

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Hüseyin Demir : Hayatı ve Eserleri

Cem Tezer

Kolay Yoldan Logaritma

Yusuf Avcı, Kamil Alınacı, Nurettin Ergun

**Ayırmak ya da Ayırmamak -
İşte Bütün Sorun**

Doğan Dönmez

Mükemmel Sayılar Üzerine

Sedat İlhan

**Fermat ve Euler Teoremleri Üzerine
Uygulamalar**

Emre Alkan

**36. Uluslararası Matematik Olimpiyadı
Takım Seçme Sınavı**

Ali Doğanaksoy

Problemler ve Çözümleri

Problem Seminerleri

**HÜSEYİN DEMİR'i
YİTİRDİK**

HAZİRAN 1995 / CİLT : 5 / SAYI : 3

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

**Adına
Başkan**
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
ALI DOĞANAKSOY, ALPARSLAN ERTUĞ,
TURGAY KAPTANOĞLU,
SELMA ATABEY

DİZGİ
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI
*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1995)

Yurtiçi yıllık 300.000.-TL., Yurtdışı yıllık 600.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone a dresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K. 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

ISSN : 1300 - 624X

İÇİNDEKİLER

Hüseyin Demir : Hayatı ve Eserleri

Cem Tezer

1

Kolay Yoldan Logaritma

Yusuf Avcı, Kamil Alınacı, Nurettin Ergun 10

Ayırmak ya da Ayırmamak -
İşte Bütün Sorun

Doğan Dönmez

13

Mükemmel Sayılar Üzerine

Sedat İlhan

15

Fermat ve Euler Teoremleri Üzerine
Uygulamalar

Emre Alkan

17

36. Uluslararası Matematik Olimpiyadı
Takım Seçme Sınavı

Ali Doğanaksoy

22

Problemler ve Çözümleri

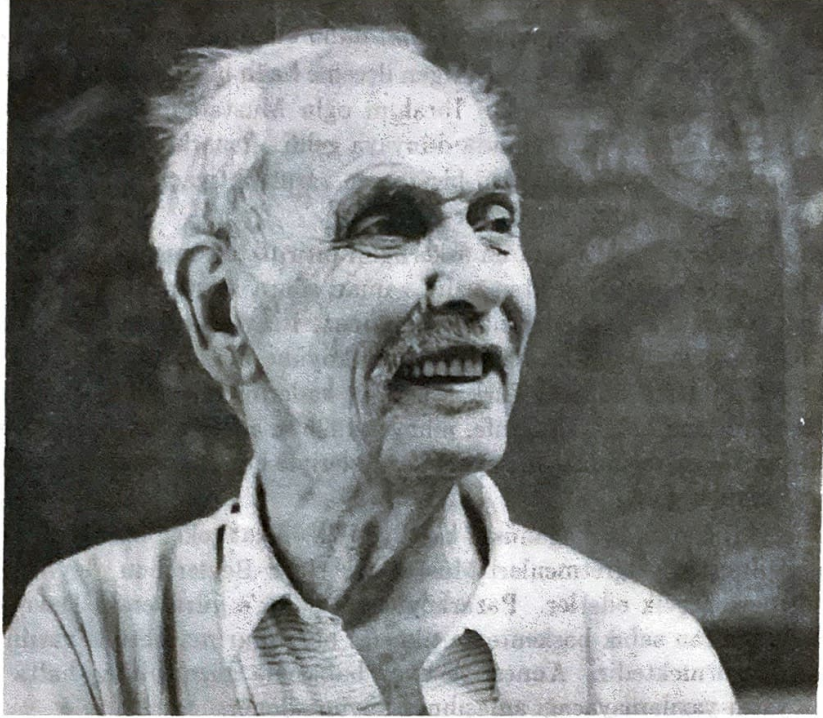
23

Problem Seminerleri

28

HÜSEYİN DEMİR: HAYATI VE ESERLERİ

Cem Tezer *



Matematik Dünyası okuyucularının yazı ve problemlerini zevkle takip ettiği büyük geometri ustası Hüseyin Demir, birkaç yıldır giriftleşerek seyreden kalp ve damar rahatsızlıkları neticesinde 4 Nisan 1995 Salı günü saat 15:00 civarında vefat etti.

