

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Ardışık Sayıların Toplamı

Ali Nesin

Trigonometrik Denklemlerin Çözülmesi

C. Alparslan Ertuğ

Evliliğin Mantığı Olur mu?

Asuman G. Aksoy

Geometrik Eşitsizlikler (II)

Emre Alkan

$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ Şeklindeki Diofant Denklemleri

Selma Atabey

Öğrencilerde Matematik Korkusu Üzerine

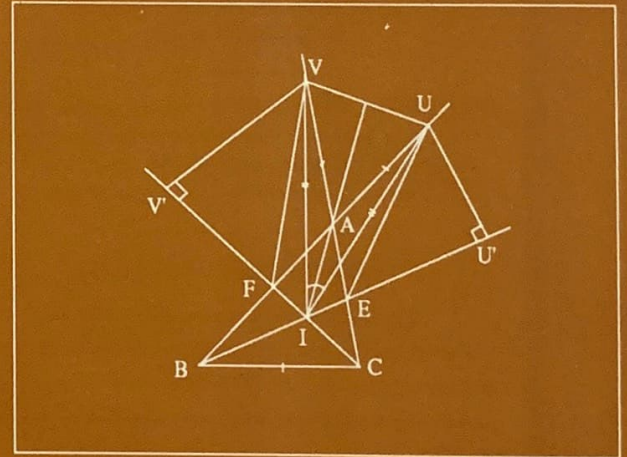
Metin Yaman

Problemlerle eğlenelim (mi?) (II)

Şafak Alpay

Problemler ve Çözümleri

Problem Seminerleri



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
ALİ DOĞANAKSOY, HÜSEYİN DEMİR,
ALPARSLAN ERTUĞ, TURGAY KAPTANOĞLU,
SELMA ATABEY

DİZGİ
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI
Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1995)

Yurtiçi yıllık 300.000.-TL., Yurtdışı yıllık 600.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

ADRES
(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)
ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

ISSN : 1300 - 624X

İÇİNDEKİLER

Ardışık Sayıların Toplamı

Ali Nesin 1

Trigonometrik Denklemlerin Çözülmesi

C. Alparslan Ertuğ 6

Evliliğin Mantığı Olur mu?

Asuman G. Aksoy 13

Geometrik Eşitsizlikler (II)

Emre Alkan 16

$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ Şeklindeki Diofant Denklemleri

Selma Atabey 19

Öğrencilerde Matematik Korkusu Üzerine

Metin Yaman 21

Problemlerle eğlenelim (mi?) (II)

Şafak Alpay 23

Problemler ve Çözümleri

25

Problem Seminerleri

28

ARDIŞIK SAYILARIN TOPLAMI

Ali Nesin *

Bu yazıda “sayı” sözcüğünü, 1, 2, 3, 4, 5 gibi, pozitif tamsayılar için kullanacağız. Konumuz ardışık sayıların toplamı. 7 ve 8 gibi, ya da 7, 8 ve 9 gibi ardarda gelen sayılara *ardışık* denir. Örneğin 17, iki ardışık sayının toplamıdır:

$$17 = 8 + 9.$$

21, üç ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 6 + 7 + 8.$$

21, aynı zamanda altı ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$$

45, en az iki ardışık sayının toplamı olarak beş değişik biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} 45 &= 22 + 23 \\ &= 14 + 15 + 16 \\ &= 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \end{aligned}$$

44, sekiz ardışık sayının toplamıdır:

$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9,$$

ve 44, en az iki ardışık sayının toplamı olarak başka türlü yazılamaz. Ama 1, 2 ve 4 sayıları en az iki ardışık sayının toplamı değildirler. 7 ve 11 sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabilirler ama üç veya daha fazla ardışık sayının toplamı olarak yazılamazlar. Bu yazıda hangi sayıların en az iki ve en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışacağız. Daha doğrusu siz bulmaya çalışacaksınız. Aşağıda bu amaçla sekiz soru bulacaksınız. Asıl amaç altıncı ve sekizinci soruları yanıtlamak. Kimi okurun doğrudan bu sorularla uğraşmak için yeterince zamanı olmayabilir. Bu okurların ilk basamaktan, yani birinci sorudan başlamalarını öneririm. Önce birinci soruyu

çözen okur ikinci soruyu daha rahat çözecektir. Önce ikinci soruyu çözen okur üçüncü soruyu daha rahat çözecektir ... Yani sorular gittikçe zorlaşmaktadırlar. En zor sorular altıncı ve sekizinci sorulardır. Kendine güvenen okur yazıyı okumayı burda kesip önce hangi sayıların en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu araştırabilir. Sonra da hangi sayıların en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu ...

Çoğu zaman olduğu gibi (ama her zaman değil), burada da araştırmaya deneyle başlamak yararlı olabilir. Örneğin 1'den 50'ye kadar olan sayılardan hangilerinin en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışırsanız, hem sorunun yanıtını tahmin edebilirsiniz, hem de tahmininizin doğru olduğunu nasıl kanıtlamanız gerektiğini anlayabilirsiniz.

Birinci Soru. *Hangi sayılar ardışık iki sayının toplamıdır? (Yanıt: Tek sayılar. Önce, her ardışık iki sayının toplamının tek sayı olduğunu kanıtlayın. Sonra da her tek sayının iki ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayın.)*

İkinci Soru. *Hangi sayılar ardışık üç sayının toplamıdır?*

Üçüncü Soru. *Hangi sayılar ardışık beş sayının toplamıdır?*

Dördüncü Soru. *Hangi sayılar ardışık yedi sayının toplamıdır?*

Beşinci Soru. *En az iki ardışık sayının toplamı olan sayıların 1'den büyük bir tek sayıya bölündüklerini, yani 2^n biçiminde yazılamayacaklarını kanıtlayın¹.*

Altıncı Soru. *Hangi sayılar en az iki ardışık sayının toplamıdır?*

* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

¹ Bu soruyu çözmek için 1'den r 'ye kadar olan sayıların toplamının $r(r+1)/2$ olduğunu bilmek gerekebilir. Bu eşitlik çok bilinen bir eşitliktir. Çeşitli biçimde kanıtlanabilir, örneğin tümevarımla. Geometrik bir “kanıt,” *Matematik ve Korku* adlı kitabımın *Pisagor ve Sayılar* yazısında bulunabilir.

Yedinci Soru. Asal bir sayının en az üç ardışık sayının toplamı olamayacağını kanıtlayın.

Yanıtlar

Önce ilk 48 sayıya gözatalım. Bu sayıları en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Aşağıdaki tabloda en kısa ve en uzun toplamaları bulacaksınız:

1	yazılamaz	25	12 + 13; 3 + 4 + 5 + 6 + 7
2	yazılamaz	26	5 + 6 + 7 + 8
3	1 + 2	27	13 + 14; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
4	yazılamaz	28	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
5	2 + 3	29	14 + 15
6	1 + 2 + 3	30	9 + 10 + 11; 4 + 5 + 6 + 7 + 8
7	3 + 4	31	20 + 21
8	yazılamaz	32	yazılamaz
9	4 + 5; 2 + 3 + 4	33	16 + 17; 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
10	1 + 2 + 3 + 4	34	7 + 8 + 9 + 10
11	5 + 6	35	17 + 18; 2 + 3 + ... + 8
12	3 + 4 + 5	36	11 + 12 + 13; 1 + 2 + ... + 8
13	6 + 7	37	13 + 14
14	2 + 3 + 4 + 5	38	8 + 9 + 10 + 11
15	7 + 8; 1 + 2 + 3 + 4 + 5	39	19 + 20; 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
16	yazılamaz	40	6 + 7 + 8 + 9 + 10
17	8 + 9	41	20 + 21
18	5 + 6 + 7; 3 + 4 + 5 + 6	42	13 + 14 + 15; 3 + 4 + ... + 9
19	9 + 10	43	21 + 22
20	2 + 3 + 4 + 5 + 6	44	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
21	10 + 11; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	45	22 + 23; 1 + 2 + ... + 9
22	4 + 5 + 6 + 7	46	10 + 11 + 12 + 13
23	11 + 12	47	23 + 24
24	7 + 8 + 9	48	15 + 16 + 17

Birinci Sorunun Yanıtı. Birkaç deneme sorunun yanıtını verecektir:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 &= 3 \\
 2 + 3 &= 5 \\
 3 + 4 &= 7 \\
 4 + 5 &= 9 \\
 5 + 6 &= 11 \\
 6 + 7 &= 13 \\
 7 + 8 &= 15
 \end{aligned}$$

Hep tek sayı elde ettiğimiz gözünüzden kaçmamıştır. Doğru, hep tek sayı elde ederiz. Neden? Kanıtlayalım. Ardışık iki sayıdan biri tektir, öbürü çift; dolayısıyla bu iki sayıyı topladığımızda tek sayı elde ederiz. Dolayısıyla ardışık iki sayının toplamı hep tek sayıdır.

Bunun tersi de hemen hemen doğrudur: 1 dışında her tek sayı, iki ardışık sayının toplamıdır. Örneğin, 125, 62 + 63 olarak; 147, 73 + 74 olarak yazılabilir. 1 dışında her tek sayının iki ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayabilir

miyiz? Evet. Kanıt oldukça kolaydır: $x \neq 1$ herhangi bir tek sayı olsun. x tek olduğundan, x 'i $2n + 1$ olarak yazabiliriz. Şimdi x 'i, $n + (n + 1)$ olarak, yani iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. (Not: $x > 1$ olduğundan, $n \geq 1$ 'dir).

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukarıdaki gibi birkaç deneme yapmak sorunun yanıtını verecektir:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 &= 6 \\
 2 + 3 + 4 &= 9 \\
 3 + 4 + 5 &= 12 \\
 4 + 5 + 6 &= 15 \\
 5 + 6 + 7 &= 18 \\
 6 + 7 + 8 &= 21
 \end{aligned}$$

Hep üçe bölünen sayılar elde ediyoruz. Hepsinin mi? Hayır. 3 sayısı, üç ardışık sayının toplamı değildir. Ama 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Demek ki

savımız şu olmalı: Üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür ve 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Savımızı kanıtlayalım.

Üç ardışık sayı alalım. Bu sayıların ortancısına n diyelim. Demek ki üç sayımız $n - 1$, n ve $n + 1$. Bu üç sayıyı toplayalım:

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

elde ettik. Bu sayı üçe bölünür. Demek ki, her üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür.

Şimdi de üçe bölünen ama 3 olmayan herhangi bir sayı ele alalım. Bu sayıya x diyelim ve x 'in üç ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayalım. Yukarıdaki dizelge aşağı yukarı kanıtı veriyor: Eşitliğin solundaki ortanca sayı, toplamın üçte biri. x 'i üçe bölelim. Çıkan sayıyı, bir öncekini ve bir sonrakini toplayalım. x 'i elde ederiz. Örneğin, $x = 27$ ise, $x/3 = 9$ 'dur ve $27 = 8 + 9 + 10$ 'dur.

Biçimsel olarak şöyle kanıtlarız. x üçe bölündüğünden, x 'i $3n$ olarak yazabiliriz: $x = 3n$. Şimdi aşağıdaki eşitliğe bakın:

$$x = 3n = (n - 1) + n + (n + 1).$$

Demek ki x , üç ardışık sayının ($n - 1$ 'in, n 'nin ve $n + 1$ 'in) toplamıdır. (Not: $x > 3$ olduğundan, $n - 1 \geq 1$ 'dir).

Savımız kanıtlanmıştır.

Üçüncü Sorunun Yanıtı. 5 ve 10 dışında, beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Örneğin,

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Beş ardışık sayının toplamının her zaman 5'e bölüneceğini kanıtlamak oldukça kolaydır:

$$\begin{aligned} x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) &= 5x + 10 \\ &= 5(x+2). \end{aligned}$$

Şimdi bunun tersini kanıtlayalım: 5'e bölünen bir sayıyı beş ardışık sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Yukarıdaki dizelgeye bir göz atalım. Eşitliğin sağ tarafının ortanca sayısı, toplamın beşte biri. x , beşe bölünen ama ne 5 ne de 10 olan bir sayı olsun. $x = 5n$ olarak yazalım. Şimdi x ,

$$n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$$

ardışık sayılarının toplamıdır. (Not: $x \geq 15$ olduğundan, $n - 2 \geq 1$ 'dir).

Dördüncü Sorunun Yanıtı. Bu sorunun yanıtı da ikinci ve üçüncü soruların yanıtı gibidir. 7, 14 ve 21 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayının toplamıdır. Biçimsel kanıtı okura bırakıyorum.

Beşinci Sorunun Yanıtı. x , en az iki ardışık sayının toplamı olan bir sayı olsun. Diyelim x ,

$$b, b + 1, b + 2, \dots, b + r$$

ardışık sayılarının toplamı ($r \geq 1$ elbette). Yani

$$(1) \quad x = b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + r).$$

Bu toplamda $r + 1$ tane b var. Demek ki toplamımız

$$(r + 1)b + [1 + 2 + \dots + r]$$

sayısına eşit. 1'den r 'ye kadar olan sayıların toplamı $r(r + 1)/2$ 'dir². Demek ki

$$x = (r + 1)b + \frac{r(r + 1)}{2}.$$

$r + 1$ 'i dışarı çıkaralım ve eşitliği 2'yle çarpalım.

$$(2) \quad 2x = (r + 1)(2b + r)$$

elde ederiz. Eğer $r + 1$ ve $2b + r$ sayılarından birinin tek olduğunu kanıtlarsak işimiz iştir, çünkü bu tek sayı x 'i bölmek zorunda. Eğer $r + 1$ tekse bir sorun yok. Eğer $r + 1$ çiftse, r tektir ve dolayısıyla $2b + r$ de tektir. Kanıtımız bitmiştir.

Yukarıdaki kanıtta, (1) eşitliğinden (2) eşitliğini elde ettiğimiz okurun gözünden kaçmamalıdır. Bu olguyu birkaç kez daha kullanacağız.

Altıncı Sorunun Yanıtı. Önce bir tahminde bulunmak gerekiyor. Şimdiye değin bulduklarımızı gözden geçirelim:

Herşeyden önce beşinci soruya göre, 1, 2, 4, 8, 16 gibi 2^n biçiminde yazılan sayılar iki ya da daha fazla ardışık sayının toplamı olamazlar. Öbür sayılara, yani bir tek sayıya bölünen sayılara bakalım.

Birinci soruya göre, 1 dışında her tek sayı iki ardışık sayının toplamıdır.

² Bu çok bilinen bir eşitliktir. Çeşitli biçimlerde kanıtlanabilir, örneğin tümevarımla. Geometrik bir kanıt için *Matematik ve Korku* adlı kitabımın *Pisagor ve Sayılar* yazısına bakınız.

Üçe bölünen sayılara bakalım. İkinci soruya göre, 6, 9, 12, 15 gibi üçe bölünen sayılar üç ardışık sayının toplamıdır. 3 tek olduğundan, 3 de iki ardışık sayının toplamıdır. Demek ki üçe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi de beşe bölünen sayılara bakalım. Üçüncü soruya göre, 5 ve 10 dışında beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Tek olduğundan, 5 de iki ardışık sayının toplamıdır. Ya 10? $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ olduğundan, 10 da ardışık sayıların toplamıdır. Sonuç olarak beşe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Sıra yediye bölünen sayılara geldi. Dördüncü soruya göre 7 ve 14 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayının toplamıdır. 7 tektir, dolayısıyla iki ardışık sayının toplamıdır. 14'ü ardışık sayıların toplamı olarak yazmak biraz daha zor:

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5.$$

Demek ki yediye bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Tahminimiz ne olmalı? 2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamı olabilir mi? Galiba, ama pek emin değiliz. 11'e bölünen sayılara bakalım. Bu sayıların çoğunun onbir ardışık sayının toplamı olduğunu hissediyoruz. Sayımıza x diyelim. x 'i onbire bölelim. Çıkan sayıya n diyelim. Şimdi aşağıdaki onbir sayıyı toplayalım:

$$n - 5, n - 4, \dots, n, \dots, n + 4, n + 5.$$

$11n$, yani x buluruz. Ama burada $n - 5 > 0$ olmalı, yani $x/11 - 5 > 0$ olmalı, yani $x > 55$ olmalı. Peki, $x = 11, 22, 33, 44, 55$ ise ne yapacağız? Bu sayılar en az iki ardışık sayının toplamı mıdır? 11, 33 ve 55 tek olduklarından, bu sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. 22 ve 44 de en az iki ardışık tamsayının toplamıdır:

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$

$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

Demek ki 11'e bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Galiba tahminimiz doğru, galiba 2^n biçiminde yazılamayan her sayı (yani 1'den büyük bir tek sayıya bölünen her sayı) en az iki ardışık sayının toplamıdır. Artık savımızı yazabiliriz:

Sav. 2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır. Ve en az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı 2^n biçiminde yazılamaz.

Savın Kanıtı. Savımızın ikinci bölümünü beşinci soruda kanıtlamıştık. Birinci bölümü kanıtlayalım. x , 2^n biçiminde yazılamayan bir sayı olsun. Demek ki x , 1'den büyük bir tek sayıya bölünür. x 'i bölen tek sayıyı $2k+1$ olarak yazalım ve bölme işleminin sonucuna a diyelim. Demek ki

$$(3) \quad x = (2k + 1)a.$$

Şimdi $a - k$ 'yle $a + k$ arasındaki $2k + 1$ sayıyı toplayalım.

$$(a - k) + (a - k + 1) + \dots + (a - 1) + a \\ + (a + 1) + \dots + (a + k - 1) + (a + k).$$

Bu toplamda bir sürü terim sadeleşir. Örneğin, birinci ve sonuncu terimlerdeki k 'ler sadeleşir, ikinci ve sondan ikinci terimlerdeki $k - 1$ 'ler sadeleşir ... Sonuç olarak $2k + 1$ tane a 'yı toplarız, yani toplamın sonucu $(2k + 1)a$ 'dır, yani x 'tir. Eğer toplamdaki ilk sayı, yani $a - k$, pozitif ise, x 'i bu biçimde $2k + 1$ ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. $a - k \leq 0$ ise ne yapacağız?

Bundan böyle $a - k$ 'nin pozitif olmadığı varsayalım, yani $a \leq k$ eşitsizliğini varsayalım. Bu durumda ne yapmalıyız? Önce yanıtı vereyim. Yanıtı nasıl bulduğumu sonra açıklayacağım³.

$$(4) \quad b = k - a + 1$$

ve

$$(5) \quad r = 2a - 1$$

olsun. b 'nin en az 1 olduğuna dikkatinizi çekerim. b 'den $b + r$ 'ye kadar olan sayıları, yani

$$b, b + 1, b + 2, \dots, b + r$$

sayılarını toplayalım:

$$b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + r).$$

Toplamın x 'e eşit olduğunu kanıtlayacağım. Beşinci sorudaki gibi hesaplarsak, toplamın

$$(r + 1)b + \frac{r(r + 1)}{2}$$

³ Bu açıklama, yazının sonuçlarını öğrencilerine kanıtlattırmak isteyen öğretmene yardımcı olabilir. Ayrıca, bir sayıyı nasıl çeşitli biçimlerde ardışık sayıların toplamı olarak yazabileceğimizi de öğretebilir.

sayısına eşit olduğunu görürüz. Bu sayıyı (3), (4) ve (5)'teki tanımları kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 (r+1)b + \frac{r(r+1)}{2} &= \frac{(r+1)(2b+r)}{2} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \frac{2a(2b+2a-1)}{2} \\
 &= a(2b+2a-1) \\
 &\stackrel{(4)}{=} a(2(k-a+1)+2a-1) \\
 &= a(2k+1) \stackrel{(3)}{=} x.
 \end{aligned}$$

Söz verdiğimiz gibi toplamın x olduğunu bulduk.

