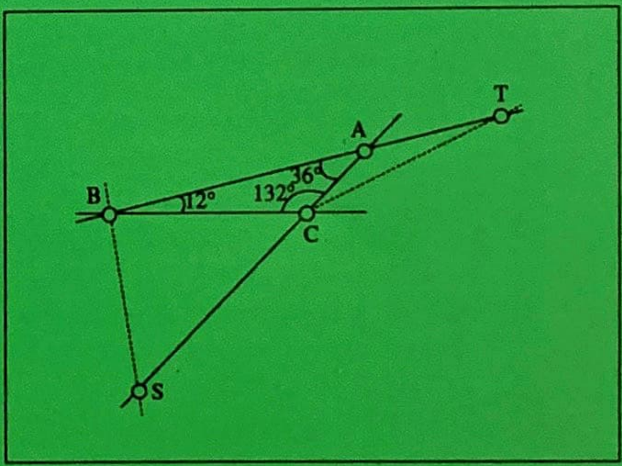
Matematik DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR



ŞUBAT 1995 / CİLT : 5 / SAYI : 1

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
ALİ DOĞANAKSOY, HÜSEYİN DEMİR, ALPARSLAN ERTUĞ, TURGAY KAPTANOĞLU, SELMA ATABEY

DİZGİ
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır. (Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.l.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ADRES
(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)
ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

TOSUN İÇİN....

Bu yazıya adını veren kişi, kimimiz ıçin Tosun, kimimiz için Tosun Bey, ama ;oğumuz için Ağabeydir. Bu sayısı ile beşinci /aşına basan Matematik Dünyası da varlığını ıynı kişiye, yani ODTÜ Matematik Bölümü ›ğretim üyesi, Türk Matematik Derneği ve ΓÜBİTAK Başkanı Prof.Dr. Tosun Terzioğlu'na ›orçludur. Boğazda bir yemek sırasında /akınlarna söylediği Matematik Dünyası fikri, yine onun UNESCO'dan sağladığı yardım ile yaşama geçebilmiştir. Dağıtımın ODTÜ'den yapıldığı ilk yıllarda onu toplantı salonunda paketleme yaparken görebilirdiniz.

Ülkemiz matematikçileri arasında en üretken araştırmacıların önünde yer alan Terzioğlu altmışın üzerindeki çalışması ile 1971 yılında Balkan Matematikçiler Birliği'nin genç araştırmacılara verdiği başarı ödülünü, 1974 yılında TÜBİTAK Teşvik Ödülünü, 1986 yılında da aynı kurumun Bilim Ödülünü hak etmiştir.

Newcastle ve Frankfurt Üniversitelerindeki eğitimi sonrası ODTÜ'ye katılan Tosun Terzioğlu, gerek burada gerekse başka üniversitelerde çalışan matematikçilerin çoğunun hocası olmuştur ve onlara sadece matematik değil, çoğunun yaşamla mücadelelerinde esin kaynağı olan insanlık öğretmiştir. Bu düşünceleri sadece ODTÜ Matematik Bölümü çalışanları değil, ülkemizde ve yurt dışında Tosun'u tanıyan herkesin paylaşacağını biliyoruz.

Ünlü matematikçi S. Ulam, "Bir Matematikçinin Serüvenleri" adlı kitabında matematikçilerin gerçeklerden kaçmak için matematik yaptıklarını, dış dünyadan koparak, mutluluğu bir çeşit manastır olarak gördükleri matematikte aradıklarını yazar. Ulam'a göre matematikçiler mutsuzluklardan kaçmak için matematik ile kendi kendine yeter bir dünya kurduklarını, bazılarının ise başka birşey yapamadıkları için matematik çalıştıklarını söyler. Oysa Tosun'u tanıyan herkes bu görüşlerin onun için yanlışlığına katılacaktır. Zira O, ülke sorunları ile her zaman yakından ilgilenmiş ve bu bağlamda üstüne düşen görevleri fazlası ile ve alçakgönüllülük ile yerine getirmiştir. İşte bu yurtseverlik şimdilerde onun TÜBİTAK Başkanlığı görevini yürütmesini gerektiriyor. Kendi deyimi ile "bu görevini daha rahat yerine getirmek için" 52 yaşında emekli olmak istedi. Matematik Dünyası'na gönül veren bizler, O'nun bu kararının yarattığı burukluğu artık hayatımızın bir parçası haline gelen siz okurlarımızla paylaşmak istedik. Sevdiklerimizin çoğu kez katılmadığımız kararlarını sırf onlara olan sevgi ve saygımızdan sessizce kabullendiğimiz gibi O'nunkini de kabullendik. Bizler, iki yıldır kapalı duran ofis kapısının, eskiden odasında çalışırken tuttuğu gibi yarı açık görme tutkusu ile yaşayacağız.

* * *

Son sayımızdan bu yana matematik dolu günler yaşadık Ankara'da. Moskova'dan gelen A. Helemski ve Petersburg'dan gelen A. Veksler, ODTÜ'de heyecan verici konuşmalar yaptılar. Dergimiz yazarlarından Boğaziçi Üniversitesi öğrencisi Emre Alkan'ın "Variations on Wolstenholme's Theorem" adlı araştırması American Mathematical Monthly dergisinin Aralık 1994 sayısında yayınlandı. Dergimizin problemlerini çözerek bir rekora doğru giden Kazakistanlı Almas Rimov aynı başarıyı öğrencisi olduğu ODTÜ Matematik Bölümü'nde de sürdürüyor. Genç arkadaşlarımızın başarıları ile övünüyoruz.

Geçtiğimiz yayın döneminde Matematik Dünyası'na katkıda bulunan herkese teşekkür ederiz. Bu dönemde yazı kurulunda yer alan Mefharet Alpseymen Kocatepe ve Mahmut Kuzucuoğlu arkadaşlarımıza yaptıkları değerli katkıları için teşekkür ederiz.

OYUNLAR (III)

Ali Nesin *

Yoksulluk Kader Değil

Bu dizinin son bölümünde yoksulu kazandıracağız. Küçük bir olasılıkla da olsa, yoksul kazanabilecek.

İki oyuncu yazı-tura oynuyorlar. İlk yazı-tura atışında ortaya 1 lira konuluyor. Oyunculardan biri, diyelim birinci oyuncu, kaybettikçe ortaya koyduğu parayı arttırıyor, bir önceki atışta kaybettiğinin iki katını koyuyor. Kazandığındaysa ortaya 1 lira koyuyor. Örneğin ilk atışta kaybederse, ikinci atışta ortaya 2 lira koyuyor. İkinci atışta da kaybederse, üçüncü atışta 4 lira koyuyor. Kazanana değin bu böyle sürüyor. Kazandığında gene 1 lira ortaya koyuyor. Birinci oyuncu stratejisini sürdürebildikçe sürdürüyor. Sürdüremediğinde, yani cebinde yeterli parası kalmadığında, oyun bitiyor. Bu dizinin ilk yazısında, iki oyuncunun da sonlu parası olduğunda oyunun uygulamada kesinlikle biteceğini kanıtlamıştık. Aynı oyunu oynayacağız. Ancak bu kez ikinci oyuncunun sonsuz parası olduğunu varsayacağız (zengin oyuncu). Birinci oyuncununsa yalnızca 1 lirası var (yoksul oyuncu). Yoksul, yukarıda açıkladığımız stratejiyle oynuyor. Eğer stratejisini sürdüremezse oyun bitiyor, oyun daha önce bitemez. Zenginin parası hiç bitmediğinden, zenginin oyunu kaybetme olasılığı yoktur.

Daha ilk yazı-tura atışında yoksul kaybederse, yoksul cebindeki tek lirayı kaybeder ve oyun hemen biter. Dolayısıyla en az 1/2 olasılıkla yoksul oyunu kaybedecektir. Yoksulun oyunu kaybetme olasılığını bulamadım. Yazının sonunda bu olasılığı bulmak için hesaplanması gereken bir sayıyı vereceğim.

Yoksul ilk atışta kazanıp ikinci atışta kaybederse ne olur? Oyun gene biter, ama bu kez yoksulun cebinde 1 lirası vardır. Yani yoksul 'tapi' kalkar. Çünkü birinci yazı-tura atışında kazanmıştır, dolayısıyla ikinci atıştan önce cebinde 2 lirası vardır. İkinci atışta kaybettiğinden 1 lirası kalmıştır. Bu kez ortaya 2 lira koyması gerekmektedir ve 2 lira koyacak parası yoktur. Demek ki en az 1/4 olasılıkla yoksul oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkar. Yoksulun oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkma olasılığını da bulamadım.

Daha önceki bölümlerdeki oyunların tersine bu oyunda yoksul kazanabilir. Öyle bir an gelebilir ki, yoksulun cebinde 1 liradan fazla para olmasına karşın, yoksul stratejisini sürdüremez (yani oyun biter). Örneğin, yoksul ilk dört atışta kazanır da sonraki iki atışta kaybederse yoksulun cebinde 2 lira olmasına karşın oyun biter. Okur bu savımı kendi kendine kolaylıkla doğrulayabilir. Demek ki en az $1/2^6 = 1/64$ olasılıkla yoksul oyundan kazançlı ayrılır. Yoksulun oyundan k lira kazançlı kalkma olasılığını da bilmiyorum[1].

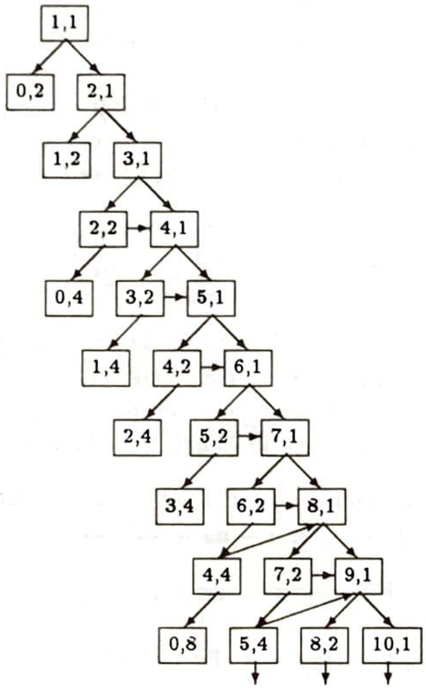
Bu oyun sonsuza dek sürebilir, örneğin fakir hep kazanırsa ... Ama göreceğiz ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı 0'dır. Bunu kanıtlayabildim! Dolayısıyla oyun % 100 (yani 1) olasılıkla biter. Demek ki oyun kuramsal olarak sonsuza dek sürebilse bile, uygulamada sonlu sayıda yazı-tura atışından sonra biter[2]. Bu

* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

[1] Bu hesaplayamadığım olasılıkların yaklaşık hesaplanabilmesi için gereken malzeme bu yazıda vardır. Dileyen okur bu sayıları yaklaşık hesaplayabilir. Bu tam olarak hesaplayamadığım olasılıklar henüz ad verilmemiş sayılar da olabilirler. Sözcük sayımız sonsuz ama yalnızca *sayılabilir* sonsuzlukta. Gerçel (reel) sayılarsa *sayılamaz* sonsuzlukta. Dolayısıyla her sayıya ad veremeyiz. Önemli bulduğumuz sayılara ad veririz. Örneğin π sayısı önemli olduğundan π'ye bir ad verilmiştir: π. π'nin karesinin ve karekökünün de adları vardır: π^2 ve $\sqrt{\pi}$. Tam olarak hesaplayamadığım bu üç olasılığa daha önce bir ad verilmiş midir bilmiyorum. Verilmemişse hiç bir zaman tam olarak hesaplayamayız. Nasıl π'nin kaç olduğunu hiçbir zaman tam olarak bilemeyeceksek ve ancak adını söyleyerek π'nin kimliğini belirtebiliyorsak, bu sayıları da hiçbir zaman bilemeyebiliriz, hatta daha önceden adı konmuş sayılarla arasında cebirsel bir bağıntı bile olmayabilir. Özet olarak demek istediğim, bu sayıların tam olarak hesaplanamayabilecekleri. Bu bağlamda akla gelen ilk soru şu: hesaplayamadığım olasılıklar kesirli sayılar mıdır? Pek sanmıyorum.

[2] Bu oyunun 1 olasılıkla bitmesi yoksulun cebindeki paraya bağlı değildir. Aşağıdaki şemadan da anlaşılacağı üzere, yoksulun cebinde 1 lira olduğunda oyun 1 olasılıkla biterse, yoksulun cebinde kaç para olursa olsun oyun gene 1 olasılıkla biter.

bölümde işte bu sonucu kanıtlayacağız.



Oyunun ilk anlarda alabileceği durumları gösteren bir şema çizeceğiz. Önce oyunun alabileceği durumlarını saptayalım. Oyunun her durumunu iki sayıyla gösterebiliriz. Birinci sayı, yoksulun cebindeki para olsun; ikinci sayıysa bir sonraki atış için ortaya koyulan (daha doğrusu yoksulun koyması gereken) para olsun. İkinci sayı hep 2'nin üstleri olmak zorunda, $1, 2, 4, 8, 16$ gibi. Oyunun en başındaki durum (1,1) durumu. Çünkü, yoksul oyuna 1 lirayla başlıyor ve ilk atışta ortaya 1 lira koyuyor. Bu durumda yoksul kazanırsa oyun (2,1) durumuna geçecek, kaybederse de (0,2) durumuna (ve oyun bitecek). (2,1) durumundan sonra oyun ya (1,2) durumuna ya da (3,1) durumuna erişir. Birinci şıkta oyun biter, ikinci şıkta sürer. Eğer bir durumdan sonra oyun bitmemişse, oyun iki durumdan birini alır: yoksul o atışta ya kazanmıştır ya da kaybetmiştir. Oyunun ilk birkaç yazı-tura atışında alabileceği durumlar yukarıda görülüyor.

Yukarıda da dediğimiz gibi oyunun sonsuza değin sürme olasılığının 0 olduğunu kanıtlayacağız. $(n, 2^k)$ durumuna gelme olasılığına $p(n, 2^k)$ diyelim. Örneğin,

$$\begin{aligned}
p(1,1) &= 1\\
p(0,2) &= 1/2\\
p(2,1) &= 1/2\\
p(1,2) &= 1/4\\
p(3,1) &= 1/4\\
p(2,2) &= 1/8\\
p(4,1) &= 1/8 + 1/16 = 3/16\\
p(0,4) &= 1/16\\
p(3,2) &= 1/16 + 1/32 = 3/32\\
p(5,1) &= 1/16 + 2/32 + 1/64 = 9/64
\end{aligned}$$

Oyunun sonsuza gidebilmesi için bütün $(n, 1)$ durumlarına ulaşılmalıdır. Bu, şemadan kolayca anlaşılıyor. Demek ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı, $p(n, 1)$ dizisinin n sonsuza gittiğinde aldığı değerdir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} p(n, 1)$$

sayısını hesaplamamız gerekiyor. Bu sayının 0 olduğunu göreceğiz. Bu limitin sıfır olduğunu kanıtlamak için, aşağıdaki eşitliği bulmak yeterlidir:

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} p(2^n - 1, 1) = 0.$$

Bu son eşitliği kanıtlamak daha kolay olacak.

$p(n, 2^k)$ sayılarını bulmak istiyoruz. Bunun için biraz matematik yapmalıyız. Yapacağımız matematiği daha iyi anlaması için, okurun sık sık yukarıdaki şemaya bakması gerekecektir. İlk olarak, eğer $k > 0$ ise,

$$(1) \qquad p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^{k-1}, 2^{k-1})}{2}$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Çünkü, eğer $k > 0$ ise, $2^k > 1$'dir ve dolayısıyla $(n, 2^k)$ durumuna gelmenin bir tek yolu vardır, o da bir önceki oyunda kaybetmiş olmak. Bir önceki oyunun durumu ne olabilir? $(n, 2^k)$ durumunda ortaya 2^k koyduğumuza göre, bir önceki oyunda ortaya 2^{k-1} koymuşuzdur (ve kaybetmişizdir). Dolayısıyla $(n, 2^k)$ durumuna ancak $(n + 2^{k-1}, 2^{k-1})$ durumundan geçilebilir. (1) eşitliği işte bu yüzden geçerlidir. (1) eşitliğinde k yerine $k-1$ ve n yerine $n + 2^{k-1}$ koyarsak,

$$p(n + 2^{k-1}, 2^{k-1}) = \frac{p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2}, 2^{k-2})}{2}$$

eşitliği çıkar. Bu son eşitliği (1)'in sağ tarafına yerleştirerek,

$$p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2}, 2^{k-2})}{4}$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu böylece sürdürürsek,

$$p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1, 1)}{2^k}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1$ sayısı $2^k - 1$ sayısına eşit olduğundan, eğer $k > 0$ ise,

$$p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^k - 1, 1)}{2^k} \tag{2}$$

eşitliği geçerlidir. (2) eşitliğinden, $p(n, 2^k)$ sayılarını bulmak için, $p(n, 1)$ sayılarını bulmamız gerektiği anlaşılıyor. Bu sayıları bulalım. $(n, 1)$ durumuna ancak kazanarak gelinir. Yani $(n-1, 1)$, $(n-2, 2)$, $(n-4, 4)$ gibi durumlardan. Dolayısıyla $p(n, 1)$ sayısı,

$$\frac{p(n-1,1)}{2}, \frac{p(n-2,2)}{2}, \frac{p(n-4,4)}{2}, \ldots$$

sayılarının, yani, bir k için, $p(n - 2^k, 2^k)/2$ biçiminde yazılabilen sayıların toplamıdır. (2) eşitliği $p(n - 2^k, 2^k) = p(n - 1, 1)/2^k$ eşitliğini verdiğinden, $p(n, 1)$ sayısının $p(n - 1, 1)/2^{k+1}$ sayılarının toplamı olduğu anlaşılır. Ama buradaki k sayıları $n - 2^k \geq 2^k$ koşulunu, yani $2^{k+1} \leq n$ koşulunu sağlamalıdır, çünkü aksi halde $(n - 2^k, 2^k)$ durumunda oyun bitmiştir ve bu durumdan $(n, 1)$ durumuna geçilmez. $k(n)$, $2^k \leq n$ eşitsizliğini sağlayan k sayılarının en büyüğü olsun. Demek ki

$$\begin{aligned} p(n, 1) &= \sum_{k=1}^{k(n)} \frac{p(n-1,1)}{2^k} \\ &= p(n-1,1) \sum_{k=1}^{k(n)} \frac{1}{2^k} \\ &= p(n-1,1)\left(1 - \frac{1}{2^{k(n)}}\right). \end{aligned}$$

Bu eşitliği $n - 1$ kez kullanarak,

$$p(n, 1) = p(1, 1) \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^{k(i)}}\right)$$

buluruz. Ama $p(1, 1) = 1$. Burada n yerine $2^n - 1$ alırsak,

$$p(2^n - 1, 1) = \prod_{i=2}^{2^n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{k(i)}}\right) \tag{3}$$

buluruz. Şimdi k herhangi bir doğal sayı olsun. Hangi i sayıları için $k(i) = k$ eşitliğinin doğru olduğunu bulalım. i, $k(i) = k$ eşitliğini sağlayan bir sayı olsun. k sayısı, $2^k \leq i$ eşitsizliğini sağlayan sayıların en büyüğü olduğundan, $2^k \leq i < 2^{k+1}$ eşitsizliği geçerlidir. Ve bunun tersi de doğrudur: eğer $2^k \leq i < 2^{k+1}$ ise, $k(i) = k$ eşitliği geçerlidir. Bu eşitsizlikleri sağlayan kaç tane i sayısı vardır? Biraz düşünme, 2^k tane olduğunu gösterir. (3) eşitliğinin sağındaki çarpılacak terimler bu 2^k tane i sayısı için birbirlerine eşittirler. Dolayısıyla (3) eşitliğini,

$$p(2^n - 1, 1) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{2^k} \tag{4}$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitliği kullanarak $p(2^n - 1, 1)$ sayılarının n sonsuza gittiğinde sıfıra yakınsadıklarını kanıtlayacağız. Bunun için konumuzdan biraz uzaklaşıp iki önsav kanıtlayacağız:

Önsav 1. *Eğer* $0 < x < 1$ *ise ve* $n > 0$ *bir doğal sayıysa,* $(1 - x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$.

