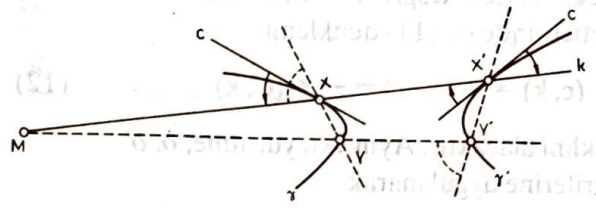
Problem 5: A açısı 120° ye eşit veya 120° den büyük bir ABC üçgeni alalım. Herhangi bir X noktası için

$$|XA| + |XB| + |XC| \geq |AB| + |AC|$$

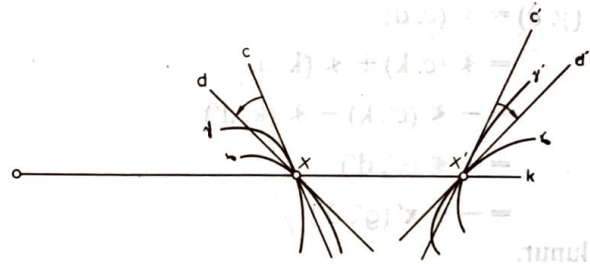
eşitsizliğini ispat ediniz. Bu eşitsizliğin eşitlik haline gelmesi için gerek ve yeter şartın $X = A$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: CA üzerinde $|AB| = |AB'|$ olacak şekilde bir B' noktası alın. A, B' ve C arasında kalsın. Batlamyus teoremini $XAB B'$ dörtgenine uygulayın.)

Evirtimi bir yere kadar Euclid geometrisinin içinde tutan özellik, bu dönüşümün açıları mutlak değerce korumasıdır:

Teorem 5: Bir evirtim eğriler arasındaki açıların işaretini değiştirir, açılar mutlak değerce saklı kalır.



Şekil 8a



Şekil 8b

İspat: Önce kısaca “eğriler arasındaki açı” tabirine açıklık getirelim: γ ve δ gibi iki eğrinin bir X noktasında kesiştiğini varsayalım (Şekil 8b). Eğrilerin X noktasında yalnız birer teğete sahip olduklarını düşünelim. γ ve δ nin X noktasındaki teğetleri sırasıyla c, d doğruları olsun. “ γ ve δ eğrileri arasında X noktasındaki açı” ile c ve d doğruları arasındaki açı anlaşılacaktır. (Gösterim: $\angle X(\gamma, \delta)$). Şimdi ispata donebiliriz: M merkezli bir evirtim gözönüne alalım. γ ve δ eğrileri $X (\neq M)$ noktasında, sırasıyla bunların evrikleri olan γ' ve δ' eğrileri de X' noktasında kesişsinler (Şekil 8b). X', X in evriğidir. (Aslında, iki eğrinin X in belirli bir civarında yeniden kesişmedikleri vb. ikazlar gerekli. İspatı fazla karıştırmamak için bunları bir kenara bırakalım.) γ, δ nin X deki teğetleri sırasıyla c, d doğruları, γ', δ' nin X' deki teğetleri de sırasıyla c', d' olsun. Önce γ eğrisine yönelelim (Şekil 8a). Bu eğri üzerinde X e yakın (!) bir Y noktası alalım. Y nin evriği Y' de γ' üzerinde X' ye yakın bir nokta olacaktır. $XX' = MX$ doğrusu k ile gösterilerek ve X, Y, Y', X' noktalarının ya doğrudan, yahut da çemberdaş oldukları hatırlanarak

$$\star(XY, k) = \star(k, X'Y') \quad (11)$$

bulunur. Y, X e yanaşırken ve Y', X' ne yanaşırken, XY doğrusu c doğrusuna, X'Y' doğrusu da c' doğrusuna yanaşacaktır. Bunun neticesinde de (11) denklemi

$$\star(c, k) = \star(k, c') = -\star(c', k) \quad (12)$$

şeklini alacaktır. Aynı akıl yürütme, δ , δ' eğrilerine uygulanarak

$$\star(d, k) = \star(k, d') = -\star(d', k) \quad (13)$$

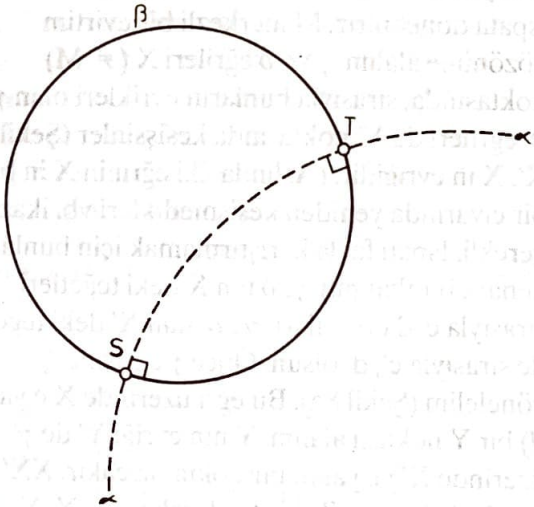
elde edilebilir. (12) ve (13) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \star(\gamma, \delta) &= \star(c, d) \\ &= \star(c, k) + \star(k, d) \\ &= -\star(c', k) - \star(k, d') \\ &= -\star(c', d') \\ &= -\star(x'(g', \delta')) \end{aligned}$$

bulunur.

Yorum: Teorem 5 çok genel bir teorem. Biz bu teoremi sadece çemberler ve doğrulara o da yalnız 0° ve 90° için uygulayacağız. Yani: Bir evritim birbirine dik (teğet) çemberleri veya doğruları gene birbirine dik (teğet) çember veya doğrulara dönüştürür. (Tabii, okuyucu paralel doğruları sonsuzda teğet çemberler olarak görmeli.)

Yardımcı Teorem 2. Pozitif kuvvetli bir evritim, evritim çemberine dik bir çemberi sabit bırakır.



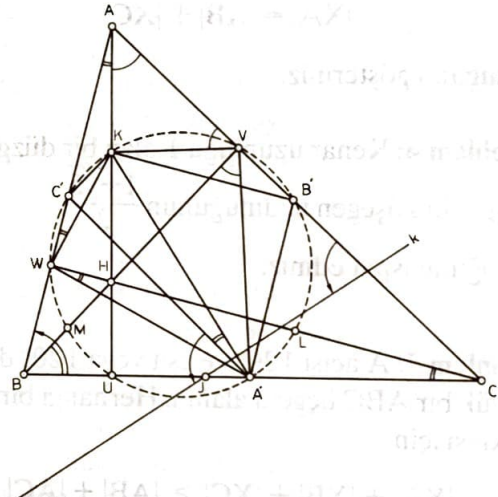
İspat: (Şekil 9) Bir α çemberinde evritim gözönüne alalım. β , α çemberine S, T noktalarında dik olsun. Evritim, S ve T

noktalarını sabit bırakmakta. Demek ki β nın evriği, S ve T noktalarında α ya dik bir çember olmalı ki bu β nın kendisidir.

Örnek V

Kim ne derse desin benim için matematik tarihinin şahikalarından biri olan Feuerbach Teoremini son örnek olarak ele alıyorum. Söz konusu teoremi layıkıyla takdir edebilmesi için okuyucu bir üçgenin dokuz-nokta çemberini ve ilgili dokuyu biraz olsun tanımalıdır. Kısaca ele alalım:

Teorem 6: Bir üçgende, kenar orta noktaları, yükseklik ayakları ve üç yüksekliğin kesiştiği noktayı ("ortosantr") köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları çemberdeştir.



İspat: (Şekil 10). Bir ABC üçgeni alalım. A, B, C den karşı kenarlara indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla U, V, W ve AU, BV, CW yüksekliklerinin kesiştiği nokta ("ortosantr") H olsun. Sırasıyla [BC], [CA], [AB], [HA], [HB], [HC] doğru parçalarının orta noktaları A', B', C', K, L, M olsun. Yapmak istediğimiz şey, U, V, W, A', B', C', K, L, M noktalarını aynı çember üzerinde kaldığını görmek; söz konusu çemberin [A'K] çaplı çember olduğunu iddia ediyorum: U noktası aşık bir şekilde [A'K] çaplı çember üzerindedir. Diğer taraftan B', K sırasıyla [CA] ve [HA] nın orta noktaları olduğundan B', K, CW yüksekliğine paraleldir. A'B' ve AB ye paralel olduğundan, B'K, B'A' ye dik olmalıdır. Yani B' noktası da [A'K] çaplı çember üzerindedir. Aynı akıl yürütme C' ne de uygulanabilir.

Gelelim V ye: AHV dik üçgendir; K hipotenüsün orta noktasıdır. Demek ki K AV (tepesi K de olan) bir ikizkenar üçgen olup

$$\star(AV, KV) = \star(AU, AC) \\ = \star(BC, BV) \quad (\text{Neden?})$$

dir. Diğer taraftan gene BVC bir dik üçgen olduğundan ve A' hipotenüsün orta noktası olduğundan A'BV (tepesi A' de olan) bir ikizkenar üçgendir. Böylece

$$\star(BC, BV) = \star(BV, VA')$$

bundan da

$$\star(AV, KV) = \star(BV, VA')$$

bulunur. AV, BV ye dik olduğundan, KV de VA' ne dik olmalıdır. Yani V, [A'K] çaplı çember üzerindedir. Aynı akıl yürütme W noktasına da uygulanabilir. Bu suretle A', B', C', U, V, W, K noktalarının aynı çember ([A'K] çaplı çember) üzerinde kaldığını göstermiş olduk. L ve M ne olacak? Bunu okuyucuya bırakıyorum.

Yorum: Teorem 6'da ele alınan çember, üzerinde dokuz tane ilginç nokta bulunduğundan "dokuz-nokta çemberi" (veya "Euler çemberi") olarak anılıyor. Bu çember üzerindeki ilk altı noktayı L. Euler (1707-1783) yakalamış. Noktaların sayısını dokuz çıkaran az sonra harikulade bir teoremini sunacağımız K. W. Feuerbach (1800-1834). Teorem 6'daki dokuyla ilgili bir nokta daha:

Yardımcı Teorem 3: BC kenarının A daki içaçıortaya göre bakışığı A'K doğrusuna diktir.

İspat: (Şekil 10) A daki içaçıortay BC yi J noktasında kessin. BC nin bu içaçıortaya göre bakışığına (simetrigine) k diyelim. k doğrusu da J noktasından geçer ve

$$\star(A'C', k) = \star(AC, k) = \star(BC, BA)$$

dir. Ayrıca

$$\star(A'K, A'C') = \star(C'W, C'K) = \star(BA, AU)$$

olup, bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$$\star(A'K, k) = \star(A'K, A'C') + \star(A'C', k) \\ = \star(BA, AD) + \star(BC, BA) \\ = \star(BC, AU) = \pi/2$$

bulunur.

Bu örneğin hedefi olan teoreme geçmeden önce evirtim hakkında bir noktaya daha işaret edilmesi gerekiyor:

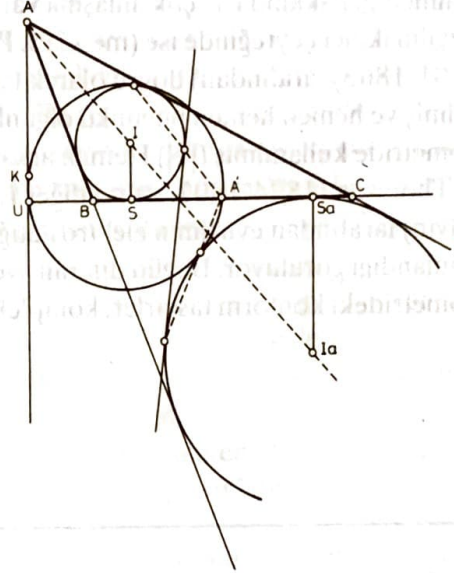
Yardımcı Teorem 4: Bir k doğrusu üzerinde birbirinden farklı A, B, X, X' noktaları alınsın. X, X' noktalarının [AB] çaplı çembere göre evrik noktalar olmaları için gerek ve yeter şart

$$\overline{XB} : \overline{XA} = - \overline{X'A} : \overline{X'B}$$

olmasıdır.