Sonuç olarak, 2^n biçiminde yazılamayan her x sayısının en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulduk. Hatta toplamamız gereken ardışık sayıları da bulduk: x 'i $(2k+1)a$ olarak yazalım. Eğer $a > k$ ise, x , $a-k$ 'den $a+k$ 'ye kadar olan $2k+1$ ardışık sayının toplamıdır. Eğer $a \leq k$ ise, x , $k-a+1$ 'den $k+a$ 'ya kadar olan $2a$ ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi $a \leq k$ şıkında, ardışık sayıları nasıl bulduğumu göstereyim. $x = (2k+1)a$ eşitliğini biliyoruz ve x 'i en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmak istiyoruz. Ardışık sayıları bildiğimizi varsayalım bir an. Diyelim bu sayılar b 'yle $b+r$ arasındaki sayılar. b 'yle r 'yi bulmak istiyoruz. b 'yle $b+r$ arasındaki sayıları toplarsak $(r+1)(2b+r)/2$ buluruz. Demek ki

$$(2k+1)a = x = \frac{(r+1)(2b+r)}{2},$$

yani

$$2a(2k+1) = (r+1)(2b+r).$$

r 'yi $2a = r+1$ eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki $r = 2a-1$. Bu (5) eşitliğini verir. b 'yi de $2k+1 = 2b+r$ eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki

$$2k = 2b+r-1 = 2b+(2a-1)-1,$$

yani $b = k-a+1$. Bu da (4) eşitliğidir.

Yedinci Sorunun Yanıtı. x bir asal sayı olsun. Bir an için x 'in en az üç ardışık sayının

toplamı olduğunu varsayalım, diyelim, x asalı

$$b, b+1, b+2, \dots, b+r$$

sayılarının toplamı (burada $r \geq 2$ ve $b > 0$). Bir çelişki elde edeceğiz. Aynen beşinci sorudaki gibi,

$$(2) \quad 2x = (r+1)(2b+r)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer $r+1$ tekse, (2) eşitliğinden dolayı, $r+1$ sayısı x 'i böler. x asal olduğundan, $r+1 = x$ olmalı. Bu ve (2)'den $2b+r = 2$ çıkar. Ama $b > 0$ ve $r \geq 2$, dolayısıyla $2b+r = 2$ eşitliği olanaksız.

Eğer $r+1$ çiftse, r tektir. r tek olduğundan, $2b+r$ de tektir. (2) eşitliğinden dolayı, $2b+r$ sayısı x 'i böler. x asal olduğundan, $2b+r = x$ olmalı. Bundan ve (2)'den, $2 = r+1$ çıkar. Yani $r = 1$ ve bu bir çelişkidir. Önermemiz kanıtlanmıştır.

Sekizinci Sorunun Yanıtı. Asal olmayan ve 2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az üç ardışık sayının toplamıdır. Bu savımızı kanıtlamak için altıncı ve yedinci soruların yanıtlarından yararlanacağız.

Eğer x en az üç ardışık sayının toplamıysa, altıncı soruya göre x , 2^n biçiminde yazılamaz ve yedinci soruya göre x asal olamaz. Şimdi bu önermenin tersini kanıtlayacağız: Eğer x asal değilse ve 2^n biçiminde yazılmıyorsa, x en az üç ardışık sayının toplamıdır.

x 'in asal olmadığını ve 2^n biçiminde yazılamayacağını varsayalım. Demek ki öyle bir $k \geq 1$ ve $a \geq 2$ vardır ki,

$$x = (2k+1)a$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $a > k$ ise, altıncı soruda x 'in $2k+1$ tane ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Demek ki bu durumda bir sorun yok. Eğer $a \leq k$ ise, gene altıncı soruda x 'in $2a$ tane (yani en az 4 tane) ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Bu durumda da bir sorun yok. Sorun kalmadı!

TRİGONOMETRİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

C. Alparslan Ertuğ *

1. Giriş

Bilinmeyen bir açının trigonometrik fonksiyonlarını içeren denklemlere *trigonometrik denklemler* denir. Trigonometrik denklemi sağlayan açı değerleri denklemin kökleridir ve periyodik olmak gibi önemli bir özellikleri vardır. 0 ile 2π arasında bulunan köklere denklemin özel çözümleri denir.

Trigonometrik denklemlerin çözüm yöntemlerini açıklamaya başlamadan önce, trigonometrik oranları eşit olan açılar arasındaki bağıntıları özetlemekte yarar vardır:

$$\begin{aligned}\sin x = \sin \alpha & \text{ ise, } x = 2k\pi + \alpha \\ & \text{ve } x = (2k\pi + 1)\pi - \alpha; \\ \cos x = \cos \alpha & \text{ ise, } x = 2k\pi \pm \alpha; \\ \tan x = \tan \alpha & \text{ ise, } x = k\pi + \alpha\end{aligned}$$

bağıntıları geçerli olmaktadır. Yukarıdaki formüllerde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ olarak alınacaktır.

2. Trigonometrik Denklem Tipleri

Çözüm yöntemlerinin açıklanmasını kolaylaştırmak açısından, trigonometrik denklemleri aşağıdaki biçimde sınıflayacağız:

- Basit Denklemler
- Cebirsel Biçime Dönüşebilen Denklemler
- Homojen Denklemler
- Simetrik Denklemler
- Klasik Denklemler
- Genel Denklemler
- Yukarıdaki Tiplerden Birine Dönüşebilen Denklemler

İmdi sırasıyla bu denklem tiplerini ve çözüm yöntemlerini ele alalım.

2.1. Basit Denklemler

Aynı açının, aynı ya da farklı iki trigonometrik oranının birbirine eşit olması veya sözkonusu açının bir trigonometrik oranının bir sayıya eşit olması biçiminde verilirler.

Örnek 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. Sinüsü $\frac{1}{2}$ olan en küçük açının $\frac{\pi}{6}$ olduğunu biliyoruz. O halde verilen denklemi şöyle yazabiliriz: $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$. Sinüsleri eşit olan açıların özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}x &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ve} \\ x &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

çözümlerini elde ederiz.

Örnek 2. $\sin x = \cos x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ özelliğini kullanırsak denklem şöyle olur: $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Buradan da

$$\begin{aligned}x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ x &= k\pi + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3. $\tan x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ olduğundan, denklemi $\tan 3x = \tan \frac{3\pi}{4}$ biçiminde yazabiliriz. Sonra da tanjantları eşit olan açıların özelliklerini kullanarak çözüm kümesini elde ederiz:

$$3x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{4}.$$

* Gemi inşaatı mühendisi

2.2. Cebirsel Biçime Dönüştürülebilen Denklemler

Aynı açının aynı trigonometrik oranlarının çeşitli kuvvetlerini içeren denklemlerdir. Farklı trigonometrik oranları içeren bazı denklemler de uygun dönüşümler yapılarak bu biçime dönüştürülebilirler.

Örnek 4. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\sin x = t$ dönüşümünü yaparsak denklem, cebirsel biçime döner:

$$2t^2 + t - 1 = (2t - 1)(t + 1) = 0.$$

Bu denklem çözümlerse, $t_1 = \frac{1}{2}$ ve $t_2 = -1$ kökleri elde edilir. Bulduğumuz bu t değerlerini kullanarak x değerlerini elde ederiz:

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

ve

$$\sin x = -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$x_3 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$x_4 = (2k+1)\pi - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Örnek 5. $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ değerini denklemde yerine koyalım:

$$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) dönüşümünü yapalım:

$$2t^2 - 3t + 1 = (2t - 1)(t - 1) = 0$$

$t_1 = \frac{1}{2}$ ve $t_2 = 1$ kökleri elde edilir. Bunlar kullanılarak denklemin çözüm kümesi bulunur:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3},$$

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ve} \quad x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{3};$$

$$\cos x = 1 = \cos 0, \quad x_3 = 2k\pi.$$

2.3. Klasik Denklemler

$a\sin x + b\cos x = c$ biçimindeki denklemlere *klasik denklemler* denir. Klasik tipte bir denklemin çözülürken, denklemin iki tarafını kosinüslü terimin katsayısına bölerek

$$\frac{a}{b}\sin x + \cos x = \frac{c}{b}$$

eşitsizliği elde edilir; $\tan \varphi = \frac{a}{b}$ dönüşümünü yaparak da

$$\tan \varphi \sin x + \cos x = \frac{c}{b}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x + \cos x = \frac{c}{b}$$

$$\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \frac{c}{b} \cos \varphi$$

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{b} \cos \varphi$$

denklemini elde ederiz. $|\frac{c}{b} \cos \varphi| \leq 1$ koşulu sağlanıyorsa, bu denklemin çözümü vardır ve çözüm, kosinüsleri eşit açıları içeren basit bir denklemin çözülmesinden ibaret olacaktır.

Örnek 6. $2\sin x + 3\cos x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $\cos x$ 'in katsayısı ile denklemin iki tarafını bölelim: $\frac{2}{3}\sin x + \cos x = 1$. $\tan \varphi = \frac{2}{3}$ olacak biçimde bir φ açısı tanımlayalım:

$$\tan \varphi \sin x + \cos x = 1$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x + \cos x = 1$$

$$\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \cos \varphi$$

$$\cos(x - \varphi) = \cos \varphi$$

$$x_1 - \varphi = 2k\pi - \varphi, \quad x_1 = 2k\pi;$$

$$x_2 - \varphi = 2k\pi + \varphi, \quad x_2 = 2k\pi + 2\varphi.$$

Örnek 7. $\cos 3x + \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\tan \varphi = 1$ diyelim. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ve $\cos \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olacaktır. Buradan

$$\cos 3x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 3x \cos \varphi + \sin \varphi \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi$$

$$\cos(3x - \varphi) = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ değerini yerine koyarsak, $\cos(3x - \varphi) = \frac{\pi}{3}$ denklemi elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} 3x_1 - \frac{\pi}{4} &= 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x_1 &= \frac{2}{3}k\pi + \frac{7\pi}{36} \\ 3x_2 - \frac{\pi}{4} &= 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x_2 &= \frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{36} \end{aligned}$$

kökleri bulunur.

2.4. Homojen Denklemler

$f(\sin x, \cos x) = 0$ biçiminde verilmiş bir denklemde, $\sin x$ ve $\cos x$ 'in dereceleri birbirine eşitse, bir *homojen denklem* söz konusudur. $a \sin x + b \cos x = 0$ birinci dereceden, $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ise ikinci dereceden homojen denklemlerdir. Bu tip denklemler uygun dönüşümler yapılarak cebirsel hale dönüştürülebilirler.

Örnek 8. $5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. Denklemin iki tarafını $\cos^2 x$ ile bölelim: $5 \tan^2 x - 3 \tan x - 2 = 0$. $\tan x = t$ dönüşümünü yapalım:

$$5t^2 - 3t - 2 = (5t + 2)(t - 1) = 0$$

Denklemin cebirsel hale dönüştürmüş olduk. Şimdi de bunu çözelim: $t_1 = -\frac{2}{5}$ ve $t_2 = 1$. $\tan \varphi = -\frac{2}{5}$ olacak biçimde bir φ açısı tanımlarsak,

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan \varphi, & x_1 &= k\pi + \varphi; \\ \tan x &= 1 = \tan \frac{\pi}{4}, & x_2 &= k\pi + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

kökleri elde edilir.

Zaman zaman verilen denklemi homojen hale getirmek için, bazı terimleri $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpmak gerekir:

Örnek 9. $2 \sin 3x = 3 \cos x + \cos 3x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$ ve $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$ değerlerini yerine koyalım. Ara işlemler yapıldıktan sonra düzenlenerek şu denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} -2 \sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x \\ - 3 \cos x - \cos^3 x + 3 \sin^2 x \cos x &= 0. \end{aligned}$$

Burada $-3 \cos x$ terimini $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpalım. Ara işlemleri yapıp düzenlersek,

$$\sin^3 x - 3 \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0;$$

$\cos^3 x$ ile bölersek,

$$\tan^3 x - 3 \tan x + 2 = 0$$

elde ederiz. $\tan x = t$ dönüşümünü yaparak denklemi cebirsel hale dönüştürelim:

$$t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2(t + 2) = 0.$$

$t_1 = 1$ ve $t_2 = -2$ kökleri bulunur. Buradan da;

$$\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}, \quad x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4};$$

$\tan \varphi = -2$ dersek,

$$\tan x = \tan \varphi, \quad x_2 = k\pi + \varphi$$

çözümlerini elde ederiz.

2.5. Simetrik Denklemler

Verilen denklemde, x yerine $\frac{\pi}{2} - x$ konulduğunda, bir başka deyişle, sinüs yerine kosinüs, kosinüs yerine sinüs yazıldığında denklem değişmiyorsa, bu tip denklemlere *simetrik denklem* denir. Simetrik denklemler genellikle

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c$$

biçiminde verilirler. Burada $b = 0$ olması halinde, yukarıda anlattığımız klasik denklemlerin bir özel hali elde edilir. Simetrik denklemleri çözerken, $x = \frac{\pi}{4} + \varphi$ dönüşümü yapılarak denklem cebirsel hale getirilir.

Örnek 10. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 3 + 4 \sin x \cos x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $x = \frac{\pi}{4} + \varphi$ dönüşümünü yaparsak,

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \varphi + \sin \varphi)$$

değerlerini elde ederiz. Dolayısıyla da

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sin x \cos x &= \frac{1}{2}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

bulunur. Bunları denklemden kullanırsak,

$$4 \cos \varphi = 3 + 2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

elde edilir. $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ değerini kullanarak denklemin düzenleneceği olursak,

$$4 \cos^2 \varphi - 4 \cos \varphi + 1 = 0$$

elde ederiz. $\cos \varphi = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) dönüşümünü yaparak cebirsel biçimde bir denklem elde ederiz: $4t^2 - 4t + 1 = 0$. $\Delta = 0$ olduğundan tek kök vardır: $t = \frac{1}{2}$. Bu kök değerini kullanarak

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3};$$

$$\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{3};$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \varphi_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{12},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

çözüm kümesi elde edilir.

Örnek 11. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $x = \varphi + \frac{\pi}{4}$ dönüşümünü yaptığımızda

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sin x \cos x &= \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olacaktır. Bu değerler denklemden kullanılırsa

$$2 \cos^2 \varphi + 2\sqrt{2} \cos \varphi - 3 = 0$$

bulunur. $\cos \varphi = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) dönüşümünü yapılırsa denklem cebirsel hale gelir: $2t^2 + 2\sqrt{2}t - 3 = (\sqrt{2}t + 3)(\sqrt{2}t - 1) = 0$. Her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitlersek $t_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ve $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kök değerleri bulunur. $t_1 < -1$ olduğundan kök değildir. Dolayısıyla $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{4}$ olur. Buradan da $\varphi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ değeri bulunur. O halde kökler şöyle olacaktır:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$

2.6. Genel Denklemler

Bilindiği gibi

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{ve} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

biçiminde yazılabilir. $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ve} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olur. O halde daha önce açıklanan yöntemlerle çözülemeyen denklemler, bu dönüşümler uygulanarak çözülmeye çalışılmalıdır. Ancak bu dönüşümler sonucunda üçüncü ve daha yüksek dereceden cebirsel denklemler elde edilebileceği ve bu denklemlerin çözümünde güçlüklerle karşılaşabileceği gözden uzak tutulmamalıdır.

Örnek 12. $\sin x + \cos x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. Yukarıdaki dönüşüm uygulanırsa,

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

cebirsel denklemi elde edilir. Düzenlenirse $t^2 - t = 0$ olur ve buradan $t_1 = 0$ ve $t_2 = 1$ kökleri elde edilir. Bu değerleri kullanılarak da ilk denklemin çözüm kümesi bulunur:

$$\tan \frac{x}{2} = 0 = \tan 0, \quad \frac{x_1}{2} = k\pi, \quad x_1 = 2k\pi;$$

$$\tan \frac{x}{2} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}, \quad \frac{x_2}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Örnek 13. $3 \sin x + \cos x - 4 \cot \frac{x}{2} + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. Aynı yöntemle

$$3 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4}{t} + 1 = 0$$

cebirsel denklemi elde edilir. Paydalar eşitlenir ve gerekli ara işlemler yapılırsa, $t^2 + t - 2 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri $t_1 = -2$ ve $t_2 = 1$ 'dir. Bunlar kullanılarak denklemin çözüm kümesi elde edilir ($\alpha = \arctan(-2)$):

$$\tan \frac{x}{2} = -2 = \tan \alpha, \quad \frac{x_1}{2} = k\pi + \alpha, \quad x_1 = 2k\pi + 2\alpha;$$

$$\tan \frac{x}{2} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}, \quad \frac{x_2}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

2.7. Yukarıdaki Tiplerden Birine Dönüştürülebilen Denklemler

Bir çok durumda karşılaşılan denklemler, çarpanlara ayrılarak veya uygun trigonometrik dönüşümler yapılarak daha önce anlatılmış olan tiplerden birine dönüştürülebilir. Ayrıca $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özelliğini kullanarak,

denklemin bir tarafını veya terimlerden birini $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpmak da sık başvurulan bir yöntemdir. Şimdi tipik bazı örnekler üzerinde bu yöntemleri görelim.

Örnek 14. $\sin x \cos 2x = \cos x - \sin x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ değerini denklemde yerine koyalım ve denklemin sağ tarafını $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpalım; gerekli düzenlemelerden sonra denklem

$$\sin^2 x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$$

biçimini alır. Çarpanlara ayrılıp her çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse, iki basit denklem elde edilir ve bunların çözülmesiyle de ilk denklemin çözüm kümesi bulunur:

$$\begin{aligned} \cos x(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) &= 0, \\ \cos x(1 - \sin 2x) &= 0; \end{aligned}$$

$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \quad x_{1,2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$1 - \sin 2x = 0, \quad \sin 2x = 1 = \sin \frac{\pi}{2};$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = k\pi + \frac{\pi}{4};$$

$$2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

x_4 ile gösterilen kökler, x_3 ile aynı olduklarından atılmalıdırlar.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

biçiminde verilen denklemler,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\text{ve} \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

dönüşümleri ile klasik tipte bir denklem haline gelirler.