Kanıt. Eğer $n = 1$ ise önsav elbette doğru. Şimdi önsavın n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. Demek ki

$$(1 - x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

eşitliğini biliyoruz, daha doğrusu varsayıyoruz. Her iki tarafı da $1 - x$ ile çarpalım: $0 < 1 - x$ olduğundan, sağ tarafı açacak olursak,

$$(1-x)^{n+1} \leq 1-(n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{n(n+1)}{2}x^3$$

buluruz. $x > 0$ olduğundan,

$$(1 - x)^{n+1} < 1 - (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2.$$

elde ederiz. Demek ki önsav $n + 1$ için doğru. Tümevarımla önsav her doğal sayı için doğrudur. Önsavımız kanıtlanmıştır.

Önsav 2. $k \geq 1$ *ise,* $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{2^k} < \frac{1}{2}$.

Kanıt. Üstteki önsavda $x = 1/2^k$ ve $n = 2^k$ alalım.

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{2^k} \leq 1 - 2^k\left(\frac{1}{2^k}\right) + \frac{2^k(2^k-1)}{2}\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)$$

elde ederiz. Sağ taraftaki ilk iki terim sadeleşir. En sağdaki terimi hesaplayalım:

$$\frac{2^k(2^k-1)}{2^{2k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2}.$$

İkinci önsav da kanıtlanmıştır[3].

[3] Bu önsavın doğruluğu biraz analizle de çıkabilir. $(1 - 1/2^k)^{2^k}$ sayılarının $1/e$ sayısından (dolayısıyla $1/2$ sayısından da) küçük oldukları analiz kullanarak kolaylıkla kanıtlanabilir.

Şimdi (4)'teki sayıların sıfıra yakınsadığını kanıtlayabiliriz. İkinci önsavı ve (4) eşitliğini kullanarak, $p(2^n - 1, 1) \leq 1/2^{n-1}$ buluruz. n sonsuza gittiğinde sağdaki terimler 0'a yakınsadığından, $p(2^{n-1}, 1)$ sayıları da sıfıra yakınsar. Demek ki oyunun sonsuza dek sürme olasılığı 0'dır, ve oyun 1 olasılıkla biter.

Oyundan yoksulun zararlı (yani 0 lirayla) kalkma olasılığı nedir? Bu olasılığı bulmak için $p(0, 2^k)$ sayılarını toplamalıyız.

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} p(0, 2^k)$$

olsun. p_0, yoksulun oyundan zararlı kalkma olasılığıdır. (2) eşitliğinde $n = 0$ alırsak, $p(0, 2^k) = p(2^k - 1, 1)/2^k$ buluruz. (4) eşitliğini de kullanarak,

$$p(0, 2^k) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^{2^i}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^{2^i}$$

olur. Bu sayıyı hesaplayamadım.

II. Ulusal Matematik Olimpiyadı 2. Aşama Sınavı

Ali Doğanaksoy *

TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu tarafından düzenlenen II Ulusal Matematik Olimpiyadı ikinci aşama sınavı 23-24 Aralık 1994 tarihlerinde Ankara'da yapıldı. Bayram Yenikaya ve Halil Bayrak Altın madalya; Ethem Çanakoğlu, Mehmet Ekmekçi ve İsrafil Bahçeci gümüş madalya aldılar. Bronz madalyaları ise Özgür Aydın, Ali Ekber Gürel, Köksal Karakaş, Fatih Zihni Oktay, Suat Namlı, Emre Sucu, İzel Sulam, Özgür Sümer ve Fahri Turan aldılar. Bu sayımızda verdiğimiz bu sınavın sorularının yanıtlarını gelecek sayımızda bulabilirsiniz.

Birinci Gün, 23 Aralık 1994

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n}$ sayısına en yakın tam sayıya a_n diyelim. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$

toplamını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $m\widehat{BAD} < 90°, m\widehat{BCA} = m\widehat{DCA}$ dır $[DA]$ üzerinde $|BD| = 2|DE|$ koşulunu sağlayan E noktasından geçen ve $[CD]$ kenarına paralel olan doğru $[AC]$ küşegenini F noktasında kestiğine göre,

$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$

olduğunu gösteriniz.

3. Düzlemde ikişer kesişen ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen n tane mavi doğru çiziliyor. Bu doğruların kesiştiği noktalara 'mavi nokta' dersek, $\binom{n}{2}$ tane mavi noktamız olur. Daha sonra bir mavi doğru ile birleştirilmemiş olan bütün mavi nokta çiftlerinden geçen kırmızı doğrular çiziliyor. İki kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya 'kırmızı nokta'; bir mavi ve bir kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya da 'mor nokta' diyelim. Bu işlemden sonra en fazla kaç tane mavi, kırmızı ve mor nokta olur?

İkinci Gün, 24 Aralık 1994

4. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon olsun. Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\{f(t) + \frac{u}{t} : t > 0\}$ kümesinin en büyük alt sınırına $g(u)$ diyelim.

(a) $x \leq g(xy)$ ise $x \leq 2f(2y)$.

(b) $x \leq f(y)$ ise $x \leq g(xy)$

5. $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ olmak üzere

$$t^2 + 1 = s(s+1)$$

eşitliğini sağlayan tüm (s, t) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

6. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına sıra ile D ve E noktalarında değmektedir. $[CB]$ üzerine $[CK] = [BD], [CA]$ üzerinde $|AE| = |CL|$ koşulunu sağlayan K ve L noktaları için $AK \cap BL = \{P\}$ dir. İç teğet çemberin merkezi $I, [BC]$ nin orta noktası Q ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olduğuna göre

(a) $IQ // AK$,

(b) Alan (AIG) = Alan (QPG)

olduğunu ispatlayınız.

III. Ulusal Matematik Olimpiyadı 1. Aşama sınavı Mayıs 1995 ayı içerisinde yapılacaktır.

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

MATEMATİK VE MÜZİK

Cihan Orhan *

Daha önceki bir yazımızda matematik-sevgi ilişkisini kurmaya çalışmış ve matematiğin resim, müzik mimari gibi bir güzel sanat olduğunu belirtmiştik. Bu nedenle bu yazımızı matematik-müzik ilişkisine ayırdık.

T. Pappas'ın "Yaşayan Matematik" isimli kitabının önsüzünde şunlar yazılıdır: "Matematikten duyulan zevk bir şeyi ilk kez keşfetme deneyimine benzer. Çocuksu bir hayranlık ve şaşkınlık insanı sarar. Bu deneyimi bir kez yaşadıktan sonra, bu duyguyu unutamazsınız. Bu duygu, ilk kez mikroskopa bakıp da daha önce çevrenizde her zaman var olan ama, göremediğiniz şeyleri gördüğünüz anki kadar heyecan vericidir."

Gerçekten de matematiğin estetik çekiciliğine tamamen duyarsız, aydın bir insan bulmak biraz zordur. Matematiksel güzelliği tanımlamak çok güç olabilir fakat bu güçlük her tür güzellik konusunda geçerlidir.

Sadece düşüncede var olan olayların nerelerde uygulama alanı bulabileceği hiçbir zaman önceden tahmin edilemez. Bu nedenledir ki matematikçiler, yapılan çalışmaları estetik yönden değerlendirmekte, eserlerde bir sanatçı titizliği ile güzellik ve zerafet aramaktadırlar. İşte bunun için matematik-müzik ilişkisini bir magazin popüleritesi içinde sunmaya çalışacağız.

Orta çağda eğitim programlarında müzik, matematik ve astronomi ile aynı grupta yer alırdı. Matematik ve müzik ilişkisi, günümüzde bilgisayarlar aracılığı ile devam etmektedir.

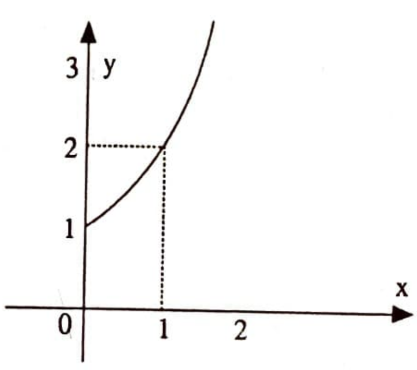
Matematiğin müzik üzerindeki etkisini müzik parçalarının yazımında görebiliriz. Bir müzik parçasında ritim (4:4 lük, 3:4 lük gibi), belirli bir ölçüye göre vuruş birlik, ikilik, dörtlük, sekizlik, onaltılık, ... gibi notalar bulunur. Belirli bir ritimde, değişik uzunluktaki notalar, belirli bir ölçüye uydurulur. Her ölçünün ise değişik uzunluktaki notaları kullanan belirli sayıda vuruştan oluştuğu görülür.

Pisagor (M.Ö. 580-500) ve onun düşüncesini taşıyanlar sesin, çekilen telin uzunluğuna bağlı olduğunu farkederek, müzikte armoni ile tamsayılar arasındaki ilişkiyi kurmuşlardır. Uzunlukları tamsayı oranlarında olan gergin tellerin de armonik sesler verdiği görülmüştür. Gerçektende çekilen tellerin her armonik bileşimi tamsayıların oranı olarak gösterilebilir. Örneğin, do sesini çıkaran bir telin uzunluğunun 16/15'i si sesini verirken 6/5'i ise la sesini, 4/3'ü sol sesini; 3/2'si fa sesini; 8/5'i mi sesini; 16/9'u ise re sesini verir.

Görüldüğü gibi iki notayı bir arada duymak, iki frekansı ya da iki sayıyı ve bu iki sayı arasındaki oranı algılamaktan başka bir şey değildir. Demek ki armoni sorunu, iki sayının oranını seçme sorununa eşdeğerdir. Müzik, gizli bir aritmetik alıştırmasıdır diyen Leibniz'in haklılığı ortaya çıkıyor.

Müziği, belli kurallara uygun olarak oluşturulmuş basit birtakım seslerin birbirlerini izlemesinden oluşan cümleler topluluğu olarak tanımlayabiliriz. Bu kurallar, matematikte mantık kurallarına karşılık gelirler.

Bir çok müzik aletinin biçiminin matematiksel kavramlarla ilgili olduğunu belirtirsek şaşırmazsınız herhalde. Örneğin, aşağıdaki şekilde $x \leq 0$ için $y = 2^x$ eğrisinin grafiği çizilmiş olup telli yada üflemeli çalgıların biçimleri bu üstel eğrinin biçimine benzer.



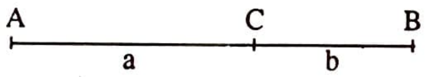
* Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, Öğretim Üyesi

Müzikal seslerin niteliğinin incelenmesi 19. yüzyılda matematikçi J.Fourier tarafından yapılmıştır. Fourier, müzik alati ve insandan çıkan bütün müzikal seslerin matematiksel ifadelerle tanımlanabileceğini ve bunun da periyodik sinüs fonksiyonları ile olabileceğini ispatlamıştır.

Bir çok müzik aleti yapımcısı, yaptığı aletlerin periyodik ses grafini, bu aletler için ideal olan grafikle karşılaştırır. Yine elektronik müzik kayıtları da periyodik grafiklerle yakından ilişkilidir. Görüldüğü gibi bir müzik parçasının üretilmesinde matematikçilerle müzikçilerin birlikteliği çok önemlidir.

Matematik-müzik ilişkisinin bir başka özelliğini ortaya çıkarabilmek için matematikte ve mimaride çok sık kullanılan bir orandan söz etmek istiyorum.

Uzunluğu L olan bir $[AB]$ doğru parçasını ele alalım ve bunu uzunlukları a ve b olan iki parçaya ayıralım. Eğer $\frac{a}{b} = \frac{L}{a}$ yani, $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ eşitliği gerçekleniyorsa, bu bölmeye $[AB]$ doğru parçasının altın bölümü adı verilir. $\frac{a}{b}$ oranına da ALTIN ORAN denir. Şimdi $x = a/b$ dersek, ilgili denklem $x^2 - x - 1 = 0$ şekline getirilebilir. Bu denklemin pozitif kökü $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618$'dir.



Şimdi yeniden müziğe dönelim. İnsan kulağı için en uyumlu aralığın 8/5 frekans oranındaki major 6 lı olduğu bilinmektedir. Bu oranın yukarıda bulduğumuz altın orana çok yıkın bir oran olduğunu görüyoruz.

Bana göre müziğin matematikten farklı tarafı, bazı göz kamaştırıcı tuzaklar kullanarak, insanları büyüleyebilmesidir. Halbuki matematik bunu yapmaz. Russell bunu şöyle özetliyor: "İyi bakıldığı zaman matematik sadece doğruyu değil yüksek bir güzelliği de içerir. Matematik bu güzelliklere bürünmek için insan doğasındaki zayıflıklara başvurmaz; resim ve müziğin göz kamaştırıcı tuzaklarını da kullanmaz."

Matematiğin müziğe kıyasla önemli tarafı şudur: Müzikal bir parçanın içerdiği estetik unsurun müzik eğitimi almayan kimseler tarafından anlaşılabilmesine karşılık, bir matematiksel teoride dinleyici veya okuyucunun tüm mantık zincirlerini izlemesi zorunluluğu vardır. Hatta içerdiği estetik unsuru da sezebilmesi gerekir.

Şüphesiz matematiğin de müzik gibi kompozitörleri ve virtüözleri vardır diyor hocamız Cahit Arf. Kompozitörler, teorileri kuranlar; virtüözler de teorileri gerçek manada anlayarak ifade edebilenler ve hissettirebilenlerdir.

Yazımızı, ünlü ressam Leonardo da Vinci'nin şu sözleri ile noktalamak istiyorum: "Matematiksel açıklamalar ve yöntemler kullanılmadan yapılan hiç bir araştırmaya bilimsel denemez."

KAYNAKÇA

[1] C.Arf Matematiğin Şiir Yönü. Bilim ve Teknik; Şubat 1994.

[2] G.H. Hardy bir Matematikçinin Savunması. TÜBİTAK yayınları, 1993.

[3] H.E. Huntly The Divine Proportion. Dover Publications, 1970.

[4] C. Orhan Matematik ve Sevi. Köy Hizmetleri Dergisi, sayı 48; 1993.

[5] T. Pappas Yaşayan Matematik. Sarmal Yayınevi, 1993.

[6] N. Tepedelenlioğlu Kim Korkar Matematikten. Sarmal Yayınevi, 1992.

Düzlemde Kompleks Sayılarla Analitik Geometri

Hasan Basri Özdemir *

Düzlemde bilinen analitik geometri konularının bir kısmı, düzlem ile ($\mathbb{R}^2$), küme olarak ve vektör uzayı olarak aynı olan kompleks sayılar kümesinin ($\mathbb{C}$) elemanları ile daha kolay anlaşılmakta ve anlatılabilmektedir.

Bu konu dergimizin 1992 yılı, 2. cilt 2. sayısında sayın Hüseyin Demir hocamız tarafından ele alınmıştı.

Düzlemin, yani $\mathbb{R}^2$ nin bir (x, y) noktası,

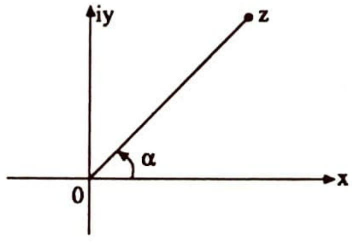
$$z = (x, y) = x + iy$$

veya trigonometrik gösterim denilen

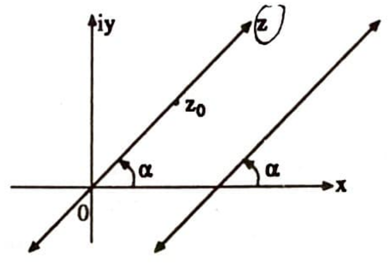
$$z = |z| Cis\alpha$$

şeklinde $z \in \mathbb{C}$ noktası ile gösterilir. Burada $Cis\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Noktanın orijine uzaklığı olan bu $|z|$ değerine z kompleks sayısının (düzlemin (x, y) noktasının) **modülü** denir. α açısına noktanın **esas argümenti** (veya sadece argümenti) denir. $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$. Düzlemin bu $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ noktasının kutupsal gösterimi, $z = (r, \alpha)$ şeklindedir. $(r = |z|), z$ noktasının üstel gösterimi ise $z = re^{i\alpha}$ şeklindedir.

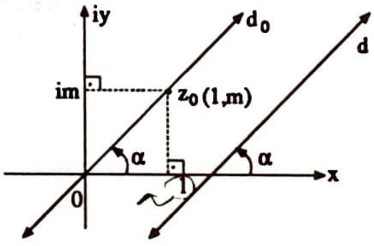
Bir noktanın argümentine bu noktanın **eğim açısı**, bu açının tanjantınada bu noktanın **eğimi** denir.