İspat: Bunu okuyucuya bırakıyoruz. k doğrusunun x eksenini seçip, basit bir hesap yapmak yeterli.

Teorem 7: ("Feuerbach Teoremi") Bir üçgende dokuz-nokta çemberi iç ve dış teğet çemperlere teğettir.



İspat: (Şekil 11) ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I, A karşısındaki dışteğet çemberin merkezi de I_a olsun. Bu çemberleri sırasıyla (I), (I_a), yarıçaplarını da r, r_a ile göstereyim. (I) ve (I_a) nın BC ye değdiği noktalar sırasıyla S, S_a olsun. Bu belirtilenler dışında Teorem 4'ün gösterimini aynen alalım. Dokuz-nokta çemberinin (I) ve (I_a) ya teğet olduklarını göstereceğiz. Diğer iki dışteğet çembere de aynı akıl yürütme uygulanabilir. A, I, I_a noktaları, A daki içaçıortay üzerinde olup, bu içaçıortay BC yi J de kesmekte. Gene BC nin AI ya göre bakışığı olan k doğrusu da J den geçmekte olup (I) ve (I_a) ya teğettir. (Neden?) Son olarak da

$$\overline{JS} : \overline{JS_a} = -r : r_a \\ = -\overline{AI} : \overline{AI_a} \\ = -\overline{US} : \overline{US_a}$$

olduğunu gözleyelim. Diğer taraftan A' (yani [BC] nin orta noktası) [SS_a] nın orta noktasıdır. (Neden?) Yardımcı Teorem 4'e göre [SS_a] çaplı çembere göre bir evirtim J yi U ya gönderecektir; evirtim merkezi de A' noktasıdır. Demek ki k doğrusunun evriği U ve A' den geçen, merkezi A' den k ye indirilen dikme üzerinde yani Yardımcı Teorem 3'e göre A'K üzerinde olan çember olmalıdır ki, bu ancak dokuz-nokta

çemberidir. yardımcı Teorem 2'ye göre (I) ve (I_n) sözkonusu evirtim altında sabit kalırlar. Demek ki k doğrusunun evriği olan dokuz-nokta çemberi de k doğrusu gibi (I) ve (I_n) ya teğet olmalıdır.

Son olarak da konunun tarihini kısaca ele almak istiyorum: Evirtimin tarihi ne yazık ki açıklık kazanmamış bir saha. 17. yüzyılda henüz bilinmediği hakkında az çok anlaşma var. 19. yüzyılın ikinci çeyreğinde ise (mesela J. Plücker (1801-1863) tarafından) doğru olarak tarif edilmiş ve hemen hemen bugünkü olgunluğu ile geometride kullanılmış ([1]). Hemen arkasından W. Thomson (1824-1907, nam-ı diğer Lord Kelvin) tarafından evirtimin elektrostatiğe uygulandığı görülüyor. Bugün diferansiyel geometrideki konform tasvirler, kompleks

analizdeki Möbius dönüşümleri, cebirsel geometrideki Cremona dönüşümleri, ileri matematikte evirtimin genelleşmiş şekilleri olan dönüşümlerdir.

Kaynaklar

- [1] J. L. Coolidge, "A Treatise on the Circle and the Sphere", Chelsea Publishing Company, New York 1971 (İlk basım: Oxford, 1916).
- [2] H. Demir, "Homoteti ve Benzerlik", **Matematik Dünyası**, Sayı 4, s. 2-7.
- [3] E. J. Dijksterhuis, "Archimedes", Ejnar Munksgaard, Kopenhag, 1956. (C.Dikshoorn tarafından Felemenkçe aslından İngilizce'ye tercüme)
- [4] C. Tezer, "Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri", **Matematik Dünyası**, Sayı 1, s. 3-6.

Ziraat Yüksek Mühendisi Vahap Alper'in **Aritmetik ve Tarım Aritmetiği** (1989) adlı kitabında ilginç pratik uygulamalar var. Bunlardan Biri:

SIĞIRLARDA CANLI AĞIRLIĞIN HESABI

Bir sığırın canlı ağırlığını bulmak için, göğüs çevresinin karesi ile vücut uzunluğu ve 87,5 kat sayısı çarpılır.

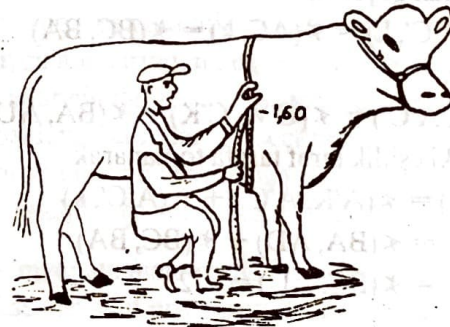
$$P = C^2 \times h \times 87,5$$

C : Göğüs çevresi (metre olarak)

h : Vücut uzunluğu (metre olarak)

P : Sığırın canlı ağırlığı (kg. olarak)

Formülün nasıl çıktığını düşünürseniz buradan canlı bir sığırın ortalama özgül ağırlığını bulabiliyorsunuz.



BOURBAKI, NICOLAS

TALAT TUNCER

Ecole normale supérieure (Paris Yüksek Öğretmen Okulu) eski öğrencilerinden oluşan genç Fransız matematikçilerinin 1933'e doğru aldığı topluluk takma adı.

Birinci Dünya Savaşı'nın başlangıcı olan 1914'ü izleyen yıllarda, birçok matematikçinin cepheye gitmesi, Fransa üniversite ve yüksek okullarında matematik öğretiminin yavaşlaması ve gerilemesine neden oldu. Bu hal savaş sonrası yıllarda da sürdü. Oysa Almanya'da durum değişti. Birçok matematikçi yetişti: David Hilbert, Helmut Hasse, Emmy Nöther, Wolfgang Krull, Emil Artin. Bunlar Fransa'nın özellikle geri kaldığı cebir alanında önemli adımlar attılar. Alman matematikçilerden, daha sonra da Bourbaki ekolünün en çok etkilendiği Bartel Leender Van der Waerden'i sayabiliriz.

Fermat'dan Poincaré'ye Fransız matematikçilerinin en büyükleri matematiğin, aritmetik, cebir, analiz, geometri gibi ana dallarında ün salmışlardı. Oysa şimdi fonksiyonlar teorisinde parlaktılar ama geri kalan alanlarda unutulmuşlardı.

Fransız matematiğinin düştüğü bu duruma üzülen bir takım genç matematikçiler girişimlerde bulunarak Bourbaki ekolünü kurdular. İlk günlerde Bourbaki'de on kadar matematikçi hazır bulunmuştu. Beş kurucu üye ise şunlardı: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné ve André Weil.

Durumu telafi için genç matematikçiler seminerler düzenlediler. Ama yeni büyük düşünceleri daha sistematik tarzda incelemek gerekti. Bu, seminerler biçiminde değil de, modern matematiğin temel fikirlerini tümüyle içine alan bir kitap biçiminde olmalıydı. Böylece Bourbaki bilimsel başvuru kitabı doğmuş oldu. Bourbaki'ye katılan gençler ilk buluşmalarında bu işi üç yılda bitirecekleri kanısında idiler, ama gerçek böyle olmadı. Başlangıçta Van Der Waerden'in ünlü cebir kitabı örnek olarak alındı.

Dieudonné tezi üzerinde çalışma için 1930'da Berlin'de bulunuyorken Van der Waerden'in cebiri satışa çıkıyor; bir yazısında Dieudonné, bu kitap için "Bu iki cilde adeta saldırdım ve önüme açılan yeni dünya karşısında şaşkınlığa düştüm. Bu sırada benim cebir bilgim *Mathématique spéciales* (liselerde iki senelik, üniversiteye hazırlık sınıfları) düzeyinde idi, yani determinantlar, bazı denklemlerin çözülebilirliği, üniversel eğrilerdi. *Ecole normale*'de bilgimi iletmekle birlikte bir *ideal* nedir bilmiyordum, tek bildiğim bir grubun ne olduğuydu. Bu durum 1930'da genç Fransız matematikçisinin bilgisi hakkında size bir fikir verir" diyor.

Bourbaki ekibi bazıları Fransız olmayan yirminin biraz üstünde üyeden oluşmaktadır. Bourbaki adı yeni yayıldığında "Bourbaki kimdir?" diye herkes birbirine sormaktaydı; çalışmaları, binden fazla üyesi bulunduğu izlenimi vermektedir. Söylentiye göre Girit'li vatanseverler 17. yüzyılda Emanuel ve Nicolas Skordylis adlarındaki iki kardeşin önderliğinde Türklere karşı başkaldırır. Yiğitlikleri Türkleri öyle etkiler ki onlara "Vurbaşı" yani savaşın önderi denmeye başlanır. Nicolas ve Emanuel gurur duydukları bu lakabı övünçle taşırlar ve bunu torunlarına geçirirler, yalnız Yunancaştırarak Burbaki yaparlar (v yerine β , ş yerine $\times$ gelir). Bir yüzyıl aşkın bir süre sonra Bourbaki'lerden biri, Charles Soter Bourbaki Fransız ordusunda ünlü bir general olur, 1870-71 Fransa-Prusya Savaşı'nda yararlıklar gösterir. İşte Bourbaki adı buradan gelmektedir.

Toplulukta yaş sınırı ellidir. Bu yaşa gelenler görevden (karar alma yetkisi) çekilip yerlerine kalanlar tarafından yenileri seçilir (cooptation). Elli yaşın üzerindeki bir matematikçi henüz iyi ve son derece üretken bir matematikçidir. Ama onun için yeni fikirlere, kendinden 25-30 yaş daha genç birinin fikrine uyum sağlaması güçtür.

Bourbakistler 1939'dan beri, Hilbert'in

düşüncesine göre aksiyomatik olarak matematiği mantıksal temellerinden yeniden alıp kurdular, yeni kavram ve notasyonlar getirdiler; örneğin filtreler (süzgeçler), üniform strüktürler (düzgün yapılar), topolojik vektör uzayları teorisinde Montel uzayını bu arada sayalım. Matematikte, analiz, diferansiyel hesap, geometri, cebir, sayılar teorisi gibi bölümlenin olanaksızlığını gösterip onun yerine strüktür (yapı) kavramına dayanarak temel disiplinlerin bölümlenmesini sağladılar. “Nicolas Bourbaki” takma topluluk adıyla yayımlanan ve periyodik olarak elden geçirip düzeltilen dev başvuru kitapları *Eléments de mathématiques* ile çağdaş matematik üzerinde büyük etki bıraktılar. *Eléments de mathématiques*’lerin 1940’tan beri kitapçıklar halinde kırkı (5000 sayfayı) aşkın cildi yayımlanmıştır. Bu ciltler Eukleides’in *Eléments (Stoikheis)* adlı yapıtı görünümünde bir ansiklopedi gibidir. Bunlar bibliyografik bir başvuru yapıtı değil, başlangıcından sonuna kadar matematiği ortaya seren metinler oluşturmaktadır. Bu kitapçıkların okunması ilke olarak özel matematikte hiçbir bilgi edinimini gerektirmez. Okuyucunun düzeyi ne olursa olsun bir başlangıç kitabı değil bir başvuru kitabıdır. Ele alıp geliştirdiği konular: cebir, genel topoloji, reel bir değişkenin fonksiyonları, Lie grupları vb. dir. Kompleks bir değişkenin fonksiyonları, varyasyonlar hesabı, nümerik (sayısal) analiz konularına ayrılan kitapların çıkması beklenmektedir. Ayrıca birçok dergilerde, örneğin *Archiv der Mathematik*’te Bourbakist makaleler yayımlanmıştır.

Bourbaki’nin içeriğindeki bir şeyi orijinal olmasında bir sorun yoktur. Bourbaki matematiği yenileştirmeye girişmez, “Bir teorem Bourbaki’ye geçmişse o, 2, 20 ya da 200 yıl önce ispat edilmiştir”. Bourbaki’nin yaptığı, daha önce bilinen bir düşünceyi uzun bir süre kalması için tanımlayıp genelleştirmesidir.