Örnek 15. $2 \sin^2 x + \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. Yukarıda sözü edilen dönüşümler yapılır ve ara işlemler tamamlanırsa, denklem $\sin 2x + \cos 2x = 1$ biçimine gelir. Bu ise yukarıda açıkladığımız klasik tipte bir denklemdir ve benzer tarzda çözülebilir. Kosinüslü terimin kat sayısı, bir φ yardımcı açısının tanjantı olarak

alınırsa, $\tan \varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur. Bu değerler kullanılırsa,

$$\sin 2x + \tan \varphi \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x \cos \varphi + \sin \varphi \cos 2x = \cos \varphi$$

$$\sin(2x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

olur ve

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x_1 = k\pi;$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

köklere bulunur.

Aynı açının katlarının trigonometrik fonksiyonlarını içeren denklemler, çarpımların toplam veya toplamaların çarpım olarak ifade edilmesi-ne olanak veren formüllerin kullanılması ve bazı çarpanlara ayırma yöntemlerinin uygulanmasıyla, yukarıda açıkladığımız tiplerden birine dönüştürülebilirler. Şimdi de bunlarla ilgili bir kaç örnek görelim:

Örnek 16. $2 \sin x \sin 3x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ formülünü uygularsak,

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

olacak ve denklem $\cos 2x - \cos 4x = 1$ haline gelecektir. $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$ değerini yerine koyarsak,

$$\cos 2x - 2 \cos^2 2x = \cos 2x(1 - 2 \cos 2x) = 0$$

olur. Her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitlersek, iki basit denklem elde ederiz. Bunların çözümünü de çözüm kümesi elde edilir:

$$\cos 2x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \quad 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},$$

$$x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4};$$

$$1 - 2 \cos 2x = 0, \quad \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3},$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad x_3 = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad x_4 = k\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Örnek 17. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

olacaktır. Ayrıca $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ değerini de gözönüne alırsak, verilen denklem

$$2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x = 0$$

biçimine dönüşür. Bunun da çarpanlara ayrılmasıyla

$$2 \cos x (\cos x + \cos 2x) = 0$$

bulunur. Burada ise

$$\cos x + \cos 2x = 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

değeri kullanılırsa,

$$4 \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0$$

denklemini elde edilir. Her çarpanın ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesiyle de çözüm kümesi bulunur:

$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \quad x_{1,2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \quad x_{3,4} = 4k\pi \pm \pi;$$

$$\cos \frac{3x}{2} = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \quad x_{5,6} = \frac{4}{3}k\pi \pm \pi.$$

3. Standart Olmayan Problemler

Bu bölümde, yukarıda açıkladığımız tiplere benzemeyen ve çözümleri için özel yaklaşımlar gerektiren bazı problemleri ve çözüm biçimlerini [3]'ten aynen aktararak okuyucularımızın dikkatine sunmak istiyoruz. [3]'ün yazarlarının, görüş ve çözüm biçimleri alışılmışın dışında olan problemleri adlandırmak için kullandığı "Standart Olmayan Problemler" deyimini de aynen kullanmayı uygun gördük.

Örnek 18. $2 \cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklemin sağ ve sol tarafları için iki eşitsizlik söz konusudur:

$$2 \cos^2 \frac{x^2+x}{6} \leq 2 \quad \text{ve} \quad 2^x + 2^{-x} \geq 2.$$

O halde bu denklemin sağ ve sol tarafları, yalnızca ikisi birden 2'ye eşit oldukları zaman birbirine eşit olacaklardır. Bir başka deyişle, aşağıdaki

bir bilinmeyenli denklem sisteminin sağlanması gerekir:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{x^2+x}{6} &= 2 \\ 2^x + 2^{-x} &= 2 \end{aligned}$$

İkinci denklemin tek kökü, $x = 0$ değeridir. Bu kök ilk denklemi de sağlar, yani sistemin, dolayısıyla da verilen denklemin tek çözümüdür.

Örnek 19. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\cos^7 x \leq \cos^2 x$ ve $\sin^4 x \leq \sin^2 x$ olduğu için, verilen denklemin sol tarafı 1'den büyük olamaz ve 1'e eşit olması, yalnızca yukarıdaki eşitsizliklerde eşitlik halinin her ikisinde birden gerçekleşmesi durumunda olur. Bir başka deyişle, aşağıdaki denklem sisteminin gerçekleşmesi gerekir:

$$\begin{aligned} \cos^7 x &= \cos^2 x \\ \sin^4 x &= \sin^2 x \end{aligned}$$

İlk denklem, $\cos x = 0$ ve $\cos x = 1$ için sağlanır. İkinci denklem de x 'in bu değerleri için sağlanır: $\cos x = 0$ ise $\sin^2 x = 1$, $\cos x = 1$ ise $\sin x = 0$ olur. Bu nedenle bu sistemin ve dolayısıyla ilk denklemin de çözümleri, $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ve $x_2 = 2k\pi$ değerleridir; burada k , herhangi bir tamsayıdır.

Örnek 20. $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Önce $x = \pi - y$ dönüşümü yapılsa,

$$\begin{aligned} \sin^4(\pi - y) - \cos^7(\pi - y) &= 1 \\ \sin^4 y + \cos^7 y &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu, Örnek 19'da çözülen denklemin aynısıdır. O halde bu denklemin çözümleri $y_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ve $y_2 = 2k\pi$ olacaktır (k bir tamsayı). $x = \pi - y$ olduğuna göre $x_1 = \frac{\pi}{2} - k\pi$ ve $x_2 = \pi - 2k\pi$ kökleri bulunur.

Örnek 21. $\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin 3x$ denkleminin $0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki köklerini bulunuz.

Birinci Çözüm. İlk bakışta alışılmış gibi görünen bu denklemini, alışılmış yöntemlerle çözmeye çalışalım ve denklemini $\sin x$ 'li terimlerden oluşacak biçimde dönüştürmeye çalışalım. $\sin 2x$ ve $\sin 3x$ 'in $\sin x$ cinsinden değerlerini yerlerine koyarak gerekli düzenlemeleri yapalım:

$$4 \sin x \cos x = 3 + 3 \sin x - 4 \sin^3 x - \sin x$$

Burada küçük bir tuzakla karşı karşıya bulunuyoruz: $\cos x$ 'i $\sin x$ cinsinden ifade ederken köklü ifadelerle karşılaşmamak için, denklemin iki tarafının karesini almamız ve dolayısıyla yalancı kök doğması tehlikesini göze almamız gerekir. Sonunda şu denklemi elde ederiz:

$$16 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = (3 + 2 \sin x - 4 \sin^3 x)^2$$

$\sin x = y$ dönüşümünü yaparak düzenlersek, denklem şu biçimi alır:

$$16y^6 - 24y^3 - 12y^2 + 12y + 9 = 0$$

Elde ettiğimiz altıncı dereceden denklem, sorunlarımızın bitmediğini gösteriyor. Şimdi de terimleri uygun bir biçimde gruplamaya çalışalım. İlk, ikinci ve son terimleri gruplayarak, denklemi aşağıdaki biçime dönüştürebiliriz:

$$(4y^3 - 3)^2 + 12y(1 - y) = 0$$

Fakat $y = \sin x$ ve $0 \leq x \leq \pi$ olması istendiğinden yalnızca $0 \leq y \leq 1$ köklerini bulmamız gerekmektedir. Bu y değerleri için, sol tarafın ikinci terimi negatif değildir; ilk terim ise y 'nin hiç bir değeri için negatif olmaz. O halde denklem yalnızca, $4y^3 - 3 = 0$ ve $12y(1 - y) = 0$ koşullarını aynı anda sağlayan y değerleri için sağlanır. Böyle bir y değeri bulunmadığı için, söz konusu $0 \leq y \leq 1$ aralığında denklemin çözümü yoktur. Buradan da ilk denklemin $0 \leq x \leq \pi$ aralığında kökü olmadığı sonucuna varırız. Uygun bir gruplama yapabildiğimiz için, bu standart çözüm yoluyla sonuca ulaşabildik. Aşağıdaki diğer çözüm yollarını da inceledikten sonra, belki de en elverişsiz yaklaşım bu olduğu kanısına varacaksınız.

İkinci Çözüm. Bu çözüm de, bir kaç trigonometrik dönüşümden sonra elde edilen terimlerin uygun biçimde gruplanmasına dayanmaktadır. Önce denklemi

$$\sin 3x - \sin x - 2 \sin 2x + 3 = 0$$

biçiminde yazalım ve sol tarafı dönüştürelim:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos 2x - 4 \sin x \cos x + 3 &= 0 \\ \sin x(2 \cos 2x - 4 \cos x) + 3 &= 0 \\ \sin x(4 \cos^2 x - 4 \cos x - 2) + 3 &= 0 \\ \sin x[(2 \cos x - 1)^2 - 3] + 3 &= 0 \\ \sin x(2 \cos x - 1)^2 + 3(1 - \sin x) &= 0 \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki çözümleri arıyoruz. Bu aralıkta $\sin x \geq 0$ eşitsizliği geçerlidir. O halde denklemin sol tarafındaki iki terim de negatif olmaz. Bu yüzden denklem, aşağıdaki denklem sistemine denktir:

$$\begin{aligned} \sin x(2 \cos x - 1)^2 &= 0 \\ 3(1 - \sin x) &= 0 \end{aligned}$$

İkinci denklemden $\sin x = 1$ bulunur. Fakat bu durumda $\cos x = 0$ ve dolayısıyla da $\sin x(2 \cos x - 1)^2 = 1 \neq 0$ olacaktır. O halde ikinci denklemin hiç bir çözümü birinci denklemi sağlamaz. Yani söz konusu denklemin, dolayısıyla da verilen denklemin verilen aralıkta kökleri yoktur.

Üçüncü Çözüm. Denklemi

$$\sin x - \sin 3x + 2 \sin 2x = 3$$

biçiminde yeniden yazalım ve sinüslerin farkı formülünü kullanarak

$$-2 \sin x \cos 2x + 2 \sin 2x = 3$$

biçimine getirelim. Buna göre aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} &|-2 \sin x \cos 2x + 2 \sin 2x| \\ &\leq |-2 \sin x \cos 2x| + |2 \sin 2x| \\ &= 2|\sin x| |\cos 2x| + 2|\sin 2x| \\ &\leq 2(|\cos 2x| + |\sin 2x|) \end{aligned}$$

Her x değeri için, $|\cos 2x| + |\sin 2x| \leq \sqrt{2}$ eşitsizliği geçerli olduğu için, son denklemin sol tarafı, mutlak değer olarak $2\sqrt{2}$ 'yi hiçbir zaman aşamaz ve dolayısıyla da 3'e eşit olamaz. O halde söz konusu denklemin kökü yoktur.

KAYNAKÇA

- [1] Y. Aksoy, *Trigonometri*, İstanbul, 1972.
- [2] T. Caronnet, *Çözümlü Trigonometri Problemleri*, İstanbul, 1969.
- [3] G. Dorofeev, *Elementary Mathematics*, Mir, Moskova, 1988.
- [4] B. Dündar, *Trigonometri*, Ankara, 1988.
- [5] E. Ulsoy, *Düzlem ve Küresel Trigonometri*, İstanbul, 1969.

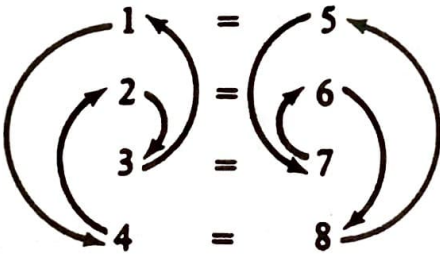
EVLİLİĞİN MANTIĞI OLUR MU?

Asuman Güven Aksoy *

Avusturalya'nın yerlileri evlilik ve akrabalık ilişkilerine getirdikleri kurallarla meşhurdur. Bunlardan Warlpiri denen bir grup yerlinin özellikle karmaşık bir akrabalık sistemi vardır. Warlpiriler Avusturalya'nın kuzeyindeki çöllük bölgede yaşıyorlar. Akrabalık ilişkilerinde izledikleri kurallar dizgesi onların toplumsal, politik organizasyonlarını ve tavırlarını bütünüyle tanımlıyor, sosyal çevredeki herkesi içeriyor ve felsefi dünyalarına kadar uzanıyor.

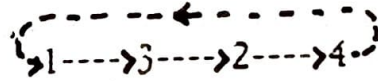
Avusturalya yerlileri göçebedir ve avcılıkla geçinir. Yiyecek ve suyun kolayca bulunabileceği bölgelerde yaşarlar, 10 ile 60 kişilik gruplar halinde gezinirler ama bazı özel durumlarda bağlantılı grupların hepsi bir araya gelir. Kişisel varlık yönünden yoksul olsalar da toplumsal ve duygusal dünyaları zengin ve gizemlidir.

Warlpiri akrabalık sisteminin 8 bölümü vardır. Her bölümde hem kadın hem erkek vardır ve herkes bu sekiz bölümden birine girmek zorundadır. Evlenecek insanlar ayrı ayrı bölümlerden gelmek zorundadır. Aşağıda örneklerle açıklayacağımız gibi doğan çocukların anne ve babalarından farklı, annenin belirleyeceği bir bölüme girmesi zorunludur. Basitçe bölümleri 1, 2, ..., 8 diye numaralayalım. Aşağıdaki şema evlilik kurallarını gösteriyor.

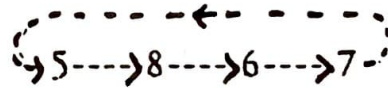


Eşitlik ("=") evlilik anlamında; her ok da annenin bölümünden çocuğun bölümüne

yönlendirilmiş. Örneğin, 1. bölümdeki erkek 5. bölümdeki bir kadınla evleniyor ve çocukları da 7. bölüme giriyor (7. bölüm 5. ile aynı sütunda). Bir başka örneği ele alalım; diyelim ki 6. bölümdeki bir erkek 2. bölümden bir kadınla evleniyor ve onların çocukları da 3. bölümde (3. bölüm 2. ile aynı sütunda). Sonuç cinsiyete göre değiştiğinden önce bir kadından başlayıp birkaç kuşak gerideki annelere bakalım. 1. bölümdeki bir kadının annesi 3. bölümde, onun annesi de (yani 1. bölümdeki kadının anneannesi) 2. ve onun annesi de (büyükannesi) 4. bölümde. 4. bölümdeki kadının annesi de tekrar 1. bölümde yer alıyor. Aşağıdaki şema bir kaç kuşak "anneler devresi"ni (anne/kız) gösteriyor:

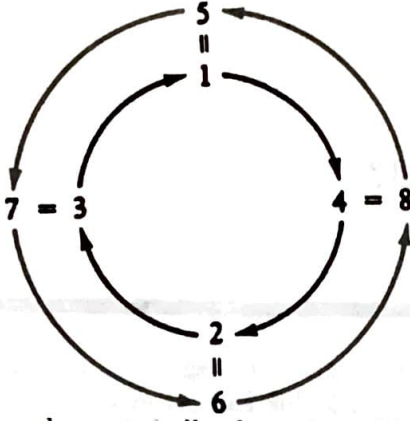


Aynı model, nereden başlarsanız başlayın tekrarlıyor kendini. Benzer biçimde aşağıda bir başka anneler devresinin şeması var:



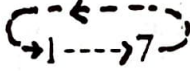
Devreler üst üste çakışmadığından her devre 8'in yarısı kadar bölüm gösterecektir. Antropologlar bu 4 bölümden oluşan gruba "yarım hisse" diye isim bile vermişlerdir. Aşağıdaki şema evlilik kurallarını ve anneler devresini bir kez daha açıklamaktadır:

* Claremont McKenna College Matematik Bölümü öğretim üyesi



"=" evlilik anlamında kullanılmış olup, oklar annenin bölümünden çocuğa yönlendirilmiştir.

Şimdi baba ve oğullara ne olduğuna bakalım. 1. bölümdeki bir erkek 5. bölümden bir kadınla evleniyor, oğulları da 7. bölümde. Bu oğul 3. bölümden bir kadınla evleniyor, onların oğulları da 1. bölümde. Görülüyor ki "babalar devresi"nin (baba/oğul) uzunluğu 2:



Benzer biçimde diğer baba/oğul devreleri (2, 8), (3, 6), ve (4, 5). Miras hakları, toprak paylaşmaları, hatta dini törenler bile bu gruplara göre yapılıyor.

Anne/kız ve baba/oğul devreleri Warpiriler'in akrabalık sisteminin temelini oluşturuyor ve Avustralya yerlilerinin dünya felsefelerini yansıtıyor. Geçmiş ve geleceği yaşadıkları ana güzelce bağlıyorlar.

	I	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
I	I	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	I	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	I	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	I	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	I	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	I	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	I	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	I

Yukarıdaki tablonun en önemli özelliği, olabilecek bütün eşleştirmelerin bu ilk sekizli bölümden birinde sonuçlanmasıdır. Bu durumu açıklayan matematiksel bir terim vardır. Bu özelliğe *kapalılık* denir. I ile başlayan sütun ve sırada her şeyin kendini tekrar ettiğinin farkında mısınız? Dolayısıyla I özdeşlik elemanı. Tablonun bir başka önemli özelliği ise I 'nin her sütun

Aşağıda öbek dilinde açıklayacağımız gibi, Warpiriler'in evliliklerinin bir mantığı var. Bu sisteme matematik dilinde 8. mertebeden ikidüzlemli (*dihedral*) öbek denebilir. 1. bölüme I (*özdeşlik*) diyelim. I 'daki herkesin annesi 3. bölümde olduğundan, 3. bölümü a (anne) ile isimlendirelim. 3. bölümdeki herkesin annesi 2. bölümdedir. Bu nedenle 2. bölümü aa (anneanne) ile isimlendirelim. Bu durumda 4. bölüm aaa (anneannenin annesi) oluyor. Benzer biçimde b ile babaları ifade edersek, 7. bölümdekilerin babaları I 'da olduğundan 7'ye b dersek, 5, 8 ve 6, sırayla ab , aab ve $aaab$ oluyor. Harflerin düzeni önemli burada. Mesela ab ile I grubundaki babaların annelerini kastediyoruz. Bunlar annelerin babalarından farklı.