Bu tanıma göre verilen bir z_0 noktasında ve orijinden geçen bir doğrunun ve bu doğruya paralel her doğrunun eğimi bu z_0 noktasının eğimidir.

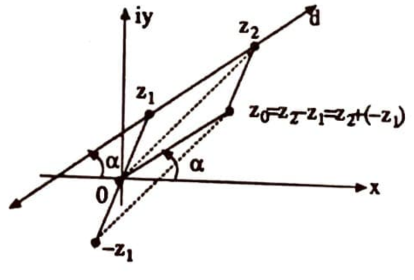


Eğimi m olan $(m \in \mathbb{R})$ bir d doğrusunun eğimi, $z_0 = (1, m)$ noktasının eğimi olur.



$$m = \tan\alpha, d \parallel \overline{oz_0}$$

Düzlemde verilen iki z_1, z_2 noktalarının farklı olan nokta (kompleks sayı), $z_0 = z_2 - z_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktasıdır. $(z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2)$ z_1, z_2 noktaları arasındaki uzaklık, $|z_0| = |z_2 - z_1|$ olur. Verilen z_1, z_2 noktalarından geçen doğrunun eğiti, $z_0 = z_2 - z_1$ noktasının eğimi olur. Çünkü $d \parallel \overline{oz_0}$



* Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Öğretim Üyesi

Çember

Orijin merkezli, r yarıçaplı çember denklemi, $z \in \mathbb{C}$ noktasının orijine uzaklığı r olmak üzere $(r \in \mathbb{R}^+)$,

$$Ç = \{z \,|\, |z| = r\} = \{z \,|\, z\overline{z} = r^2\}.$$

Sabit bir s_0 merkezli, r yarıçaplı $(r \in \mathbb{R})$ çember denklemi,

$$Ç = \{z \,|\, |z - z_0| = r\} = \{z \,|\, z - z_0|) = r^2\}$$

Düzlemde karteziyen koordinatlarla bir çemberin denklemi,

$$A(x^2 + y^2) + B_1 x + B_2 y + c = 0$$

idi. $(A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}, A \neq 0)$. Burada $z = x + iy$ olmak üzere,

$$x = \frac{-1}{2}(z + \overline{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), z\overline{z} = x^2 + y^2$$

olacağı için, yerine konursa,

$$Az\overline{z} + \frac{1}{2}(B_1 - iB_2)z + \frac{1}{2}(B_1 + iB_2)\overline{z} + C = 0$$

bulunur. $\frac{1}{2}(B_1 - iB_2) = B$ dersek, denklem

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

olur. Bu denklemi,

$$(z + \frac{\overline{B}}{A})(\overline{z} + \frac{B}{A}) = \frac{B\overline{B} - AC}{A^2}$$

şeklinde, veya

$$|z - \frac{-\overline{B}}{A}|^2 = \frac{B\overline{B} - AC}{A^2} = r^2$$

şeklinde yazabiliriz. Merkez $z_0 = -\frac{\overline{B}}{A}$ noktası, yarıçap r dir. $B\overline{B} - AC < 0$ ise sanal çember olur.

Burada önemle vurgulanması gereken şudur: $z\overline{z}, z, \overline{z}$ cinsinden, bunlara göre lineer her denklem bir çember denklemi değildir. Çember denklemi olması için, $z\overline{z}$'nin katsayısı (A) ve sabit terim (C) reel sayılar, z ile $\overline{z}$ in katsayıları $(B, \overline{B})$ birbirinin eşleniği, $A \neq 0$ olmalıdır veya bu şekle getirilebilmelidir. Örneğin,

$$\{z \,|\, z\overline{z} + 2z + 3\overline{z} + 5 = 0\}$$

bir çember değildir. Çünkü $\overline{2} = 2 \neq 3$. Peki bu denklem neyin denklemidir? $z = x + iy$ koyarak,

$$(x+iy)(x-iy) + 2(x+iy) + 3(x-iy) + 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 5x + 5 - iy = 0 = (0,0)$$
$$x^2 + y^2 + 5x = 0 \text{ ve } -iy = 0,$$

buradanda

$$y = 0, x^2 + 5x + 5 = 0$$

elde edilir.

Denklemden gerçel kök bulunamadığı için verilen küme boş kümedir. Eğer denklemden gerçel x değeri bulunabilseydi verilen küme gerçel eksen üzerinde (ox ekseni) denklemin köklerine karşılık gelen iki noktadan ibaret olurdu.

Doğru

Çemberin z ye bağlı denklemi,

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0 \quad (A \neq 0, A \text{ ve } C$$

gerçel sayılar) idi. $A = 0$ iken geri kalan,

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

doğru denklemidir. $(C \in \mathbb{R})$

Burada da vurgulanması gereken şudur: z ve $\overline{z}$ değerlerine bağlı lineer her denklem bir doğru denklemi değildir. z ile $\overline{z}$ nin katsayıları birbirinin eşleniği ve sabit terim gerçel sayı olmalıdır veya bu şekle getirilebilmelidir. Örneğin,

$$\{z \,|\, 3z + 5\overline{z} + 2 = 0\}$$

bir doğru denklemi değildir. Çünkü $\overline{3} = 3 \neq 5$. O halde bu ne denklemidir? $z = x + iy$ koyarak,

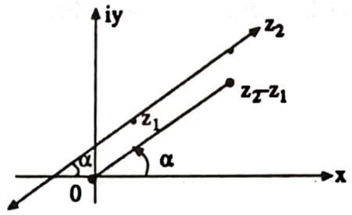
$$3(x + iy) + 5(x - iy) + 2 = 0$$
$$8x - 2iy + 2 = 0, \; 8x + 2 - 2iy = (0,0)$$
$$8x + 2 = 0, -2y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}, y = 0$$

O halde bu küme,

$$\{z \,|\, 3z + 5\overline{z} + 2 = 0\} = \{(-\frac{1}{4}, 0)\}$$

şeklinde reel eksen üzerinde tek bir noktadan oluşmaktadır.

Verilen iki noktadan geçen doğru denklemi



Verilen noktalar z_1, z_2 ise, $z - z_1 = k(z_2 - z_1)$, $(k \in \mathbb{R})$

$$\overline{z} - \overline{z}_1 = (\overline{z}_2 - \overline{z}_1)$$

Bu ikisinden

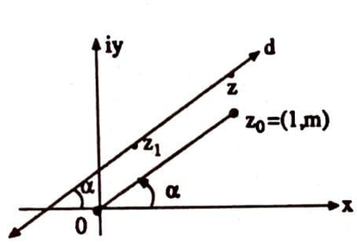
$$\frac{z - z_1}{\overline{z} - \overline{z}_1} = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}$$
$$(\overline{z}_2 - \overline{z}_1)z - (z_2 - z_1)\overline{z} + z_2\overline{z}_1 - \overline{z}_2 z_1 = 0$$

bulunur.

Not: Her iki taraf i ile çarpılarak denklemin, $Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$, $(C \in \mathbb{R})$ şartını sağladığı görülür.

Bir noktası ve eğimi verilen doğru denklemi

Nokta z_1 ve eğim m ise $(m \in \mathbb{R})$, $m = \tan\alpha$, $d \parallel oz_0$ olduğundan,



$z - z_1 = kz_0$

$\bar{z} - \bar{z}_1 = k\bar{z}_0$

$\frac{z-z_1}{\bar{z}-\bar{z}_1} = \frac{z_0}{\bar{z}_0}$

$\bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_1 - \bar{z}_0 z_1 = 0$ elde edilir.

Not: Yine her iki taraf i ile çarpılarak,

$Bz + \overline{B}\bar{z} + C = 0$, $(C \in \mathbb{R})$ şartının sağlandığı görülür.

Orijinden geçen doğru denklemide,

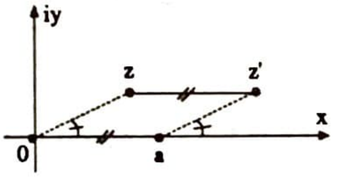
$\bar{z}_0 z - z_0\bar{z} = 0$ olur.

Dönüşümler

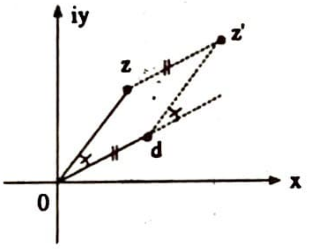
Düzlemdeki, yani $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye dönüşümler, kompleks sayılarla yani $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ olarak ele alındığında, düzlemin karteziyen koordinatlarla bilinen dönüşümlerine göre yine kolaylık ve sadelik görülmektedir.

Öteleme ve dönme dönüşümü

Öteleme dönüşümü, $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z' = z + a$ şeklinde idi. Eğer $a \in \mathbb{R}$ ise bu reel eksene parelel $|a|$ kadarlık bir kaymadır.



$a \in \mathbb{C}$ ise bu dönüşüm her noktayı oa doğrusuna parelel olarak $|oa|$ kadar kaydırır.



Bu dönüşümle oa doğrusuna parelel doğrular sabit kalır, diğer doğruların görüntüleri kendilerine paralel olur.

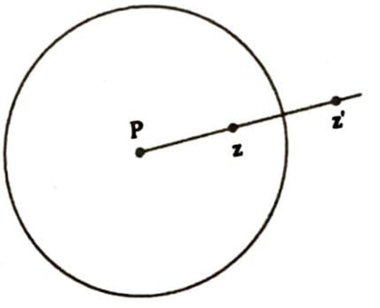
$Ç = \{z||z| = r, r > 0\}$ merkezcil çemberi, ve dönüşüm, $z' = z + a$, ve buradanda, $z = z' - a$ olacağından, $f(Ç) \doteq \{z||z-a| = r\}$ olur. Merkez a noktasına ötelenmiştir.

Bir α açılık dönme dönüşümü,

$z' = f(z) = z_0 z = e^{i\alpha}z$ şeklindedir. $(z_0 = e^{i\alpha}$, $|z_0| = 1)$. Bu dönüşüm her notayı orijin etrafında α açısı kadar döndürür.

Bir çembere göre evirtim

Düzlemde P merkezli ve r yarı çaplı çembere göre **evirtim** $|Pz||Pz'| = r^2$ olarak tanımlanır. z ve z' noktalarına **birbirinin evriği** denir.



$Az\bar{z} + Bz + \overline{B}\bar{z} + C = 0$, $(A, C \in \mathbb{R}, A \neq 0)$ çemberine göre evirtim f olsun. $z' = f(z)$ olmak üzere

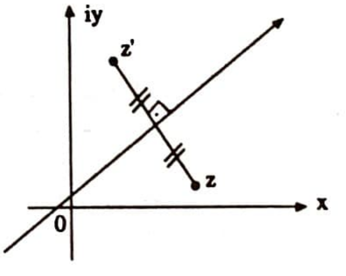
$Az'\bar{z} + Bz' + \overline{B}\bar{z} + C = 0$, $z' = \frac{-\overline{B}\bar{z}-C}{A\bar{z}+B}$ olur.

Yansıma (simetri)

$Az\bar{z} + Bz + \overline{B}\bar{z} + C = 0$ çember denkleminde $A = 0$ iken doğru denklemi elde edilir.

$Bz + \overline{B}\bar{z} + C = 0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü, $z' = f(z)$ olmak üzere,

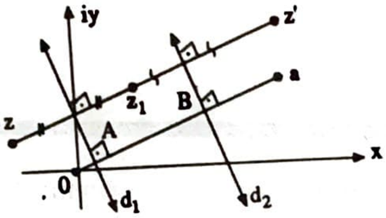
$Bz' + \overline{B}\bar{z} + C = 0$, $z' = -\frac{\overline{B}}{B}\bar{z} - \frac{C}{B}$ olur.



Genel olarak genişletilmiş karmaşık düzlemin $(\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ otomorfizmaları, $T : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{az+b}{bz+c}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1)$ şeklindedir. Bu dönüşümlerin kümesi bileşke işlemi ile bir gruptur. Bu guruba $PSL(2, \mathbb{C})$ veya Möbius grubu denir. Bu grubun her öğesi çift sayıda evirtimin (çembere göre veya doğruya göre) bileşkesi olarak yazılabilmekte ve böylece bir öğenin bütün özellikleri kolayca gözlenebilmektedir. Örnek olarak ötelemeyi ele alalım.

Teorem Öteleme iki yansımanın

bileşkesidir.



Kanıt $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, $z' = f(z)$, $z' = z + a$, ($a \in \mathbb{C}$ ve sabit) şekildeki oa doğrusuna dik olarak çizilen d_1 ve d_2 doğrularına göre yansımalar sıra ile f_1 ve f_2 olmak üzere $f = f_2 f_1$ olur. ($|AB| = \frac{1}{2}|a|, f_2 f_1 = f_2 o f_1$, $z_1 = f_1(z), z' = f_2(z_1) = f_2 f_1(z)$)

Möbius grubunu biraz daha yakından tanıyalım.

Teorem Möbius grubunun $PSL(2, \mathbb{R})$ alt grubu ($PSL(2,\mathbb{R}) = \{T | T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$) üst yarı düzlemi ($\{z = x + iy | y > 0\}$) ve ekseni ($\{z = x + iy | y = 0\}$) sabit bırakır.

Bunların kanıtı okuyucu tarafından kolayca görülebilir.

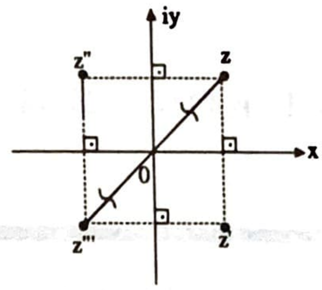
Möbius grubunun öğeleri konform dönüşümlerdir, çemberi yine çembere resmederler (doğruda yarıçapı sonsuz olan bir çember olarak düşünülür), genel olarak uzunluk ve alanı korumazlar. Fakat aşağıdaki teorem bir istisnayı belirtmektedir.

Teorem: Möbius grubunun öğeleri, **eşmetri çemberleri** üzerinde ($(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ için eşmetri çemberi, $|cz + d| = 1$ çemberidir.) uzunluğu korurlar.

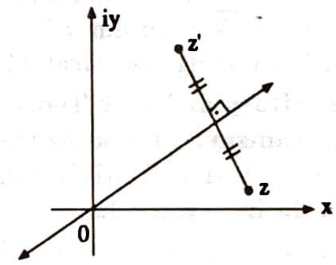
Kanıt Eşmetri çemberine E diyelim. $z_1, z_2 \in E$ olsun. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $|T(z_1) - T(z_2)| = |\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}| = |\frac{(ad-bc)z_1 - (ad-bc)z_2}{(cz_1+d)(cz_2+d)}| = |z_1 - z_2|$ bulunur. ($ad - bc = 1, |cz_1 + d| = 1, |cz_2 + d| = 1$)

Örnekler Son olarak birkaç basit örnek verip, kompleks sayılarla çalışmanın kısalığını ve sadeliğini görerek yazımızı bitirelim.

1. ox ve oy eksenlerinin denklemi sıra ile, $z - \bar{z} = 0, z + \bar{z} = 0$ ve bunlara göre yansıma dönüşümleri yine sıra ile $z' = f_1(z), z'' = f_2(z)$ olmak üzere $z' = \bar{z}$, $z'' = -\bar{z}$, **orijine göre simetri dönüşümü de** bu ikisinin bileşkesi olarak, $z''' = f_1 o f_2(z)$, $z''' = -z$ olur.

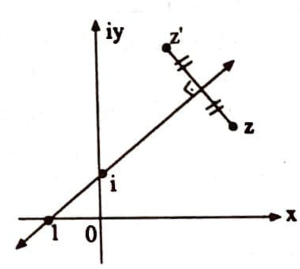


2. Orijinden geçen bir doğruya göre simetri dönüşümü, doğru denklemi, $\bar{z}_0 z = z_0 \bar{z} = 0$ olduğundan, $z' = f(z)$ olmak üzere,



$\bar{z}_0 z' - z_0 \bar{z} = 0$, $z' = \frac{z_0}{\bar{z}_0}\bar{z}$ olur.

3. $(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 = 0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü, $z' = f(z)$ ise $(1+i)z' + (1-i)\bar{z} + 2 = 0$, $z' = -\frac{1-i}{1+i}\bar{z} - 1 + i$ olur.



4. Birim çembere göre evirtim dönüşümünü bulalım.

$|z| = 1, z\bar{z} = 1$ ve evirtim dönüşümü formülünden, $z' = f(z)$ olmak üzere,

$z'\bar{z} = 1$, $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ bulunur.

5. $z' = f(z) = -\frac{1}{z}$ olmak üzere bu f dönüşümü Möbius grubunun bir öğesidir ve birim çembere göre evirtim ($f_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$) ile sanal ekse göre yansımanın ($f_2(z) = -\bar{z}$) bileşkesidir, $f = f_2 f_1$.

RASYONEL KÖK TEOREMİ

Emre Alkan *

Bu yazıda rasyonel kök teoremini ele alacağız. $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu hepimiz bilmekteyiz. Daha genel bir sonuç şöyledir.

N bir sayının m kuvveti değilse $\sqrt[m]{N}$ irrasyoneldir. Tersine $\sqrt[m]{N} = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$ olsun $Nb^m = a^m$, a^m'in asal çarpanlarından herbirinin kuvveti m ile bölünür. Dolayısıyla N'nin asal çarpan kuvvetleri de m ile bölünmelidir ki bu mümkün değildir. $\sqrt[m]{N}$ sayısının $x^m - N = 0$ denkleminin bir kökü olduğuna dikkat edelim.

Teorem: (Rasyonel Kök Teoremi) c_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ **tamsayı olmak üzere** $x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_m = 0$ **denkleminin her kökü ya tamsayı ya da irrasyoneldir.**

Kanıt: $x = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$ ve $b > 1$ denklemin bir kökü olsun. $a^m + c_1ba^{m-1} + \cdots + c_{m-1}b^{m-1}a + b^mc_m = 0$ elde edilir ki kolayca $b|a^m$ olacağı çıkar. $b > 1$ ise $p|b$ şeklinde bir p asal sayısı bulunabilir. $p|a^m$ ve $p|a$ elde edilir ki bu $(a,b) = 1$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kökler ya tamsayı ya da irrasyoneldir.

Şimdi teoremin kullanılışını sergilemek amacıyla uygulamalar yapacağız.

Problem: $f(x)$ rasyonel katsayılı, derecesi en az 2 olan bir polinom olsun. Her $n \geq 1$ için, $f(a_{n+1}) = a_n$ olacak biçimde a_n rasyonel sayı dizisi var ise her $n \geq 1$ için $a_{n+k} = a_n$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ sayısının varlığını gösteriniz.