Bazı terminolojiyi basitleştirmiş ya da ortadan kaldırmıştır. Yeni terminoloji koyunca da bunu bayağı konuşma dilinden, gerektiğinde de Yunancadan almıştır. Örneğin *hypersphéroïde*

(*hypersphère*) ve *parallélotope* yerine sırayla *boule* (top) ve *pavé* (kaldırım) sözcüklerini almıştır ki bu konuda ciddi olmamakla suçlanmıştır. Bourbaki, ancak ve ancak yöntemleri premislerinden (öncüllerinden) doğal olarak çıkarır, rasyonel olarak organize edilmiş teoriler ileri sürmek ister. Matematikçilerin koyduğu çeşitli yöntemleri, tutarlı bir teori altında, mantıksal düzenlenmiş, kolay sunulmuş, kolay kullanılır bir teoride toplar.

Senede iki ya da üç kez yapılan toplantılarda, bir konuda kitap ya da bölüm düzenlenecekken, bunu yapmak isteyen bir üyeye görev verilir. O önerilen bölüm üzerine görüşünü hazırlar. Bir ya da iki yıl sonra çalışma tamamlanınca, Bourbaki kongresine getirilir, aynen yüksek sesle okunur. Her ispat, nokta nokta incelenir ve acımasızca eleştirilir. Bir bölümün baskıya verilmesi için ortalama 8-12 yıl geçmesi gerekmektedir. Şimdi çıkan bir çalışma, ilk kez yaklaşık 1979’dan tartışılmıştır.

Bourbaki’de elli yaş sınırı dışında tek kural, hiçbir kural olmayışıdır, yani oylanmayacak birşey yoktur, ama her konuda oybirliği gerek. Bir üye kötü bulduğu bir bölümü veto eder. Böylece bölüm basıma gitmeyip yeniden incelemeye alınır; son ifade için yöntemin uzamasının nedeni budur.

Büyük gelecek vaadeden değerli bir genç, kongrelerden birinde bulunmak üzere bir kobay olarak çağrılır. Yalnızca anlaması değil tartışmaya katılması gereklidir. Sessiz durursa bir daha çağrılmaz. Belirli bir nitelik göstermelidir. Bölümler kongreye tarih sırasına göre getirilir; özel bir sıra yoktur. Üyelerin matematiğin her türüyle ilgilenmesi gerektir.

Bourbaki’nin matematiğe katkıları özellikle yüksek ve orta öğretim matematik müfredat programlarına önemli ölçüde yansımıştır. Aksiyomatik oluşundan dolayı Bourbaki’nin kendisine ve bu programların içeriğine epey itirazlar olmuştur.

BAŞARIYA DOĞRU BİR BAŞKA YOL

HURİYE ÖNDER

Türkiye’de ve yurt dışında pek çok üniversitede yüksek matematik, analiz, calculus gibi adlar altında, birinci sınıf seviyesinde, matematiğe giriş niteliği taşıyan dersler verilmektedir. Bu dersler türev ve integral gibi temel kavramları, bunlarla ilgili yöntem ve uygulamaları kapsamakta olup lise son sınıf matematik dersinin genişletilmiş şekli ve devamı olarak da görülebilir. Calculus Türkiye’de ve başta Amerika Birleşik Devletleri olmak üzere birçok ülkede fen ve mühendislik dallarından başka biyoloji, hayat bilimleri, işletme, ekonomi, sosyal bilimler vb. çeşitli dallarda öğrenim görmek isteyen öğrencilerin zorunlu olarak aldıkları bir ders. Dersin amacı temel matematik kavramlarını ve metotlarını öğretmenin yanı sıra matematik dışında çeşitli dallarda öğrenim görecektir olan öğrencilere kendi konularında uygulayabilecekleri matematiksel yöntemleri ve teknikleri vermek; matematiksel modelleri kurup matematiği uzmanlık alanları içinde kullanabilmelerini sağlamak. Matematiğin çok ve çeşitli uygulama alanları olduğunu gözönünde bulundurarak calculus’u temel ve çok kullanışlı bir araç olarak kabul edebiliriz.

ABD ve Türkiye’deki üniversitelere kısaca bakınca dersin her iki ülkede de ana hatları ve kapsadığı kavramlar açısından aynı olduğunu görüyoruz. Örneğin Amerika genelinde de, ülkemizde Orta Doğu Teknik Üniversitesi’nde de bu dersteki başarısızlık oranı % 30 ile % 50 arasında. Bu iki ülkedeki öğrencilerin sosyal ve ekonomik yapısı çok farklı olmakla birlikte matematik derslerine bakış açıları ve karşılaştıkları sorunlar arasında büyük benzerlikler var. Calculus dersi, üzücüdür ki, öğrencilerin öğrenimlerine devam edebilmeleri için aşmak zorunda oldukları bir engel olarak karşımıza çıkıyor. Öte yandan matematik derslerine başarılı olmuş pek çok öğrenci, matematiğin güzelliğinin ve hayatın hemen her alanında karşımıza çıkabilecek dinamik problemlerin çözümünde sağlayacağı kolaylığın farkında değil. Matematik, öğrencilerin aklında

hatırlamaya ve ezberlemeye yönelik karışık yöntemler ve zor formüller dizisi olarak kalıyor; düşünmeye, doğru akıl yürütmeye, algılamaya ve sezgiye dayalı olduğu çoğu zaman anlaşılamıyor. Bu arada geleneksel calculus derslerinde işlenen formüllere ve metotlara dayalı problemleri öğrencilerin eve gidip çözerek, matematiksel düşünen insanlar haline dönüşmesini beklemek de oldukça yanlış bir tutum. Dersin kalabalık sınıflarda ve sıkıcı bir biçimde verilmesinin başarısızlığa katkısı büyük. Ayrıca birçok matematik problemini hesap makinesi kullanarak kolayca çözmek mümkün. Örneğin belirli bir integralin çözümü için INT düğmesine basmak artık yeterli. O halde neden matematik derslerinde bu tür mekanik problemlerin çözümü için gerekli tekniklerle zaman kaybedilsin ve öğrenciye düşünme alışkanlığı kazandırabilecek problemler tercih edilmesin?

Öğrencilerin matematik derslerinden gerektiği biçimde yararlanmaları ve calculus’un zevk alınan, ilginç bir ders haline getirilmesi için klasik yaklaşımdan uzaklaşarak yenilikler yapmak gerekli. Yıllar önce başta Harvard Üniversitesi olmak üzere bilimsel alanda kendisini kanıtlamış birkaç üniversite calculus derslerinde geleneksel tutumdan uzaklaşmışlar ve daha çok kavramaya, düşünmeye ve sezgiye yönelik bir program izlemişlerdir. Bu arada akademik çevrelerin yanı sıra akademik olmayan çevrelerce de ABD’nin uluslararası arenada etkin olabilmesi için calculus derslerinde ülke genelinde köklü değişikliklerin yapılması gerektiğine inanılıyor. Özellikle hükümete bağlı kesim ile iş çevrelerinin inancı büyük ölçüde matematik bilen ve kullanabilen teknik elemanlara ihtiyaç olduğu doğrultusunda; bu yüzden derslerin bir filtre değil pompa görevi üstlenmesi gerektiği savunuluyor.

ABD’nde NSF. (National Science Foundation-TÜBİTAK benzeri bir kurum) tarafından desteklenen ve calculus programlarının

değişmesini öngören birden fazla proje söz konusu. Projelerin hepsi de bir ölçüde bilgisayar ve hesap makinelerinden yararlanmayı öngörüyor. Türkiye gibi hesap makineleri ve özellikle bilgisayarların her kesimde yaygın olarak kullanılmadığı bir ülkede yaşamının verdiği alışkanlıkla ilk başta programların ülke gerçeklerinden uzak olduğu düşünülebilir; fakat teknolojik gelişmelerden yararlanmak ve onları amaçlarımız doğrultusunda kullanmak çağımızın gereklerinden. Bilgisayar ve hesap makineleri yardımıyla birçok matematiksel kavramı daha iyi anlamak ve görselleştirmek mümkün. Teknolojik gelişmeler dersleri daha verimli ve ilginç kılmak için kullanılabilir; yine de bilgisayarlar matematik derslerinin esas hedefini saptırmamalı ve onlara egemen olup kısırlaştırmamalı.

Harvard Üniversitesi'nin Stanford University, University of Arizona, the University of Southern Mississippi, Colgate University, Suffolk Community College ve Chelmsford High School'un katkıları ile yönetmekte olduğu bir projeden bahsetmek istiyorum. Bu proje incelenirken gözardı edilmemesi gereken, programın matematik öğrencileri ve araştırmacılardan çok uygulamalı dallarda öğrenim görecektir. Öngörülen program çerçevesinde öğrencilerin bilgisayar imkanlarını kullanmaları teşvik edilmiş, paket programlardan yararlanarak basit sayısal integrasyon, diferansiyel denklemler ve kök bulma işlemleri yapmaları sağlanmıştır. Projede vurgulanan fikir, çağımızın teknolojik olanaklarının kullanımında bilgisayarların ve hesap makinelerinin, mikroskop işlevi görmesidir. Bilgisayar konunun odağı olmak yerine kavramları anlatmaya ve geliştirmeye yarayan bir araç olarak kullanılmaktadır.

Projenin ana hatlarına bir göz atalım. En çok üzerinde durulan "üçler kuralı". Bu kural mümkün olan her matematiksel kavramın geometrik, sayısal ve cebirsel yaklaşımlarla açıklanması ve aralarında iyi bir denge kurulması şeklinde özetlenebilir. Örneğin türevde zincir kuralı anlatılırken bunun sadece cebirsel bir kural gibi verilmesi yerine $\sin 2x$ 'in türevi olan $2\cos 2x$ fonksiyonunun grafiğini incelemek ve dalga boyunun iki katı olmasını sağlayan 2 katsayısının nereden ve niçin geldiğini tartışmak bu kuralın daha iyi anlaşılmasını

sağlayabilir. İntegral teknikleri ile öğrenciyi bunaltmak yerine, onlara niçin integral almaları gerektiğini vurgulayacak problemler sorulabilir. Kim $y = \sqrt{x^3}$ eğrisinin yay uzunluğu ile ilgilenir. Bunun yerine bir elipsin çevresini hesaplamak daha ilginç olabilir. Arsanın değerli olması nedeniyle bina yaparken arsanın kullanılmayan kısımlarının alanını en aza indirmek, bir üçgenin içine sığabilen en büyük dairenin alanını bulmaktan daha ilginç olabilir. Bu örnekleri çoğaltmak mümkün ama esas amaç öğrencinin ilgisini çekerek düşünmesini sağlamak ve grafik yardımıyla kavramları somut olarak görüp anlamasını kolaylaştırmak. Bu arada cebirsel çözümlerden tümüyle uzaklaşmış değil. Programda birçok matematiksel problem irdelenerek sonucun nicel ve nitel davranışının anlaşılmasına önem veriliyor. Sayısal teknikler de programda yer alıyor.

Geleneksel kitap ve programlarda tam sayılar tercih edilirken; hesap makinelerinin el altında bulunduğu varsayımı ile uygulamalarda kesirli ve yaklaşık rakamların kullanılmasından çekinilmemiştir. Alışageldiğimiz matematik derslerinde trigonometriye geniş bir yer ayrılmakta, trigonometrik ifadeleri içeren integral, türev ve tekniklerin üzerinde uzun uzun durulmaktadır. Üssel fonksiyonlar ve logaritmik fonksiyonlar ise dersin sonlarına doğru görülmekte; hatta türev ve integral konularının işlenmesinden sonra bu tür fonksiyonlarla ilgili uygulama ve tekniklere yer verilmektedir. Önerilen yöntemde ise birçok alana uygulanabilen logaritmik ve üssel fonksiyonlar programın hemen en başında yer alırken; sekant kosekant gibi trigonometrik fonksiyonlarla, türev ve integralleri karışık, cebirsel ve mekanik teknikler gerektiren fonksiyonlara pek yer verilmemektedir. Zorlama problemler yerine daha çok gerçek yaşamdan alınan problemler uygulama için seçilmiştir; fakat fonksiyonlar bazen gerçekte olduğundan daha basite indirgenmiştir. Diferansiyel denklemler ve bunlarla ilgili uygulamalara geleneksel derslerde hemen hiç yer verilmezken, dinamik durumların diferansiyel denklemlere uygulaması, fizik, sosyal bilimler ve hayat bilimlerinden alınan nüfus artışı, üssel artış, lojistik ve yavaşlatılmış artış fonksiyonları, çok değişkenli Lotka-Volterra "av avcı" modeli ve mühendislikte kullanılan "cubic splines" metodu detaylı bir şekilde işlenmiştir.