Yazılanları kısaltmak için örneğin aaa yerine a^3 kullanacağız. Bu nedenle 8 bölümü

1	2	3	4	5	6	7	8
1	a^2	a	a^3	ab	a^3b	b	a^2b

ile göstereceğiz. Sözelimi, ab bölümündeki insanların annelerinin bölümünü arıyorsak, $a(ab) = a^2b$ 'ye geliyoruz. Gelgelelim, bazı durumlarda bu pek kolay değil. Örneğin, ab 'deki insanların babaları a^3 'te yer alıyor; yani $b(ab) = a^3$. Aşağıdaki tabloda olabilecek bütün eşleştirmeler gösterilmiştir. Sütun başlıkları çiftin ilkinin, sıralar da uygulanan ilişkiyi temsil ediyor. Yukarıdaki örneklere dönersek, a^2b , ab ile başlayan sütunla a ile temsil edilen sıranın kesiştiği yerdedir. Öte yandan a^3 , ab sütunu ve b 'li sıranın kesiştiği yerde oluyor.

ve sırada bir kere ortaya çıkması. Dolayısıyla bir başka özellik, *ters ögenin* olması her bölümü I 'ya geri bağlayan. Örneğin a^3 , a 'nın ters ögesi, a^3b kendisinin ters ögesi. Şimdiye kadar bu bölümlerin üç özelliğinden bahsettik: kapalılık, özdeşlik ve ters öge. Bunlardan başka bir de *birleşme özelliği* varsa, matematikçilerin öbek dediği yapıyı görüyoruz. Birleşme özelliğinin

anlamı ardarda uygulanan ilişkilerde önceliğin birşey farketirmeden aynı sonucu vermesi demektir. Örneğin,

$$aab = a(ab) = (aa)b = a^2b.$$

Yukarıda sözü edilen bu belirleyici özelliklerden dolayı öbekteki her öge yalnızca bir kez her sütun ve sırada ortaya çıkmakta. Bu nedenle, Warlpirili her insan bu 8 bölümden birindedir. Her bölümün, diğer her bölümle bir akrabalık ilişkisi vardır. Aşağıdaki üç özellik bu öbeği diğer öbeklerden ayırarak 8 düzenli ikidüzlemli öbek yapmaktadır. Bu özellikler şunlardır:

$$a^4 = I, \quad b^2 = I \quad \text{ve} \quad (ab)(ba) = I.$$

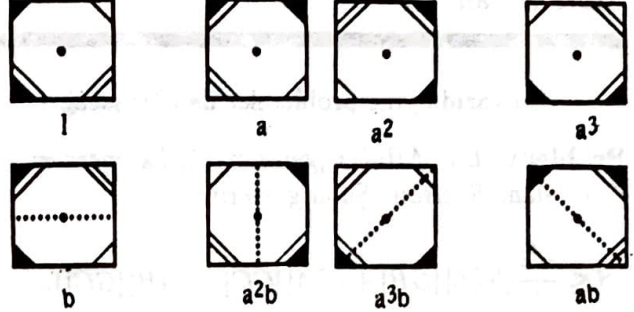
Bunlardan ilki "anneler devresi," ikincisi "babalar devresi," son özellik ise "evlilik kuralı." Matematiksel dilde, a ve b ikidüzlemli öbeğin üreteçleri ve

$$a^4 = I, \quad b^2 = I \quad \text{ve} \quad (ab)(ab) = I$$

öbeğin tanımını veren özellikler. Hangi bölümün I ile isimlendirilmesi ise bu mantıksal yapıyı tanımlayan ilişkileri hiç değiştirmiyor.

İkidüzlemli öbek kavramı aynı mantığı içeren geometrik bir modelden gelmektedir. Karenin simetrileri ile Warlpiriler'in akrabalık sistemleri birbirinin aynısı. Şöyle ki, eğer bir kareyi, merkezi etrafında 90 derece döndürürseniz, sonuç yine bir karedir ama köşelerinin yerleri değişmiştir. Benzer biçimde 180 ve 270 derece çevirmek köşelerin yerlerini değiştirir ama yine elinizde kare vardır. Karenin merkezinden geçen yatay ve dikey doğruları veya karenin köşegenlerini düşünün. Kareyi bu doğrulara göre yansıtırsanız, yine kare elde edersiniz. Bu yansıma ve döndürmeleri istediğiniz sırada uygulayın; aşağıdaki şemada görülen 8 olasılıktan başka bir sonuç alamayacaksınız. Köşelerin değişik şekilde işaretlenmesi her hareketten sonraki yerlerini göstermektedir. Herhangi bir pozisyonu I ile işaretlersek, merkez etrafında 90 derece döndürmeye a , merkezden geçen yatay doğruya göre yansıtmaya da b dersek, diğer pozisyonlar a ile b 'nin kombinasyonu biçiminde ortaya çıkacaktır. 4 kez 90 derece döndürürseniz ilk pozisyona geri gelirsiniz, yani $a^4 = I$. İki kez

yatay doğruya göre yansıtırsanız yine ilk pozisyona gelirsiniz, yani $b^2 = I$. İki kez köşegenden geçen doğruya göre yansıtırsanız yine ilk duruma gelirsiniz, bu da $(ab)(ab) = I$ 'ya karşılıktır.



İşte yine $a^4 = I$, $b^2 = I$ ve $(ab)(ab) = I$ 'yı bulduk, yani ikidüzlemli öbeği tanımlayan özellikleri. Hiç birbiriyle ilgili gibi gözükmeyen, karenin 8 simetrisi ile Warlpiriler'in akrabalık sisteminin 8 kısmı, aynı özelliklerle tanımlanmaktadır.

Doğal olarak, Warlpirili biri evliliğin bu analizini yapmaz, herkes hangi bölümde olacağını, bölümün getirdiği sorumlulukları bilip tavrını ve kurallarını ona göre ayarlar. Bu topluluğun geçmişteki, şimdiki ve gelecekteki her üyesi, topluluğun diğer bütün üyeleri ile bağlantılıdır. Bu sistemin mantığı bizim bildiğimiz akrabalık ilişkileri kapsamında değerlendirilemez; senin akraban, benim akrabam, yakın akraba, uzak akraba kavramları bu sistemde çalışmaz. Warlpiriler'in yaşadıkları zamandaki sorumlulukları ve davranışları hem geçmişe hem geleceğe uzanmaktadır.

KAYNAKÇA

- [1] M. Ascher, *Ethnomathematics: The Multicultural View of Mathematical Ideas*, Cole, 1991.
- [2] M. Laughren, *Warlpiri Kinship Structure, Languages of Kinship in Aboriginal Australia*, University of Sydney, 1982.

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER (III)

Emre Alkan *

Bu yazıda yine problemler ile uğraşacağız

Problem. Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G ve alanı S olsun. Şunu gösteriniz:

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (|GA||GB| + |GA||GC| + |GB||GC|).$$

Lemma. Aynı düzlemde, doğrusal olmayan A, B, C noktaları verilsin. Düzlemde öyle bir tek P noktası vardır ki, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ minimum olur.

Kanıt. Genelliği bozmadan A, B, C 'nin koordinatları $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve (a, b) olsun. Rasgele bir (x, y) alalım. Böylece

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 \\ = 3x^2 + 3y^2 - 2(a+1)x - 2by + a^2 + b^2 + 1 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi $f(x, y)$ ile gösterelim. $\frac{2}{3}[a^2 + b^2 - a + 1] \leq f(x, y)$ olduğunu görelim. Son eşitsizlik kolayca

$$0 \leq \left(x - \frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik ancak $x = (a+1)/3$ ve $y = b/3$ halinde olur. Bu noktanın ABC 'nin ağırlık merkezi olduğu gözlenebilir.

Çözüm. İki ayrı duruma bakacağız: (1) ABC 'nin, $2\pi/3$ 'ten büyük veya eşit bir açısı yoktur; (2) (1)'in tam tersi.

(1) Bu durumda ABC 'nin içinde öyle bir P noktası bulunabilir ki, (i) $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \frac{2\pi}{3}$ olur; (ii) düzlemdeki herhangi bir P' için

$$|PA| + |PB| + |PC| \leq |P'A| + |P'B| + |P'C|$$

gerçeklenir. (İspat için [3]'ye bakılabilir.) A, B, C noktalarının P 'ye olan uzaklıklarına sırasıyla p, q, r , G 'ye olan uzaklıklarına da s, t, u diyelim. G ağırlık merkezi ise Lemma ve bu

sonuç kullanılarak, $s^2 + t^2 + u^2 \leq p^2 + q^2 + r^2$ ile $p + q + r \leq s + t + u$ eşitsizlikleri elde edilir. Birinci eşitsizlikten

$$\begin{aligned} (s + t + u)^2 - 2(st + su + tu) \\ \leq (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr) \end{aligned}$$

çıkar. Şimdi ikinci eşitsizlik kullanılarak, $pq + pr + qr \leq st + su + tu$ elde edilir.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (pq + pr + qr)$$

olacağından istenen eşitsizlik bu halde elde edilir.

(2) Genelliği bozmadan $\angle BAC \geq 2\pi/3$ kabul edelim. Şu sonucu kullanacağız: Düzlemdeki her P için

$$|AB| + |AC| \leq |PA| + |PB| + |PC|$$

olur. (İspat için [3]'ye bakılabilir.) Lemma ve bu sonuç kullanılarak $s^2 + t^2 + u^2 \leq c^2 + b^2$ ile $c + b \leq s + t + u$ eşitsizlikleri elde edilir. Bunlardan (1)'e benzer şekilde $cb \leq st + su + tu$ elde edilir. Öte yandan,

$$S = \frac{1}{2} cb \sin(\angle BAC) \leq \frac{\sqrt{3}}{4} cb$$

olacağından istenen eşitsizlik bu durumda da elde edilir.

Problem. Bir ABC üçgeninin içinde alınan bir O noktası için, OA, OB, OC doğruları kenarları sırayla A', B', C' 'nde kessin.

(i) $\frac{|AA'|}{|OA|} = x$, $\frac{|BB'|}{|OB|} = y$ ve $\frac{|CC'|}{|OC|} = z$ ise, xyz minimum olacak şekilde O noktalarını bulunuz.

(ii) $\frac{|OA|}{|OA'|} = x$, $\frac{|OB|}{|OB'|} = y$ ve $\frac{|OC|}{|OC'|} = z$ ise, $x^4 + y^4 + z^4$ minimum olacak şekildeki O noktalarını bulunuz.

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

Çözüm. (i) O 'dan kenarlara indirilen dikme uzunlukları h'_a, h'_b, h'_c olsun. h_a, h_b, h_c de üçgenin yükseklikleri olsun. $x = \frac{h_a}{h'_a}$, $y = \frac{h_b}{h'_b}$ ve $z = \frac{h_c}{h'_c}$ yazılabilir. S, S_1, S_2, S_3 sırayla ABC, OAB, OBC, OCA üçgenlerinin alanları olsun. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden, $S \geq 3(S_1 S_2 S_3)^{1/3}$ ve böylece de $abch_a h_b h_c \geq 27 abh'_a h'_b h'_c$ elde edilir ki bu $xyz \geq 27$ demektir. xyz 'nin minimum olması için $S_1 = S_2 = S_3$, yani O noktası ABC 'nin ağırlık merkezi olmalıdır.

(ii) Menelaus Teoremi'yle,

$$\frac{|A'C|}{|A'B| + |A'C|} \frac{|C'B|}{|C'A|} \frac{|OA|}{|OA'|} = 1,$$

ve böylece

$$x = \frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|C'A|}{|C'B|} \left[1 + \frac{|A'B|}{|A'C|} \right] = \frac{|C'A|}{|C'B|} + \frac{|C'A|}{|C'B|} \frac{|A'B|}{|A'C|}$$

olur. Ceva Teoremi'yle $\frac{|C'A|}{|C'B|} \frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|B'A|}{|B'C|}$ olduğundan, $x = \frac{|C'A|}{|C'B|} + \frac{|B'A|}{|B'C|}$ ve benzer şekilde

$$y = \frac{|A'B|}{|A'C|} + \frac{|C'B|}{|C'A|} \quad \text{ve} \quad z = \frac{|A'C|}{|A'B|} + \frac{|B'C|}{|B'A|}$$

elde edilir. $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ olduğu için $x + y + z \geq 6$ elde edilir. Öte yandan $xyz = x + y + z + 2$ olduğu gösterilebilir (bunu okuyucuya bırakıyoruz). Böylece $xyz \geq 8$ olur. Bilinen eşitsizlikler yardımıyla,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &\geq x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 \\ &\geq xyz(x + y + z) \geq 48 \end{aligned}$$

elde edilir. $x^4 + y^4 + z^4$ minimum ise $x = y = z = 2$ olmalı ve yine O ağırlık merkezi olmalıdır.

(ii) için bir genelleştirme olan şunu göstereceğiz: Her $n \geq 1$ tamsayısı için, $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n}$ minimum ise O ağırlık merkezi olmalıdır.

$x, y, z > 0$ ve $xyz = x + y + z + 2$ olduğunu biliyoruz.

Lemma. $a, b, c \geq 0$ ve $a + b + c$ sabit ise $ab + ac + bc$ toplamı $a = b = c$ iken maksimumdur.

Kanıt. a 'yı sabit tutalım. $b + c$ sabit olduğundan $a(b + c) = ab + ac$ sabit olur. İfadeyi büyütmek için bc en büyük yapılmalıdır. $b + c$ sabit olduğundan bu $b = c$ iken olur. a, b, c simetrik olduğundan Lemma elde edilir.

Tümevarım yapacağız. $n = 1$ için $x^2 + y^2 + z^2$ 'nin minimumunu arıyalım. $xyz = t$ koyup, Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'yle $t - 2 \geq 3t^{1/3}$ ve böylece $xyz = t \geq 8$ elde edilir. Aynı anda $x + y + z \geq 6$ olur.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

yazıp $x + y + z = k$ dersek, Lemma'yı kullanarak $k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3}$ 'ün minimumunu ararız; bu ise açıkça $x + y + z = k = 6$ ve $x = y = z$ halinde olur. Dolayısıyla O ağırlık merkezidir. Şimdi de iddia $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n}$ için doğru olsun ve $x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}}$ için doğru olduğunu göstereyim.

$$\begin{aligned} x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}} \\ = (x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n})^2 - 2(x^{2^n} y^{2^n} + x^{2^n} z^{2^n} + y^{2^n} z^{2^n}) \end{aligned}$$

ve $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n} \geq 3 \cdot 2^{2^n}$ olur. $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n} = k = \text{sabit}$ denirse, Lemma ile $k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3}$ 'ün minimumu aranır. Kolayca $\frac{k^2}{3} \geq 3 \cdot 2^{2^{n+1}}$ olacağından tümevarım tamamlanır.

Problem. a, b, c bir üçgenin kenarları olsun. $2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) = abc(a + b + c) + a^4 + b^4 + c^4$ ise, üçgenin eşkenar olduğunu gösteriniz.

Lemma. Her ABC üçgeni için u yarıçevre, r ve R iç ve çevrel yarıçaplar ise,

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2ur}{R}$$

olur. (Kanıt okuyucuya bırakılmıştır.)

Lemma ve $R \geq 2r$ olduğu kullanılırsa, $a \cos A + b \cos B + c \cos C \leq u$ elde edilir. Bu ise kenarlar cinsinden

$$2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \leq abc(a + b + c) + a^4 + b^4 + c^4$$

verir. Eşitlik ancak üçgen eşkenarken vardır.

Problem. Bir ABC üçgeninde iç ve çevrel yarıçaplar r ve R ise,

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\sin \frac{A}{2} = x$, $\sin \frac{B}{2} = y$ ve $\sin \frac{C}{2} = z$ alınırsa $\frac{r}{4R} = xyz$ olur. Şu halde

$$xy + xz + yz - xyz \leq \frac{5}{8}$$

olduğu görülmelidir. $x + y + z$ sabit iken,

$$xy + xz + yz - xyz = z(x + y) + xy(1 - z).$$

z 'yi sabit tutalım. Böylece $z(x + y)$ sabit olur ve $xy(1 - z)$ ifadesi maksimum yapılmalıdır. $1 - z$ pozitif olacağından, ifade $x = y$ halinde maksimum olur. x, y, z simetrik olduğundan, ifade $x = y = z$ halinde maksimum olur. $x + y + z \leq 3/2$ olacağını okuyucu gösterebilir. Şimdi, $x + y + z \in (0, 3/2]$ iken $xy + xz + yz - xyz$ ifadesinin maksimumuna bakalım. $x = y = z = k$ alarak $k \in (0, 1/2]$ iken $f(k) = 3k^2 - k^3$ 'ün maksimumunu arayalım. $f'(k)$ bu aralıkta pozitif olduğu için, $f(k)$ bu aralıkta artandır. Dolayısıyla maksimumların maksimumu $x = y = z = k = 1/2$ halinde olur.

Problem. (i) Çevreleri sabit kalmak üzere, kenar sayıları artan bir düzgün çokgenler dizisinin alanlarının artan bir dizi oluşturduğunu gösteriniz.

(ii) Alanları sabit kalmak üzere, kenar sayıları artan bir düzgün çokgenler dizisinin çevrelerinin azalan bir dizi oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm. (i) $m > n \geq 3$ olmak üzere, m ve n kenarı bulunan düzgün çokgenleri alalım. a ve b sırayla kenar uzunlukları olsun. Çevreler eşit ise $ma = nb$ yazılabilir. Alanlar için

$$A_m = \frac{1}{4}ma^2 \cot \frac{\pi}{m} \quad \text{ve} \quad A_n = \frac{1}{4}nb^2 \cot \frac{\pi}{n}$$

doğrudur. $A_n < A_m$ olduğunu görmek yeterli olacaktır.

$nb^2 \cot \frac{\pi}{n} < ma^2 \cot \frac{\pi}{m}$ eşitsizliği, $a^2 = n^2b^2/m^2$ olduğundan, $m \tan \frac{\pi}{m} < n \tan \frac{\pi}{n}$ eşitsizliğine eşdeğerdir. Bunu görebilmek için $f(x) = x \tan \frac{\pi}{x}$ 'in azalan olduğunu görelim. $f'(x) = \tan \frac{\pi}{x} - \frac{\pi/x}{\cos^2(\pi/x)} < 0$ olduğunu görmek için, $\sin \frac{2\pi}{x} < \frac{2\pi}{x}$ olduğu görülmelidir ki bu bilinen $\sin \alpha < \alpha$ eşitsizliğidir ($0 < \alpha$ için).

(ii) Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem. R yarıçaplı bir çemberin içine iki eşkenar üçgen çiziliyor. Eşkenar üçgenlerin ortak alanı S olsun. $2S \geq R^2\sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Şekil çizilirse eşkenar üçgenlerin kesişimlerinden oluşan altı üçgenin eş oldukları gözlenebilir. Bunun sonucu olarak bu üçgenlerin çevreleri sabittir ve eşkenar üçgenin bir kenarına

yani $R\sqrt{3}$ 'e eşittir. Çevreleri sabit üçgenler arasında maksimum alanlı eşkenar üçgendir. Bunu görmek için kenarların birini sabit tutarız; diğer köşe bir elips üzerinde hareket eder ve alan diğer iki kenar eşitken en büyük olur. Kenarlar simetrik olduğundan iddia doğrulanır. Üçgenlerden birinin alanı T ise, $3T \leq R^2\sqrt{3}/4$ yazılabilir. $S = 3\sqrt{3}R^2/4 - 3T$ olduğundan istenen eşitsizlik elde edilir.