Önce a_n dizisinin sınırlı olduğunu görelim. $f(x)$'in derecesi en az 2 olduğundan, $|x| \to \infty$ iken $|\frac{f(x)}{x}| = \frac{|f(x)|}{|x|} \to \infty$ yazılabilir. Şu halde $|a_1| \leq M$ ve $|x| \geq M$ için $|f(x)| \geq |x|$ olacak şekilde bir M sayısı bulunabilir. Herhangi bir $n > 1$ için $|a_n| > M$ ise $|a_{n-1}| = |f(a_n)| \geq |a_n| > M$ ve bu yinelenerek, $|a_1| > M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için $|a_n| \leq M$ olmalıdır.

Şimdi a_n dizisinin sonlu sayıda farklı terimden oluştuğunu görelim. Bunun için, her $n \geq 1$ ve a_n terimi hakkında Na_n tamsayı olacak şekilde bir N sayısı bulacağız. N sayısının ne olacağını kestirmek güçtür. Bir tümevarım kanıtı düşündüğümüzden tümevarım adımını ele alalım. Yani Na_n bir tamsayı olsun. Na_{n+1}'in $f(\frac{x}{N}) - a_n$ polinomunun bir kökü olduğu açıktır. b_i'ler ve c uygun tamsayılar olmak üzere, $f(x) = (b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots b_0)/c$ şeklinde yazılabilir. $cf(\frac{x}{N}) = b_k\frac{x^k}{N^k} + b_{k-1}\frac{x^{k-1}}{N_{k-1}} + \cdots + b_0$ ve $\frac{cN^k}{b_k}f(\frac{x}{N}) = x^k + b_{k-1}\frac{N}{b_k}x^{k-1} + \cdots + \frac{N^k}{b_k}$. Şu halde N sayısı b_k'nin bir tamkatı olacak şekilde seçilirse, $\frac{cN^k}{b_k}\{f(\frac{x}{N} - a_n\}$ tamsayı katsayılı monik bir polinom olur. Rasyonel kök teoremi ile Na_{n+1}'de bir tamsayı olmalıdır. Böylece tümevarım adımı tamamlanır. Tümevarımın başlangıcı için $a_1 = \frac{a}{b}$ ise $N = bb_k$ seçmek yeterli olur.

Böylece şunu elde ederiz. Sonsuz tane m_i sayıları için, $a_{m_i} = a_{m_i+k_i}$ olacak şekilde en küçük bir $k_i \geq 1$ sayısı vardır. Kolayca $a_{m_i}, a_{m_i+1}, \cdots, a_{m_i+k_i-1}$ terimleri farklıdır. Sonlu tane farklı terim olduğundan, sonsuz tane m_j sayıları için $a_{m_j} = a_{m_j+k}$ ve $k \geq 1$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. Rasgele bir a_n alalım $m_j > n$ olacak şekilde bir m_j alırsak, $a_{m_j} = a_{m_j+k}$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafına yeteri kadar f uygulanırsa, istenen $a_n = a_{n+k}$ elde edilir.

Teorem: (i) n **pozitif tamsayısı için,** $\cos\frac{\pi}{n}$ **sadece** $n = 1, 2, 3$ **iken rasyoneldir (ii)** $\sin\frac{\pi}{n}$ **ise sadece** $n = 1, 2, 6$ **iken rasyoneldir.**

Kanıt: $P_m(z)$, $m = 1, 2, \cdots$ polinom dizisini şöyle tanımlayalım. $P_1(z) = z - 1$, $P_2(z) = z^2 - z - 1$ ve $m > 2$ için $P_m(z) = zP_{m-1}(z) - P_{m-2}(z)$. Tümevarımla, $P_m(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^{2m+1}+1}{z^m(z+1)}$ olduğunu görelim. $m = 1$ ve $m = 2$ için kolaylıkla eşitlik sağlanabilir. Tümevarım adımı için, $P_m(z + \frac{1}{z}) = (z + \frac{1}{z})P_{m-1}(z + \frac{1}{z}) - P_{m-2}(z + \frac{1}{z})$ yazılabilir. $P_{m-1}(z + \frac{1}{z})$ ve $P_{m-2}(z + \frac{1}{z})$ için tümevarım hipotezleri yerine konursa, sav kanıtlanmış olur. Şimdi yeni bir $Q_m(z)$, $m = 1, 2, \cdots$ polinom dizisini şöyle tanımlıyalım. $Q_1(z) = z+1, Q_2(z) = z^2+z-1$ ve $m > 2$ için $Q_m(z) = zQ_{m-1}(z) - Q_{m-2}(z)$. Benzer şekilde tümevarımla, $Q_m(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^{2m+1}}{z^m(z-1)}$ olduğu görülebilir. Şimdi $m \geq 1$ için $P_m(z) =$

* Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü öğrencisi

0 ve $Q_m(z)=0$ denklemlerinin köklerini bulmaya çalışacağız. Kolayca $P_m(z)$ ve $Q_m(z)'$ nin z'ye göre m derece monik polinomlar olduğu görülebilir. Dolayısıyla Cebrin Ana teoremine göre $\mathbb{C}$'de m tane kök vardır. Eğer z, $\frac{z^{2m+1}+1}{z^m(z+1)}=0$'i sağlıyorsa, $z+\frac{1}{z}, P_m(z)=0$ denkleminin bir köküdür. Kolayca, $P_m(z+\frac{1}{z})=0$ denkleminin tüm kökleri, $z=\cos\frac{k\pi}{2m+1}+i\sin\frac{k\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,2m$ olarak verilir. Böylece $z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{k\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,2m$ olur. Şimdi şunu gözleyelim. Eğer z, $Q_m(z+\frac{1}{z})=0$ denkleminin bir kökü ise $-z$ de $P_m(z+\frac{1}{z})=0$ denkleminin bir köküdür. Böylece $Q_m(z+\frac{1}{z})=0$ denkleminin tüm kökleri, $z=\cos\frac{k2\pi}{2m+1}+i\sin\frac{k2\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,2m$ ile verilir. $z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{k2\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,m$ olur ki böylece $Q_m(z)=0$ denkleminin m kökü $z=2\cos\frac{2k\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,m$ olarak belirlenir. $-z=2\cos(\pi-\frac{2k\pi}{2m+1})$, değerinin kolayca $P_m(z)=0$ denkleminin bir kökü olduğu görülebilir. Böylece $P_m(z)=0$'ın tüm kökleri $2\cos\frac{(2m+1-2k)\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,m$ veya eşdeğer olarak $2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\cdots,m$ şeklinde elde edilir. $k=1$ alalım. Böylece $2\cos\frac{\pi}{2m+1}$, $P_m(z)=0$'ın bir köküdür. $P_m(z)$ tamsayı katsayılı ve monik bir polinom olduğundan, rasyonel kök teoremi ile $2\cos\frac{\pi}{2m+1}$ ya tamsayıdır ya da irrasyoneldir. Tamsayı ise ancak $2\cos\frac{\pi}{2m+1}=1$ olabilir. Bu ise $n=3$ halidir. $\cos\pi$ ve $\cos\frac{\pi}{2}$'nin rasyonelliği açıktır. Her $n>3$ tek sayısı için, $\cos\frac{\pi}{n}$'in irrasyonel olduğunu gördük. $n=2^kr$, $2\nmid r$ ve $k\geq 1$ olsun. $\cos\frac{\pi}{2^kr}$ rasyonel ise, $2\cos^2\frac{\pi}{2^kr}-1=\cos\frac{\pi}{2^{k-1}r}$'de rasyonel olur. Böylece devam edilirse, $\cos\frac{\pi}{r}$ rasyonel olur ki r tek olduğundan bu mümkün değildir. Burada $r=1$ ve $r=3$ durumlarını ayrıca ele almak gerekir. $r=1$ için $n=2^k$ olur. $\cos\frac{\pi}{2^k}$ rasyonel ise, $2\cos^2\frac{\pi}{2^k}-1=\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}$'de rasyonel olur. Böylece devam ederek, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ değerinin rasyonel olacağı elde edilir ki bu mümkün değildir. $r=3$ için, $n=2^k3$ olur. Benzer şekilde, $\cos\frac{\pi}{2^k3}$ rasyonel ise $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ değerinin rasyonel olacağı elde edilir ki bu da mümkün değildir. Böylece (i) kanıtlanmış olur. (ii) kısmını kanıtlamak için, $\sin\frac{\pi}{n}$ sayılarını ele alalım. $n=2^kr$, $2\nmid r$, $k\geq 2$ ve $r\geq 3$ olsun. $\sin\frac{\pi}{2^kr}$ rasyonel ise $\cos\frac{\pi}{2^{k-1}r}=1-\sin^2\frac{\pi}{2^kr}$ rasyonel olur. $k-1\geq 1$ ve $r\geq 3$ olduğundan bu mümkün değildir. $k=1$ ise $n=2r$ olur. $r>3$ için kolayca çelişki elde edilir. $r=1$ ve $r=3$ için $\sin\frac{\pi}{2}$ ve $\sin\frac{\pi}{6}$ rasyonel olur. Öte yandan $r=1$ ise $n=2^k$ olur. $k=1,2$ halini biliyoruz. $k\geq 3$ kabul edelim. $\sin\frac{\pi}{2^k}$ rasyonel ise, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$'nin rasyonel olduğu çıkar ki bu yine mümkün değildir. Şu halde n çift ise $\sin\frac{\pi}{n}$ sadece $n=2$ ve $n=6$ hallerinde rasyonel olur. Şimdi n tek olsun. $k=1$ alalım. Böylece $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$, $Q_m(z)=0$'in kökü olur. $Q_m(z)$ tamsayı katsayılı ve monik bir polinom olduğundan, rasyonel kök teoremi ile $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$ ya tamsayıdır ya da irrasyoneldir. $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}=2$ ise $\cos\frac{2\pi}{2m+1}=1$ mümkün değil, $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}=-2$ ise $\cos\frac{2\pi}{2m+1}=-1$ ve $2m+1=2$ mümkün değil, $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}=-1$ ise $m=1$ olur. $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}=1$ ise $2m+1=6$ mümkün değil. $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}=0$ ise $2m+1=4$ mümkün değil. Dolayısıyla $\cos\frac{2\pi}{n}$ (n tek) sadece $n=1,3$ iken rasyoneldir. Eğer $n>3$ tek sayısı için $\sin\frac{\pi}{n}$ rasyonel ise, $\cos\frac{2\pi}{n}=1-2\sin^2\frac{\pi}{n}$ rasyonel olur ki bu mümkün değil. $\sin\frac{\pi}{n}$, $n=1$ için rasyonel ve $n=3$ için irrasyonel olduğundan (ii) kanıtlanmış olur.

Şimdi bu teoremin geometrik bir uygulamasını vereceğiz.

Teorem: Kartezyen düzlemde yarıçap uzunluğu rasyonel olan bir çember üzerinde tüm köşe koordinatları rasyonel olan bir düzgün n-gen ($n\geq 3$) bulunamaz. ($n=4$ hariç)

Tersine tüm köşe koordinatları rasyonel olan bir n-genin varlığını kabul edelim. Şu yardımcı sonucu kullanacağız.

Önerme: Köşe koordinatları $(x_1,y_1)(x_2,y_2)(x_3,y_3)$ olan bir üçgenin alanı,

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

determinantı ile verilir. Eğer köşe koordinatları rasyonel ise alan da rasyonel olur.

Kanıtı okuyucu kolayca yapabilecektir.

Düzgün n-genin alanı, sonlu sayıda ve herhangi ikisinin alanları kesişmeyecek şekilde üçgenlerin toplamı olarak yazılabilir. Tüm köşe koordinatları rasyonel olduğundan, Lemma ile n-genin alanı rasyonel olacaktır.

R rasyonel olmak üzere, çemberin yarıçapı ise n-genin alanı, $\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ ile verilir. Kolayca $\sin\frac{2\pi}{n}$'in rasyonel olması gerektiği anlaşılır. Bunun için $\sin\frac{2\pi}{n}$ sayılarını rasyonellik bakımından inceleyelim. Şu yardımcı sonucu ele alacağız.

Önerme: $n\geq 3$ ise, $\sin\frac{2\pi}{n}$ sadece $n=4$ ve $n=12$ iken rasyoneldir.

Kanıt: n çift ise $n=2m$, $m\geq 2$ şeklindedir. $\sin\frac{2\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{m}$ olur. Teorem kullanılırsa $\sin\frac{\pi}{m}$ sadece $m = 2,6$ iken rasyonel olur. Böylece, $\sin\frac{2\pi}{n}$, $n = 4,12$ iken rasyonel olur. n tek olsun. $\sin\frac{2\pi}{n}$ rasyonel ise, $\cos\frac{2^2\pi}{n} = 1 - 2\sin^2\frac{2\pi}{n}$ rasyonel olur. Kolayca her $k \geq 2$ için $\cos\frac{2^k\pi}{n}$ rasyonel olur. $k = \phi(n)$ alalım. Euler teoremi ile, $n|2^{\phi(n)} - 1$ olacağından, $\cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{2^k\pi}{n}$ ya da $\cos\frac{\pi}{n} = -\cos\frac{2^k\pi}{n}$ elde edilir. $\cos\frac{\pi}{n}$ $n = 1,2,3$ dışında irrasyonel olduğundan çelişki elde edilir $n \geq 3$ olduğundan, $n = 3$ haline ayrıca bakılırsa, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak irrasyonel olur.

Şu halde Önerme ile, $n = 4$ ve $n = 12$ halleri dışında teoremimiz kanıtlanmış olur. $n = 12$ hali için şu yardımcı sonucu ele alacağız.

Önerme: Kartezyen düzlemde köşe koordinatları rasyonel olan bir eşkenar üçgen yoktur.

Kanıt: Tersine olduğunu varsayalım. Köşeler, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ olsun. Üçgenin alanı rasyonel olur. Bir kenarın uzunluğu, $((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}} = a$ olsun. Alan, $a^2\sqrt{3}/4$ ile verilir fakat $a^2/4$ rasyonel olacağından, $\sqrt{3}$'ün rasyonel olması gerekir ki bu mümkün değildir.

Şu halde köşe koordinatları rasyonel olan bir düzgün onikigen olsaydı, onikigenin uygun üç köşesi alınarak köşe koordinatları rasyonel olan bir eşkenar üçgen elde edilirdi ki bu Önerme'ye ters düşer. Teorem $n = 12$ iken de doğrudur.

$n = 4$ halinde de teoremin tersine bir örnek verelim. $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ noktalarını almak yeter.

Problem: Bir $n \geq 2$ sayısı için öyle $a_1, a_2, \cdots, a_n$ gerçel sayıları bulunuz ki, her $i = 1, 2, \cdots, n$ için a_i irrasyonel olsun $k \geq 2$ için, $a_k = 2a_{k-1}^2 - 1$ sağlansın ve $a_1 a_2 \cdots a_n$ rasyonel olsun. $m = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ için, $\cos\frac{2^m\pi}{2^n+1}$ sayılarının irrasyonel olduğu görülebilir. Bu sayılar, $a_k = 2a_{k-1}^2 - 1$ eşitliğini sağlarlar. Öte yandan $\pi_{m=0}^{n-1}\cos\frac{2^m\pi}{2^n+1} = \frac{1}{2^n}$ olmak üzere rasyoneldir (Kanıt okuyucuya bırakmıştır).

Yazıyı dikkat çekici bir sonuç ile bitirelim.

Önerme: α, β irrasyonel sayıları için, α^β irrasyonel olmayabilir.

$\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \log_{\sqrt{2}} 3$ alalım. Kolayca $\alpha^\beta = 3$ alarak rasyonel olur. Son olarak β'nın irrasyonel olduğunu görelim. $\log_{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ ise, $3^{2b} = 2^a$ olur ki bu ancak $a = b = 0$ halinde mümkün olur.

KAYNAKÇA

(1) G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5. Basım, 1979.

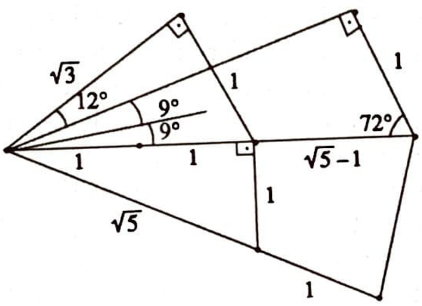
(2) American Mathematical Monthly, 1994, Problem 10369.

T CETVELİ YERİNE I CETVELİ'NİN ÇÖZÜM

Hasan Gökpınar *

ÖZET

I cetveli ile, aralarındaki uzaklık cetvel genişliği kadar olan iki paralel doğru, belirli bir noktadan belirli bir doğruya dik ya da paralel doğru ve belirli bir açının ortayı çizilebilir. Buna göre, cetvel genişliği ℓ ile gösterilmek üzere, kenar uzunlukları ℓ, $\sqrt{3}$, 2 ve ℓ, $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $1+\sqrt{5}$ olan dik üçgenler çizildiğinde aşağıdaki şekilde ölçüleri gösterilmiş olan açılar elde edilir.



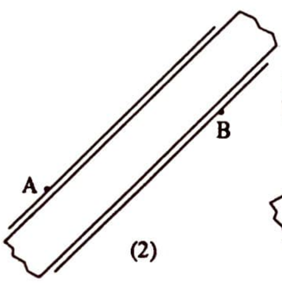
AYRINTILAR

I cetveli ile yapılabilecek bazı çizimler ve açıklamaları:

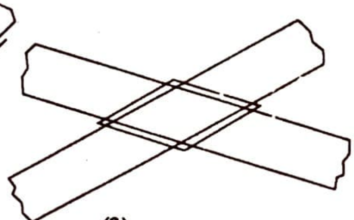
(1) İşaretlenmiş iki noktadan geçen bir doğru çizmek.

(2) Aralarındaki uzaklık cetvel genişliğinden daha büyük olan iki nokta işaretlendiğinde, herbiri bu noktaların birinden geçen ve aralarındaki uzaklık cetvel genişliği kadar olan iki paralel doğru çizmek.

(3) Bir eşkenar dörtgen çizmek.



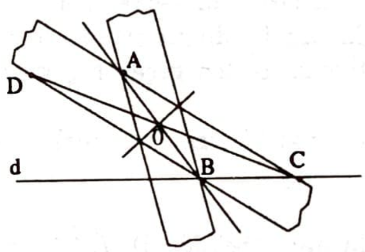
(2)



(3)

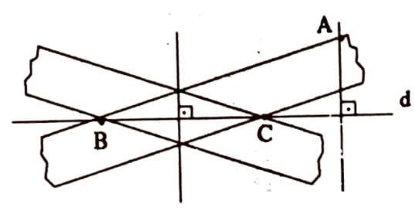
(4) Belirli bir noktadan belirli bir doğruya paralel doğru çizmek.