Programın çarpıcı taraflarından birisi de lokal ve global bakış açısının dikkatlice ayrılmış olması. Örneğin, sabit bir noktadaki türevle fonksiyonun türevinin ne anlama geldiği dikkatlice yazılmış ve bu iki kavram birbirinden ayrılmıştır. Lokal bakış açısı, yaklaştırma tekniklerine ve hata analizine imkan tanımaktadır. İntegral için de aynı yaklaşım söz konusudur. İntegral, belirli integral ve türevin ters işlemi olarak ayrı ayrı incelenmiş ve belirli integralde yaklaştırma teknikleri, sayısal integrasyon ve yine hata analizine yer verilmiştir.

Geniş kapsamlı değişiklikler içeren böyle bir projenin oluşturulması ve uygulanması çeşitli zorlukları da beraberinde getiriyor. Uygulamada ilk akla gelen güçlük yaygın bilgisayar kullanımını gerektirmesi olabilir. Ama zorluklar bununla bitmiyor. Geleneksel yaklaşımdaki programları değiştirmek temel olmakla birlikte aşamalardan sadece birisi. Bu tür bir projeyi ortaya çıkarabilmek veya uygulayabilmek için yadsınamayacak oranda bilgi birikimi ve araştırmaya yönelik matematik bilgisi gerekmektedir. ABD’nde söz konusu projeye katılan kuruluşlar bir yandan programı geliştirirken bir yandan da programı uygulamak isteyen yüksek okul ve liselerdeki öğretim elemanlarını bilgilendirmek ve eğitmek için çaba sarfetmektedirler. Temel matematik derslerinin içeriğinde köklü değişiklikler getiren bir programın uygulamaya geçirilmesinde geleneksel materyal ve kitaplar yetersiz kalmaktadır. Sağlıklı bir uygulama için yeni fikir ve tekniklerin kullanıldığı alıştırmalar problemlerine yer veren uygun kitap ve notların yazılması da zorunlu olarak proje kapsamına girmektedir.

Türkiye’de de matematik derslerine ülke yapısına uygun, yenilikçi ve özgün eğitim projeleri ile benzer yenilikler ve değişiklikler getirilmesi olumlu bir gelişme olacaktır.

Aydınlatıcı olması bakımından aşağıda bu programda kullanılan birkaç problemi sıralıyorum.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen elipsin

çevresini hesaplayınız.

Yanıt: Yayın uzunluğu formülünden, çevre

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

integraline eşittir. Bu integral $a \neq b$ hali için bilinen tekniklerle hesaplanamaz.

Alışageldiğimiz derslerde ve kitaplarda öğrencilere bunun eliptik bir integral olduğu ve bilinen fonksiyonlar cinsinden hesaplanamayacağı söylenerek konu kapatılır. Bu doğru olmakla birlikte sayısal integrasyon teknikleri ile bu integral dolayısıyla da elipsin çevresi yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu da $2\sqrt{ab}\pi$ ve $(a+b)\pi$ gibi yaklaşık formüllerin anlaşılmasında ve öneminin kavranmasında iyi bir yoldur.

2.	x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	f(x)	3.7	3.8	3.8	3.9	4.0	4.0

tabloyu kullanarak

a) $y = f(x)$ ’e $x = 0.6$ noktasında teğet olan doğrunun (yaklaşık) denklemini yazın.

Yaklaşık yanıt: $y = 0.26x + 3.74$

b) $f(0.7)$, $f(1.2)$ ve $f(1.4)$ değerlerini yaklaşık olarak hesaplayın. Bulduğunuz sonuçlardan hangisi daha güvenilirdir? Neden?

3. Bilet satan bir kulübe saat 9.00’da açılmakta ve saatte ortalama 200 kişiye hizmet vermektedir. Aşağıdaki grafik bilet kuyruğundaki insan sayısının zamana (t) göre değişme hızını (r) göstermektedir.

a) Saat 10.00’da bilet kuyruğunda kaç kişi kaldığını hesaplayın.

Yaklaşık yanıt: 200 kişi.

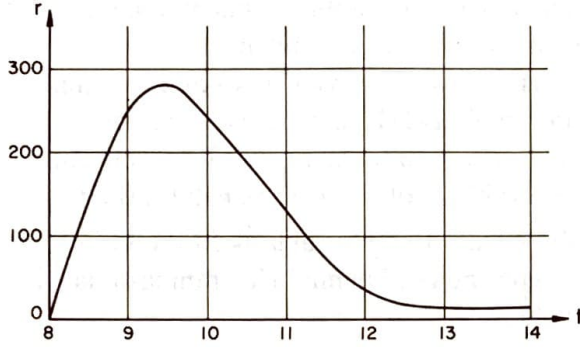
b) Kuyruktaki insan sayısının en fazla olduğu saati bulun.

Yaklaşık yanıt: 10.20.

c) Kuyrukta ne zaman hiç kimse kalmaz?

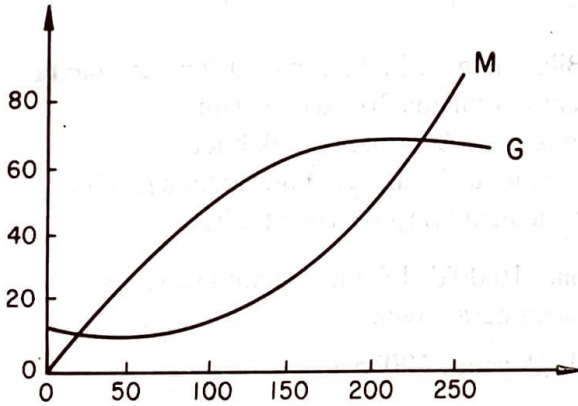
Yaklaşık yanıt: 12.20

Soruları cevaplarken hız ve alan ile türev ve integral arasında bir ilişki kurmaya çalışın.



4. Aşağıdaki grafikte toplam maliyet M ve toplam gelir G ile bir birim 1000 \$ olmak üzere gösterilmiştir. Grafiği kullanarak maksimum kârı hesaplayın. Cevabınızı türev kullanarak açıklayın.

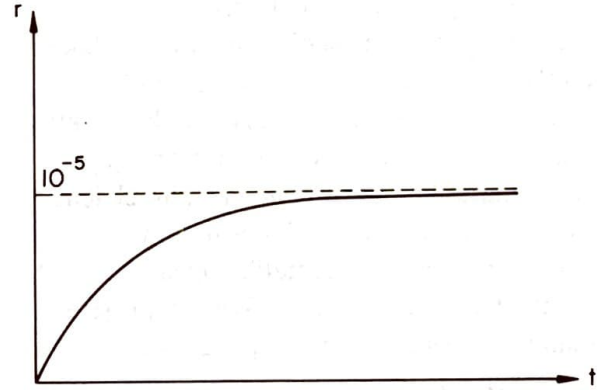
Yaklaşık yanıt: 40.000 \$



5. 100 milyon litre su kapasiteli bir depo, bir yerleşme merkezine 1 milyon litre su sağlamaktadır. Deponun bir kısmı günde 0.9

milyon litre su sağlayan bir pınardan, geri kalan 0.1 milyon litresi de yakındaki bir dereden sağlanan sularla yeniden doldurulmaktadır. Pınarın suyu hiç tuz içermezken, dere suyunda 1 litrede 0.0001 gr. oranında tuz bulunmaktadır. Başlangıçta deponun su ile dolu olduğunu ve içinde hiç tuz olmadığını biliyoruz. Herhangi bir anda depodaki su ve tuzun homojen olarak karışmış olduğunu varsayalım. Depo içerisindeki tuz oranını zamana bağlı bir fonksiyon olarak çiziniz.

Yanıt: $r = 10^{-5} (1 - e^{-0.01t})$



6. Hesap makinesi kullanarak x'in yeteri kadar büyük değerleri için $(1 + \frac{1}{x})^x$ ifadesinin 1'e eşit olduğunu gösterin. Sizce bu neden oldu?

Kaynakça

1. Gordon, Sheldon P., ve Hughes Hallet, Deborah. (1991). "Calculus Reform and Its Implications for Two-Year Colleges." *The AMATCY Review*, 12(2), 50-57.
2. National research Council (1989). *Everybody Counts*. Washington, DC.: National Academy Press.
3. Hughes Hallet, Deborah, ve Gleason, Andrew ve diğerleri (1990). *Core Calculus Consortium* (yayınlanacak).
4. Taylor, Peter D., *An Introduction to the Analysis of Functions* (yayınlanacak).

ORTA ÖĞRETİMDE MATEMATİK EĞİTİMİ ÜZERİNE BAZI DÜŞÜNCELER

AYDIN AYTUNA

Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van'da düzenlenen 1990 Ulusal Matematik Sempozyumu içindeki "Eğitim" konulu panelde yapılan bir konuşma.

Orta öğretimdeki matematik eğitimi ile ilgilenmeye başlamam, bu yıl, Lise III müfredat programının vermeyi amaçladığı matematiğin, ODTÜ 1. sönestre Calculus dersiyle içerik bakımından aynı olduğunu görmemle ve öğrencilerimin genellikle bu amaçlanan becerilere sahip olmadığını fark etmemle başladı. Bu olguyu anlamaya çalıştığımda, müfredat programının içeriği ve veriliş şekli, üniversiteye giriş sınavları, özel dersanelerin işlevi, öğretmenlerin düzeyi, kaynak kitap gibi parametreleri içeren oldukça karmaşık bir yapıyla karşılaştım. Sorunları araştırma sürecimde M.E.B. Matematik Programını Geliştirme Komisyonu'nun toplantılarına mümkün olduğunca katılmaya başladım. Bu toplantılar benim için orta öğretimde öğretmenlik yapan ve bu konulara duyarlı arkadaşların düşüncelerinden ve sorunlarından haberdar edilmem açısından çok yararlı oldu ve olmakta. Böylesi bir panele katılmam önerildiğinde katılmayı kabul etmem bu konuların (üniversite düzeyindeki eğitimin sorunları ve programlanması ile birlikte ele alınarak) matematik sempozyumlarında tartışılması gerektiğine olan inancımın kaynaklanıyor.

Orta öğretim matematik programının yapılmasında önemli bir amacın da öğrenciyi üniversite düzeyindeki matematik derslerine hazırlamak olduğu gözönüne alındığında, üniversite öğretim üyelerinin karşılarına gelen öğrencilerden ne tür ve ne kadar matematik istediklerini düşünmek, belirlemek ve bunu program yapıcılara bildirmek gibi bir sorumluluğu da kendinden ortaya çıkarmaktadır.

Ülkemizde yapımı 1963 Fen Lisesi Projesiyle başlayan ve giderek tüm liselerimizde uygulanmaya konan matematik programının temelini oluşturan, School Mathematics Study Group (SMSG) ve benzeri grupların raporlarının hazırlanmasında da böylesi bir olguyu görmekteyiz. Kanımca bu gelişmelerin çok kısa bir tarihesine bakmak yararlı olacaktır. ABD'de, bazı matematikçilerin 1950'lerden başlayarak İkinci Dünya Savaşı sürecinde gelişen ve/veya uygulama alanı bulan Oyunlar Teorisi, Lineer Programlama, İstatistik gibi matematik dallarını üniversite ve giderekte orta öğretim programlarına girmesini sağlamak ve matematiğe araştırma düzeyinde oluşan yeni bakış açısını bu programlara yansıtmak amacıyla ülkenin çeşitli üniversitelerinde komiteler oluşturduklarını görmekteyiz. Bu gruplara bazı orta dereceli okullardaki öğretmenlerin de katılımıyla kapsamlı bazı raporlar üretilmiştir. Burada sözünü ettiğim bakış açısı Fransa'daki Bourbaki okulunun öncülüğünde matematik biliminin yapı kavramına dayanılarak aksiyomlar yardımıyla yeniden örgütlenmesi sürecinde ortaya çıkan ve kümeler, değişkenler, fonksiyonlar gibi birleştirici unsurları içeren yaklaşımlardır. Bu komitelerce yazılan raporlar Sputnik'in uzaya fırlatılmasından sonra, Amerikan toplumunun baskısı ve federal devletin parasal kaynaklar sağlaması sonucunda matematikçilerden ve eğitim konuları ile ilgili bilim adamlarından oluşan SMSG'nin kavramsal altyapısını oluşturmuştur. Bu çerçevede 1960'lardan başlayarak bu grupça hazırlanan ilk ve orta öğretime yönelik matematik ders kitapları ve grubun önerilerini içeren yayınlar (matematik) kamuoyunda yaygın bir biçimde tartışılmış, sorgulanmış, denenmiş ve bunların ışığında yeniden ele alınarak geliştirilmiştir. Bu süreç halen de devam etmekte ve ABD'deki orta öğretimdeki matematik eğitimi genellikle değişen

derecelerle de olsa bu süreci yakından takip etmektedir. Batı Avrupa'nın birçok ülkesinde de benzer bir gelişim gözlenmektedir.