Düzeltilmeler. [1]'deki Problem 2'nin yayımlanan çözümünden daha kısa bir çözüm şöyle verilebilir: Sözü geçen uzunlukların en az biri r 'den küçük veya eşit olmalıdır. Şu halde $r \leq 12^{-3/4}(\frac{abc}{r})^{1/2}$ olduğunu görmek yeter. Bu ise $24\sqrt{3}r^3 \leq abc$ demektir. r sabit tutulurken, üçgen eşkenarsa abc minimum olmaktadır. Son eşitsizliğin doğruluğu açıktır. Böylece problemi iyi kuramamış olduğumuzu anlıyoruz. Yaptığım çözümün gidişine uygun problem şu olmalıdır:

Problem 2'. a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere, $|B_3C_1||B_1C_2||B_2C_3| \leq \frac{\sqrt{3}}{72}abc$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Şunları göstermiştik:

$$|B_3C_1||B_1C_2||B_2C_3| = |B_3C_2||B_1C_3||B_2C_1|,$$

$$\begin{aligned} &|B_1C_3||B_2C_3||B_2C_1||B_3C_1||B_3C_2||B_1C_2| \\ &\leq \frac{(abc)^2}{3^34^3}. \end{aligned}$$

İstenen bunlardan elde edilir.

[2]'deki Problem 5 iyi kurulmamış bir problem. Çözümde $\sum \frac{1}{p}$ 'nin iraksaklığını kullanmak gereksiz. Onun yerine şu problem daha uygun olabilir:

Problem 5'. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}$ dizisini ele alalım.

Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Yeterince büyük her m tamsayısı için $[m - \varepsilon, m)$ aralığında a_n dizisinin en az bir terimi vardır.

Çözüm. n yeterince büyük ise $a_{n+1} - a_n < \varepsilon$ olacağı gözlenebilir. Şu halde m yeterince büyük bir tamsayı ise, $\{a_n\}$ iraksak olduğundan, $a_n < m - \varepsilon$ 'dur $a_{n+1} \geq m$ gibi bir durum olamaz. Öte yandan, a_n dizisinin hiç bir teriminin tamsayı olmadığını görmek kolaydır. Böylece $[m - \varepsilon, m)$ aralığına dizinin bir terimi düşer.

Gene [2]'deki Problem 7 ise şöyle ifade edilse daha iyi olurdu:

Problem 7'. $2x^4 - y^4 = 1$ olacak şekilde her (x, y) pozitif tamsayı ikilisine karşılık, $(m^2 - 2mn - n^2)^2 = 1$ olacak şekilde (m, n) pozitif ikilisi olduğunu gösteriniz.

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, *Geometrik Eşitsizlikler II, Matematik Dünyası*, 2, sayı 1, 22-23, (1992).
- [2] E. Alkan, *Sayılar Teorisinde Çözümlemiş Problemler, Matematik Dünyası*, 3, sayı 3, 17-21, (1993).
- [3] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History And Solutions*, 361-363.

$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ ŞEKLİNDEKİ DIOFANT DENKLEMİ

Selma Atabey *

$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğu olduğu çok eskiden beri biliniyor. Bu sonucu değişik yönlerde genişletebiliriz. Bunlardan biri $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}$ şeklindeki sayıların ne zaman rasyonel sayılar olduklarıdır. Bu sorunun cevabı da yazının başlığındaki denklemin tamsayı çözümleri ile bulunur. Tamsayılarda çözümü aranan bir denkleme, eski Yunanlı bir matematikçinin adından *Diofant denklemi* adı verilir.

1. Aritmetiğin Temel Teoremi

Teorem. Her $n > 1$ doğal sayısı, $p_1 < \dots < p_k$ asal sayılar ve $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ doğal sayılar olmak üzere, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ biçiminde tek türlü gösterilir.

Lemma 1. n bir pozitif tamsayı olsun. $\sqrt{n}$ sayısı rasyonel sayı ise, n sayısı tam karedir.

Kanıt. p ve q tamsayı ve $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ olsun. $(p, q) = 1$ olduğunu düşünebiliriz. Aritmetiğin Temel Teoremi'nden ve $nq^2 = p^2$ eşitliğinden dolayı, n sayısının yukarıdaki biçimde yazılışında her asal çarpanın kuvveti çifttir, yani n tam karedir.

Lemma 2. $k \geq 1$ olsun. $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitif tamsayıları, herhangi ikisinin çarpımı bir sayının karesi olacak biçimde verilsin. O zaman $a_i = b_i^2 c$ ($1 \leq i \leq k$) şeklindedir. Burada b_i ve c pozitif tamsayılardır.

Kanıt. a bir pozitif tamsayı ve $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sayılarının 2 ile bölümünden kalanları incelenerek $a = b^2 c$ yazılabilir. Burada c , asal sayıların çarpımıdır.

$a_i = b_i^2 c_i$ olsun. Her a_i için farklı olan c_i sayısının aslında aynı olduğunu göstereceğiz. $a_i a_j = (b_i b_j)^2 c_i c_j$ sayısının tam kare olduğu biliniyor. $(b_i b_j)^2 c_i c_j = a_{ij}^2$ olsun. O zaman $\sqrt{c_i c_j} = \frac{a_{ij}}{b_i b_j}$ sayısı rasyoneldir ve Lemma 1'den dolayı $c_i c_j$ tam karedir. c_i sayılarını asal sayıların çarpımı olarak yazarsak, $c_i c_j$ tam kare olduğundan, c_i 'nin her asal çarpanı c_j 'nin de asal çarpanı olmak zorundadır. Aynı şey, c_i ile c_j 'nin yerini değiştirdiğimizde de doğrudur. Başka sözlerle, $i, j = 1, \dots, k$ için $c_i = c_j$ 'dir.

2. $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ Diofant Denkleminin Çözümü

Bu denklemin çözümünün 1. dereceden üç bilinmeyenli Diofant denkleminin çözümüne dönüştüğünü göstereceğiz [1].

Önce $d = 0$ durumunu gözönüne alalım.

Teorem 1. p, q, r sayıları, $ap + bq + cr = 0$ denklemini sağlayan tamsayılar ve s keyfi bir doğal sayı olsun. $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = 0$ denkleminin tamsayılar kümesinde tüm çözümleri

$$x = p^2 s, \quad y = q^2 s, \quad z = r^2 s \quad (1)$$

formülleri ile verilir.

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

Kanıt. x, y, z sayıları (1) şeklinde ise, verilen denklemi sağlarlar. Bunun tersine, $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} + c\sqrt{z_0} = 0$ olsun. O zaman, $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} = -c\sqrt{z_0}$ 'dir. Son denklemin her iki tarafının karesini alırsak,

$$\sqrt{x_0 y_0} = \frac{c^2 z_0 - a^2 x_0 - b^2 y_0}{2ab}$$

olur, yani $\sqrt{x_0 y_0}$ sayısı rasyoneldir. Lemma 1'den dolayı $x_0 y_0$ tam karedir. Benzer şekilde $x_0 z_0$ ve $y_0 z_0$ sayılarının da tam kare oldukları gösterilir. Böylece Lemma 2'den dolayı x_0, y_0, z_0 sayıları (1) şeklindedir.

Teorem 2. p, q, r sayıları $ap + bq + cr = d$ denklemini sağlayan tamsayılar olsun. $d \neq 0$, $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ denkleminin tamsayılar kümesinde tüm çözümleri $x = p^2, y = q^2, z = r^2$ formülleri ile verilir.

Kanıt. $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} + c\sqrt{z_0} = d$ olsun. $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} = d - c\sqrt{z_0}$ denkleminin her iki tarafının karesini alırsak,

$$2ab\sqrt{x_0 y_0} + 2cd\sqrt{z_0} = \sqrt{(a^2 x_0 + b^2 y_0 - c^2 z_0 - d^2)^2} = 0$$

olur. Bu eşitlikten, Teorem 1 ve Lemma 1'den dolayı z_0 tam karedir. Benzer şekilde x_0 ve y_0 da tam karedir.

Sonuç. a, b, c, p, q, r tamsayılar olmak üzere, $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}$ sayısının rasyonel olması için gerek ve yeter şart p, q, r sayılarının tam kareler olmasıdır.

Örneğin, $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sayısı irrasyoneldir.

Soru 1. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümünü bulunuz.

Çözüm. (x, y, z) bu denklemin bir çözümü olsun. O zaman, $\sqrt{yz} + \sqrt{xz} - \sqrt{xy} = 0$ olur. Teorem 1'den dolayı xz, yz ve xy sayıları aşağıdaki türdendir:

$$xz = p^2 s, \quad yz = q^2 s, \quad xy = (p + q)^2 s.$$

Bu denklemlerden $\sqrt{s} = \frac{xyz}{pq(p + q)s}$ olduğu bulunur. Yani $\sqrt{s}$ rasyonel sayıdır. Lemma 1'den dolayı, s tam karedir. O zaman $xz = p^2 s_1^2, yz = q^2 s_1^2, xy = (p + q)^2 s_1^2$ 'dir. Buradan

$$x = \frac{p(p + q)}{q} s_1, \quad y = \frac{q(p + q)}{p} s_1, \quad z = \frac{pq}{p + q} s_1$$

olur. $(p, q) = 1$ olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda $(p + q, p) = 1$ ve $(p + q, q) = 1$ 'dir. Yukarıdaki eşitliklerden dolayı $pq(p + q)$ sayısı s_1 sayısını böler. $s_1 = pq(p + q)r$ olsun. O zaman

$$x = p^2(p + q)^2 r, \quad y = q^2(p + q)^2 r, \quad z = p^2 q^2 r \quad (2)$$

olur. Öte yandan, bu şekilde verilen sayılar verilen denklemi sağlıyor ve denklemin tüm çözümleri (2) formüllerinden bulunur.

Örnek. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1980}}$ denkleminin tam sayılar kümesinde tüm çözümleri şu ikililerdir:

$$\begin{aligned} x &= 2^2 5^2 55 & x &= 7^2 55 \\ y &= 3^2 5^2 55 & y &= 6^2 7^2 55 \\ x &= 4 \cdot 1980 & x &= 3^2 2^6 55 \\ y &= 4 \cdot 1980 & y &= 2^6 55 \\ x &= 3^4 55 \\ y &= 2^2 3^4 55 \end{aligned}$$

Çünkü $1980 = 2^2 3^2 55$ 'tir.

Soru 2. $n > 1$ bir doğal sayı olsun. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ denkleminin tam sayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

Çözüm. Lemma 2'nin kanıtında olduğu gibi $n = r^2 s$ olduğu gösterilebilir. (Burada s ile farklı olan asal sayıların çarpımı gösterilmiştir). Teorem 1'den dolayı $x = p^2 s$ ve $y = q^2 s$ 'dir. Bu değerleri verilen denkleme alırsak, işlemlerden sonra $p + q = r$ bulunur. Bu denklemin pozitif tamsayılar kümesinde $r + 1$ tane çözümü vardır; dolayısıyla soruda verilen denklemin de pozitif tamsayılar $r + 1$ tane çözümü vardır.

Örnek. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1980$ denkleminin tam sayılar kümesinde 56 tane çözümü vardır, çünkü $1980 = 6^2 55$ 'tir.

Alıştırma Soruları. 1. a, b, c, d tamsayılar olsun. Aşağıdaki denklemlerin tamsayılar kümesindeki çözümlerini bulunuz.

$$(a) \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{\sqrt{y}} = \frac{c}{\sqrt{z}}$$

$$(b) a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d\sqrt{t} = 0$$

2. Aşağıdaki denklemlerin kaç tane çözümü vardır?

$$(a) \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} = \sqrt{1980}$$

$$(b) \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{\sqrt{1980}}$$

3. Her doğal sayı n için, $\sqrt{n} + \sqrt{n + 1} + \sqrt{n + 2}$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlayınız.

Düzeltilme. [1]'deki son örneğin çözümünde yanlış çıkmış bazı sayıların doğrularını veriyoruz. v sayısı $-\frac{28}{31} \leq v \leq \frac{3}{31}$ aralığında olmalıdır. O zaman $x = 3$ bulunur ve doğum günü 3 Şubat'tır.

KAYNAKÇA

- [1] S. Atabey, 1. Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemleri, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 1, 17-18 (1995).

ÖĞRENCİLERDE MATEMATİK KORKUSU ÜZERİNE

Metin Yaman *

Matematik yeteneği, zamanımızın ileri teknoloji toplumunda prestij ifade eden işlerde başarının anahtarıdır. Matematik olmadan teknik uzmanlık gerektiren işlerin çoğunda — hesaplama, mühendislik, bilim ve tıpta— başarılı olmak mümkün değildir. Ayrıca matematik günümüzde spor ve müzik gibi dallarda da uygulama alanı bulmaktadır.

Hayatın her kademesinde matematik bu kadar öneme sahipken maalesef pek çok insan matematik denince şöyle bir çekinir, sayılardan ve sayısal işlemlerden olabildiğince uzaklaşır. Matematik korkusu, iyi eğitilmiş bireylerin gelişmesinde önemli bir engel olarak ortaya çıkar. Matematik korkusu olanlarla yapılan röportajlarda şu şekilde duygusal tepkilerle karşılaşılmıştır: kalp atışında artış, terleme, kafanın allak bullak olması. Matematik korkusu, okul ödevlerini yapmamakta kullanılan bir taktik değildir. Bu korku, matematikle uğraşmamak uğruna ortaya konan bir psikolojik tepkidir. Bu korkuya sahip insanlar son derece sinirli olurlar ve buna sebep olan ortamdan olabildiğince uzaklaşırlar. Bu korku, insanların matematik yeteneğini kullanmasını önlemede önemli bir rol oynar. Bugün bir çok öğrenci bundan ızdırıp çekiyor. İddia edebiliriz ki bugün toplumlarda teknoloji karşısı baskıların yayılmasında, artmasında matematik korkusu büyük rol oynar. Okullu olmanın ilk yıllarından itibaren üzerinde durulması gereken bir konudur.

Matematik Korkusunun Kaynakları

ABD'de yapılan bir araştırma bir çok öğrencinin aslında matematiği sevdiğini, matematiğin önemli bir konu olduğunu bildiğini ve

bunu başarmak istediğini, ve öğrencilerin % 15-25 arasında bir oranında matematiğin en sevilen konular arasında olduğunu göstermiştir. Bu sonuçların ışığı altında, niçin matematik korkusu bir çok öğrenci üzerinde dramatik etki yapan bir ortak olgudur?

Matematik korkusu bir fobidir. Fobi, özel durumlar ve olaylar karşısında tepki olarak oluşan sebepsiz bir korkudur. Bütün fobiler gibi matematik korkusu da öğrencilikte kazanılır.

Fobiler, ya dışı korkusunda olduğu gibi özel olay veya durumla ilgili olaylardan, ya da bir büyüğün fareden, örümcekten korkmasının ardından çocuğunun da bundan korkması gibi duygusal şekilde öğrenilir. Matematik korkusu bunların her ikisinin katkısı ile kazanılır.

Matematik korkusu ile diğer bilinen fobiler arasındaki fark, korkulan şeyin kendi fiziksel durumundan ziyade kişisel kavramlarına karşısı duyulan bir korku olmasıdır. Matematiğin korkulması gereken bir şey olduğu fikri okulun ilk yıllarında başlar. Öğretmenler ve diğer insanlar, öğrencilere ileriki hayatlarında matematik yeteneğinin önemini vurgularlarken aynı zamanda da zor olduğunu ve korkulması, çekinilmesi gereken bir şey olduğunu söylerler. Sebeplerden biri de öğretmen ile öğrenci arasındaki kopukluktur. Öğrenci, anlatılan konuyu anlayamamakta, öğretmen öğrencinin anlayabileceği şekilde konuyu anlatamamaktadır. Problem çözmede öğrenciler somuttan soyuta geçişte zorlukla karşılaşılır. Öğretmenin burada devreye girmesi gerekir. Yine öğrenciler arasındaki sebep-sonuç ilişkisini kurabilmekteki farklılık, çabuk dönüşebilmedeki farklılık da önemlidir. Bir başka sebep ise toplumda matematiğin sadece çok zekilerin başaraabileceği bir şey olarak lanse edilme-

* SAÜ Matematik Bölümü araştırma görevlisi

sidir. Zaman baskısı altında öğrencilerin problem çözmeye, matematiksel sonuç çıkarmaya zorlanması başarısızlık için birebirdir. Bu sebeplerin sonucunda öğrenci kendini başarısız görmekte veya bu konuda yeteneğinin olmadığına inanmaya başlamaktadır.

Matematik Korkusunu Aşma

Bunun üstesinden gelinmesi için öğretmene, öğrenciye ve bunun dışındaki kişilere değişik görevler düşmektedir. Ben burada bir öğretmenin, öğreticinin ne yapması gerektiği üzerinde durmak istiyorum. Bunun için bir formül olmasına rağmen şunları önerebiliriz:

- Konuyu basit bir şekilde, karmaşık hale getirmeden ve zevkli bir şekilde öğrenciye sunmalı. Öğretmen konuyu işlerken çok rahat olmalı. Konuya hakim olmalı. Diğer bir deyişle cambazlık yapabilmelidir.

- Öğretmen, öğrenciler arasında aşırı rekabete mani olmalı. Öğrencilere küçük gruplar halinde çalışmalarını için olanaklar sağlamalı ki problem çözme tekniklerini kendi aralarında tartışsınlar ve sonuç çıkarabilsinler. Yavaş öğrenenlere daha fazla şans tanınmalı. Rekabetçi sınıflarda başarısızlık, ya yetenek eksikliği ya da başarı için gerekli gayret sarfedilmediğinden ortaya çıkar.

- Öğrencinin hızını ölçen testlerden kaçınılmalı. Zaman telaşı öğrencide tedirginlik yapmaktadır.

- Öğrencinin gayreti ödüllendirilmeli. Öğretmen, sadece cevabın sonucuna değil, çözümün nasıl yapıldığına da bakmalı. Cevaptaki bütün işlemler değerlendirilmeli.

- Öğrenci asla azarlanmamalı. Matematik korkusu olan öğrencilerin aklından geçen en önemli şey de sınıf karşısında öğretmen tarafından hakarete uğramaktır. Öğrenciyi rencide eden bu hareket üç türlü karşımıza çıkar; ya duyarsız olan bir öğretmen tarafından sözlü hakarete uğrama, veya sınıftan bir arkadaşının probleme karışması, yorum getirmesi, ya da tahtada problem ile saatlerce uzun süre başbaşa kalması şeklinde olur. Değerlendirmeyi, öğrencinin yıl içindeki durumu ile yapmak gerekir.

- Öğretmen dersi monoton bir şekilde anlatmamalı. Öğretmenin belli aralıklarda espriye yer veren mizahi bir üslup geliştirmesi gerekir. Öğrencinin sıkılmasına zemin hazırlamamalı.

- Matematiği bir ceza olarak asla kullanma-

malı. "50 tane alıştırmayı yap" tipinden cezalar öğrencide ters tepki oluşturur.

- Öğrenciye, matematiği nasıl anlaması ve çalışması gerektiği öğretilmeli. Matematik, bir roman gibi okunmaz; yani okumakla öğrenilmez. Öğrenciye yazarak çalışması tavsiye edilebilir. Yine yazdıkları üzerinde kendince bir yorum getirmesi önerilebilir.

- Erkek ve kız öğrencilere eşit fırsat sağlanmalı. Kesinlikle ayırım yapılmamalı.