Açıklama: Verilen bir A noktasından verilen bir d doğrusuna paralel çizmek için, önce d doğrusu üzerinde rasgele bir B noktası alınır. A ve B noktaları için (2) deki çizim iki değişik konumda yapıldığında (3) deki eşkenar dörtgen elde edilir. Sonra, bu eşkenar dörgenin bir kenarı yeterince uzatılarak d'yi kestiği C noktası işaretlenir.



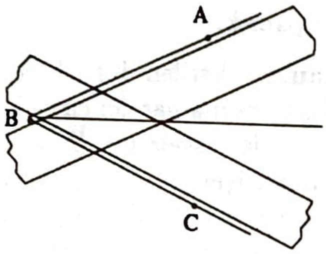
Karşılıklı iki köşesi A, B olan eşkenar dörtgenin, birbirini dik olarak ortalayan köşegenlerinin kesim noktası, 0, C ile birleştirilirse CO doğrusunun B köşesinden geçen kenarı kestiği D noktası, A'dan geçen ve d'ye paralel olan doğrunun bir noktası olur. $AD \parallel d$ dir.

(5) Belirli bir noktadan belirli bir doğruya dik çizmek.



* Gaziantep Üniversitesi, Matematik Bölümü

Açıklama: Verilen bir A noktasından verilen bir d doğrusuna dik çizmek için, önce d doğrusu üzerinde rasgele bir B noktası alınır. Sonra, cetvelin bir kenarı ile AB doğrusu çizilirken diğer kenarın d'yi kestiği C noktası işaretlenir. B ve C noktaları için (2) deki çizim yapıldığında bir köşegeni BC olan bir eşkenar dörtgen elde edilir ki bu eşkenar dörtgenin diğer köşegeni d'ye diktir. Bu köşegene A'dan paralel çizilirse A'dan d'ye dik çizilmiş olur.

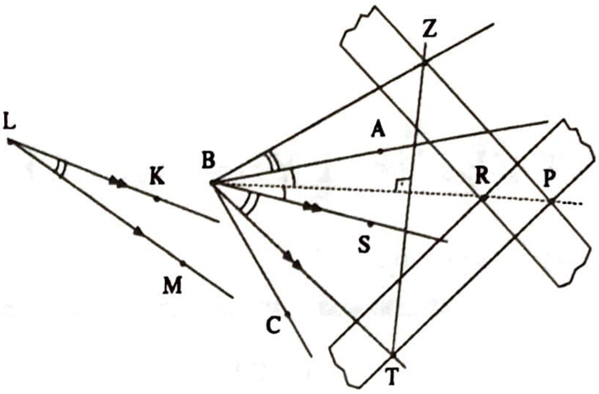


(6) Belirli bir açının ortayını çizmek

Açıklama: Verilen açı $\widehat{ABC}$ olsun. AB ve CB kenarlarına cetvel genişliği kadar uzaklıktan iki paralel doğru çizilirse elde edilen eşkenar dörtgenin B'den geçen köşegeni $\widehat{B}$ nın ortayı olur.

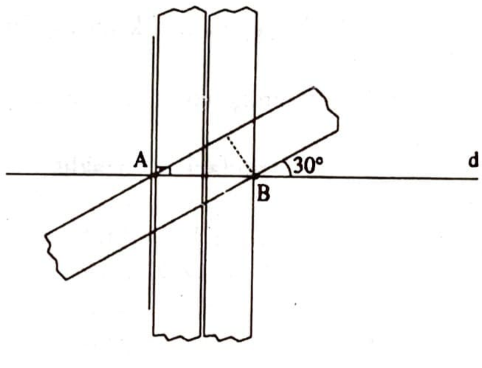
(7) İki açıyı birbirine eklemek ya da birbirinden çıkarmak.

Açıklama: (Şekildeki) $\widehat{KLM}$ nı $\widehat{ABC}$ üzerine eklemek için önce B'den KL ve ML'ye paraleller çizilerek $\widehat{KLM}$'na eş $\widehat{SBT}$ elde edilir. Ayrıca $\widehat{ABS}$'nın ortayı çizilir. Sonra, bu açıortay üzerinde rasgele bir P noktası alınıp T ile birleştirilirken, cetvelin diğer kenarı ile PT'ye bir paralel çizilir. Bu paralelin açıortayı kestiği R noktası işaretlenir. P ve R noktaları için (2) daki çizim yapılır. T'den açıortaya çizilen dikme ile P'den geçen doğrunun kesiştiği Z noktası B'ye birleştirilirse $\widehat{ZBA} = \widehat{SBT} = \widehat{KLM}$ ve $\widehat{ZBC} = \widehat{ABC} + \widehat{KLM}$ olur.



Bu çizimler birlikte gözönüne alınarak, kenar uzunlukları $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ ve/veya $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\cdots$ olan dik üçgenler ve dolayısıyla trigonometrik oranları bilinen birçok açı çizilebilir. Örneğin; hipotenüsü 2 birim ve bir dik kenarı 1 birim olan 30°, 60°, 90° dik üçgeni şöyle çizilir:

Bir d doğrusu üzerinde bir A noktası işaretlenir. A'dan d'ye dik çizilir. Bu dikmeye cetvel genişliği kadar uzaklıkta bir paralel ve bu paralele gene cetvel genişliği kadar uzaklıkta bir paralel ve bu paralele gene cetvel genilşiği kadar uzaklıkta ikinci bir paralel çizilerek d'yi kestiği B noktası bulunur. A ve B'ye (2) deki çizim uygulanırsa, yani cetveli A ve B arasına getirip biri A'dan diğeri B'den geçecek biçimde ve aralarındaki uzaklık cetvel genişliği kadar olan iki paralel doğru çizilirse 30° lik açı elde edilir. A'dan veya B'den bu iki paralele dik çizilirse 30°, 60°, 90° dik üçgeni elde edilir.



1. Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemleri

Selma Atabey *

Tanım:

$a, b, c, x, y, z, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$ax + by + cz = m \qquad (1)$$

şeklindeki bir denkleme üç bilinmeyenli Diofant denklem denir. Eğer a, b, c katsayılarından biri 0 ise elde edilen denklem 1. dereceden iki bilinmeyenli Diofant denklemidir.

Temel Teorem: Tam Sayılar kümesinde (1) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart a, b, c sayılarının $EBOB$ (en büyük ortak bölen)'inin m'yi bölmesidir (burada ve makalenin geri kalan kısmında a'nın b'yi bölmesi ifadesinden a'nın b'yi *kalansız* böldüğünü anlayacağız).

İspat:

x_0, y_0, z_0 tamsayıları (1) denkleminin çözümü olsun. O zaman $ax_0 + by_0 + cz_0 = m$ denklemi sağlanır.

a, b ve c sayılarının $EBOB$'i d olsun.

O zaman a, b, c sayıları

$a = dq_1$, $b = dq_2$, $c = dq_3$ $(q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z})$ şeklinde yazılabilirler.

$ax_0 + by_0 + cz_0 = m$ denkleminde a, b, c sayıları yerlerine sırasıyla dq_1, dq_2, dq_3 alınırsa $d(q_1x_0 + q_2y_0 + q_3z_0) = m$ olur.

Dolayısıyla d m'yi böler.

a, b, c sayılarının $EBOB$'i de ve $d|m$ olsun. O zaman $m = dq$ $(q \in Z)$ dir.

Bezont teoreminden dolayı $Aa+Bb+Cc = d$ denklemini sağlayacak şekilde A, B, C tamsayıları bulunabilir.

Son denklemin her iki tarafını q ile çarparsak

$(qA)a+(qB)b+(qC)c = qd = m$ elde edilir.

Dolayısıyla $x_0 = qA$, $y_0 = qB$, $z_0 = qC$ tamsayıları (1) denkleminin çözümüdür.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin tam sayılar kümesinde çözümleri var mıdır?

1) $3x - 6y + 15z = 7$

2) $105x + 56y = 42$

3) $2x + 5y + 7z = 8$

4) $104x + 65y = 43$

Çözüm:

1) $(3, 6, 15) = 3$ ve $3 \nmid 7$ olduğundan $3x - 6y + 15z = 7$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

2) $(105, 56) = 7$ ve $7|42$ olduğundan bu denklemin tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

3) ve 4) okuyucuya bırakılmıştır.

Diofant denklemlerinin çözümlerini Euler yöntemi ile bulacağız. Bu yöntemi örneklerin çözümünde açıklayacağız.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin tam sayılar kümesinde çözümlerini bulunuz.

1) $5x - 7y = 8$

2) $153x - 34y = 51$

3) $3x - 12y + 18z = 7$

4) $2x + 5y + 7z = 8$

Çözüm:

1) $(5, 7) = 1$ ve $1|8$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

Katsayısı mutlak değerce küçük olan terimi çekerek $x = \frac{8+7y}{5} = \frac{5+3+5y+2y}{5} = 1 + y + \frac{3+2y}{5}$ buluruz. x in tamsayı olması için $\frac{3+2y}{5}$ in de tam sayı olması gereklidir. $\frac{3+2y}{5} = z$ diyelim. $\Rightarrow 3 + 2y = 5z$ olur.

Aynı yöntem bu denkleme de uygulanır.

$$y = \frac{5z-3}{2} = \frac{4z+z-2-1}{2} = 2z - 1 + \frac{z-1}{2}.$$

y nin tamsayı olması için $\frac{z-1}{2}$ in de tam sayı olması gerekir. $\frac{z-1}{2} = u$ diyelim. $\Rightarrow z - 1 = 2u$, yani, $z = 1 + 2u$ olur. Tekrar geri dönerek x ile y'yi u cinsinden ifade edelim.

$$y = \frac{5z-3}{2} = \frac{5(1+2u)-3}{2} = 5u + 1$$

$$x = \frac{8+7y}{5} = \frac{8+7(5u+1)}{5} = 7u + 3$$

Burada $u \in \mathbb{Z}$ dir.

2) $(153, 34) = 17$ ve $17|51$ olduğu için denklemin tamsayılar kümesinde çözümü vardır.

* Atatürk Anadolu Lisesi, Matematik öğretmeni

Aynı yöntem ile $y = \frac{153x-51}{34} = \frac{136x+17x-34-17}{34} = 4x - 1 + \frac{17x-17}{34}$.

$\frac{17x-17}{34} \in \mathbb{Z}$ olmalı. $\frac{17x-17}{34} = u \Rightarrow 17x - 17 = 34u$ Yani $x - 1 = 2u$ dir. Buradan $x = 2u + 1$ buluruz. x'in bu ifadesini yukarıda yerine koyarak $y = \frac{153x-51}{34} = \frac{153(2u+1)-51}{34} = \frac{306u+153-51}{34} = 9u + 3$

Yani her $u \in \mathbb{Z}$ için $x = 2u+1$, $y = 9u+3$ denklemin bir çözümüdür.

3) $(3, 12, 18) = 3$ ve $3 \nmid 8$ olduğu için denklemin tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

Burada da katsayısı mutlak değerce en küçük olan terimi çekersek

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 - 7z - 5y}{2} \\ &= \frac{8 - 6z - z - 4y - y}{2} \\ &= 4 - 3z - 2y + \frac{z + y}{2} \end{aligned}$$

$\frac{z+y}{2} \in \mathbb{Z}$ olmalı. $\frac{z+y}{2} = u$ dersek $z + y = 2u$ olur. Buradan da $z = 2u - y$ bulunur.

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 - 7z - 5y}{2} \\ &= \frac{8 - 7(2u - y) - 5y}{2} \\ &= 4 - 7u + y \end{aligned}$$

Yani, $\left.\begin{aligned} x &= 4 - 7u + y \\ z &= 2u - y \end{aligned}\right\}$ olur.

Burada $u \in \mathbb{Z}$ dir.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi, parametrelerinin sayısının, bilinmeyenlerin sayısının bir eksiği olduğu görülür.

Örnek: 100 kişiye (erkekler, kadınlar, çocuklar) toplam 100 lira para verilmiştir. Her bir erkeğe 5 lira, her bir kadına 3 lira ve her bir çocuğa 0,5 lira verilmiş olduğuna göre erkeklerin, kadınların ve çocukların sayısını bulunuz.

Çözüm: x:erkeklerin sayısı, y:kadınların sayısı, $(100 - x - y)$:çocukların sayısı olsun.

$5x + 3y + \frac{1}{2}(100 - x - y) = 100$ Ya da $9x + 5y = 100$ olur. $(9, 5) = 1$ ve $1 | 100$ olduğu için tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

Euler yöntemi ile $y = 20 - 2x + \frac{x}{5}$ bulunur. $\frac{x}{5} \in \mathbb{Z}$ olmalı. $\frac{x}{5} = t$ diyelim.

$x = 5t$ ve $y = 20 - 9t$ olur.

$x > 0$, $y > 0$, $t > 0$ ve $t < 2\frac{2}{9}$ olmalı. Dolayısıyla $t = 1$ veya $t = 2$ dir. $t = 1$ için $x = 5$, $y = 11$, $z = 84$ $t = 2$ için $x = 10$, $y = 2$, $z = 88$ bulunur.

Örnek: Bir çocuk babasına, "Doğduğun günü 12 ile, doğduğun ayı da 31 ile çarpıp, bu çarpımların toplamını bana söylersen ben de sana doğum gününü söyleyebilirim" diyor. Babanın doğduğu günü ve ayı bulunuz.

Çözüm:

x- doğduğu gün $\quad 0 \leq x \leq 31$

y-doğduğu ay $\quad 0 \leq y \leq 12$

$$12x + 31y = 98$$

$x = 8 - 3y + \frac{2+5y}{12}$ olur.

$\frac{2+5y}{12} = z$ olsun.

$$2 + 5y = 12z \Rightarrow y = \frac{12z - 2}{5} = 2z + \frac{2z - 2}{5}$$

$$\frac{2z - 2}{5} = t \Rightarrow 2z - 2 = 5t \Rightarrow z = \frac{5t + 2}{2} =$$

$= 2t + 1 + \frac{t}{2}$

$\frac{t}{2} = v \Rightarrow t = 2v$

$z = 40 + 1 + v = 5v + 1$

$y = 12v + 2$

$x = 3 - 31v$ bulunur.

x ile y nin tanımlarından $-\frac{25}{31} \leq v < \frac{6}{31}$ ve $-\frac{1}{6} \leq v \leq \frac{5}{6}$ olmalı. Buradan $v = 0$, dolayısıyla $x = 6$ ve $y = 2$ elde edilir. Sonuç olarak babanın doğum günü 6 Şubat tır.

Soru: Toplam 73 soru çözen bir çocuk, bir kaç gün 11'er soru, kalan günlerde de 8'er soru çözmüştür. Bu soruları bu çocuk kaç günde çözmüştür?

Soru: Aşağıdaki Diofant denklemlerin tam sayılar kümesinde çözümlerini bulunuz.

1) $122x + 284y = 100$

2) $5x + 4y - 2z = 6$

Not: (Bezout Teoremi)

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayıları verilsin. $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n$ olacak şekilde $u_1, u_2, \cdots, u_n$ bulunabilir.

(Burada $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ile $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayılarının $EBOB$'i gösterilmiştir.)

GAUSS FORMÜLÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ (II)

Nurettin ÇALIŞKAN *

Birincisi bir birim, ikincisi iki birim. Üçüncüsü üç birim, $\cdots n$'incisi n birim uzunluğunda olan n tane çubuk alalım. Bu çubukları ucuca birleştirdiğimizde, uzunluğu

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$ kadar olan bir çubuk elde ederiz.

Aynı çubukları, üstüste getirelim. Çubukların uzunlukları toplamına bakıldığında, elimizde n tane 1 birim $(n-1)$ tane $(2-1)$ birim $\cdots$ bir tane $(n-(n+1))$ birimlik çubuklar olduğu görülecektir. Bu uzunlukların toplamı, bize toplam uzunluğu verir, yani

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= n(1-0)+(n-1)(2-1)+\cdots \\
& \quad (n(k-1))(k-(k-1))+ \\
&+ \cdots 1(n-(n-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}[n-(k-1)][k-(k-1)] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} n-\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1
\end{aligned}
$$

yada, $\sum_{k=1}^{n} 1=1+1+\cdots+1=n$ eşitliği ile

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} k &= n\sum_{k=1}^{n} 1+\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= n^2+n
\end{aligned}
$$

veya $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ sonucunu buluruz.

Şimdi de kenar uzunlukları $1,2,\cdots,n$ olan n tane kare şeklinde kağıtlar alalım. Kağıtların alanları toplamı

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$ dir.

Kağıtları üstüste koyduğumuzda, toplam alanın, n tane 1^2 birim kare, $(n-1)$ tane (2^2-1^2) birim kare $,\cdots,$ 2 tane $[(n-1)^2-(n-2)^2]$ birim kare ve bir tane $[n^2-(n-1)^2]$ birim karelik alanların toplamına eşit olduğu görülür.

O halde

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= n1^2+(n-1)(2^2-1^2)+\cdots+ \\
& \quad 2[(n-1)^2-(n-2)^2]+ \\
&+ 1(n^2-(n-1)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n}[n-(k-1)][n^2-(n-1)^2] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(2k-1)
\end{aligned}
$$

buradan da, sağ tarafı düzenleyip $\sum_{k=1}^{n} 1=n$, $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ bilgisi kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ elde edilir.}$$

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3$ toplamını bulmak içinde, hacimleri $1^3,2^3,\cdots,n^3$ birim küpler olan n tane küp alalım. Yukarıda ki örneklerdeki gibi, küpleri üst üste koyduğumuzda, küplerin toplam hacmi

$n1^3+(n-1)[2^3-1^3]+\cdots+(n-(k-1))[k^3-(k-1)^3]+\cdots+1[n^3-(n-1)^3]$ sayısına eşit olacaktır.