Üniversitelerden kaynaklanan ancak çeşitli aşamalarında değişik unsurların önemli roller üstlendiği böylesi dinamik bir model adapte edilerek iyi bir zamanlama ve yerinde bir kararlar ülkemizde de 1964 yılından itibaren denenmeye başlanmıştır. Ancak kanımca sistemin gereği olan geniş tabanlı bir tartışma ortamı yaratılamamıştır. Ülkemizde bağlayıcı bir nitelik de taşıyan müfredat programlarının geliştirilmesinde bir tartışma ortamından çıkarılacak verilerin önemi kuşkusuz daha da büyüktür. Bu boşluğu Türk Matematik Derneği'nin orta öğretime yönelik çıkartacağı derginin dolduracağını ümit ediyorum.

Matematik eğitime yönelik bazı genel şeyler söylemeye başlamadan önce orta öğretimin herhangi bir kademesinde öğretmenlik yapmadığımı ve bu konularla ilgili geçmişe dayalı bir tecrübemin olmadığını hatırlatarak, bunları daha iyiyi hep birlikte arama isteğimden kaynaklanan bazı düşünceler olarak değerlendirmenizi dilerim. Lise Matematik müfredat programlarının amaçları kanımca en azından aşağıdaki öğeleri içermelidir:

1. Çeşitli dallarda öğrenimlerini sürdürecektik öğrencilere seçmiş oldukları dallarda yararlı olacak matematiğin temel kavramlarını vermek, başka bir deyişle oldukça standartlaşan üniversite birinci sınıf matematiğinin ön bilgilerini vermek.
2. Formal eğitimlerini sürdür(e)meyecek gençleri de düşünerek bir yandan çağın ve toplumun gereksinimleri doğrultusunda gündelik hayata yönelik matematiği seçmek ve öğretmek, öte yandan da evrende ve doğada olan matematiğe dikkati çekmek ve bunun hakkında gerekli bilgileri vermek.
3. Eğitimin genel amaçları olan genel kültür vermeye ve kişinin entellektüel kapasitelerini geliştirmeye yönelik amaçlar çerçevesinde, mantık kuralları ile düşünmeyi, kendini ifade etmeyi ve yaratıcı olmayı öğretmek. Antik çağlardan beri uygarlığımıza damgasını vuran matematiğin bir insanlık tecrübesi olarak ele alınarak gelişmesi ve bugünkü durumu hakkında genç insanları bilgilendirmek.

Bu matematiğin verilmesinde uygulanacak yöntem doğal olarak yapıları ve onların arasındaki ilişkileri ön plana çıkaran aksiyomatik metot olmalıdır. Ancak ileri düzey matematiğindeki postullar ile orta öğretimde seçeceğimiz aksiyomatik arasında bir ayrım yapmak gerekmektedir. Öğrencinin aşına olduğu, sezgilerinin tahminlerde bulunmasını olası kılacak olgularda bilgileri organize etme yoluyla aksiyomatizasyona gidilmesi ve elde edilen aksiyomatik ile aşıkarmayan (açık olmayan) teoremlerin ispatına yönelinmesi öğrenciye model kurma ve soyutlama gibi kavramları da vereceğinden daha uygun bir yol gibi gözükmektedir. Öte yandan aksiyomatik metodun gücünün sezdirilmesi bakımından aksiyomlardan hareketle elde edilecek teoremlerin bu yapıyı paylaşan başka nesnelerde de geçerli olduğunu vurgulamak gerekmektedir.

Öğrenci matematik öğreniminde aktif, üretici bir rol üstlenmeli, matematik yapmaya mümkün olduğu kadar özendirilmelidir. Bu yapılmadığı müddetçe sınıfta kanıtlanan teoremleri ve hatta bunların kanıtlarını ezberleyerek başarılı olmaya çalışan bir öğrenci kitlesinin oluşması kaçınılmazdır. Ancak bu yolla öğrenci matematik yapmanın "deneysel" yönü diyebileceğimiz, tahminlerde bulunmak, bunları örnekler üzerinde test ederek ya karşı örnek bulmak ya da kanıtlamaya çalışmak gibi olgularla tanışabilir. Bu nedenle matematik eğitiminde problem çözme üzerinde fazlaca durmak gerekmektedir. Problemlerin en azından bir kısmı sınıfta verilen teorem veya tanımların basit ve rutin uygulamalarından değil de mümkün olduğu kadar gündelik hayattan veya ilgi çekmesi beklenen konulardan seçilmeli ve bu problemlerin yaratıcılığa ve keşfe yönelik özellikler içermesi istenmelidir.

Üniversite matematiği üniversiteye bırakılmalı, lise son sınıf programında üniversite matematiği için gerekli ön bilgiler (yani Precalculus ve analitik geometri) işlenmeli artan zamanlarda da çözüm stratejilerinin tartışıldığı ve problemlere değişik bakış açılarından özendirildiği problem saatleri konulmalıdır. Ancak lise son sınıfta seçilen öğrencilere üniversite I. sınıf matematiğini seçmeli ders olarak vermekde olasıdır. Belki de böylesi bir uygulamanın bazı üniversitelerde uygulanan Calculus muafiyet

sınavlarıyla birlikte ele alındığında öğrenciye artı bir motivasyon kazandırarak eğitim düzeyinin yükselmesine de katkısı olabilir. Yeri geldikçe matematik kavramları tarihinden alıntılar yapılarak matematiğin bugünkü haline gelme sürecinde yaşanan krizler, aşamalar hakkında bilgiler öğrenciyle dengeli bir biçimde verilmeli ancak bunun matematikçilerin hayatlarını anlatımı şekline dönüşmesinden de kaçınılmalıdır.

Toplumumuzda bilgisayar kullanımının artması, bu teknolojiye, eğitim, öğretim alanında uygulama bulması gibi, baş döndürücü

ilerlemeler bilgisayara yönelik matematiğin (diskre, sonlu matematik) orta öğretimde ağırlığının artması görüşünü de beraberinde getirmektedir. Özellikle ABD’nde bu görüşün bazı savunucuları matematik öğretimine algoritmik bir bakış açısından yaklaşmayı da önermekteler. Kanımca bu konuların, uzman arkadaşların katkılarıyla Türk matematik kamuoyunda tartışılmaya başlanması herkes için çok yararlı olacaktır.

ÖDÜLLÜ PROBLEM

Hacettepe Üniversitesi Antropoloji Bölümü Öğretim Üyelerinden Bozkurt Güvenç ödüllü bir problem önerdi. Çözümlerinizi bekliyoruz.

DURUM/KONUM:

Tibet yaylasında tek başına yaşayan Hintli Fakir, yiyecek temin etmek üzere;

Haftada bir kez, gün doğarken, dağdaki kulübesinden çıkar belli bir patikayı izleyerek, gün batarken köye varır; o geceyi köyde geçirdikten sonra, yine gün doğarken yola koyulup aynı patikadan gün batarken kulübesine dönermiş.

SORU:

Hintli Fakir’in iniş ve çıkış yolculuğu sırasında, patikanın **bir** noktasından aynı anda (aynı saatte) geçtiğini gösteriniz.

DİKKAT:

İstenen nokta Fakir’in iniş ve çıkış hızına bağlı olarak, her gidiş-dönüşte yeri değişebilen bir noktadır.

ÖDÜL:

E.T. BELL’in **Men of Mathematics: From Zeno to Poincare**. .Y. Simon and Schuster, 1961

ÇEKMECELER, ÇORAPLAR VE MATEMATİK PROBLEMLERİ

ALBERT ERKİP

Matematikte çok basit ama o derecede zarif ve yararlı bir yöntem “çekmece ilkesi” diye adlandırılıyor. İlkeyi şöyle anlatalım: Elimizde çekmeceleri olan bir dolap ve çekmecelerde çoraplar olsun. Eğer her çekmecede en çok bir çorap varsa çorapların sayısı çekmecelerin sayısından fazla olamaz. O halde; **çorap sayısı çekmece sayısından fazla ise, en azından iki çorap aynı çekmecede olmalıdır.** Bu işi biraz açalım; iki çorap ve üç çekmece varsa hiçbir şey söyleyemeyiz, dört çorap ve üç çekmece varsa en azından iki çorap aynı çekmecede olmalıdır. Bunu ileri götürmeye çalışalım, beş çorap ve üç çekmece varsa çoraplar çekmecelere 5, 0, 0 veya 4, 1, 0 veya 3, 2, 0 veya 3, 1, 1 ya da 2, 2, 1 olarak dağılabilirler. Her durumda söylenebilecek yine en azından iki çorabın aynı çekmecede olduğudur. Altı çorap ve üç çekmece için durum değişmez, ancak yedi çorap ve üç çekmece varsa bu kez en az üç çorabın aynı çekmecede olmaları gerektiğini görürüz. İlkeyi bir de tersine işletelim; iki çorap ve üç çekmece varsa en azından bir çekmece boştur!

Peki bu dediklerimizin matematikle ilgisi ne? İlgi şöyle: bazı problemlerde çoraplar ve çekmeceleri uygun bir şekilde tanımlarsak çekmece ilkesi bazı “çorapların” birtakım özellikleri olduğunu söyler. Aşağıda bunun çeşitli örneklerini göreceğiz.

Örnek 1: Birim kare içinde rasgele beş nokta alalım. Bunlardan aralarındaki uzaklık $1/\sqrt{2}$ birimi geçmeyen iki tane nokta seçebileceğimizi kanıtlayınız.

Çözüm: Birim kareyi kenarları $1/2$ olan dört küçük kareye bölelim. Bunlar çekmeceler, çoraplar ise alınan beş tane nokta. Çekmece ilkesinden en az iki nokta (çorap) aynı küçük karede (çekmecede) olmalı. Bu iki nokta arasındaki uzaklık en çok küçük karenin köşegen uzunluğu, yani $1/\sqrt{2}$ birim olabilir.

Diğer örneklerle geçmeden çekmece ilkesinin tam olarak ne yapabildiğine bakalım. Örnekte istenen koşulu sağlayan iki nokta olduğunu kanıtladık ama bu noktaların hangi noktalar olduğunu, aralarındaki uzaklığın tam ne olduğunu bilemeyiz. Çekmece ilkesi bize bu noktaları nasıl bulabileceğimiz konusunda bir yol gösterdi fakat örneğin aynı koşulu sağlayan başka nokta olup olmadığı ya da istenen noktaların hangi küçük karede olacakları konusunda hiçbir şey söylemedi. Matematiksel bir deyişle çekmece ilkesi bir “varlık” kanıtlama yöntemidir, yani bize bir takım özellikleri olan bir şeyin var olduğunu söyler, bunun nasıl bulunabileceği hakkında bir yol gösterir ama bundan da fazlasını yapmaz.

Örnek 2: 1 ile 99 arasında verilen 55 tane farklı tamsayının içinde aralarındaki fark 10 olan en az iki tamsayı olacağını gösteriniz.

Çözüm: Verilen sayıları $a_1, a_2, \dots, a_{55}$ ile gösterelim ve her i için $b_i = a_i + 10$ sayılarını tanımlayalım. Bu sayılar çoraplarımız, $55 + 55 = 110$ tane çorap var. Öte yandan a_i ve b_i tamsayıları 1 ile $99 + 10 = 109$ arasında. Çekmeceler 1, 2, ..., 108, 109 sayıları (daha doğru bir deyişle bu sayıları içeren birer elemanlı kümeler) olsun. 110 çorap ve 109 çekmece varsa iki çorap aynı çekmecededir. Yani iki sayı birbirine eşittir. Bu iki sayıyı bulalım. Bunların ikisi de a cinsi olamaz, çünkü a_i sayıları birbirlerinden farklıydı. Aynı nedenle ikisi birden b türü olamaz, o halde $a_i = b_j$ olacak şekilde bir çift vardır. Bu ise $a_i - a_j = 10$ demektir.