- Öğretmen, konuyu anlatırken günlük olaylarla bağlantı kurmalı; matematiğin kullanılabileceği alanları öğrencilerle tartışmalı.

- Öğrencinin zorlanacağı noktaları açıklıkla ifade etmeli. Öğrencinin kafasında soru kalmasına özen göstermeli.

- Dersi matematik tarihi ile zenginleştirmeli. Öğretmenin, matematik üzerine çalışan bilim insanlarının hayatlarını anlatması gerekir. Biyografik bilgiler vermeli.

Sonuç

Matematik korkusu, kolay çözümleri bulunamayan ciddi bir problemdir. Matematikle ilgili şüphe ve çekinceden dolayı veya bu korkuyu atmak için geliştirmeleri gereken stratejileri geliştiremeyen öğrenciler, istenen seviyenin çok altında matematik bilgisine sahip oluyorlar. Ne öğrendilerse, anlamadan, ezberleyerek öğreniyorlar. Fakat kısa bir süre sonra unutuyorlar. Sınıfta negatif tavır sergileyen bir tek öğrenci, diğer öğrencilerin olumlu tavır geliştirmesine engel olabiliyor, onları rahatsız edebiliyor. Bu tip öğrencilere asla fırsat verilmemelidir. Öğretmen için matematiksel şüpheyi en aza indirmek büyük bir avantajdır. Öğrenciye okula başlamasının ilk yıllarında matematik sevgisinin kazandırılması, ileriki dönemlerde olumlu sonuçlar ortaya çıkaracaktır. Yani ilk yıllardaki matematik eğitimi çok önemlidir. Bu konuda en büyük sorumluluk yine öğretmenlere düşmektedir.

KAYNAKÇA

- [1] R. F. Biehle & J. Snowman, *Psychology Applied to Teaching*, Boston, 1986.
- [2] L. Boston, *Do You Panic About Math?*, Heinemann, London, 1982.

PROBLEMLERLE EĞLENELİM (Mİ?) (II)

Şafak Alpay *

$F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ile tanımlanan diziye *Fibonacci dizisi* denir [1]. Bir kaç elemanı

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

dir.

$F_3 = 2$, $F_5 = 5$, $F_7 = 13$, $F_{11} = 89$ hep asal sayılar olduklarından, asal $n > 2$ sayısına karşılık gelen her F_n Fibonacci sayısının asal olduğunu düşünebiliriz. Ancak $F_{19} = 4118 = 37 \cdot 113$ olduğundan bu doğru değildir. Ancak asal Fibonacci sayılarını üretecek bir yöntem de bilinmiyor. Esasında asal Fibonacci sayılarının sonsuz sayıda olup olmadıklarını bile bilmiyoruz.

Ama hemen görebileceğimiz şey birbirini izleyen F_n ve F_{n+1} Fibonacci sayılarının aralarında asal olduğudur. F_n ve F_{n+1} 'in birden büyük d gibi bir bölüneni olsun. F_{n+1} ve F_n 'nin farkı olan $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ de d ile bölünecektir. $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ olduğundan F_{n-2} de d ile bölünecektir. Bu şekilde geriye doğru çalışarak F_{n-3} , F_{n-4} , ve sonuçta da varacağımız F_1 'in de d ile bölünebileceğini görürüz ki, bu bir çelişkidir.

Her asal p sayısı için p ile bölünebilen sonsuz tane Fibonacci sayısı vardır; daha da ilginç Fibonacci dizisinde bunlar eşit uzaklıktadırlar. Örneğin 3 sayısı dizide dördün katlarında oturan sayıları, 5 sayısı beşin katlarında oturan sayıları böler.

Fibonacci sayıların bilinen birçok özelliği vardır. Bunların bir kısmını aşağıda soracağız. Şimdi bazılarını görelim.

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

yazıp, taraf tarafa toplayarak

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1 \quad (1)$$

elde ederiz. Diğer bir özellikleri ise $n \geq 2$ için

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

olduğudur. Bunu görmek için sol tarafa E deyip

$$\begin{aligned} E &= F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= (F_n - F_{n+1})F_{n-1} + F_nF_{n+1} \end{aligned}$$

yazalım. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olduğundan parantez içindeki ifade $-F_{n-1}$ 'dir ve $E = (-1)(F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2})$ olur. Benzer yöntem ile

$$F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} = (-1)(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$$

elde ederiz; yukarıda yerine koyarsak $E = (-1)^2(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$ haline gelir. $n - 2$ adımdan sonra, varacağımız eşitlik

$$\begin{aligned} E &= (-1)^{n-2}(F_2^2 - F_3F_1) \\ &= (-1)^{n-2}(1^2 - 2 \cdot 1) = (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

olacaktır. Bu bilgiler ile aşağıdaki soruları yanıtlatabilirsiniz.

1. Her pozitif tamsayı Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabilir. Örneğin, $5 = F_3 + F_4$, $6 = F_1 + F_3 + F_4$, $7 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$. 50, 75, 100 ve 125'i Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazınız.
2. (a) Tek indeksli ilk n Fibonacci sayısının toplamının $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $F_1 = F_2$, $F_3 = F_4 - F_2$, $F_5 = F_6 - F_4$, ...; taraf tarafa toplayın.)
(b) $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ eşitliğini (a)'yı ve (1)'i kullanarak gösteriniz.
(c) $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$ eşitliğini gösteriniz.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

3. 2 ve 5'ten farklı her asal p sayısı için F_{p-1} veya F_{p+1} sayısı p ile bölünür. Bu önermeyi 7, 11, 13 ve 17 için sağlayınız.

4. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliğini kullanarak, birbirini izleyen Fibonacci sayılarının aralarında asal olduğunu gösteriniz.

5. (a) İki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleni de Fibonacci sayısıdır: $d = \text{EBOB}(n, m)$ ise $\text{EBOB}(F_n, F_m) = F_d$ 'dir. Bu önermeyi (F_9, F_{12}) ve (F_{15}, F_{20}) çiftleri için sağlayınız.

(b) Yukarıdaki önermeyi kullanarak $2 < n$ ise $F_n | F_m$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $n | m$ olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız. Hepsinde bir önceki problem gerekli olabilir!

(a) $2 | F_n \iff 3 | n$

(b) $3 | F_n \iff 4 | n$

(c) $4 | F_n \iff 6 | n$

(d) $5 | F_n \iff 5 | n$

7. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ eşitliğini gösteriniz. (İpucu: $F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$ işinize yarayabilir.)

Aşağıdaki sorular Diophantus'un ünlü kitabı *Arithmetica*'dan: yani yaklaşık 1800 yaşında.

8. 16 sayısını iki karenin toplamı olarak yazınız.

9. Karesi alınıp, değerine eklendiğinde yine bir kare elde edilen iki sayı bulunuz.

10. 6 ve 7 sayıları kendisinden çıkartıldığında yine kare elde edilen sayıyı bulunuz.

11. Çarpımları toplamlarına veya kendilerine eklendiğinde kare elde edilen iki sayı bulunuz.

12. Alanı kenarlarına eklendiğinde kare olan ve çevresi de küp olan dik üçgeni bulunuz.

13. 20, 30 ve 40 sayıları verilsin. Öyle üç sayı bulunuz ki herhangi ikisinin toplamı verilen sayılardan birisi olsun.

14. Toplamları ve çarpımları verilen bir sayı olan iki sayıyı bulunuz.

15. Toplamları ve karelerinin toplamı verilen sayılar olan iki sayı bulunuz.

16. Farkları verilen bir sayı olan iki kare bulunuz.

17. Verilen iki sayıdan çıkartıldığında farkların kare olduğu sayıyı bulunuz.

18. Kareleri toplamlarına eklendiğinde kare elde edilen iki sayı bulunuz.

19. İki çarpılıp üçüncüsüne eklendiğinde kare elde edilen üç sayı bulunuz.

20. İki çarpılıp üçüncüsünün karesine eklendiğinde kare elde edilen üç sayı bulunuz.

21. Farkları ve küplerinin farkları verilen sayılar olan iki sayıyı bulunuz.

22. Çarpımları ile toplandıklarında bir küp veren iki sayıyı bulunuz.

23. Hipotenüsünden kenarlarından biri çıkartıldığında bir küp elde edilen dik üç geni bulunuz.

Şimdi de değişik dönemlerden birkaç soru.

24. (Bu problem 1202'de Fibonacci tarafından sorulmuş [1].) 2,3,4,5,6 ile bölündüğünde 1,2,3,4,5 kalanını veren ve 7'nin katı olan sayıyı bulunuz.

25. (Bu problem Regiomontanus (1436–1476) tarafından sorulmuş.) 10, 13 ve 17 ile bölündüğünde 3, 11 ve 15 kalanını veren sayıyı bulunuz.

26. (Bu problemi 1770'te Euler sormuş.) 100 sayısını öyle iki parçaya bölünüz ki biri 7, diğeri 11 ile bölünebilsin.

27. (Son sorumuz 1114–1185 yılları arasında yaşamış 12. yüzyılın önde gelen Hint matematikçisi Bhaskara'dan.) Hangi sayı 6 ile bölündüğünde 5 kalanını, 5 ile bölündüğünde 4 kalanını, 4 ile bölündüğünde 3 kalanını ve 3 ile bölündüğünde 2 kalanını verir?

KAYNAKÇA

- [1] Ş. Alpay, *Karanlık Çağın Aydınlığı: Fibonacci, Bilim ve Ütopya*, Ocak, 1995.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A106. $\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{1}{\sin^2 1^\circ}$ olduğunu kanıtlayınız. (Turgay Uçkun)

A107. Köşegenleri K noktasında kesişen $ABCD$ kirisler dörtgeninde AKB , BKC , CKD ve DKA üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırayla R_a , R_b , R_c , R_d ise, $\frac{R_a+R_c}{R_b+R_d} = \frac{a+c}{b+d}$ olduğunu gösteriniz. (Dinçer Akay)

A108. Başlangıçta A noktasında bulunan bir kurbağa, her adımda eşit olasılıkla ya doğu ya da batı istikametinde sıçramaktadır. İlk sıçrayışı 64 metre, bundan sonraki her sıçrayışı bir öncekinin yarısı kadar olmaktadır. 400 sıçrama sonunda kurbağanın A noktasına 20 metreden daha yakında bulunması olasılığını hesaplayınız. (Akın Bayazıt)

A109. $\{F_n\}$ dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \geq 0$) şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisini gösterirse, her a ve b pozitif tamsayıları için, $F_k = a \pmod{3^b}$ şeklinde bir k tamsayısı bulunabileceğini gösteriniz.

A110. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, ... dizisinin n 'yinci elemanını belirleyiniz. (Dizide her m sayısı, m kez tekrarlanmaktadır.) (Yaman Duruman)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y106. Bir ABC üçgeninde A açısının içaçıortayı $[BC]$ kenarını L , ABC üçgeninin çevrel çemberini A ve N noktalarında kesiyor. L 'den AB ve AC doğrularına inilen dikme ayakları sırayla K ve M ise, $\text{alan}(ABC) = \text{alan}(AKNM)$ olduğunu gösteriniz. (Turgay Uçkun)

Y107. ABC ve PQR üçgenleri verildiğinde herhangi bir X noktası için PX , QX , RX doğrularının DC , CA , AB doğrularını kestiği noktalar sırayla A_x , B_x , C_x olsun. $B_x C_x \parallel QR$, $C_x A_x \parallel RP$ ve $A_x B_x \parallel PQ$ olacak şekilde X noktasının varlığını gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Y108. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 60^\circ$,

$D \in [AC]$ için $AD = BC$ 'dir. $\widehat{BDC} = 30^\circ$ ise, $\widehat{BAC}$ 'yi hesaplayınız. (Ergün Yaraneri)

Y109. ABC üçgeninde içmerkez I , içteğet çember yarıçapı r , çevrel çember yarıçapı R ve A açısı karşısındaki dışteğet çemberin yarıçapı r_a 'dır. BIC üçgeninin çevrel çember yarıçapı R_A ise, $R_A^2 = R(r_a - r)$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Y110. n ne kadar büyük olursa olsun,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu ve her n için toplamın $2 - \frac{2}{2n+1}$ sayısından küçük olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A96. Eğer $Z = \frac{(1+i)^3 + (1+i)^6 + \dots + (1+i)^{12n}}{(1-i)^3 + (1-i)^6 + \dots + (1-i)^{12n}}$ ise (n bir doğal sayı), $|Z|$ 'yi hesaplayınız. (Hasan Kullap)

Çözüm. $(1+i)^3 = 2(i-1)$, $(1-i)^3 = -2(i+1)$, $(i-1)^2 = -2i$, $(i+1)^2 = 2i$ ve $i^{2n} = (-1)^n$ olduğunu gözönünde bulundurarak

$$Z = \frac{[2(i-1)]^1 + [2(i-1)]^2 + \dots + [2(i-1)]^{4n}}{[-2(i+1)]^1 + [-2(i+1)]^2 + \dots + [-2(i+1)]^{4n}}$$

yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2(i-1) \left[\frac{1 - [2(i-1)]^{4n}}{1 - 2(i-1)} \right]}{-2(i+1) \left[\frac{1 - [-2(i+1)]^{4n}}{1 - 2(i+1)} \right]} = \frac{1-i}{1+i} \frac{1 - [4(i-1)^2]^{2n}}{1 - [4(i+1)^2]^{2n}} \\ &= \frac{1-i}{1+i} \frac{3+2i}{3-2i} \frac{1 - [4(-2i)]^{2n}}{1 - [4(2i)]^{2n}} \\ &= \frac{1-i}{1+i} \frac{3+2i}{3-2i} \frac{1 - 4^{2n} 2^{2n} (-1)^n}{1 - 4^{2n} 2^{2n} (-1)^n} = \frac{1-i}{1+i} \frac{3+2i}{3-2i} \end{aligned}$$

elde edilir. Her hangi bir ζ kompleks sayısı için $|\bar{\zeta}| = |\zeta|$ olduğundan $|Z| = 1$ bulunur.

(Çözenler: Atasâğan Baykal, Boğaçhan Çelen, Hasan Denker, Aycan Dinler, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.)

A97. Bir ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 18^\circ$ ve $\widehat{ACB} = 54^\circ$ ise, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranını hesaplayınız. (Ali Akın)

Çözüm. $ABXYZ$ düzgün beşgeninde $\widehat{ABZ}$ 'nin açıortayı $[AZ]$ 'yi C' 'de kessin. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 18^\circ$ ve $\widehat{ACB} = 54^\circ$ olur. ABZ üçgeninde, açıortay teoreminden, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BZ|}{|CZ|}$ yazılır. Her iki tarafı $|CZ|$ ile çarpıp $|AB|$ ile toplayarak

$$|BZ| + |AB| = \frac{|AB|}{|AC|}|CZ| + |AB| = \frac{|AB|}{|AC|}|AZ|$$

bulunur. $|AB| = |AZ|$ ve $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ için $|BZ| = \phi|AB|$ olduğu hatırlanarak $\frac{|AB|}{|AC|}|AB| = \phi|AB| + |AB|$ ve $\frac{|AB|}{|AC|} = \phi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ elde edilir.

(Çözenler: Şevket Emrah Aydın, Atasâğun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.)

A98. Bir ABC üçgeninin içmerkezi O , A açısı karşısında oluşan teğet çemberin merkezi O' olsun. $|OO'| = \frac{|AB||AC|}{|AO|} - |AO|$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Çözüm. $[BO]$, $[CO]$ doğruları iç açıortaylardır ve $|AO| = |AO'|$ 'dür. $[BO']$ ve $[CO']$ dış açıortaylardır. $\widehat{BAC} = 2a$ ve $\widehat{BCA} = 2x$ olsun. $\widehat{BAO'} = \widehat{OAC} = a$ ve $\widehat{AO'B} = \widehat{ACB}/2 = \widehat{OCA} = x$ olduğundan, ABO ve AOC benzerdir. Buradan $\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{|AO'|}{|AC|} = \frac{|AO|+|OO'|}{|AC|}$ ve nihayet istenen sonuç elde edilir.

(Çözenler: Ali Akın, Emrah Aydın, Atasâğun Baykal, Hasan Denker, Yaman Duruman, Mehmet Ekmekçi, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Ülkü Öztaş, Gültekin Pulat, Selami Rüzgar, Ruhi Tabur, Turgay Uçkun, Nazım Utku.)

A99. Bir $ABCD$ karesinin içinde $\widehat{DAK} = \widehat{DCK} = 10^\circ$ olacak şekilde bir K noktası ve BC kenarı üzerinde $\widehat{BAL} = 35^\circ$ olacak şekilde L noktası işaretleniyor. $\widehat{AKL}$ açısını hesaplayınız. (Alaattin Aktaş)

Çözüm. $[AK] \cap [CD] = \{P\}$ ve $[CK] \cap [AD] = \{Q\}$ diyelim. $\widehat{DPK} = \widehat{DQK} = 80^\circ$ olduğundan, $\widehat{AKC} = \widehat{PKQ} = 110^\circ$ bulunur. Simetriden $K \in [DB]$ olduğu anlaşılır.

Dolayısıyla $\widehat{BKC} = \widehat{AKB} = 55^\circ$ 'dir. Öte yandan, $\widehat{BLA} = 55^\circ$ olduğundan, $ABLK$ bir kirişler dörtgenidir. Buradan da $\widehat{AKL} = 90^\circ$ bulunur.

(Çözenler: Ali Akın, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasâğun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Aycan Dinler, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Levent Koçoğlu, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Erol Ünal, Ergün Yaraneri.)

A100. n basamaklı bir sayının, birler basamağı ve i 'yinci basamağındaki rakamlarının yeri değiştirilerek bulunan sayı ile ilk sayının farkının mutlak değerinin rakamları toplamını x_i ile gösterelim. $x_2 + x_3 + \dots + x_n$ toplamını hesaplayınız. (Cem Güzel)

Çözüm. Verilen n basamaklı sayıyı $a_n 10^{n-1} + \dots + a_2 10 + a_1$ şeklinde yazarsak, birler basamağındaki rakamın i 'yinci basamaktaki rakamla yer değiştirilmesi ile elde edilen sayının farkı mutlak değerce

$$|(a_k - a_1)10^{k-1} + (a_1 - a_k)| = |a_k - a_1|10^{k-1} - |a_k - a_1|$$

olur. $|a_k - a_1| = t$ dersek, bu farkı

$$t \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} - t = (t-1) \underbrace{9 \dots 9}_{k-2} (10-t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu farkın rakamları toplamı $x_k = (k-2)9 + t - 1 + 10 - t = (k-1)9$ 'dur. Bu durumda

$$\sum_{k=2}^n x_k = [1 + 2 + \dots + (n-1)]9 = \frac{9}{2}n(n-1)$$

bulunur.

(Çözenler: Şevket Emrah Aydın, Atasâğun Baykal, Hasan Denker, Aycan Dinler, Yaman Duruman, Mehmet Ekmekçi, Ali Ekber Gürel, Namık Gök, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Ülkü Öztaş, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.)