Ya da

* ODTÜ Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}(n-(k-1))(k^3-(k-1)^3)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(3k^2-3k+1)$$

buradan da

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 \text{ elde edilir.}$$

Bu üç örneğe baktığımızda, p nin 1,2 ve 3 değerleri için

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(k^p-(k-1)^p)$$

olduğunu görmekteyiz. $p \geq 4$ değerleri için bu ifadenin doğruluğunu araştırmaksızın $\sum_{k=1}^{n} k^p$ toplamının eşitliğini başka yöntemlerle bulmaya çalışacağız.

f reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ varsa, f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyondur ve bu limit değeri de $Df(x)$'e eşittir. Burada, D türev operatörü olmak üzere, $Df(x)$, f fonksiyonunun x noktasındaki türevini tanımlar.

f fonksiyonu tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, yukarıdaki limit tanımıyla verilen türev operatörü bu fonksiyon için geçerli değildir.

h'in sıfır komşuluğundaki değerleri yerine, $h = 1$ alındığında, verilen türev tanımı

$f(x+1) - f(x)$ şekline dönüşür.

Böylece tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonları için D türev operatörü yerine

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

şeklinde bir, Δ, fark operatörü tanımlanır.

f fonksiyonu reel sayılardan reel sayılara yeterince "düzgün" bir fonksiyon ise, Df ve Δf de reel sayılardan kendisine fonksiyonlardır.

Türev operatörünün özellikleri, fark operatörü içinde geçerlidir.

$c \in \mathbf{R}$ f ve h reel değerli fonksiyonlar ise,

(1) $\Delta(cf)(x) = c\Delta f(x)$

(2) $\Delta(f+h)(x) = \Delta f(x) + \Delta h(x)$

(3) $\Delta(f.h)(x) = h(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta h(x)$

(4) $\Delta f(x) = 0$ ise $f(x) \equiv$ sabit olur.

$\sum_{k=0}^{n} f(k)$ toplamının değerini bulmak için, fark operatörünün özelliklerinden yararlanacağız.

$f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ verilen bir fonksiyon olsun, $x \in \mathbf{Z}^+$ için $\Delta F(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonlarına bakalım.

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = f(0)$$
$$\Delta F(1) = F(2) - F(1) = f(1)$$
$$\Delta F(n-1) = F(n) - F(n-1) = f(n-1)$$
$$\Delta F(n) = F(n+1) - F(n) = f(n)$$

eşitliğin her iki tarafını topladığımızda

$$F(n+1) - F(0) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$$

yada

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = F(n+1) - F(0) = F(k)|_{k=0}^{k=n+1}$$

elde ederiz.

Böylece, verilen bir f fonksiyonu için $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ toplamını bulma sorusunu, $\Delta F = f$ olacak şekilde bir F fonksiyonu bulmaya dönüştürdük.

Örnek olarak, k bir tam sayı a birden farklı reel sayı olmak üzere, $\sum_{k=0}^{n} a^k$ toplamını bulmaya çalışalım.

İlk olarak $f(k) = a^k$ fonksiyonu için $\Delta F(k) = f(k)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunu bulmalıyız. Bu fonksiyon $F(k) = \frac{1}{a-1}a^k$ dır.

O halde

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{a-1}a^k|_{k=0}^{k=n+1}$$
$$= \frac{1}{a-1}(a^{n+1}-1)$$

olmalıdır.

Şimdi de p pozitif bir tam sayı olmak üzere $\Delta F(k) = k^p$ özdeşliğini veren F fonksiyonunu bulmaya çalışacağız.

$m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ için $D(x^m) = mx^{m-1}$ olduğunu biliyoruz. Δ fark operatörü için, benzer özelliği taşıyan bir fonksiyon bulabilirmiyiz?

$p \in \mathbf{Z}^+$ alalım. $x^{(p)}$ formunda bir "üstlü terim" tanımlıyalım, öyleki $x^{(p)}$

$x^{(0)} = 1$

$x^{(1)} = x$

$x^{(2)} = x(x-1)$

$\vdots$

$x^{(p)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$
özelliğine sahip olsun.

Oluşturduğumuz bu üstlü terimi kısaca

$$\begin{cases} x^{(0)} = 1 \\ x^{(p+1)} = x^{(p)}(x-p) & ;p = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

olarak tanımlıyabiliriz.

$F(x) = x^{(p)}$ olsun. Bu fonksiyona fark operatörünü uyguladığımızda

$\Delta F(x) = px^{(p-1)}$ olacaktır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x+1) - F(x) \\ &= (x+1)^{p} - x^{(p)} \\ &= (x+1)(x)(x-1)\cdots(x-p+2) - \\ &\quad x(x-1)\cdots(x-p+2)(x-p+1) \\ &= x(x-1)\cdots(x-p+2) \\ &\quad [x+1-(x-p+1)] \\ &= px(x-1)\cdots(x-p+2) \\ &= px^{(p-1)} \end{aligned}$$

Bu sonuçla, $p \in \mathbf{Z}^+$ için, $\Delta F(x) = x^{(p)}$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $F(x) = \frac{x^{(p+1)}}{p+1}$ olduğunu göstermiş olduk.

O halde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^{(p)} &= \frac{k^{(p+1)}}{p+1}\Big|_{k=0}^{k=n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(p+1)}}{p+1} \end{aligned}$$

olmalıdır.

Bizim bulmaya çalıştığımız toplam $\sum_{k=1}^{n} k^p$ şeklindeydi. k^p ifadesini üstlü terimler cinsinden yazdığımızda, yukarıda elde ettiğimiz sonucu kullanarak, bu toplamın değerini bulabileceğiz.

$p = 1$ olduğunda $k^{(1)} = k$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k^{(1)} &= \frac{k^{(2)}}{2}\Big|_{k=0}^{k=n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = 2 \text{ için } k^{(2)} &= k(k-1), \text{ yada} \\ k^{(2)} &= k^2 - k \text{ veya} \\ k^2 &= k^{(2)} + k \\ &= k^{(2)} + k^{(1)} \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(k^{(2)} + k^{(1)}) = (\frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2}|_0^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(2)}}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$p = 3$ için bakalım

$$\begin{aligned} k^{(3)} &= k(k-1)(k-2) \\ &= k^3 - 3k^2 + 2k \end{aligned}$$

buradan da

$$\begin{aligned} k^3 &= k^{(3)} + 3k^2 - 2k \\ &= k^{(3)} + 3(k^{(2)} + k^{(1)}) - 2k^{(1)} \\ &= k^{(3)} + 3k^{(2)} + k^{(1)} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}(k^{(3)} + 3k^{(2)} + k^{(1)}) \\ &= (\frac{k^{(4)}}{4} + 3\frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2}|_0^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(4)}}{4} + (n+1)^{(3)} + \frac{(n+1)^{(2)}}{2} \\ &= (\frac{n(n+1)}{2})^2 \end{aligned}$$

$p = 4$ için, $k^4 = k^{(4)} + 6k^{(3)} + 7k^{(2)} + k^{(1)}$ ve $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$, $p = 5$ için, $k^5 = k^{(5)} + 10k^{(4)} + 25k^{(3)} + 15k^{(2)} + k^{(1)}$ ve $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)}{12}[2n^3 + 4n^2 + n - 1]$

Bu yöntemle bütün $p \in \mathbf{Z}^+$ için $T_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$ toplamının değeri bulunabilir.

Şimdide, bütün p tamsayıları için $T_p(n)$ toplamının genelleştirilmesini yapmaya çalışacağız.

$$T_p(n) = 0^p + 1^p + \cdots + (n-1)^p = \sum_{k=1}^{n-1} k^p$$

olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
T_0(n) &= n \\
T_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
T_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
T_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
T_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
T_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
T_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
T_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{24}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
T_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \\
& \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
T_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10} - \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \\
& \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
T_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11} - \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + \\
& n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{aligned}$$

Bu toplamlara bakıldığında, bütün p'ler için $T_p(n)$ toplamının bir genelleştirilmesinin olası olduğu görülecektir.

Bütün $T_p(n)$ toplamlarında n^{p+1} ifadesinin katsayısı $\frac{1}{p+1}$, n^p nin katsayısı $-\frac{1}{2}$, n^{p-1} in katsayı $\frac{p}{12}$, n^{p-2} nin katsayısı herzaman sıfır. n^{p-3} ün katsayısı $-\frac{p(p-1)(p-2)}{720}$, n^{p-4} ün katsayısı yine sıfır. Bu şekilde devam edildiğinde n^{p-k} nın, katsayısının bir sabit sayı ile $p^{(k)}$'nin çarpımından oluştuğu görülecektir.

O halde, genelleştirerek

$$\begin{aligned}
T_p(n) &= \frac{1}{p+1}(b_0 n^{p+1} + \\
& \binom{p+1}{1} b_1 n^p + \cdots + \binom{p+1}{p} b_p n) \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} \binom{m+1}{k} b_k n^{p+1-k}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ şeklinde ifade edilen m'in k'li kombinasyonudur.

Toplam içinde verilen b_k sayıları Bernoulli sayıları olarak bilinir. Bernoulli sayıları aşağıda verdiğimiz ilişki ile tanımlanır.

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k = 0 \quad p = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Bernoulli sayıları için ilk 12 terim

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66},$
$0, \frac{-691}{2730}$ şeklinde sıralanmıştır.

Dikkat ederseniz, k ikiden büyük tek sayılar olmak üzere $b_k = 0$ yani $b_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$, dir.

STEINER-LEHMUS TEOREMİ

Hüseyin Demir *

1840· yılında C.L. Lehmus adında bir matematikçi büyük geometrici Jakob Steiner'e ilk bakışta basit görünen bir geometri problemi gönderir. Steiner, bu masum görünüşlü fakat zor problemi ileri geometri yöntemleri kullanarak çözer. O günden sonra bir çok matematik meraklısı bu probleme basit bir çözüm bulmaya uğraşmış ve söz konusu netice, biri matematiğe yaptığı büyük katkılarıyla herkesçe maruf, diğeri ise hiç tanınmamış iki matematikçinin adları ile yani "Steiner-Lehmus Teoremi" olarak şöhret kazanmıştır. [1, s.14]

Teoremin ifadesi şudur: *İki iç açıortayı uzunlukça eşit olan bir üçgen ikizkenardır.* Bu, ispatı çok kolay olan bir teoremin karşıtıdır. İspatı yönünde bir çok teşebbüs başarısız kalmışsa da, 1840 yılından bu yana teoremin 60 kadar başarılı ispatı verilmiştir. Lise kitaplarımızda yer almayan bu önemli teoremin eldeki bazı dergi ve kitaplardan derlenen dört ispatını burada okuyucularımıza sunmak istiyoruz. Bunlardan ilk ikisi doğrudan, öteki ikisi dolaylı olup "olmayana eğri" yöntemine dayalı bulunmaktadır.

Bir ABC üçgeninde A, B, C köşelerinin karşısında kalan kenarların uzunluklarını sırasıyla a, b, c ile, çevre uzunluğunu $2s$ ile,. A, B ve C köşelerinden geçen iç açıortaylarının uzunlukları n_a, n_b ve n_c ile ve $< BAC$, $< CBA$, $< ACB$ açılarının ölçülerini de 2α, 2β, 2γ ile gösterelim.

İspat 1 (Doğrudan). Bilinen

$$n_a = \frac{2}{a+b}\sqrt{bcs(s-a)}$$

$$n_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)}$$

$$n_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

formülleri kullanıldığında, $n_b = n_c$ varsayımından kolaylıkla $n_b^2 = n_c^2$ ve $n_b^2 - n_c^2 = 0$ yani

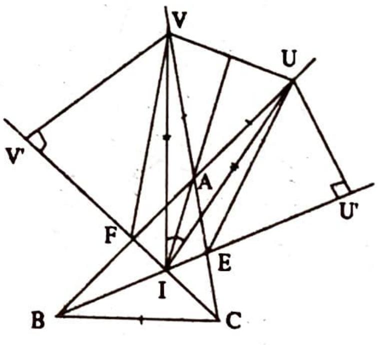
$$(a+c)^2b(s-c) - (a+b)^2c(s-b) = 0$$

elde edilebilir. $2s = a+b+c$ kullanılmak üzere bu denklemin her terimi 2 ile çarpılıp ifade a nın kuvvetlerine göre düzenlendiğinde

$$(b-c)[a^3 + (b+c)a^2 + 3bca + bc(b+c)] = 0$$

bulunur ki köşeli parantez içindeki ifade, bütün terimleri artı olduğundan, sıfırdan farklıdır. O halde, $b-c=0$ olup üçgen ikizkenardır.

Not. Liselerde açıortay uzunlukları için yukarda verilen formüller elde edildiğinde, bir uygulama olarak bu teoremden söz etmeli ve öğrencilerden teoremin ispatı istenmelidir.



İspat 2 (Doğrudan, [4].) AB ve AC kenarları üzerinde BE, CF sırasıyla B ve C den geçen içaçıortaylar olacak şekilde E ve F noktaları alalım. B ve C den geçen içaçıortayların uzunlukça eşit olduğunu yani $|BE| = |CF|$ olduğunu farz edelim. BE ve CF bir I noktasında kesişsin (Şekil 1). A köşesi U ve B, C ve V arasında kalacak ve $|AU| = |AV| = |BC|$ olacak şekilde U ve V noktalarını alıp ikizkenar AUV üçgenini çizelim. $[UV]$'nin

* ODTÜ Emekli Öğretim Üyesi

orta dikmesi I noktasından geçeceğinden (neden?) $|IU| = |IV|$ ve $| < AIU| = | < AIV|$ olacaktır. Sırasıyla U ve V nin BE ve CF üzerindeki dikme ayaklarını U' ve V' ile gösterelim. EBC ile EUA üçgenlerinin alanları, bu üçgenlere ait $[BC], [AU]$ kenarları ile bunlara karşılık gelen yükseklikler uzunlukça eşit olduğundan, (açıortay üzerindeki E noktası BC ve AB doğrularından aynı uzaklıktadır !) eşittir. Bu alanlara ABE üçgeninin de alanının eklenmesiyle ABC ve EUB üçgenlerinin, benzer olarak da ABC ve FVC üçgenlerinin, bu suretle de EBU ve FCV üçgenlerinin alanca eşit oldukları görülür. Bu üçgenlerde $[BE]$ ve $[CF]$ kenarları eşit olduğundan ilgili yüksekliklerin yani $[UU']$ ve $[VV']$ nin uzunlukça eşit olduğu görülür. Demek ki UIU' ve VIV' dik üçgenleri eşit olup

$$| < UIU'| = | < VIV'|$$

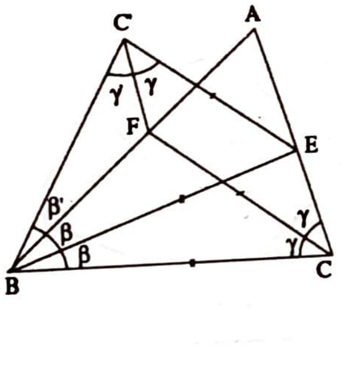
ve

$$| < AIU'| = | < AIV'|$$

ve en nihayet bir kaç basit işlemle

$$< CBA = < ACB$$

olduğu görülür.

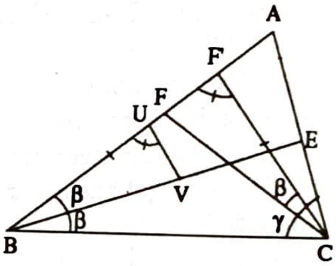


İspat 3 (Dolaylı , [3, s. 65-66].) AB ve AC kenarları üzerinde BE, CF sırasıyla B ve C den geçen açıortaylar olacak şekilde E ve F noktaları alalım. (Şekil 2). $|BE| = |CF|$ ve $\beta < \gamma$ olduğunu kabul ederek bir çelişkiye varacağız. EBC ve FBC üçgenlerinde $|BE| = |CF|$ eşliğinden, ve $\beta < \gamma$ eşsizliğinden $|CE| < |BF|$ elde edilir.

$CEC'F$ paralelkenar olacak şekilde bir C' noktası ithal edildiğinde, $|BE| = |CF| = |EC'|$ olup $EC'B$ üçgeni ikizkenardır. O halde, $\beta' = | < FBC'|$ ve $\gamma' = | < BC'F|$ yazarak, $\beta + \beta' = \gamma + \gamma'$ bulunur ki $\beta < \gamma$ dan $\beta' > \gamma'$ eşitsizliğini ve bundan da $FC'B$ üçgeninde $|FC'| > |FB|$ ve $|FC'| = |CE|$ nedeniyle $|CE| > |FB|$ bulunur ki bu imkansızdır. Öyle ise, $\beta <$ *ugamma* olamaz. Benzer olarak $\gamma < \beta$ da olamaz. O halde, $\beta = \gamma$ olup üçgen ikizkenardır.

İspat 4 (Dolaylı). Bu ispat aşağıdaki yardımcı teoreme dayanmaktadır:

Yardımcı Teorem : *Bir üçgende iki açıdan, ölçüsü daha küçük olana ait iç açıortayın uzunluğu, ölçüsü daha büyük olana ait iç açıortayın uzunluğundan daha büyüktür.*

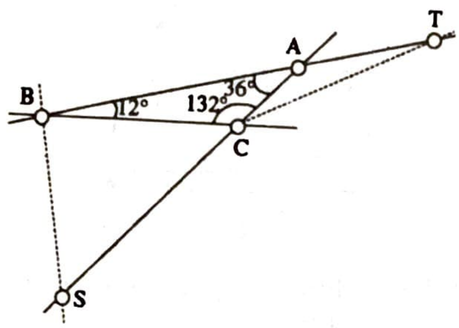


İspat ([2, s. 470]) $\beta < \gamma$ olduğunu varsayalım. A ve F arasında kalacak ve $|F'CF| = \beta$ olacak şekilde bir F' noktası alalım (Şekil 3).

$F'BC$ üçgeninde $\beta + \beta < \gamma + \beta$ olduğu için $|CF'| < |BF'|$ olup B ve F' arasında kalacak ve $|BU| = |CF'|$ olacak şekilde bir U noktası alınabilir. BE doğrusu üzerinde, $UV \parallel F'C >$ olmak üzere V noktası alınacak olursa $< BUV = < BF'C >$ olup UBV ve $F'CF$ üçgenleri eşit olup, $|BV| = |CF|$ olmalıdır. $UV \parallel F'C$ olduğundan, V noktası B ve E arasında kalır ve $|CF| = |BV| < |BE|$ elde edilir.

Bu yardımcı teoremi kullanarak, Steiner-Lehmus teoremini dolaylı olarak şu şekilde ('olmayana ergi' ile) ispatlayabiliriz. Eğner $\beta < \gamma$ olsaydı, yardımcı teorem gereğince $n_b > n_c$ olurdu ki bu, $n_b = n_c$ varsayımıyla çelişme yaratır. O halde $\beta < \gamma$ ve benzer olarak $\gamma < \beta$ olamaz, yani

$\beta = \gamma$ dir.