Matematiğin ileri usullere hemen hemen hiç müracaat edilmeksizin yürütülen, bu yüzden de bilhassa akademik “silsile-i meratip” dışındaki matematikçilere cazip gelen bir sahası vardır ki bu mecradaki **orijinal** araştırmalar 100 yıla yakın bir zamandır *American Mathematical Monthly*, *Mathesis*, *Mathematics Magazine*, *Delta*, *Elemente der Mathematik*, *Cruz Mathematicorum*, *Mathematical Gazette* gibi son derece yüksek vasıflı dergilerde neşredilmektedir. T. Motzkin, J. F. Rigby, P. Erdős, T. Otsuki gibi esasen “ileri” matematikle uğraşmakla beraber bu yönde de kalem denemeleri yapanlar olduğu gibi, mesaisinin tamamını bu sahaya hasrederek devleşen R. Goormaghtigh, V. Thébault, R. Deaux, J. Dou, L. Carlitz, L. Bankoff gibi bütün matematik camiasının alâka ve hayranlığını toplamış isimler de vardır. Hüseyin Demir 1943’ten beri yukarıda zikredilen dergilerden ilk dördünde ve ayrıca bir “ileri” matematik dergisi olan *Geometriae Dedicata*’da basılan 100’den fazla problemi ve 7 zarif makalesiyle bu *genrenin* dünya çapında simalarından birisi olmuştur.

Türkiye’de ilk iki cumhuriyet nesline *Talebe Mecmuası* ve *Fizik-Kimya-Matematik* dergilerindeki yazılarıyla kendini tanıtan Hüseyin Demir, ömrünün son yıllarında *Matematik Dünyası*’na yaptığı katkılarla bu derginin hayat kaynağını teşkil etmiştir.

Tercüme ve telif ettiği eserler bilhassa geometri sahasında Türk dilinde yazılmış en seçkin kaynaklar olmak vasfını hâlâ muhafaza etmektedirler. Hüseyin Demir’in kaleminden çıkmış metinler, Türkçe’nin matematik dili olarak ne kadar dakik ve müessir olabileceğinin en güzel delilleridir.

Sessiz ve içine kapanık tabiatı onu asla benmerkezliliğe sürüklememiştir. “Sevmek yetmez, sevdirmek gerekir! Bilmek yetmez, öğretmek gerekir!” sözünü kendine rehber edinmiş, hayatına şekil

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

veren tecessüsünü, matematik faaliyetini ilimden ziyade sanata yakın kılan bedii hassasiyetini daima aşılama, yaymaya çalışmıştır.

Bana onunla hayatının son yıllarında meslektaşı, öğrencisi ve mesai arkadaşı olarak yakın münasebet içinde bulunmak, beraberce problemler tanzim etmek, makaleler yazmak zevki ve şerefi nasib oldu. Bu zaman zarfında hayatını incelemeye ve bilhassa yurt dışında basılmış eserlerinin mümkün olduğu kadar eksiksiz bir derlemesini vücuda getirmeye çalıştım. ¹ Merhumun hayat hikâyesini, kişiliği ve eserleri hakkındaki müşahedelerimi, yurt dışında basılmış eserlerinin bildiğim kadarıyla eksiksiz bir sıralamasıyla beraber *Matematik Dünyası* okuyucularına sunarak, ömrünü ilim adamlığına has faziletlerin seçkin bir mümessili olarak tevazu ve mahfiyyet içinde geçirmiş bu büyük insanın hatırasına küçük bir hizmette bulunabildiğimi ümid ederim.

Hüseyin Demir, günümüzde Bolu'nun Mengen ilçesine bağlı bir bucak merkezi olan Pazarköy'de annesi Şerife ve babası Demircioğulları'ndan İbrahim oğlu Mustafa'nın, ikincisi küçük yaşta ölen dört çocuğundan üçüncüsü olarak 1916 yılında dünyaya geldi. Pazarköy o günlerde, 70 küsur haneli nüfusu hanebaşına birkaç dönüm toprağı ekip biçerek en zaruri ihtiyaçlarını karşılayan ve erkeklerini "gurbetçi" çıkararak ancak geçinebilen fakir bir köydür. ²

1882 doğumlu Demircioğlu Mustafa da askerliğini bitirdikten sonra bir süre İstanbul'da aşçılık yapar. Köyüne dönüp, evlenip yerleştikten uzun zaman sonra tekrar silah altına alınarak 1917'de Pazarköy'den ayrılır; dönmez, kendisinden haber alınamaz. Bu yaşlı askerin bir muharebede mi şehit düştüğü, bakımsızlıktan, hastalıktan mı öldüğü, yoksa köyüne birkaç saatlik yolda eşkiyaya, azınlık çetelerine kelle vererek binlerce bahtsız Türk askerinin kaderini mi paylaştığı bilinmiyor. Yıllarca kocasının cepheden dönmesini bekleyen Şerife, nihayet 1925'te adetlere uyularak Mustafa'nın kardeşi Mehmet'le evlendirilir; dokuz yaşındaki Hüseyin'i kardeşleriyle beraber akrabalara emanet ederek yeni kocasıyla birlikte İstanbul'a gider.