Örnek 3: 1 ile 99 arasında verilen 51 tane farklı tamsayının içinde aralarındaki fark 10 olan en az iki tamsayı olacağını gösteriniz.

Çözüm: Deminki yöntem bu kez işlemeyecek. (neden?) Farklı bir yol deneyelim: Çoraplar verilen 51 tamsayının birer basamağı olsun.

Çekmeceler ise 0, 1, 2, ..., 8, 9 tamsayıları. 10 çekmece ve 51 çorap olduğundan en azından 6 çorap aynı çekmecededir. Bu ise en az 6 sayının birler basamağı aynı demek. Bu 6 sayı için onlar basamağına bakalım; bu 0, 1, 2, ..., 8 veya 9 olabilir. Çekmeceleri $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}$ kümeleri olarak tanımlarsak 6 sayıdan en az ikisinin onlar basamağının ardışık sayılar olduğunu buluruz. (onlar basamakları neden eşit olamaz?) Sayıların onlar basamakları ardışık, birler basamakları eşitse aralarındaki fark 10 olur.

Örnek 4: Bir reel sayısı ve bir n pozitif tamsayısı verilsin. $|qx - p| < 1/n$ eşitsizliğini sağlayan p ve $0 < q \leq n$ tamsayıları olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için ix sayılarının tamsayı ve ondalık kısımlarını ayıralım ve $0 \leq r_i < 1$, p_i tamsayı olmak üzere $ix = p_i + r_i$ şeklinde yazalım. Bu durumda sıfırla bir arasında $n + 1$ tane r_i sayısı bulduk, bunlar çoraplar. Çekmeceler için $[0, 1)$ aralığını n eşit uzunlukta parçaya bölelim, çekmecelerimiz $[0, 1/n), [1/n, 2/n), \dots, [(n-1)/n, 1)$ aralıkları, Çekmece ilkesinden en az iki r sayısı aynı küçük aralıkta bunlara $j < k$ olacak şekilde r_j ve r_k diyelim. r_j ve r_k $[m/n, (m+1)/n)$ gibi bir aralıkta olduklarından $|r_k - r_j| < 1/n$ dir. Başa dönelim. $kx = p_k + r_k$ ve $jx = p_j + r_j$ idi. O halde $(k-j)x = (p_k - p_j) + (r_k - r_j)$ olur. $q = k - j$ ve $p = p_k - p_j$ dersek, p ve q nun tamsayı oldukları ve $0 < q \leq n$ olduğu görülür. Son olarak da $|qx - p| = |r_k - r_j| < 1/n$ olduğunu görürüz.

Bu örnekte elde ettiğimiz eşitsizliği q ile bölelim. Bir x reel sayısı ve bir n pozitif tamsayısı verildiğinde paydası en çok n olan ve $|x - p/q| < 1/nq$ eşitsizliğini sağlayan bir p/q rasyonel sayısı olduğunu kanıtlamış olduk. Bu eşitsizlik rasyonel sayıları kullanarak reel sayılara istediğimiz kadar yaklaşabileceğimizi kanıtlıyor.

Örnek 5: $0 < |a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$ eşitsizliğini sağlayan en çok 6 basamaklı a, b, c tamsayıları bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm: Örnek 4'tekine benzer bir yol izleyeceğiz. $0 \leq a, b, c < 10^6$ olacak şekilde 10^6 tane a, b ve c sayısı vardır. Bu sayıları kullanarak $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ şeklinde $10^6 \times 10^6 \times 10^6 = 10^{18}$ reel sayı elde ederiz. Öte yandan $0 \leq a + b\sqrt{2} +$

$c\sqrt{3} < (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) 10^6 < 10^7 - 1$ olduğundan, tüm $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ sayıları $[0, 10^7 - 1)$ aralığındadır. Bu aralığı $10^{18} - 1$ eşit parçaya bölelim. En az iki sayı, $a_i + b_i\sqrt{2} + c_i\sqrt{3}$ ve $a_j + b_j\sqrt{2} + c_j\sqrt{3}$ uzunluğu $(10^7 - 1)/(10^{18} - 1) < 10^{-11}$ olan bir aralığa düşer. O halde $|(a_i + b_i\sqrt{2} + c_i\sqrt{3}) - (a_j + b_j\sqrt{2} + c_j\sqrt{3})| < 10^{-11}$ olmalıdır. $a = a_i - a_j$, $b = b_i - b_j$, $c = c_i - c_j$ alırsak bu aradığımız eşitsizliğin sağ yanını verir. Eşitsizliğin sol yanı ise (a, b, c) üçlüsünün $(0, 0, 0)$ olmadığından (neden) ve $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ve $\sqrt{6}$ 'nın irrasyonel oluşlarından gösterilebilir.

Örnek 6: Rasyonel sayıların ondalık açılımlarının periyotlu olduklarını kanıtlayınız.

Çözüm:

Hepimizin iyi bildiği bu gerçeğin bir örnekte kanıtını Matematik Dünyası'nın 1991 yılı ikinci sayısında, Tuğrul Taner'in "Gerçek Sayı Nedir" adlı yazısında görmüştünüz. Kısaca tekrarlayalım: p/q rasyonel sayısının ondalık açılımını bulmak için p yi q ya böleriz. Tamsayı kısmından sonra kalanlara bakalım. Kalanlar sıfırla $q-1$ arasında tamsayılardır. Çoraplarımız kalanlar, çekmeceler ise 0, 1, ..., $q-1$ olacak. Çekmece ilkesinden ilk q kalana bakarsak bunların en az ikisinin aynı olacağını buluruz. Öte yandan bölmenin bir sonraki adımında bir önceki kalanla devam ediyoruz. O halde aynı kalanlardan sonraki adımlar aynı olacak, yani açılım devirli çıkacaktır.

Konu ile ilgili birkaç kaynak ve her zamanki gibi problemlerle yazıyı bitirelim.

Kaynaklar

Verdiğimiz örnek ve problemlerin çoğu **The USSR Olympiad Problem Book** ve Ross Honsberger'in **More Mathematical Morsels** adlı kitabından uyarlandı. İlkine daha önce bu köşede değinmiştik, ikincisi The Mathematical Association of America tarafından 1991 yılında yayınlanmış, içinde özellikle olimpiyatlarda önerilen ya da kullanılan çok sayıda değişik konuda problem var. Kitap "Dolciani Mathematical Expositions" adlı bir dizinin onuncu yayını. Dördüncü örneğimiz ve benzer sorular Türk Matematik Derneği çevirileri arasında çıkan Ivan Niven'in **Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar** kitabında bulunabilir.

PROBLEMLER

1- Bir toplantıya katılanlardan bazıları el sıkışıyorlar. En az iki kişinin aynı sayıda el sıkıştıklarını kanıtlayınız.

2- Verilen 7 farklı reel sayı içinde

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1/\sqrt{3}$$

eşitsizliğini sağlayan x ve y bulunduğunu gösteriniz.

3- $[0, 4]$ kapalı aralığı içinde boyları bir birim olan 10 tane kapalı aralık veriliyor. Aralıklardan en az dördünün en az bir ortak noktası olduğunu gösteriniz.

4- Bir satranç ustası önemli bir turnuvaya hazırlanmak için 11 hafta boyunca hazırlanıyor. Usta her gün en az bir maç yapıyor, ancak fazla yorulmamak için de bir haftada en çok 12 maç yapmaya karar veriyor. Ustanın belli bir zaman aralığında ardarda tam 20 maç yapacağını gösteriniz.

5- 52 tane farklı tam sayıdan ikisinin toplam ya da farkı 100 ile tam olarak bölünebilir, kanıtlayınız.

6- Kenarları bir metre uzunluğunda kare şeklinde bir bilardo masasında bir köşeden başlayarak topu herhangi bir doğrultuda rasgele yuvarlıyoruz. Topun belli bir süre içinde köşelerden birine 5 cm'den daha yakın olacağını gösteriniz.

7- (1987 Olimpiyatı) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n$ reel sayıları veriliyor. $k > 1$ tam sayısı verildiğinde

$$|e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

eşitsizliğini sağlayan ve hepsi birden 0 olmayan, $|e_i| < k$ tamsayıları bulabileceğinizi gösteriniz.

AKILDAN ÇARPMA TEKNİĞİ

Yazan: Dr. Bahri Kaderoğlu

...

« Kitabınız için çok teşekkür ederim. Çok ilgimi çekti. Çünkü, ben de lise çağındayken, sizin bulduğunuz çarpma yöntemini bulmuştum. Bunu sır olarak sakladım hep. Gençlikte "akıldan çarpma" yapar fiyaka atardım. » ...

Ali Nesin

İşte size beyin jimnastiğiyle matematik sevgisi aşılayabileceğiniz bir kitap...

Örneğin $735^2 =$ sonucunu bir solukta yazıvermek hoşunuza gider mi? Cevabınız evetse bu kitabı okuyarak yöntemi özümsemelisiniz. Yazar önsüzünde «Herkesin cebinde bir hesap makinesi taşıdığı günümüzde akıldan çarpmanın ne önemi olabilir diyenlerimiz çıkabilir. Sözümüz onlara değil, çünkü insan zekâsının kendi sınırlarını zorlamasındaki güzelliği görebilen çok kişi var yeryüzünde» demektedir ve kitap içinde milyonluk sayıların zihinsel çarpımına varan yöntemi de öğretmektedir. Özellikle mekanik alışkanlıklara itilen gençlerin yetiştirilmekte olduğu bir çağda insanlara ilginç ufuklar açabilecek bir kitap.

Kitabın TÜBİTAK'ca onaylanmış ve Milli Eğitim Bakanlığı'nca da (Tebliğler Dergisi 30 Eylül 1991) tavsiye edildiğini belirtelim.

Bahri Kaderoğlu adına 687264 no.lu posta çeki hesabına 20.000 lira yatırılarak «Alındı» eki ve bir mektupla istenebilir, ödemeli gönderilmez.

Yazışma Adresi

Dr. Bahri Kaderoğlu P.K. 2 Şirinyer 35142 İZMİR

ALİŞTIRMA SORULARI

A31. Elemanları pozitif olan $a_1, \dots, a_n, \dots$ aritmetik dizisinde

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

eşitliğini gösteriniz.

A32. n tam ve 1 den büyük bir sayı olduğuna göre

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < n \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

(Hazırlayan: H. Demir)

A33. Hangi üçgenlerde kenarlar üzerine çizilen karelerin merkezleri doğrudur?

A34. Bir ABCD dik yamuğu veriliyor

(AB $\perp$ BC $\perp$ CD). Bunun içine, dış teğet doğruları BC, DA olan, birer tabana ve birbirlerine teğet iki çember çiziliyor. |AD| uzunluğunu çemberlerin u, v yarıçapları türünden hesaplayınız.

(Hazırlayan: H. Demir)

A.35 Bir ABCD dışbükey kirişler dörtgeninde bir kenara ait yüksekliği, karşı kenarın ortasından bu kenara dik olarak ulaşan doğru parçası olarak tanımlayalım.

a) Dört yükseklik doğrusu bir H noktasında kesişirler. (H ye dörtgenin ortosantrı diyebiliriz.)

b) Kenar uzunlukları a, b, c, d ve yükseklikleri h_a, h_b, h_c, h_d ise dörtgenin alanı

$$S = \frac{1}{4} (ah_a + bh_b + ch_c + dh_d)$$

dir.

(Hazırlayan: H. Demir)

YARIŞMA SORULARI

Y31. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA, AB doğrularına sırasıyla D, E, F noktalarında değiyor. $EF \cap BC = D'$ ve iç merkez I işe $ID' \perp AD$ olduğunu kanıtlayınız.

Y32. Bir ABCD dışbükey dörtgeninde kenar uzunlukları $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ ve köşegen uzunlukları $e = |AC|$, $f = |BD|$ dir. P, dörtgenin dışında bir nokta ise ortak köşeleri P ve tabanları, dörtgenin kenar ve köşegenleri olan üçgenlerin alanları arasında

$$S_a S_c + S_b S_d = S_e S_f$$

bağıntısının varlığını gösteriniz.