Yazımızı şu uyarı ile kapatıyoruz: Steiner-Lehmus teoremi üçgenin dış açıortayları için muteber değildir; yani ikizkenar olmayan bir üçgende iki dış açıortay uzunlukça eşit olabilir. Şekil 4 de bunun güzel bir örneğini teşkil eden ve 'Bottema üçgeni' olarak anılan üçgeni veriyoruz. [3, s.66]. B ve C köşelerine ait dış açıortayların bu üçgende uzunlukça eşit olduklarının ispatını okuyucularımıza bırakıyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Coxeter, H. M. S., Greitzer, S.L., *Geometry Revisited,* New Mathematical Library, Vol. 19, 1967, New York and the L.W. Singer Co., Syracuse.

[2] Coxeter, H.M.S., *Introduction to Geometry,* John Wiley, New York, 1961.

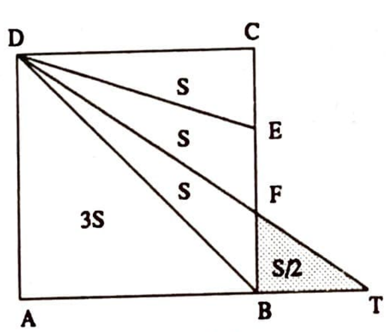
[3] Court, N.A., *College Geometry,* Barnes and Noble, 1952, New York.

[4] J. V. Malesevic: "A direct proof of the Steiner-Lehmus teorem" *Mathematics Magazine,* 43(**1970**)101-107.

1994 ÖĞRENCİ YERLEŞTİRME SINAVI (II)

Ülkü Öztaş - Onur Sağsen *

27.

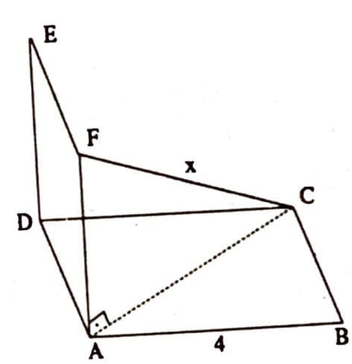


27

$ABCD$ **bir kare,** $F \in [DT]$ **ve** $|CE| = |EF| = |FB|$ **olduğuna göre** $A(\triangle FBT)/A(\triangle DBF)$ **oranı nedir?**

Çözüm: $\triangle FBT$ ve $\triangle FCD$ üçgenleri benzer üçgenlerdir ve benzerlik oranları $\frac{|FB|}{|FC|} = \frac{1}{2}$ dir. Böylece $\frac{|FT|}{|FD|} = \frac{1}{2}$ olur. Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olacağından, sorulan oran $\frac{1}{2}$ dir.

28.

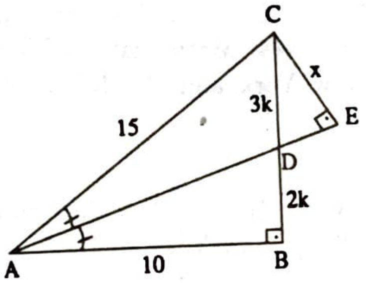


$|AB| = 4$ **cm şekildeki** $ABCD$ **ve** $AFED$ **küreleri birbirlerine dik ve eşit iseler** $|FC| = x$ **nedir?**

* Üçler Dershanesi Öğretmeni, Ankara

Çözüm: FA, DA ve AB doğrularına dik olduğundan, üç dikme teoremine göre, $ABCD$ kare düzlemine dik, dolayısı ile $FA \perp AC$ dir. $|FA| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{2}$ bulunur. FAC dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $x = 4\sqrt{3}$ elde ederiz.

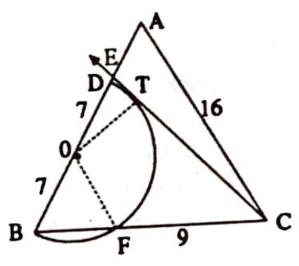
29.



ABC **ve** *AEC* **üçgenleri dik,** *AE* **açıortay,** $|AB| = 10$, $AC = 15$, **ise** $|CE| = x$ **nedir?**

Çözüm: ABC üçgeninde Pisagor bağıntısından $|BC| = 5\sqrt{5}$ buluruz. Açı ortay teoremi ise $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{3}$ verir. ABD ve ACE üçgenleri benzer olduklarından $\frac{2\sqrt{5}}{x} = \frac{2}{3}$, bize $x = 3\sqrt{5}$ verecektir.

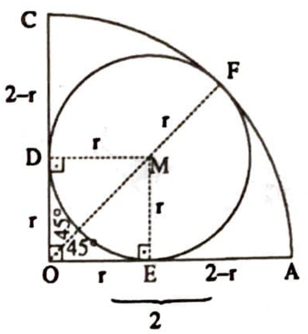
30.



ABC **üçgeni eşkenar ve** $|AC| = 16$, $|OB| = |OD| = 7$ **cm ise** $|CT| = x$ **nedir?**

Çözüm: OBR üçgeninde $|OB| = |OE| = 7$ olduğundan OBF eşkenardır ve $|BF| = 7$ cm dir. C noktasının çembere göre kuvveti alınarak bulunan $|CT|^2 = |CF||CB|$ eşitliğinden $|CT| = 12$ cm buluruz.

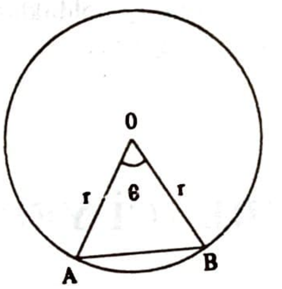
31.



$|OA| = 2$ **olduğuna göre,** r **nedir?**

Çözüm: $|OA| = |OF|$ olduğundan, $2 = \sqrt{2}r + r$ denklemi çözülerek $r = 2(\sqrt{2} - 1)$ bulunur. Veya; Çemberler F noktasında içten teğet olduklarından O, M, F noktaları doğrudaştır. Bu $OM = 2 - r$ verir. Teğet, değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan $MD \perp OC$ ve $ME \perp OA$ olur. $|ME| = |MD| = r$ olduğundan, $|OE| = r$ ve OEM ikizkenar dik üçgeninde $2 - r = \sqrt{2}r$ buluruz.

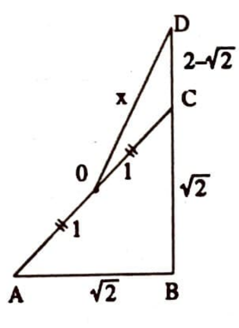
32.



$r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $|AB| = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ **ise çember içine çizilecek düzgün çokgen kaç kenarlıdır?**

Çözüm: OAB üçgeninde kosinüs teoremini uygulayarak $r^2(2 - \sqrt{3}) = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\theta$ buluruz ki bu da $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ veya $\theta = 30°$ verir. $\frac{360}{30} = 12$ olduğundan çokgen 12 kenarlıdır.

33.



ABC **üçgeni ikizkenar ve dik,** $|OA| = |OC|$, $|BD| = |AC| = 2$ **cm olduğuna göre,**

$|OD| = x$ **nedir?**

Çözüm: $|AC| = 2$, ve ABC üçgeninin ikizkenar dik üçgen olduğundan $|BC| = \sqrt{2}$ buradan da $|CD| = 2 - \sqrt{2}$ bulunur. OCD üçgeninde uygulanan kosinüs teoremi $x^2 = 1 + (2-\sqrt{2})^2 + 2(2-\sqrt{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ veya $x = \sqrt{5-2\sqrt{2}}$ verir.

34. $A = \{a,c,d\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ **olduğuna göre** B**'nin alt kümelerinden kaç tanesi** A **kümesini kapsar?**

Çözüm: $B - A = \{b,e,f,g\}$ kümesinin $2^4 = 16$ alt kümesi vardır. Bunlardan herhangi bir C kümesi için $A \subset A \cup C$ olacağından, aranılan küme sayısı 16 tanedir.

35. $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ **ise,** $\cos 2x$ **nedir?**

Çözüm: Her iki tarafın karesini alıp, $2\sin x \cos x = \sin 2x$ eşitliği kullanılırsa $1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$ bulunur. $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ eşitliğinden $\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ elde edilir.

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \Pi_{m=2}^{\infty}(mn - 3n) =?$

Çözüm: $m = 3$ için çarpımı oluşturan çarpanlardan biri sıfır oluyor, dolayısı ile toplam sıfırdır.

37. En küçükleri 3 yaşında ve yaş farkları aynı olan 6 kardeşin yaşları toplamı 48 ise en büyükleri kaç yaşındadır?

Çözüm: Çocukların yaşları küçükten büyüğe doğru $a_1, a_2, \cdots, a_6$ olsun. Bu aritmetik bir dizidir. Yaş farkına d dersek $a_6 = a_1 + (6-1)d$ olduğundan; yaşlar toplamı $48 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6)$ olur. Buradan $a_6 = 13$ bulunur.

38. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **ise** $A^2 - 4A + 4I$ **nedir?**

Çözüm: $A^2 - 4A + 4I = (A - 2I)^2$ olduğundan, $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ bulunur.

39. $i^2 = -1$ **olduğuna göre** $\begin{vmatrix} 1 & i & i+1 \\ 0 & 1 & i-1 \\ 0 & i & i \end{vmatrix}$ **determinantı nedir?**

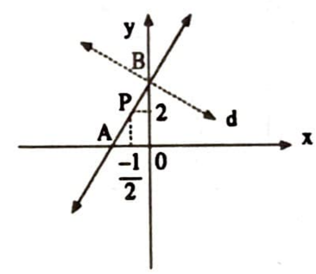
Çözüm: Birinci sütunu kullanıp, determinantı alırsak,

$1.\begin{vmatrix} 1 & i-1 \\ i & i \end{vmatrix} = i - (i^2 - i) = 2i - i^2 = 2i + 1$ buluruz.

40. $z = x + iy$ **ve** $|z + 2 - i| = 10$ **ise** $(x+2)^2 + (y-1)^2 =?$

Çözüm: Karmaşık sayıların toplamı tanımı ve mutlak değer tanımından $|x + iy + 2 - i| = 10$ veya $|(x+2) + i(y-1)| = 10$ veya $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 10$ veya $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100$ bulunur.

41.



$|OB| = 4|OA|$ **ve** $d \perp AB$ **olduğuna göre** d **doğrusunun denklemi nedir?**

Çözüm: AB doğrusunun eğimi 4, $d \perp AB$ olduğundan d'nin eğimi $-\frac{1}{4}$ dir. AB doğrusunun denklemi $y - 2 = 4(x + \frac{1}{2})$ olup, $x = 0$ için bulunan B noktasının koordinatı 4 dür. d'nin denklemi $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 0)$ veya $4y - x - 16 = 0$ dır.

42.

$d_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-1}$

$d_2 : \frac{x}{a} = \frac{y}{2} = \frac{2}{-4}$

$d_1 \perp d_2$ ise a nedir?

Çözüm: d_1 doğrusunun yön vektörü $(-2,3,-1) = \vec{N}_1$, d_2 doğrusunun yön vektörü ise $\vec{N}_2 = (a,2,-4)$ dür. $d_1 \perp d_2$ için gerek ve yeter koşul $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ olduğundan

$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = -2a + 6 + 4 = 0$ veya $a = 5$ olmalıdır.

43. $A = (1,0,-1)$ **noktasından geçen ve normal vektörü** $\vec{N} = (-1,-2,1)$ **olan düzlem denklemi nedir?**

Çözüm: (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve normal vektörü $\vec{N} = (A,B,C)$ olan düzlem $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ olarak betimlendiğinden, aranılan düzlem $x + 2y - z - 2 = 0$ olmalıdır.

44. $\mathbb{R}^3$ de aşağıdaki önermelerin hangisi yanlıştır?

a) Paralel iki doğrudan birine paralel olan bir doğru diğerine de paraleldir.

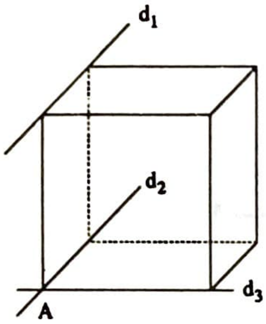
b) Birbirlerine paralel üç doğru aynı düzlemde olmayabilir.

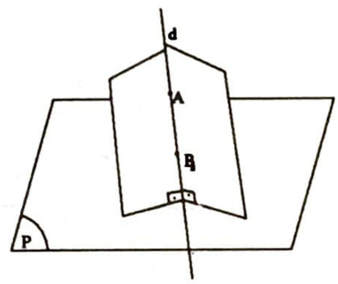
c) Paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser.

d) Bir noktadan geçen ve bir düzleme paralel olan bir düzlem vardır.

e) İki noktadan geçen ve bir düzleme dik olan bir düzlem vardır.

Çözüm:





Bu soruda a, b, d önermelerinin doğruluğu açıktır. Yalnız sadece bir değil, iki yanıt var. Çünkü c ve e önermeleri yanlış! c önermesinin yanlışlığı görmek için ilk şekile bakalım. d_1 ve d_2 doğruları paralel, $d_1 \cap d_3 = \{A\}$ fakat $d_1 \cap d_3 \neq \phi$. e önermesinin yanlışlığını görmek için yukarıdaki ikinci şekile bakalım. A ve B noktaları P düzlemine dik olan d doğrusu üzerindeler. Ancak A ve B den geçen ve P düzlemine dik olan **sonsuz** düzlem vardır.

45. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{2}}{\sin 4x}$

Çözüm: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$ ve $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 4x = 0$

$\sin^2 x - \frac{1}{2}$ ve $\sin 4x$ türevlenebilir olduğundan; L'Hopital kuralı gereğince istenilen limit $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin x\cos x}{4\cos 4x}$ ile aynıdır ve $-\frac{1}{4}$ dür.

46. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 3}$

Çözüm: $x^3 - 3x^2$ ve $x^2 - 3$ heryerde sürekli fonksiyonlardır. $x = 3$, $x^2 - 3$'in kökü olmadığından, verilen fonksiyon bu noktada da süreklidir. Dolayısı ile istenen limit, fonksiyonun 3 noktasında aldığı sıfır değeridir.

47. $\lim_{x\to\infty} (\dfrac{2x+5}{2x+3})^{4x-1}$

Çözüm: İstenen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. Ancak verilen koşullar L'Hopital kuralını uygulamamıza olanak veriyor. $\lim_{x\to\infty} (\dfrac{2x+5}{2x+3})^{4x-1} = L$ olsun. ln fonksiyonu sürekli olduğundan $L = \lim_{x\to\infty} (4x-1)\ \ln \dfrac{2x+5}{2x+3}$ ki buda $0.\infty$ şeklinde bir belirsizlik. Ancak bunu $\ln L = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln\frac{2x+5}{2x+3}}{\frac{1}{4x-1}}$ yazarak $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliğe dönüştürebiliyoruz. L'Hopital kuralını uygulayarak $\ln L = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{-4}{(2x+5)(2x+3)}}{-\frac{4}{(4x-1)^2}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{16x^2 - 16x + 1}{4x^2 + 16x + 15} = 4$ buluyoruz ki, bu $L = e^4$ verir.

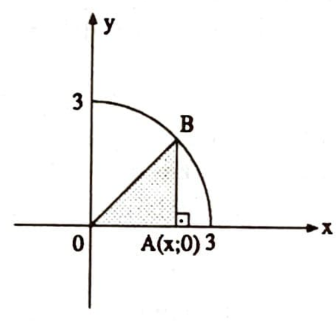
48. $f(x) = \dfrac{x^2 + m}{x - 1}$ **fonksiyonunu** $x = 3$ **de extremumu olması için** m **ne olmalıdır?**

Çözüm: Extremum tanımından $\frac{df}{dx}|_{x=3} = 0$ olmalıdır. Türevin $x = 3$ noktasındaki değeri $m = 3$ olmasını gerektirir.

49. $f(x) = \ln(3x - 1)$ **ise** $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0) =?$

Çözüm: Verilen fonksiyonun tersi, $f^{-1}(x) = \frac{e^x+1}{3}$ fonksiyonu olduğundan $f^{-1}(0) = \frac{2}{3}$ dür. $(f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{3}$ olup, $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3}$ dür. Dolayısı ile $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0) = 1$ bulunur.

50.



OAB **üçgenin alanı** x**'in hangi değeri için maksimumdur?**

Çözüm: B noktasının kordinatları (x, y) olsun. B, $(0, 6)$ merkezli, 3 yarıçaplı çember üzerinde olduğundan $y = \sqrt{9 - x^2}$ olacaktır. $A(x) = \text{Alan} = \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}$ olduğundan, x'in aranılan değeri $A'(x) = \frac{18x-4x^3}{2\sqrt{ax^2-x^4}}$ değerini sıfır yapan 0, $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ den biri olmalıdır. Gerekli inceleme aranılan değerin $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ olduğunu gösterir.

51. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx =?$

Çözüm: $u-\sqrt{x}$ denirse $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ veya $du = \frac{dx}{2u}$ olacaktır.

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+u}{1-u}2udu = 2\int \frac{u(1+u)}{1-u}du$$ bulunur.

52. $A = \int_{\frac{\pi}{12}}^{a} -2(\sin^4 x - \cos^4 x)dx = \frac{1}{2}$ ise $a =?$

Çözüm: $A = \int_{\frac{\pi}{12}}^{a} -2(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int_{\frac{\pi}{12}}^{a} 2\cos 2x dx = \sin 2a - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Bu da $\sin 2a = 1$ veya $2a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ veya $a = \frac{\pi}{4} + k\pi$ verir.

PROBLEMLER İLE EĞLENELİM (Mİ?)

Şafak Alpay *

Size ilgileneceğinizi umduğum bazı problemler sunuyorum. Tatilin geri kalan kısmı ve dersleriniz kızışmadan uğraşmanız dileği ile hepinize mutlu yıllar!