Y96. Bir üçgenin a, b, c kenar uzunlukları ve r içteğet çember yarıçapı için $\frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (Tamer Adanır)

Çözüm. Üçgenin çevrel çember yarıçapını R ve alanını da S ile gösterelim. $S = \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2}r$ den $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ bulunur. $R \geq 2r$

olduğundan, $2Rr \geq 4r^2$ elde edilir. $R = 2r$ olması için üçgenin eşkenar olması gerek ve yeterlidir [1].

(Çözenler: Ali Akın, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağın Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Mustafa Kesal, Levent Koçoğlu, Ruhi Tabur, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.)

Y97. Bir üçgenin S alanı ve r içteğet çember yarıçapı için $S \geq 3\sqrt{3}r^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (Dinçer Akay)

Çözüm. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve yarıçevresi de u olsun. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ veya $(2u)^3 \geq 27abc$ elde edilir. $abc = 4uRr$ olduğundan, $(2u)^3 \geq 108Rur$ veya $2u^2 \geq 27Rr$ bulunur. $R \geq 2r$ eşitsizliğini kullanarak $2u^2R \geq 54Rr^2$, buradan da $u \geq 3\sqrt{3}r$ ve dolayısıyla $S = ur \geq 3\sqrt{3}r^2$ elde edilir. Eşitlik ancak üçgenin eşkenar olması halinde geçerli olur.

(Çözenler: Tamer Adanır, Ali Akın, Murat Aygen, Atasağın Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Namık Gök, Mustafa Kesal, Levent Koçoğlu, Murat Kurtoğlu, Ruhi Tabur, Turgay Uçkun, Nazım Utku.)

Y98. x, y, a, b, c doğal sayılar olmak üzere

$$x^2 + a^3 = y^4$$

$$x^2 + a^3 + b^3 = y^4$$

$$x^2 + a^3 + b^3 + c^3 = y^4$$

denklemlerinin herbirinin sonsuz sayıda tamsayı çözümü olduğunu gösteriniz. (Almas Rimov)

Çözüm. $\frac{k(k+1)}{2} = m^2$ denkleminin doğal sayılar kümesinde bir çözümü (k_1, m_1) olsun. $k' = 4k_1(k_1 + 1)$ alalım.

$$\frac{k'(k' + 1)}{2} = 2k_1(k_1 + 1)[4k_1(k_1 + 1) + 1] \\ = 4m_1^2(2k_1 + 1)^2 = (2m_1(2k_1 + 1))^2$$

olduğundan, $(4k_1(k_1 + 1), 2m_1(2k_1 + 1))$ de bir çözüm olur. $4k_1(k_1 + 1) > k_1$ olduğu için, $\frac{k(k+1)}{2} = m^2$ denkleminin doğal sayılar içinde bir çözümü (8,6) olduğundan, bu denkleme sonsuz çözüm yazılabileceği anlaşılır.

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ olduğu hatırlanırsa,

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3 + (n-1)^3 + \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 \\ + \left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)^2$$

eşitlikleri yazılabilir. $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ denkleminin doğal sayılar içinde sonsuz tane çözümü olduğunu bildiğimizden, istenilen gösterilmiş olur.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Hasan Denker, Yaman Duruman, Muammer Keleş, Mehmet Kurtoğlu, Şahin Polat, Gültekin Pulat.)

Y99. İçteğet çember yarıçapı r olan bir ABC üçgeninin içmerkezinin A, B, C köşelerine uzaklıkları sırasıyla X_A, X_B, X_C olsun. ABC üçgeninin A, B, C açıları karşısındaki dıştan teğet çemberlerin merkezlerinin içmerkeze uzaklıkları sırasıyla Y_A, Y_B, Y_C olsun. $r(Y_A + Y_B + Y_C) = X_A X_B + X_A X_C + X_B X_C$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Çözüm. İçteğet çember merkezi I , A açısının karşısındaki dıştan teğet çemberin merkezi I' ve içteğet çemberin AB ve AC kenarlarına değdiği noktalar U ve T ile gösterilsin. AIT üçgeninden $X_A = \frac{r}{\sin(A/2)}$, CIT üçgeninden $X_C = \frac{r}{\sin(C/2)}$ ve IBU üçgeninden de $X_B = \frac{r}{\sin(B/2)}$ yazılır. Öte yandan, $II'C$ üçgeninden $|II'| = Y_A = \frac{X_C}{\sin(B/2)}$ elde edilir. Benzer şekilde $Y_B = \frac{X_A}{\sin(C/2)}$ ve $Y_C = \frac{X_B}{\sin(A/2)}$ yazılır. Bunlar istene sonucu verir.

(Çözenler: Tamer Adanır, Ali Akın, Şevket Emrah Aydın, Atasağın Baykal, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Namık Gök, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Turgay Uçkun.)

Y100. Bir ABC dik üçgeninde ($\hat{A} = 90^\circ$), hipotenüse inilen dikme AD olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezlerini birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kessin. ABC ve AKL üçgenlerinin alanları sırasıyla S ve S' ise, $S \geq 2S'$ olduğunu gösteriniz. (Turgay Uçkun)

Çözüm. ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezleri sırayla I_1 ve I_2 olsun. I_1 ve I_2 , ilgili üçgenlerin açıortayların kesim noktasıdır. $\widehat{AI_1B} = 135^\circ$ ve $\widehat{I_1AI_2} = 45^\circ$ olduğundan, ABD ve CAD üçgenlerinin benzerliğini gözönüne

olarak, I_1BD ve I_2AD üçgenleri benzerdir diyebiliriz. Buradan $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|I_1D|}{|I_2D|}$ ve $\frac{|I_1D|}{|AB|} = \frac{|I_2D|}{|AC|}$ elde edilir. $I_1\widehat{DI_2} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ olduğundan, I_1DI_2 ve BAC benzerdir. $I_1\widehat{BD} = \theta$ dersek, $I_2\widehat{I_1D} = \widehat{CBA} = 2\theta$ 'dır. Böylece $K\widehat{I_1B} = 45^\circ - \theta$ ve $L\widehat{KA} = 45^\circ$ olup, AKL 'nin bir ikizkenar dik üçgen olduğu anlaşılır. DAI_2 ve LAI_2 üçgenleri AAA bağıntısıyla benzer olduklarından, bu üçgenler eş olup, $|AD| = |AL| = |AK|$ elde edilir. O halde

$$S' = \frac{|AK||AL|}{2} = \frac{|AD|^2}{2} = \frac{|BD||BC|}{2},$$

$$S = \frac{(|BD| + |DC|)|AD|}{2}$$

$$= \frac{(|BD| + |DC|)\sqrt{|BD||BC|}}{2}$$

eşitliklerinden $\frac{S}{S'} = \frac{|BD| + |DC|}{\sqrt{|BD||DC|}}$ olur ve nihayet Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden $S \geq 2S'$ sonucu elde edilir.

(Çözenler: Tamer Adanır, Şevket Emrah Aydın, Ayhan Aziz, Atasagun Baykal, Hasan Denker, Mustafa Kesal, Ergün Yaraneri.)

KAYNAKÇA

- [1] C. Koç, *Bir Üçgene Ait Çemberler, Matematik Dünyası*, 2, sayı 1, 17-21 (1992).

PROBLEM SEMİNERLERİ

TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'nca Mart 1995 tarihinden itibaren matematik problem seminerlerine başlanmıştır. Ayda iki kez Çarşamba günleri 15:00-17:00 saatleri arasında, şimdilik sadece Ankara'da yapılacak olan seminerlere yaz aylarında ara verilecek ve Ekim 1995'ten itibaren yeniden devam edilecektir.

Seminerlerde ele alınacak problemler *Matematik Dünyası* ile *Bilim ve Teknik* dergilerinde yayımlanacaktır. Seminerlere, liseli gençliğin yanı sıra lise matematik öğretmenlerinin ve matematiğe ilgi duyan herkesin katılması beklenmektedir. Bu seminerlere mektupla katılmak da mümkündür.

Ali Doğanaksoy (ODTÜ) ve Semih Korum (Bilkent Üniversitesi) gözetiminde, geçmiş yıllarda matematik olimpiyatlarına katılmış olan Selçuk Ateşkan, Oytun Eskiyeentürk, Tolga Etgü, Barış Fidan, Özcan Öztürk ve Çetin Ürtiş tarafından yürütülen problem seminerleri, TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No: 221, Kavaklıdere, Ankara (Telefon: (312) 468 53 00 / 2201) adresinde yapılmaktadır. Mektupla katılmak isteyenler aynı adrese başvurabilirler.

Problem Semineri 95/1, 18 Mart 1995

1. İki kişilik bir oyunda başlangıçta $n \geq 2$

kibritten oluşan bir öbek bulunmaktadır. Birinci oyuncu bu öbeği boş olmayan iki öbeğe ayırır. İkinci oyuncu, bu iki öbektan birini seçer ve bu öbeği (mümkünse) yine boş olmayan iki öbeğe ayırır. Sıra yeniden kendisine gelen birinci oyuncu, aynı seçeneklerle karşı karşıyadır. Oyun, oyunculardan biri tek kibritten oluşan bir öbeği seçene kadar devam eder. Oyunu tek kibritlik öbeği seçen oyuncu kazanır. Bu oyunu, n 'nin hangi değerleri için mutlaka birinci, hangi değerleri içinse mutlaka ikinci oyuncunun kazanabileceğini bulunuz.

2. Tek kişilik bir oyuna sırayla n_1 , n_2 ve n_3 kibritten oluşan üç öbek kibritle başlanır. Oyuncu, her seferinde kibrit öbeklerinden ikisini seçerek (mümkünse) birinden diğerine, ikinci öbekteki kibrit sayısını eskisinin iki katına çıkartacak kadar kibrit aktarır. Hangi (n_1, n_2, n_3) dağılımları için, yukarıdaki işlemi sonlu sayıda yineleyerek, kibritleri iki öbekte toplamının mümkün olduğunu saptayınız.

3. İki kişi tarafından oynanan bir oyuna, sırayla $n_1, \dots, n_p$ kibritten oluşan p öbek kibritle başlanır. Birinci oyuncu bu p öbektan birini seçer ve bu öbektan en az bir olmak üzere istediği sayıda kibriti alarak oyundan çıkartır. İkinci oyuncu oyundan henüz çıkartılmamış kibritlerle aynı işlemi yapar. Sıra tekrar birinci oyuncuya gelir ve oyun kibritlerin hepsi oyun-

dan çıkartılana kadar sürer. Son kibrit grubunu oyundan çıkartan oyuncu oyunu kazanır. Her $p \geq 1$ tamsayısı için, oyunu mutlaka birinci (ikinci) oyuncunun kazanmasını mümkün kılan tüm $(n_1, \dots, n_p)$ dağılımlarını bulunuz.

4. Yine iki kişilik bir oyunda, başlangıçta sırayla n_1 ve n_2 kibritten oluşan iki öbek bulunmaktadır. Oyuncular sırayla bu öbeklerden kibrit alarak oyundan çıkartırlar. Sırası gelen oyuncu, ya öbeklerden birini seçerek bu öbekten en az bir olmak üzere istediği sayıda kibriti alır, ya da her iki öbekten de eşit ve pozitif sayıda kibriti oyundan çıkartır. Son kibriti oyundan çıkartan oyuncu oyunu kazanır. $t = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ olması durumunda $(n_1, n_2) = ([kt], [kt^2])$ ya da $(n_1, n_2) = ([kt^2], [kt])$ olmasını sağlayacak bir k tamsayısının bulunması durumunda, oyuna ikinci sırada başlayan oyuncunun oyunu mutlaka kazanabileceğini, bunun dışındaki tüm durumlarda ise, oyuna ilk sırada başlayan oyuncunun oyunu mutlaka kazanmasının mümkün olduğunu kanıtlayınız.

Problem Semineri 95/2, 22 Mart 1995

1. Verilen üç çemberi dik kesen bir çember çiziniz.
2. Kenarları verilen üç noktadan geçen ve köşeleri verilen bir çember üzerinde bulunan bir üçgen çiziniz.
3. Eşit kenarları verilen bir çemberin içinde verilmiş iki noktadan geçen ve köşeleri çemberin üzerinde bulunan bir ikizkenar üçgen çiziniz.
4. Verilen bir üçgenin içine, her biri üçgenin iki kenarına ve diğer iki çembere teğet üç çember çiziniz.

Problem Semineri 95/3, 5 Nisan 1995

1. 20 lirası olan bir kumarbazın 40 liraya ihtiyacı vardır. Rulette tek-çift oynamaya karar verir. Buna göre, her seferinde ya teklere ya da çiftlere para yatıracak, sonucun para yatırdığı seçenekle çakışması durumunda yatırdığı paranın iki mislini geri alacak, aksi halde ise yatırdığı parayı yitirecektir. Ruletin her dönüşünde çift gelme olasılığı $18/37$ 'dir. Kumarbaz, şu iki yoldan birini izlemeyi düşünmektedir: Birincisi, parasının tamamını tek seferde çiftlere yatırmaktır; ikincisi ise her seferinde çiftlere bir lira yatırıp, bu şekilde ya toplam parasını 40 liraya çıkana ya da tüm parasını kaybedene kadar devam etmektir. Bu yollardan hangisini izlediği

takdirde kumarbazın amacına ulaşma olasılığı daha yüksektir?

2. A ve B tarafından oynanan bir oyunda, $0 < p < 1/2$ olmak üzere, A 'nın kazanma olasılığı p , B 'ninki ise $1 - p$ 'dir. Bir parti, çift sayıda oyundan oluşmaktadır. Oyuncular kazandıkları her oyun için bir puan almakta, toplam puanı daha yüksek olan partiyi kazanmaktadır. Parti kaç oyundan oluşursa A 'nın partiyi kazanma olasılığı en yüksek olur?

3. Hiç parası olmayan bir kumarbazın 200 liraya ihtiyacı vardır. Kendisine bir şans tanımak isteyen kumarhane sahibi aşağıdaki şekilde 100 oyun oynamasına izin verir. Kumarbaz, her seferinde $N \geq 1$ tamsayısı seçerek, $2/(N + 1)$ olasılıkla N lira kazanıp, $(N - 1)/(N + 1)$ olasılıkla 1 lira kaybedecektir. Ancak 1'den büyük bir N seçebilmesi için en az 1 lirasının bulunması gerekmektedir. Bu kumarbaz nasıl bir yol izlerse amacına ulaşma olasılığı en yüksek olur?

4. Olasılık hesabına meraklı bir sultan, vezirini ödüllendirmek ister. 100 adet keseye, farklı herhangi ikisine değişik sayıda olmak üzere altın koydurur. Vezir, keseleri açarak içlerinde kaç altın olduğuna bakar. Her açtığı kesede iki seçeneği vardır. Ya bu keseyi seçer ya da daha önce açmadığı keselerden birine geçer. Sonuçta seçtiği kese, 100 keseden içinde en çok altının bulunduğu kese ise, vezir bu altınların hepsini kazanır. Aksi takdirde, ödüle ilişkin tüm şansını kaybeder. Vezir nasıl bir yol izlerse ödülü kazanma olasılığı en yüksek olur?

Problem Semineri 95/4, 19 Nisan 1995

1. İki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz.
2. İki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm tamsayıları bulunuz.
3. Üç tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm tamsayıları bulunuz.
4. Dört tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm tamsayıları bulunuz.

Çözümler

Bu sayımızda 95/1 seminerinde yer alan problemlerin tam çözümlerini veriyoruz. Haziran 1995 sayımızda 95/2, 95/3 ve 95/4 seminerlerinin çözümleri verilecektir. Mayıs ve Haziran aylarında yapılacak olan 95/5, 95/6 ve 95/7 seminerlerinin problemleri *Bilim ve Teknik* dergisinde yayımlanacaktır.

Problem Semineri 95/1

Yönetim: Oytun Eskiyeentürk, Çetin Ürtiş

1. $n = 2$ ya da $n = 3$ durumunda, birinci oyuncu verilen kibrit öbeğini nasıl ikiye ayırırsa ayırsın, bu iki öbekten en az biri 1 kibritten oluşur ve ikinci oyuncu bu öbeği seçerek oyunu kazanır. $n = 4$, $n = 5$ ve $n = 6$ durumlarında ise, birinci oyuncu verilen öbeği sırayla 2-2, 2-3 ve 3-3 şeklinde ayırırsa, ikinci oyuncu kendini, oyuna 2 ya da 3 kibritlik bir öbikle başlayan bir "birinci oyuncu" konumunda bulur ve dolayısıyla oyunu kaybeder. Oyunu mutlaka birinci oyuncunun kazanmasını mümkün kılan n tamsayılarının kümesini N_1 , ikinci oyuncunun kazanmasını sağlayanları ise N_2 ile gösterirsek, $2, 3 \in N_2$ ve $4, 5, 6 \in N_1$ olur. Şimdi $N_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2, n \equiv 0, 1 \text{ ya da } 4 \pmod{5}\}$ ve $N_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2, n \equiv 2 \text{ ya da } 3 \pmod{5}\}$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiamızı tümevarımla kanıtlayacağız.

Bir $n \geq 6$ tamsayısının şu koşulu sağladığı varsayalım: Her $2 \leq k \leq n$ tamsayısı için, $k \equiv 0, 1 \text{ ya da } 4 \pmod{5}$ ise, $k \in N_1$; $k \equiv 2 \text{ ya da } 3 \pmod{5}$ ise, $k \in N_2$ olsun. Şimdi $n+1 \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ durumlarını ayrı ayrı ele alacağız.

Önce $n+1 \equiv 0 \pmod{5}$ olduğunu kabul edelim. Birinci oyuncu verilen öbeği 3 ve $n-2$ kibritten oluşan iki öbeğe ayırırsa, $n-2 \equiv 2 \pmod{5}$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre $3, n-2 \in N_2$ olur. İkinci oyuncu, bu iki öbekten hangisini seçerse seçsin, bu öbekte oyuna başlayan "birinci oyuncu" konumuna gireceğinden, oyunu kaybeder. Dolayısıyla bu durumda $n+1 \in N_1$ olur.

$n+1 \equiv 1 \pmod{5}$ durumunda da birinci oyuncu, öbeği 3 ve $n-2$ kibritlik iki öbeğe ayırarak, $n-2 \equiv 3 \pmod{5}$ olduğundan, benzer biçimde oyunu kazanmayı garantiler. $n+1 \equiv 4 \pmod{5}$ durumunda ise, $n-1 \equiv 2 \pmod{5}$ olur ve dolayısıyla birinci oyuncu, bu kez verilen öbeği 2 ve $n-1$ biçiminde ayırarak, ikinci oyuncu ne yaparsa yapsın oyunu kazanabilir. Sonuç olarak, $n+1 \equiv 0, 1 \text{ ya da } 4 \pmod{5}$ ise, tümevarım varsayımı dolayısıyla $n+1 \in N_1$ olur.