(Hazırlayan: H. Demir)

Y33. Bir ABCD karesi katlanarak A köşesi [BC] üzerindeki bir A' noktasına getirilmiştir. Bu katlamada [AD] kenarı [A'D'] durumunu almışsa ve $AD' \cap CD = E$ ise CEA' üçgeninin r iç yarıçapının |ED'| ye eşit olduğunu gösteriniz.

Y34. Ölçüsü derece türünden tam sayı olan bir açının cetvel ve pergelle çizilebilmesi için gerek ve yeter koşulun, ölçüm açısının 3'ün katı olduğunu kanıtlayınız. (İpucu: $\tan 3^\circ$ yi hesaplayınız).

Y.35 $n > 1$ için $n!$ sayısının tam kare olup olmayacağını araştırınız.

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Ağustos 1992 tarihinden öne elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınız-soyadınızı adresinizi, ve öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

DEĞERLENDİREN: ALPER HALPUTOĞULLARI

ALİŞTIRMA SORULARI

A21. x, y, z sayıları $(0, \pi)$ açık aralığında olduğuna göre

$$\cos x \cos y - \cos z = 0$$

$$\sin x \sin y - \sin z = 0$$

sisteminin çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜM I: (Mustafa Uçkan, İzmir)

$$\cos x \cos y = \cos z$$

$$\sin x \sin y = \sin z$$

Burada her iki tarafın karesini alıp taraf tarafa toplayalım.

$$\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ ile $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ eşitliklerini yukarıda yerine koyalım.

$$\cos^2 x (1 - \sin^2 y) + \sin^2 x (1 - \cos^2 y) = 1.$$

$$\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} - \cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1$$

$$\sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = 0$$

elde edilir. İki karenin toplamı sıfır olduğuna göre:

(1) $\sin x \cos y = 0$ veya (2) $\cos x \sin y = 0$ olmalıdır.

x, y, z nin $(0, \pi)$ aralığında olması gerektiğinden;

(2)'de $\cos x = 0$ alınırsa $x = \frac{\pi}{2}$ ve (1)'den

$y = \frac{\pi}{2}$ bulunur. Bulunan x ve y değerlerini verilen

sistemde yerlerine yazarsak $z = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

(istenen aralıkta başka çözüm yoktur).

Öyleyse verilen sistemin çözüm kümesi

Ç.K. = $\{(x, y, z) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM II (Çetin Camcı, İzmir)

$$\cos z = \cos x \cos y$$

$$\sin z = \sin x \sin y$$

+

$$\cos z + \sin z = \cos(x - y).$$

Öte yandan

$$\cos z + \sin z = \cos z + \cos(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos(z - \frac{\pi}{4})$$

O halde

$$\cos(x - y) = \sqrt{2} \cos(z - \frac{\pi}{4}). \text{ bulunur. Buna göre}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq \cos(z - \frac{\pi}{4}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olmalıdır. } z, (0, \pi)$$

aralığında olduğundan

$$\frac{\pi}{4} \leq z - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq z \leq \pi \quad (1)$$

Benzer şekilde:

$$\cos z = \cos x \cos y$$

$$- \sin z = \sin x \sin y$$

$$\cos z - \sin z = \cos(x + y)$$

$$\text{ve } \cos z - \sin z = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - z) \Rightarrow$$

$$\cos(x + y) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - z) \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq \sin(\frac{\pi}{4} - z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ve } z \in (0, \pi) \Rightarrow$$

$$\frac{-\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - z \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

(1) ve (2)'den dolayı $z = \frac{\pi}{2}$ sonucuna ulaşırız.

$$\cos(x - y) = \sqrt{2} \cos(z - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(x + y) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - z)$$

$z = \frac{\pi}{2}$ koyarsak:

$\cos(x - y) = 1, \cos(x + y) = -1$ ve $x, y, \in (0, \pi)$ olduğundan:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= \pi \end{aligned} \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{2} \text{ sonucunu elde ederiz.}$$

$$\text{Ç.K.} = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\} \text{ dir.}$$

A22. a sayısı 10 tabanına göre bütün rakamları 1 olan 2 m basamaklı bir sayı, b sayısı ise bütün rakamları 4 olan m basamaklı bir sayı ise

$\sqrt{a+b+1}$ in tamsayı olacağını gösteriniz. Bu tamsayı kaç basamaklıdır?

(Hazırlayan: Hakan Çanlı)

ÇÖZÜM: (Taner Kahveci, Ankara ve Ruhi Ta-
bur, İzmir).

$$a = 111 \dots 1 = 10^{2m-1} + 10^{2m-2} + \dots + 10 + 1$$

2m basamak

$$= \frac{10^{2m}-1}{10-1} = \frac{10^{2m}-1}{9} \text{ olur.}$$

$$b = 444 \dots 4 = 4(10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 10 + 1)$$

m basamak

$$= 4 \left(\frac{10^m - 1}{10 - 1} \right) = \frac{4 \cdot 10^m - 4}{9} \text{ olur.}$$

$$a + b + 1 = \frac{10^{2m} - 1}{9} + \frac{4 \cdot 10^m - 4}{9} + 1$$

$$= \frac{10^{2m} + 4 \cdot 10^m + 4}{9} = \left(\frac{10^m + 2}{3} \right)^2 \text{ olup}$$

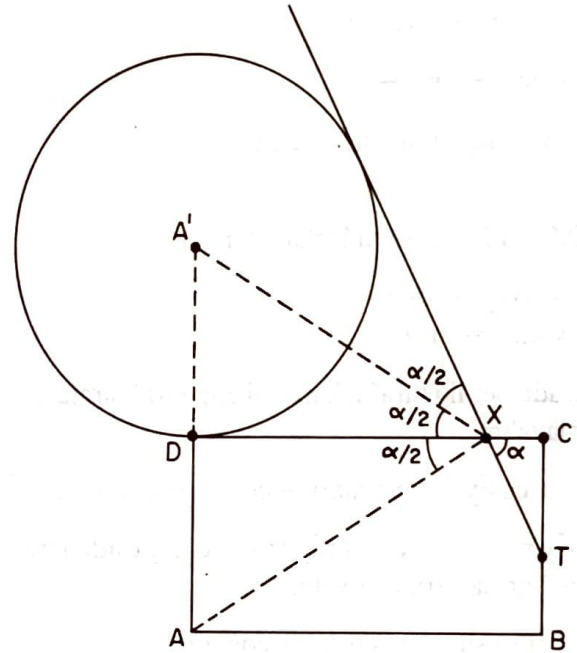
$$\sqrt{a+b+1} = \frac{10^m + 2}{3}$$

Burada $10^m \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan her m tamsayısı için $\frac{10^m + 2}{3}$ sayısı bir tamsayıdır. ($10^m + 2$; 3 ile bölünür). Bu sayı ise m - basamaklı bir sayıdır.

A23. Bir ABCD bilyardo masasında, [BC] bandına bir T noktasında yapışık duran bir top soldan falso ile vuruluyor. [CD] bandının bir X noktasına a açısıyla çarpan top a/2 açısıyla uzaklaşarak A köşesine varıyor. X noktasını cetvel ve pergelle çiziniz.

(Bu problem, Sait Boztepe'nin bir önerisinden yararlanılarak hazırlanmıştır.)

ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)



A'nın [DC] ye göre simetriği A' noktasını alalım. A' noktasını merkez kabul eden |A'D| yarıçaplı çemberi çizelim. T den bu çembere [DC] yi kesen bir teğet çizelim, [DC] yi kestiği yere X noktası diyelim.

$\widehat{CXT} = \alpha$ olsun.

X ile A' noktalarını birleştirelim. Görüleceği gibi

$$\widehat{A'XD} = \frac{\alpha}{2} \text{ olur ki, bu da } \widehat{AXD} = \frac{\alpha}{2} \text{ demektir.}$$

Öyleyse aranan nokta X noktasıdır.

A24. $\forall n, k \in \mathbb{N}^+$ için

$$\frac{\sum_{i=1}^n \prod_{l=0}^n (in + l)}{(n+1)!}$$

oranının (ifadesinin) tamsayı olduğunu gösteriniz.

(Hazırlayan: Kazım Önder Yıldırım, Gaziantep Fen Lisesi)

ÇÖZÜM: (Çetin Caner, İzmir ve Ruhi Tabur, İzmit)

$$\prod_{l=0}^n (in + l) = (in)(in+1)(in+2)\dots(in+n)$$

$$= \binom{in+n}{n+1} (n+1)!$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \prod_{l=0}^n (in + l)}{(n+1)!} = \sum_{i=1}^n \binom{in+n}{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{i=1}^n \binom{in+n}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

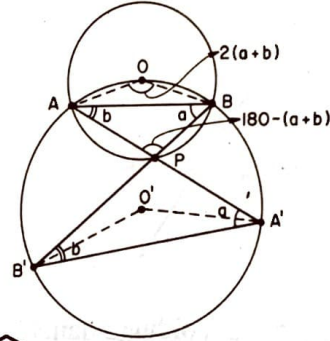
sonucuna ulaşırız.

A25. O' merkezi bir (O, R) çemberi üzerinde olan bir (O', R') çemberi (O, R) yi A, B de kesmektedir. (O', R') nün bir P noktasının A, B ye birleştiren doğrular (O, R) yi A', B' de keserse R, R' yarıçapları için

$$\frac{|PA|}{|PA'|} = \frac{|PB|}{|PB'|} = \frac{R'}{R}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)



Şekilden $\widehat{AOB} = 2(a+b)$ olur. $\Rightarrow$

$$|AB| = 2R \sin(a+b).$$

$$\widehat{A'O'B'} = 2[\widehat{BOA} - \widehat{ABB'} - \widehat{BAA'}]$$

$$= 4(a+b) - 2a - 2b = 2(a+b) \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow |A'B'| = 2R' \sin(a+b).$$

$$\widehat{A'PB} \sim \widehat{BPA'} \Rightarrow$$

$$\frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{|AB|}{|B'A'|} = \frac{R}{R'}$$

İLGİNÇ SAYILAR

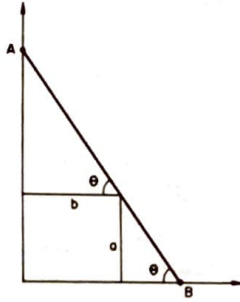
$$\begin{aligned} 1 &= 1^1 \\ 81 &= (8+1)^2 \\ 512 &= (5+1+2)^3 \\ 2401 &= (2+4+0+1)^4 \\ 17210368 &= (1+7+2+1+0+3+6+8)^5 \\ 34012224 &= (3+4+0+1+2+2+2+4)^6 \\ 612220032 &= (6+1+2+2+2+2+0+0+3+2)^7 \end{aligned}$$

Doğan Mersin - İstanbul

Y21. Birbirini dik kesen iki sokakla çevrili bir bölgenin içinde bulunan bir anıtın bu sokaklardan uzaklıkları a ve b metredir. Anıttan geçen doğrusal bir yolla sokaklar birbirine bağlanmak istenirse açılacak yolun uzunluğu en az kaç metre olur?

(Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)



$|AB| = \frac{b}{\cos \theta} + \frac{a}{\sin \theta}$ olduğundan, $|AB|$ 'nin maksimum değeri için $\frac{d}{d\theta} (|AB|) = 0$ olmalı.

$$\frac{b \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \tan^3 \theta \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \tan \theta. \text{ Bu durumda;}$$

$$|AB| = \frac{b + a \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}{1/\sqrt{1 + (\frac{a}{b})^{2/3}}}$$

$$= (b + a^{2/3} b^{1/3}) \sqrt{1 + (\frac{a}{b})^{2/3}}$$

$$= (b^{2/3} + a^{2/3}) \sqrt{b^{2/3} + a^{2/3}}$$

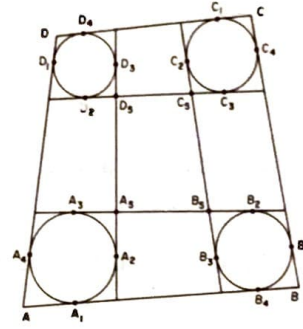
$$= (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$

Diğer Çözenler: C. Alparslan Ertuğ, İstanbul; İlyas Küreli, İstanbul; Murat Beybağa, İzmir.