1. 1994'de 5 Nisan salı gününe gelmişti. Acaba hangi yılda 5 Nisan yine bir salı gününe gelecek?
2. N tam sayısı için M, N'nin basamaklarını ters sırada yazarak elde ettiğmiz sayı olsun. Örneğin $N = 6923$ ise $M = 3296$ olur. $N - M$'nin 9 ile bölünebileceğini gösteriniz.
3. $x^3 - kx - 1 = 0$ denkleminin iki eşit kökü olduğu tüm k gerçel sayılarını bulunuz.
4. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olsun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ve
   i) $f(f(n)) = n \quad , n \in \mathbb{Z}$
   ii) $f(f(n+2)+2) = n \quad , n \in \mathbb{Z}$
   iii) $f(0) = 1$
   özelliklerini sağlayan tek fonksiyonun $f(n) = 1 - n$ olduğunu gösteriniz.
5. 210 sayısından küçük ve 210 ile aralarında asal olan kaç tane doğal sayı vardır?
6. $m^2 - 7n^2 = 1$ eşitliği sağlayan (m, n) çiftleri nelerdir?
7. Dar açısı $30°$ olan bir paralel kenarda, köşegenlerin oranı $\sqrt{2+\sqrt{3}}/\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ise, kenarların oranını bulunuz.
8. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots + \frac{1}{255.257} =?$
9. $(x+y)^2 = 2$ ve $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2 = 8$ ise, $xy =?$
10. a, b, c, d, $x^4 - bx + 3 = 0$ denkleminin kökleri iseler, kökleri $\frac{a+b+c}{d^2}$, $\frac{a+b+d}{c^2}$, $\frac{a+c+d}{b^2}$ $\frac{b+c+d}{a^2}$ olan denklemi bulunuz.
11. Her n doğal sayısı için $\frac{21n+4}{14n+3}$ kesrinin indirgenemez olduğunu gösteriniz. (Bu 1959 yılında yapılan ilk matematik olimpiyatlarından bir sorudur.)
12. $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + \cdots + 49.50 =?$
    Aşağıdaki çift yönlü önermeleri kanıtlayınız.
13. Bir sayının 3 ile bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun ($g.$ ve $y.$ koşul) basamaklar toplamının 3 ile bölünebilmesidir.
14. Bir sayının 9 ile bölünebilmesi için $g.$ ve $y.$ koşul basamaklar toplamının 9 ile bölünebilmesidir.
15. Bir sayının 2^k ile bölünebilmesi için $g.$ ve $y.$ koşul son k basamağın 2^k ile bölünebilmesidir. Örneğin 19392, $8 = 2^3$ ile bölünebilir çünkü 392, 8 ile bölünebilir.
16. Bir sayının 5^k ile bölünebilmesi için $g.$ ve $y.$ koşul son k başamağının 5^k ile bölünebilmesidir.
17. Bir sayının 11 ile bölünebilmesi için $g.$ ve $y.$ koşul basamakları bir toplayıp, bir çıkartarak elde ettiğimiz sayının 11 ile bölünebilmesidir. Örneğin $5 - 1 + 6 - 2 + 9 - 4 + 9 = 22$ olduğundan $11|5162949$.

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A101. ABC üçgeninde BR ve CS sırasıyla AC ve AB kenarlarına ait yüksekliklerdir. $\frac{|SR|}{|BC|} = \cos A$ olduğunu gösteriniz. (C.Alparslan Ertuğ)

A102. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30°$ ve $\widehat{ACB} = 40°$ dir. AC kenarı üzerinde $\widehat{MBC} = 20°$ olacak şekilde bir M noktası ve BM doğrusu üzerinde de $\widehat{OCB} = 10°$ olacak şekilde bir O noktası alınıyor. O'dan BC'ye çizelen dikme AB'yi N noktasında kestiğine göre $\widehat{NMD}$ yi bulunuz. (Dinçer Güler)

A103. Bir dikdörtgenin paralel iki kenarının her biri m eşit parçaya bölünüp karşılıklı noktalar birer doğru parçası ile birleştirilip m tane dikdörtgen elde ediliyor. Bu şekilde, uç noktaları köşeler olan, **çizilmiş** bütün doğru parçalarının sayısını bulunuz. Bu sayının tam kare olup olmadığını araştırınız. (Hüseyin Demir)

A104. $p(x)$ bir polinom ve $q(x) = p(x) + 1$ olsun. $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ polinomunun $p(x)q(x)$ ile bölünebildiğini gösteriniz. (M. Şahin)

A105. ABC üçgeni içinde bir P noktası alınıyor. BPC, CPA, APB üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırası ile R_x, R_y, R_z ise

$$A(ABC) \leq \frac{3}{4}\sqrt{RR_xR_yR_z}$$

olduğunu ve eşitlik için üçgenin eşkenar olması gerektiğini gösteriniz. (Dinçer Akay)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y101. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \int_0^x te^t\,dt}{e^x \sin x - \int_0^x e^t \sin t\,dt}$ limitini hesaplayınız. (Hasan Kullap)

Y102. $ABCD$ karesinin BC kenarı üzerinde $\widehat{BAE} = 7.5°$ olacak şekilde E noktası işaretleniyor. $\tan(\widehat{ADE})$ yi hesaplayınız. (Cuma Arslan)

Y103. ABC üçgeninde iç teğet çember BC, AC, AB kenarlarına sırası ile K, M, L noktalarında değmektedir. Bu kenarların orta noktaları da sıra ile P, R, S dir. KP, MR ve LS doğru parçalarının orta noktaları da X, Y, Z ise

$$\frac{Alan(XYZ)}{Alan(ABC)} = \frac{3R + 2r}{16R}$$

olduğunu gösteriniz. (R: çevrel çemberin yarıçapı; r:içteğet çemberin yarıçapı) (Ergün Yaraneri)

Y104. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(x + n^2 + h) = \varphi(x - h^2 - h) + \frac{4xh}{x^2 + 1995}$$

eşitliği sağlanıyor. $\varphi(0) = 0$ ise $\varphi(1)$ değerini hesaplayınız. (M. Şahin)

Y105. ABC üçgeninin AC kenarı üzerinde $|AE| = |EF| = |FG| = 2$, $|GC| = 6$ olacak şekilde E, F, G noktaları işaretleniyor. AB kenarı üzerinde de $|AD| = 3$ ve $|DB| = 5$ olacak şekilde D noktası işaretleniyor. $m\widehat{GDC} = m\widehat{EBF}$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri).

ÇÖZÜMLER

A91. Kareyi, her kenarı $\frac{23}{7}$ birim olan 49 küçük kareye ayıralım. $99 > 2 \times 49$ olduğundan, bu karelerin en az birinin içinde en az üç nokta bulunacaktır. Bu küçük karenin içindeki herhangi iki nokta arasındaki mesafe $\frac{23}{7}\sqrt{2}$ den küçük (veya eşit) olacağından bu karenin içinde bulunan bir üçgenin S çevresi için $s \leq 3 \times \frac{23}{7}\sqrt{2} < 14$ yazılabilir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Aliekber Gürel, Levent Koçoğlu.*)

A92. $\cos A + \cos B = \frac{1}{2}\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$ olduğunu hatırlayarak:

$$\begin{aligned}
& \cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 \\
= \; & (\cos 3x + \cos x) - (\cos 2x + 1) \\
= \; & \frac{1}{2}(\cos 2x \cos x) - \frac{1}{2}\cos^2 x \\
= \; & \frac{\cos x}{2}(\cos 2x - \cos x) \\
= \; & \frac{\cos x}{2}(2\cos^2 x - \cos x + 1) \\
= \; & \frac{1}{2}\cos x(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $(0,2\pi)$ aralığındaki çözüm takımı da $\{\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{2}\}$ olarak elde edilir.

(Çözenler: *Tamer Adanır, Mustafa Alkan, Cuma Arslan, Atasağun Baykal, Rıza Tamer Çakıcı, Alper Çay, Erek Göktürk, Levent Koçoğlu, Ali Işıtan, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Erol Ünal, Ergün Yaraneri.*)

A93. $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3 = 1$ denkleminden yola çıkarak $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x) = 1$ yazılabilir. $\cos^6 x+\sin^6 x = \frac{1}{3}$ ise, $3\sin^2 x\cos^2 x = \frac{2}{3}$ veya $9\cos^2 x(1-\cos^2 x) = 2$ denklemi bulunur. Sadeleştirme ile, $9\cos^4 x - 9\cos^2 x + 2 = (3\cos^2 x-1)(3\cos^2 x-2) = 0$ bulunur. Yani $\cos^2 x = \frac{1}{3}$ veya $\cos^2 x = \frac{2}{3}$ olmalıdır. Dolayısı ile $\cos x = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$ veya $\cos x = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}$ olmalıdır.

(Çözenler: *Tamer Adanır, Mustafa Alkan, Atasağun Baykal, Murat Hikmet Beybağa, Alper Çay, Erek Göktürk, Seyhan Kesim, Levent Koçoğlu, Ali Işıtan, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Ergün Yaraneri.*)

A94. Atılan beş zarın toplamının, çarpımdan büyük veya eşit olduğu haller:
11111 (1 kombinasyon), 11112 (5 kombinasyon),
11113 (5 kombinasyon), 11114 (5 kombinasyon),
11115 (5 kombinasyon), 11116 (5 kombinasyon),
11122 (10 kombinasyon), 11123 (20 kombinasyon),
11124 (20 kombinasyon), 11125 (20 kombinasyon),
11133 (10 kombinasyon), 11222 (10 kombinasyon)
olarak listelenebilir. Toplam olarak 116 kombinasyonda atılan zarların toplamı çarpımından büyük veya eşit olmaktadır. Aradığımız olasılık (toplamın çarpımdan küçük olması olasılığı) 5 zarın atılması ile tanımlı uzayın büyüklüğü 6^5 olduğu için $1-\frac{116}{6^5} = \frac{7660}{7776} = \frac{1915}{1944}$ olarak bulunur.

(Çözenler: *Atasağun Baykal, Alper Erbakan, Aliekber Gürel, Seyhun Kesim, Ruhi Tabur, Ergün Yaraneri.*)

A95. Orijinden ve $p,q\in\mathbb{Z}$, olmak üzere (p,q) koordinatlı bir noktadan geçen doğrunun eğimi $\frac{q}{p}$ $(p\neq 0)$ rasyonel sayısına eşit olur. Her doğru bir örgü noktasından geçseydi bütün doğruların eğiminin rasyonel olması gerekirdi. Sonuç olarak, eğimi irrasyonel bir sayı olan bir doğru orijin dışında hiç bir örgü noktasından geçmez.

(Çözenler: *Tamer Adanır, Atasağun Baykal, Rıza Tamer Çakıcı, Erol Çevikli, Erek Göktürk, Aliekber Gürel, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Ergün Yaraneri.*)

Y91. (Düzeltilmiş şekli) ABC, kenar uzunlukları a,b,c ve alanı S olan bir üçgen olsun. b,c; c,a ve a,b çiftlerinin aritmetik ortalamalarına sırasıyla a_1,b_1,c_1 diyelim. Kenar uzunlukları a_1,b_1 ve c_1 olan bir $A_1B_1C_1$ üçgeninin varlığını gösterip ABC ve $A_1B_1C_1$'in S ve S_1 alanları arasında $S_1\geq S$ bağıntısının bulunduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Üçgen eşitsizliklerinden herhangi birini, örneğin $a_1 < b_1+c_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$a_1 < b_1+c_1 \Longleftrightarrow \frac{b+c}{2} < \frac{a+c}{2}+\frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow a > 0.$$

İki üçgenin çevre uzunluklarının eşitliğinden ($u = u_1$);

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{u_1(u_1-a_1)(u_1-b_1)(u_1-c_1)} \\ &= \sqrt{u\frac{abc}{8}} = \sqrt{u\frac{4Rs}{8}} = \sqrt{ur\frac{RS}{2r}} \\ &= S\sqrt{\frac{R}{2r}} \geq S. \end{aligned}$$

(Çözenler: *Atasağun Baykal, Erol Gedikli.*)

Y92. Çözüm: a) D'nin AB üzerindeki ayağı L, karenin AC ve AB üzerindeki köşeleri E ve F olsun. DLF (bilinmeyen) dik üçgenin D etrafında, pozitif yönde 90° döndürüldüğünde $[DL]$ doğru parçası $[DL']$ konumuna gelsin. Bu durumda LF doğru parçası $[L'E]$ durumuna gelir ve çizim E köşesini belirler. Böylece, kare belirlenmiş olur.

b) Karenin kenar uzunluğu x ve $DL'\cap AC = B'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x^2 &= |L'D|^2+|L'E|^2 = |LD|^2+(|L'B'|\tan B)^2 \\ &= (\frac{a}{2}\sin B)^2+(\frac{a}{2}\sin B+\frac{c}{2})^2\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x^2\cos^2 A &= (a^2\sin^2 B\cos^2 A)+ \\ &+ a^2\sin^2 B\sin^2 A+ \\ &+ 2ac\sin B\sin^2 A+c^2\sin^2 A \\ &= a^2\sin^2 B+c^2\sin^2 A+ \\ &+ 2ac\sin B\sin^2 A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{4R^2 4x^2\cos^2 A}{a^2} = b^2+c^2+\frac{2abc}{2R}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{b^2+c^2+4S}\tan A.$$

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Atasağun Baykal, Murat Aygen.*)

Y93.

(i) 1 numaralı tüpü önce k numaralı tüple sonra da $i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüplerle paralel bağlarsak, basınç $(\frac{P_1 + P_2}{2} + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t})/(t+n)$ olacaktır. Önce $i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüplerle sonra k numaralı tüple bağlarsak basınç $[\frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_t}}{(t+1)} + P_k]/2$ olur. İkinci haldeki basıncın daha büyük olduğunu göstermek için

$$P_n + P_{i_t} + \cdots P_{i_t} + (t+1)P_k > P_1 + 2(P_{i_t} + \cdots P_{i_t}) + P_k$$

veya eşdeğer olarak

$$tP_k > P_{i_1} + \cdots P_{i_t}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $P_k > P_{i_1}, \cdots P_{i_t}$ oludğu için tabii olarak $tP_k > P_{i_1} + \cdots P_{i_t}$ eşitsizliği doğrudur.

(ii) 1 numaralı tüp ile $i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüplerin ve k-numaralı tüpün paralel bağlanması halinde ortak basınç $\frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t} + P_k}{t+2}$ olacaktır. Öte yandan önce $1, i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüpleri paralel bağlayıp daha sonra 1 numaralı tüp, k numaralı tüp ile bağlanırsa basınç

$$(\frac{P_1 + P_{i_t} + \cdots P_{i_t}}{t+1} + P_k)/2$$

$$= \frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_t} + (t+1)P_k}{2(t+1)}$$

olur. $P_k > \frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t}}{(t+1)}$ olduğundan,

$$(t+1)P_k > t(P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t})$$

$$\Rightarrow [(t+1)(t+2) - 2(t+1)]P_k >$$

$$[2(t+2) - (t+2)](P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{ik})$$

$$\Rightarrow (t+2)(P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t}) + (t+1)(t+2)P_k >$$

$$2(t+1)(P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t}) + 2(t+n)P_k$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_t} + (t+1)P_k}{2(t+1)} >$$

$$\frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_k} + P_k}{t+2}$$

bulunur. Buradan çıkan sonuç, 1 numaralı tüpün basıncı, $1, 2, \cdots, k-1$ numaralı tüplerden oluşan sistem içinde maksimum yapıldıktan sonra, k numaralı tüple bağlanmalıdır. Benzer olarak bu sistem içinde de. $k-1$ numaralı tüp en sona bırakılmalıdır. Bu şekilde devam edersek, 1 numaralı tüpün önce 2, sonra 3, $\cdots$ ve nihayet k numaralı tüple bağlanması halinde basıncının maksimum yapılabileceği anlaşılır. Bu halde de basınç $\frac{P_1 + P_2 + 2P_3 + 4P_4 + \cdots + 2^{k-2}P_k}{2^{k-1}}$ olarak elde edilir.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Murat Aygen, Atasağan Baykal, Aliekber Gürel, Osman Nuri Okumuş.*)

Y94. Euler formülünü kullanarak, oniki yüzlünün 18 kenarı ve 8 köşesi olduğunu buluruz. V_1 ve V_2 ile, üç ve altı kenarın buluştuğu köşelerin sayısını gösterelim. $V_1 + V_2 = 8$, $3V_1 + 6V_2 = 2 \times 18$ denklemlerinden $V_1 = V_2 = 4$ olduğu bulunur. Üç kenarın birleştiği köşelere A, B, C, D diyelim. Bütün yanal açılar aynı olacağından, A köşesinde buluşan, diyelim ki AE, AF ve AG, kenarları hep aynı uzunlukta olmalıdır. $AE = AF = AG = x$ kabul edelim. (Eğer $x = AE = AF + AG = y$ olsaydı AEF, AFG ve AGE'nin ikizkenar olmasının sebebi ile $\widehat{EPF} \neq \widehat{FAG}$ olurdu.) E, F ve G'de altışar kenar buluşmaktadır. Altı kenarın buluştuğu diğer köşe de H ise $EFGH$'nin y-kenarlı düzgün dörtyüzlü ve A, B, C ve D nin de bu dörtyüzlünün yüzlerine inşa edilmiş ikiz kenar piramitlerin tepeleri olduğu anlaşılır. A, B, C den geçen düzlem EF, HF ve GF yi E', H' ve G' de kesiyor olsun. Bu durumda $AE'BH'CG'$ bir düzgün altıgen olur. $x = FA = FE'$, olduğundan, $A'Z'F' = x$ ve $AE' = \frac{x}{\sqrt{3}}$ olur. AEF ve FAE' ikizkenar üçgenlerinden de $\widehat{EFA} = \alpha$, $\frac{y}{2x} = \cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$, $\frac{x}{2x\sqrt{3}} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\alpha}{2})$ ve $\frac{y}{x} = \frac{5}{3}$ olduğu görülür.

Y95. Çözüm: ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin kenar uzunlukları ve alanları a, b, c a', b', c', s, s' olmak üzere, $4R'S' = a'b'c'$ ve $S' = 7S$ olduğunu hatırlayalım. Kosinüs teoreminden

$a'^2 = 5^2 + 6^2 + 2.5.6.\cos c = 97$, $b'^2 = 73$, $c'^2 = 180$ olup; $R' = \frac{a'b'c'}{4S'} = \frac{\sqrt{97}\sqrt{73}6\sqrt{5}}{4.7.6} = \frac{\sqrt{5.73.97}}{28}$.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Erol Gedikli, Erek Göktürk, Aliekber Gürel, Ali Işıtan, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Erol Ünal, Ülkü Öztaş, Özgür Saygı, Ramazan Yaşar.*)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. *Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.*
2. *Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.*
3. *Çözümleri, Doç. Dr. Ali Doğanaksoy, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Nisan 1995 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.*

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 250.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1995 yılı abone ücreti 300.000.-TL., tane satış fiyatı ise 75.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- *Konu sunuşları.*
- *Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.*
- *Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.*
- *Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.*
- *Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.*
- *Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.*
- *Matematik dünyasından güncel haberler.*

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.