Şimdi de $n+1 \equiv 2 \pmod{5}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $n+1 \in N_2$ olduğunu göstermek için, $1 < l < n$ koşulunu sağlayan her l tamsayısı için, ya $l \in N_1$ ya da $n+1-l \in N_1$ kanıtlamamız yeterli olacaktır. $l \equiv 0, 1 \text{ ya da } 4 \pmod{5}$ ise bu koşul sağlanır. Öte yandan, $l \equiv 2 \pmod{5}$ ise, $n+1-l \equiv 0 \pmod{5}$ ve $l \equiv 3$

$\pmod{5}$ ise de $n+1-l \equiv 4 \pmod{5}$ olacağından, istenen koşul yine sağlanmış olur. Yani $n+1 \in N_2$ 'dir. Benzer biçimde $n+1 \equiv 3 \pmod{5}$ ise, her $1 < l < n$ tamsayısı için, $l \equiv 2 \pmod{5}$ durumunda $n+1-l \equiv 1 \pmod{5}$ ve $l \equiv 3 \pmod{5}$ durumunda ise $n+1-l \equiv 0 \pmod{5}$ olduğundan, yine $n+1 \in N_2$ sonucu elde edilir.

Özetle, başlangıçtaki kibrit sayısı $n \equiv 0, 1 \text{ ya da } 4 \pmod{5}$ ise oyunu mutlaka birinci oyuncu, $n \equiv 2 \text{ ya da } 3 \pmod{5}$ durumunda ise mutlaka ikinci oyuncu kazanır.

2. Genelliği yitirmeden $0 < n_1 \leq n_2 \leq n_3$ olduğunu kabul edelim. Bölme algoritmasına göre, $n_2 = n_1q + r$ ve $0 \leq r < n_1$ olacak şekilde q ve r tamsayıları bulunur. Şimdi q sayısını iki tabanına göre yazalım. $q \geq 1$ olduğundan, $k \geq 0$, $m_0, m_1, \dots, m_k \in \{0, 1\}$ ve $m_k = 1$ olmak üzere, $q = m_0 + 2m_1 + \dots + 2^k m_k$ olur. Şimdi sırayla $i = 0, 1, \dots, k$ için aşağıdaki aktarma işlemlerini yapalım: i 'yinci aktarmada, $m_i = 1$ ise ikinci öbekten birinciye, $m_i = 0$ ise üçüncü öbekten yine birinciye $2^i n_1$ tane kibrit aktaralım. Bu şekilde her seferinde birinci öbekteki kibrit sayısını iki katına çıkacağı gibi, ikinci öbekteki kibrit sayısının bu işlemlerin gerçekleştirilmesine yeteceği açıktır. Öte yandan, bu işlemler sırasında üçüncü öbekten birinci öbeğe en fazla $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1})n_1$ kibrit aktarılacağı ve $2^k n_1 \leq n_2 \leq n_3$ olduğu için, üçüncü öbekte de yeterli sayıda kibrit vardır.

$r = 0$ durumunda, yukarıdaki işlem dizisi sonucunda bütün kibritler iki öbekte toplanmış olur. Diğer taraftan $r > 0$ ise, aynı zamanda $r < n_1 \leq n_2 \leq n_3$ olduğundan, en az sayıda kibrit içeren öbek ya da öbeklerdeki kibrit sayısı küçültülmüş olur. Dolayısıyla her seferinde öbekleri yeniden büyüklük sırasına göre dizerek ve yukarıdaki işlem dizisini sonlu sayıda uygulayarak bir öbeği ortadan kaldırabiliriz. Diğer bir deyişle, tüm (n_1, n_2, n_3) negatif olmayan tamsayı sıralı üçlülere için, kibritleri istenilen biçimde en fazla iki öbekte toplayabiliriz.

3. $n_1, n_2, \dots, n_p$ sayılarından en büyüğünün iki tabanına göre yazılımda kullanılan rakam sayısı $l+1$ olsun. Bu sayıları, gerekirse başlangıç rakamının sıfır olmasına izin vermek suretiyle, $l+1$ rakamlı olarak iki tabanına göre yazalım. Bu durumda her $k \in \{1, \dots, p\}$ için $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \dots, \alpha_l^k \in \{0, 1\}$ ve en az bir $j \in \{1, \dots, p\}$ için $\alpha_j^j = 1$ olmak üzere, $n_k = \alpha_l^k 2^l + \alpha_{l-1}^k 2^{l-1} + \dots + \alpha_1^k 2 + \alpha_0^k$ olur. Her $i \in \{0, 1, \dots, l\}$ için de $a_i = \sum_{k=1}^p \alpha_i^k$ olsun. Şimdi N_1 ile, $a_0, a_1, \dots, a_l$ sayılarından en az birinin tek olmasına yol açan

tüm $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ dağılımlarının kümesini gösterelim. N_1 kümesinin, oyunu mutlaka birinci oyuncunun kazanmasını mümkün kılan tüm $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ dağılımlarının kümesi olduğunu, N_1 kümesine ait olmayan herhangi bir başlangıç dağılımının ise oyunu mutlaka ikinci oyuncunun kazanmasını mümkün kıldığını iddia ediyoruz.

Şimdi N_1 kümesine ait bir $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ dağılımını ele alalım. Bu durumda a_j tek sayı ve her $i \in \{j+1, \dots, l\}$ için, a_i çift sayı olacak şekilde bir $j \in \{0, 1, \dots, l\}$ bulunur. O zaman da $\alpha_i^t = 1$ olacak şekilde en az bir $t \in \{1, \dots, p\}$ vardır. Birinci oyuncu t 'yinci öbekten pozitif ve uygun sayıda kibrit uzaklaştırarak bu öbekte kalan kibrit sayısını, $\bar{\alpha}_{j-1}^t, \dots, \bar{\alpha}_1^t, \bar{\alpha}_0^t$ sayıları $\{0, 1\}$ kümesinden istenildiği gibi seçilmek üzere

$$\bar{n}_t = \alpha_1^t 2^l + \dots + \alpha_{j+1}^t 2^{j+1} + 0 \cdot 2^j + \bar{\alpha}_{j-1}^t 2^{j-1} + \dots + \bar{\alpha}_1^t 2 + \bar{\alpha}_0^t$$

sayısına indirebilir. Bunun sonucunda ortaya çıkan $(n_1, \dots, n_{t-1}, \bar{n}_t, n_{t+1}, \dots, n_p)$ dağılımına karşılık gelen a_i toplamalarını $\bar{a}_i$ ($i = 0, 1, \dots, l$) ile gösterirsek, $\bar{a}_l = a_l, \dots, \bar{a}_{j+1} = a_{j+1}, \bar{a}_j = a_j - 1$ çift sayılar olur. Ayrıca, her $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ için, a_i çift ise $\bar{\alpha}_i^t = \alpha_i^t$, a_i nin tek olduğu durumda da α_i^t 'yi $\{\bar{\alpha}_i^t, \alpha_i^t\} = \{0, 1\}$ olacak şekilde seçmek suretiyle, birinci oyuncu $\bar{a}_{j-1}, \dots, \bar{a}_1, \bar{a}_0$ toplamalarının da çift sayılar haline gelmesini sağlayabilir. Sonuçta $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \dots = \bar{a}_l = 0$ haline gelmiş olursa, birinci oyuncu bu hamlede son kibrit öbeğini ortadan kaldırmış olacağı için oyunu kazanır. Aksi halde, ikinci oyuncu $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ toplamalarının çift sayılar olduğu bir dağılımla karşı karşıya kalır. Bu durumda ikinci oyuncu, öbeklerin hangisinden ve pozitif olmak üzere hangi sayıda kibrit uzaklaştırırsa uzaklaştırsın, yeni dağılımın yol açtığı toplamalardan en az biri mutlaka tek sayı haline gelecektir. Dolayısıyla, son kibrit öbeği ortadan kaldırılmamış olacağı gibi, birinci oyuncu başlangıçtaki gibi bir yol izleyerek, bu toplamaların hepsini yine çift sayı haline getirebilir. Sonuçta kibritlerin hepsi tükeneneceği için, a_i toplamalarının hepsinin sıfıra eşit olduğu, yani kibrit dağılımının $(0, 0, \dots, 0)$ haline geldiği bir duruma ulaşılabilecektir. Ancak 0 çift sayı olduğundan, bu dağılıma ulaşıldığında sıra ikinci oyuncuya gelmiş, yani son kibrit grubunu birinci oyuncu çıkarmış olacaktır. Dolayısıyla oyunu birinci oyuncu kazanacaktır.

Şimdi de başlangıçtaki $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ dağılımının N_1 kümesine ait olmadığı duruma bakalım. Bu durumda $a_0, a_1, \dots, a_p$ toplam-

larının hepsi çift olur. Birinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın, ikinci oyuncuyu bu toplamalardan en az birisinin tek olduğu bir dağılımla karşı karşıya bırakır. Dolayısıyla, ikinci oyuncu kendisini N_1 kümesine ait bir dağılımla oyuna başlayan "birinci oyuncu" konumunda bulur ve yukarıdaki birinci oyuncu gibi davranarak oyunu kazanır.

4. Oyunun herhangi bir anındaki durum, x birinci, y ise ikinci öbekte kalan kibrit sayısını göstermek üzere (x, y) sıralı ikilisiyle gösterilebilir. Dolayısıyla, düzlemde koordinatları negatif olmayan tamsayılar olan noktaların kümesini $\mathbb{Z}_+^2$ ile gösterirsek, oyuncuların oyun sırasında karşılaşabilecekleri tüm durumlar, $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait noktalarla temsil edilebilir. (x, y) durumuyla karşılaşan bir oyuncu, karşı taraf ne yaparsa yapsın oyunu mutlaka kazanmasını sağlayacak bir yol izleyebiliyorsa, (x, y) 'ye *kazanan bir durum* diyeceğiz. Bir oyuncu (x, y) durumundan hareketle ne yaparsa yapsın, hasmı oyunu mutlaka kendisine kazandıracak bir yol izleyebiliyorsa, o zaman da (x, y) 'ye *kaybeden bir durum* diyeceğiz. Buna göre $(0, 0)$ kaybeden bir durumdur, çünkü bir oyuncunun $(0, 0)$ durumuyla karşılaşması, karşı tarafın son kibriti oyundan çıkartarak oyunu kazanmış olması demektir. $(0, 0)$ 'ın kaybeden bir durum olması ise, kendilerinden hareketle tek hamlede $(0, 0)$ 'a ulaşmanın mümkün olduğu tüm durumların kazanan durum olmasını gerektirir. Yani $x = 0$, $y = 0$ ve $x = y$ doğruları üstündeki $(0, 0)$ dışında $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait bütün noktalar kazanan durumları temsil eder.

Şimdi (a, b) herhangi bir kaybeden durum olsun. O zaman $\{(a, y) : y > b\} \cup \{(x, b) : x > a\} \cup \{(x, y) : y = x + (b - a), x > a\}$ kümesindeki $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait her noktadan (a, b) 'ye tek hamlede ulaşılabileneği için bu noktaların tümü kazanan durumları temsil eder. Diğer taraftan, $\{(a, y) : y < b\} \cup \{(x, b) : x < a\} \cup \{(x, y) : y = x + (b - a), x < a\}$ kümesindeki $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait her noktaya (a, b) 'den tek hamlede ulaşılabileneği için, bu noktaların da tümü kazanan durumları temsil eder. Başka bir deyişle, (a, y) kaybeden bir durumsa, $x = a$, $y = b$ ve $y = x + (b - a)$ doğruları üstündeki $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait ve (a, b) 'den farklı tüm noktalar kazanan durumları temsil eder. Öte yandan simetri nedeniyle, (a, b) 'nin kaybeden bir durum olması, (b, a) 'nin de kaybeden bir durum olmasını ve dolayısıyla $x = b$, $y = a$ ve $y = x + (a - b)$ doğruları üstündeki $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait (b, a) dışındaki bütün noktaların da kazanan durumları temsil ediyor olmasını gerek-

tirir. Şimdi tümevarımla kaybeden durumların kümesini karakterize edeceğiz. $a_0 = b_0 = 0$ diyelim. (a_0, b_0) kaybeden bir durum olduğu gibi, $b_0 = a_0 + 0$ 'dır ve x koordinatı sıfırdan küçük ya da eşit olan bütün kaybeden durumlar $\{(a_0, b_0)\}$ kümesine aittir. Şimdi pozitif bir n tamsayısı için, kaybeden durumlardan oluşan

$$\{(a_0, b_0), (a_1, b_1), (b_1, a_1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}), (b_{n-1}, a_{n-1})\}$$

kümesinin x koordinatı a_{n-1} 'den küçük ya da eşit olan bütün kaybeden durumları içerdiğini ve her $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için $b_k = a_k + k$ olduğunu kabul edelim. a_n sayısı, $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}\}$ kümesine ait olmayan en küçük pozitif tamsayı ve $b_n = a_n + n$ olsun. Şimdi (a_n, b_n) 'nin kaybeden bir durum olduğunu göstereceğiz. Bunu yaparsak, x koordinatı a_n olan başka kaybeden durum olmaması ve tümevarım varsayımı nedeniyle,

$$\{(a_0, b_0), (a_1, b_1), (b_1, a_1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}), (b_{n-1}, a_{n-1}), (a_n, b_n), (b_n, a_n)\}$$

kümesi, x koordinatı a_n 'den küçük ya da eşit olan tüm kaybeden durumları içerecek ve dolayısıyla kaybeden durumlar kümesi karakterize edilmiş olacaktır.

Önce bir $0 \leq x < a_n$ tamsayısı için (x, b_n) noktasının kazanan bir durumu temsil etmediğini farzedelim. O zaman $x = a_k$ ya da $x = b_k$ olacak şekilde bir $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ bulunur. Hem (a_k, b_k) hem de (b_k, a_k) kaybeden durumlar olduğundan, $\{(a_y, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : y \neq b_1\} \cup \{(b_k, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : y \neq a_k\}$ kümesindeki bütün noktalar kazanan durumları temsil eder. Dolayısıyla, ya (a_k, b_n) kaybeden bir durum ve $b_n = b_k$, ya da (b_k, b_n) kaybeden bir durum ve $b_n = a_k$ olur. $a_k < a_n$ ve $k < n$ olduğu için, birinci durumda $b_n = b_k = a_k + k < a_n + n = b_n$ çelişmesi, ikinci durumda ise $b_n = a_k < a_n < b_n$ çelişmesi elde edilir. Dolayısıyla $\{(x, b_n) \in \mathbb{Z}_+^2 : x < a_n\}$ kümesindeki bütün noktalar kazanan durumları temsil eder.

Şimdi de (a_n, y) kazanan bir durum olmayacak şekilde bir $0 \leq b_n$ tamsayısının bulunduğunu farzedelim. $y < a_n$ ise, $y = a_k$ ya da $y = b_k$ olacak şekilde bir $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ bulunur. (a_k, b_k) ve (b_k, a_k) kaybeden durumlar olduğundan, ya $(a_n, a_k) = (b_k, a_k)$ ya da $(a_n, b_k) = (a_k, b_k)$ olur. Oysa $a_n \neq b_k$ ve $a_n \neq a_k$ olduğu için, bu durumda istenen çelişme elde edilir. Şimdi de $y \geq a_n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $b_n = a_n + n$ ve dolayısıyla

$l = y - a_n < n$ olur. Ancak (a_l, b_l) kaybeden bir durumdur ve $y = x + l$ doğrusu üstünde $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait (a_l, b_l) dışındaki bütün noktalar kazanan durumları temsil eder. Bu yüzden $(a_n, y) = (a_l, b_l)$ olur ki, bu da $a_n \neq a_l$ ile çelişir. Dolayısıyla $\{(a_n, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : y < b_n\}$ kümesindeki bütün noktalar da kazanan durumları temsil eder. Benzer biçimde, $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : y = x = n, x < a_n\}$ kümesinin de bütünüyle kazanan durumlardan oluştuğu görülür. Sonuç olarak, (a_n, b_n) 'den hareketle tek hamlede ulaşılabilecek tüm durumlar kazanan durumlar olduğu için, (a_n, b_n) kaybeden bir durumdur. Çözümü tamamlamak için önce aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız: α ve β , $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ koşulunu sağlayan pozitif irrasyonel sayılar olsun. O zaman her pozitif tamsayı, $[n\alpha]$ ve $[n\beta]$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sayılarından tam olarak birine eşittir. $S = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{n\beta : n \in \mathbb{Z}^+\}$ diyelim. S 'ye ait tüm sayılar birden büyük irrasyonel sayılardır. N herhangi bir pozitif tamsayı olsun. S 'ye ait N 'den küçük elemanlar, $\alpha, 2\alpha, \dots, [\frac{N}{\alpha}]\alpha, \beta, 2\beta, \dots, [\frac{N}{\beta}]\beta$ 'dir. Bunların sayısı ise, $[\frac{N}{\alpha}] + [\frac{N}{\beta}]$ 'dir. α ve β irrasyonel oldukları için $\frac{N}{\alpha} - 1 < [\frac{N}{\alpha}] < \frac{N}{\alpha}$ ve $\frac{N}{\beta} - 1 < [\frac{N}{\beta}] < \frac{N}{\beta}$ olur. Buradan da $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olduğu için, $N - 2 < [\frac{N}{\alpha}] + [\frac{N}{\beta}] < N$ elde edilir. Dolayısıyla $[\frac{N}{\alpha}] + [\frac{N}{\beta}] = N - 1$ 'dir. Her N pozitif tamsayısı için S 'ye ait N 'den küçük eleman sayısının $N - 1$ olması, her k pozitif tamsayısı için $(k, k+1)$ aralığında S 'ye ait tam olarak bir elemanın bulunduğu anlamına gelir. Bu da, kanıtlamaya çalıştığımız önermeye eşdeğerdir.

Şimdi $t = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ olmak üzere, $\alpha = t$ ve $\beta = t^2$ alalım. O zaman α ve β irrasyonel sayılar olur. Ayrıca $t^2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = t + 1$ ve dolayısıyla $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 1$ 'dir. Yukarıdaki teoreme göre her pozitif tamsayı, $[nt]$ ve $[nt^2]$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sayılarından tam olarak birine eşittir. Dolayısıyla her n pozitif tamsayısı için, $\{0, [t], [t^2], \dots, [(n-1)t^2]\}$ kümesine ait olmayan en küçük pozitif tamsayı $[nt]$ 'dir. Ayrıca $[nt^2] = [n(t+1)] = [nt] + n$ 'dir. Bu iki özellik ise (a_n, b_n) dizisini tanımlayan özellikler olduğundan, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $a_n = [nt]$ ve $b_n = [nt^2]$ olur. $\mathbb{Z}_+^2$ 'ya ait her noktanın ya kaybeden ya da kazanan bir durumu temsil ettiği kolaylıkla görülür. Başlangıçtaki kibrit dağılımı kazanan bir durumu temsil ediyorsa birinci, kaybeden bir durumu temsil ediyorsa, yani $([nt], [nt^2])$ ya da $([nt^2], [nt])$ biçimindeyse, ikinci oyuncu oyunu kazanır.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Doç. Dr. Ali Doğanaksoy, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Eylül 1995 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihî ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdhan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 250.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1995 yılı abone ücreti 300.000.-TL., tane satış fiyatı ise 75.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