Y22. Bir ABCD teğetler dörtgeni veriliyor. Dörtgenin her bir ardışık kenar çiftine teğet, iç bölgede kalan, birbirinin tamamen dışında dört çember çiziliyor. Bu çemberlerden her bir ardışık çiftin diğer dışteğeti alınarak elde edilen dörtgenin de teğetler dörtgeni olacağını gösteriniz.

(Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM: (İlyas Küreli, İstanbul)



ABCD teğetler dörtgeni olduğundan

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

$$\overline{DD_4} = \overline{DD_1}, \quad \overline{CC_1} = \overline{CC_4}, \quad \overline{BB_1} = \overline{BB_4}$$

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_4} \text{ olduğundan}$$

$$\overline{D_4C_1} + \overline{A_1B_4} = \overline{D_1A_4} + \overline{C_4B_1} \text{ olur.}$$

$$\overline{D_4C_1} = \overline{D_2C_3}, \quad \overline{A_1B_4} = \overline{A_3B_2}, \quad \overline{D_1A_4} = \overline{D_3A_2},$$

$$\overline{C_4B_1} = \overline{C_2B_3} \text{ (ortak dışteğet) olduğundan;}$$

$$\overline{D_3A_2} + \overline{C_2B_3} = \overline{D_2C_3} + \overline{A_3B_2} \text{ dir.}$$

$$\overline{D_5D_3} = \overline{D_5D_2}, \quad \overline{C_5C_3} = \overline{C_5C_2}, \quad \overline{B_5B_3} = \overline{B_5B_2},$$

$$\overline{A_5A_3} = \overline{A_5A_2} \text{ olduğundan,}$$

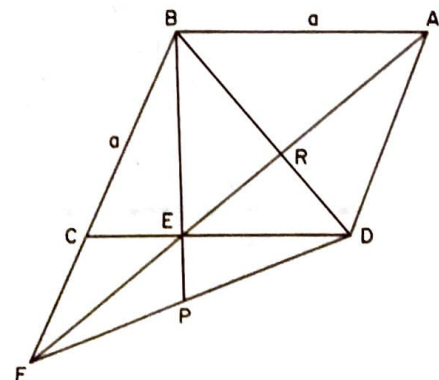
$$\overline{D_5A_5} + \overline{C_5B_5} = \overline{D_5C_5} + \overline{A_5B_5} \text{ olurur.}$$

Buradan $A_5B_5C_5D_5$ dörtgeninin teğetler dörtgeni olduğu ortaya çıkar.

Diğer Çözenler: Erhan Gürel, Ankara; C. Alparslan Ertuğ, İstanbul

Y23. A açısı 60° olan eşkenar bir ABCD dörtgeninde A dan geçen bir doğru [CD] yi E de BC yi F de kesiyor. $BE \cap DF = P$ olduğuna göre BPD açısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)



$|AB| = a, |CF| = b$, olsun

$$\triangle CEF \sim \triangle BAF \Rightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{|CE|}{a} \Rightarrow$$

$$|CE| = \frac{ab}{a+b}, |ED| = a - |CE| = \frac{a^2}{a+b}$$

$$\triangle DRE \sim \triangle BRA \Rightarrow \frac{|DR|}{|BR|} = \frac{|ED|}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$\triangle BFD$ 'de Menelaus'tan;

$$\frac{|BC|}{|CF|} \cdot \frac{|FP|}{|PD|} \cdot \frac{|DR|}{|BR|} = 1$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{|FP|}{|PD|} \cdot \frac{a}{a+b} = 1 \quad |FP| = x, |PD| = y \text{ alalım.}$$

$$x = \frac{(a+b)by}{a^2} \quad (1)$$

Kosinüs teoreminden

$$|FD|^2 = |BF|^2 + |BD|^2 - 2|BF||BD|\cos 60$$

$$(x+y)^2 = a^2 + b^2 + ab. \quad (1)' \text{ den}$$

$$\frac{(a+b)b}{a^2}y + y = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} \Rightarrow$$

$$y = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}, x = \frac{b(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}$$

$$|FP||FD| = \frac{b(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$

$$|FP||FD| = b(a+b)$$

$$|FP||FD| = |CF||FB| \text{ (Çemberde kuvvet)}$$

$\Rightarrow$ BCPD bir çember üzerindedir, öyleyse

$$\widehat{BPD} = \widehat{BCD} = 60^\circ \text{ olur.}$$

Diğer Çözenler: Atasagun Baykal, Ankara; İlyas Küreli, İstanbul; Murat Hikmet Beyağa, İzmir.

$$Y24. \frac{1}{\cos x - \cos 3x} + \frac{1}{\cos x - \cos 5x} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\cos x - \cos 405x} = \frac{1}{1 - \cos 2x}$$

denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM: (İlyas Küreli, İstanbul)

$$\cot q - \cot p = \frac{\sin(p-q)}{\sin p \sin q} \text{ dur; öyleyse:}$$

$$\frac{1}{\sin p \sin q} = \frac{\cot q - \cot p}{\sin(p-q)} \text{ olur.}$$

Buradan hareketle:

$$\frac{1}{\cos x - \cos 3x} = \frac{1}{2 \sin x \sin 2x}$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} (\cot x - \cot 2x).$$

$$\frac{1}{\cos x - \cos 5x} = \frac{1}{2 \sin 2x \sin 3x}$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} (\cot 2x - \cot 3x).$$

...

$$\frac{1}{\cos x - \cos 405x} = \frac{1}{2 \sin 202x \sin 203x}$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} (\cot 202x - \cot 203x).$$

+

$$s = \frac{1}{2 \sin x} (\cot x - \cot 203x) = \frac{1}{1 - \cos 2x}$$

$$\frac{1}{2 \sin^2 x} \cdot \frac{\sin 202x}{\sin 203x} = \frac{1}{2 \sin^2 x}$$

Buradan $\sin^2 x \neq 0$ ve $\sin^2 3x \neq 0$ bulunur.

$$\Rightarrow \sin 202x - \sin 203x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{-x}{2}\right) \cos\left(\frac{405x}{2}\right) = 0.$$

$$\sin\left(\frac{-x}{2}\right) = 0 \text{ için } \frac{x}{2} = 0 \text{ veya } \frac{x}{2} = \pi \text{ bulunur.}$$

$[0, \pi]$ aralığında olan $x = 0$ paydayı sıfır yapacağından çözüm olamaz.

$$\cos\left(\frac{405}{2}x\right) = 0 \text{ 'dan } \frac{405}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{405} + \frac{2k\pi}{405} \quad (k = 0, 1, \dots, 201) \text{ bulunur.}$$

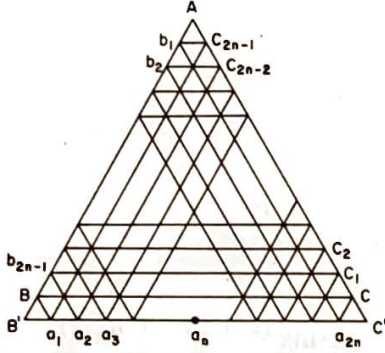
$$(0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{405} + \frac{2k\pi}{405} < \pi$$

$$\Rightarrow 0 < k < \frac{404}{2} = 202).$$

Gönderilen diğer çözümlerde eksikler vardır.

Y25. Eşkenar Bir üçgende her kenar (noktalarla) birbirine eş olan n parçaya bölünmüştür. Bu noktaları kenarlara paralel doğru parçalarıyla birleştirirerek elde edilen bütün eşkenar üçgenlerin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM: (İlyas Küreli, İstanbul)



ABC üçgeninin her kenarı $2n$ parçaya bölünmüş olsun. ABC üçgeninin b ve c kenarlarını birer birim uzatarak $AB'C'$ üçgenini elde edelim. $AB'C'$ üçgeni $2n + 1$ parçaya bölünmüş olur. ABC üçgenindeki eşkenar üçgen sayısına a_{2n} $AB'C'$ üçgenindeki üçgen sayısına a_{2n+1} diyelim. Şimdi $a_{2n+1} - a_{2n}$ 'i bulalım. tepesi A noktasında olan fazlalık üçgen sayısı birdir. Çünkü A'dan çıkan aç kollarıyla $B'C'$ doğrusunu kesişmesiyle fazlalık üçgen oluşur. Bunun sayısı da hemen görüleceği üzere 1'dir. Aynı şekilde tepesi b_1 noktasında bulunan üçgen sayısı, tepesi c_{2n-2} 'de bulunan üçgen sayısı da yine 1'dir. Tepesi b_2c_{2n-2} doğrusu üzerindeki noktalarda bulunan üçgenlerin sayısı üçtür. Çünkü üç tane nokta var. Bu BC doğrusuna kadar devam eder. Bu üçgenler tabanı $B'C'$ olan üçgenlerdir. Bunların toplamı $S = 1 + 2 + \dots + (2n + 1)$

$$S = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)(2n+1) \text{ 'dir.}$$

Şimdi de tepesi $B'C'$ üzerinde bulunan üçgenleri bulalım. Tepesi B' olan üçgen yoktur. Çünkü B $B'a_1$ üçgeninin tabanı $B'C'$ üzerindedir. Tepesi a_1 'de olan üçgen sayısı 1'dir. Çünkü a_1 'den çıkan aç kollarını (a_1B ve a_1c_{2n-1} doğrularını) üçgenin içinde üçgen oluşturacak şekilde yatay bir tek BC keser. (Çünkü kollarından bir B'de üçgenin dışına çıkıyor). a_1 kolundan çıkan kolar BC ve altındaki yatay çizgilerle üçgen oluşturabilir. BC' nin altında başka yatay çizgi yoktur. ($B'C'$ sayılamaz zaten tepesi bunun üzerinde olduğu için üçgen oluşturması mümkün değildir). Aynı mantıkla tepesi a_2 'de olan üçgen sayısı 2'dir. a_2 'den çıkan

kolları $\overline{BC}$ ve $\overline{b_{2n-1}c_1}$ üçgenin içinde kesiyor. Bu orta noktaya kadar birer artarak devam eder. Ortaya göre simetrik olarak orta noktadan sonra azalır. Şimdi tabanı $B'C'$ 'de bulunan üçgen sayısının formülünü bulalım.

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Öyleyse

$$a_{2n+1} - a_{2n} = (n+1)(2n+1) + n(n+1) = (n+1) \cdot (3n+1) \Rightarrow a_{2n+1} = a_{2n} + (n+1) \cdot (3n+1)$$

Şimdi aynı mantıkları yürüterek $a_{2n} - a_{2n-1}$ 'i bulalım. Tabanı BC üzerinde bulunan üçgen

$$\text{sayısı } 1+2+\dots+2n = \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} = n \cdot (2n+1) \text{ dir.}$$

Tepesi $\overline{BC}$ üzerinde bulunan üçgen sayısı

$$S = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1)) + n \text{ 'dir.}$$

$$S = \frac{2 \cdot (n-1) \cdot n}{2} + n = n^2 \text{ bulunur.}$$

$$a_{2n} - a_{2n-1} = n(2n+1) + n^2 = n(3n+1)$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + n(3n+1)$$

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + n(3n-2) = n \cdot (6n-1) = 6n^2 - n$$

$$a_{2n-2} = a_{2n-3} + (n-1)(3n-2)$$

$$a_{2n-3} = a_{2n-4} + (n-1) \cdot (3n-5)$$

.

.

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)$$

$$+ a_1 = 1$$

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^n 6k^2 - k = 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+1)}{2}$$

$$a_{2n+1} = \frac{n(n+1)(4n+1)}{2} + (n+1) \cdot (3n+1) = \frac{(4n^2 + 7n + 2) \cdot (n+1)}{2}$$

O halde

$$a_{2n+1} = \frac{(4n^2 + 7n + 2) \cdot (n+1)}{2}, \text{ ve}$$

$$a_{2n} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (4n+1)}{2}$$

bulunur.

Diğer Çözenler: Taner Kahveci, Ankara; Serdar A. Yetkin, İstanbul.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,*
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,*
- * Yillardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,*
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,*
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,*
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,*
- * Matematik dünyasından güncel haberler.*

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