Bu arada Hüseyin, ilkokulda olağanüstü kabiliyetiyle dikkat çeken bir öğrencidir. İkinci sınıftan dördüncü sınıfa geçirilmiştir. Öğretmenleri Mustafa ve Nafiz Beyler onu "leyli meccani" yazılmak üzere İstanbul'a gitmeye teşvik ederler. Pazarköy'den Devrek'e yürüyerek, Devrek'ten Zonguldağa katır sırtında, Zonguldak'tan sabık başkente de tıknefes bir vapur marifetiyle varılır. Hüseyin denizi, treni, vapuru ilk defa görmektedir. Annesi ve üvey babasıyla güzel birkaç hafta geçirir. İlkokulu bitirmeden parasız yatılı yazılamayacağı anlaşıncaya köyüne döner.

Köyünde, gelecek vaadedenden bir çocuk olarak sevecen bir dikkatin merkezidir. Sükunet ve saadetini zehirleyen tek acı anne hasretidir. Pazar kurulan her gün pazar yerine inerek annesinden haber bekler. Nihayet elinde iki çocukla köye dönen annesini gene pazar yerinde gözyaşlarıyla karşıladığı anı ömrünün sonuna kadar bütün canlılığıyla hatırlamıştır.

İlkokulu bitirince tekrar İstanbul'a gönderilir. Gerede'ye kadar at sırtında, Gerede'den Adapazarı'na bir kamyonunun kasasında, Adapazarı'ndan İstanbul'a da trenle ulaşır. Hüseyin, hâlâ İstanbul'da çalışan üvey babasının yanında kalır; o sırada "Harf İnkılabı" ile ortaya atılan yeni Türk Alfabeti'ni birkaç günde öğrenir. Darüşşafaka giriş imtihanlarında yeni harfleri kullanır. İmtihani ve müteakip kurayı ³ kazanarak, Darüşşafaka'ya kabul edilir. O yıllarda Darüşşafaka'daki Fransızca ağırlıklı öğretim, ilkokul dört ve beşe tekabül eden iki hazırlık yılıyla başlamaktadır. Hüseyin ayrıca bir imtihan kazanarak sadece bir yıl hazırlık öğretimine tabi tutulacak öğrenciler arasına katılır.

Darüşşafaka'da geçirdiği yedi yıl boyunca daha ziyade fen derslerini sever. Ortaokul ikinci sınıfta Salih Zeki'nin *Kamus-ı Riyaziyat*'ının birinci cildini okur. Pisagor teoremiyle bu kitap vasıtasıyla tanışır. Derhal teoremin yepyeni ve çok zarif bir ispatını verir [3]. O günden itibaren geometri

¹ Hüseyin Demir'in yurtdışı yayınlarının tıpkıbasımları yerli ve yabancı matematikçilerin istifade edebileceği bir derleme olarak yayına hazırlanmaktadır.

² Bu fakir muhitteki hayat şartlarını tasavvur etmek bugün pek kolay değil. Hüseyin Demir de üç yaşında ağır bir hastalık geçirmiş, bu yüzden koku alma hassasını tamamen kaybetmiş. Bu küçük özür bazen tuhafıklara sebep olur, çevresindekileri eğlendirirdi. Bir soğuk algınlığı sırasında ıhlamur içmeye yanaşmayınca eline çay diye bir bardak ıhlamur verilmiş; farkı anlayamadan içmiş. Bir defasında da eşinin kızartmak üzere dilimleyip suya yatırdığı patatesleri elma hoşafı zannederek yemiştir.

³ İmtihani kazanan 100 öğrenci arasında kura çekilerek 50 tanesi kabul ediliyor. Bu garip, garipten de öte sapık uygulamadan Aziz Nesin de *Böyle Gelmiş, Böyle Götmez* adlı otobiyografik eserinde bahseder. Ortalama her dört yılda bir eldeki 100 öğrencinin en iyisini geri çevirip, en kötüsünü alan bu berbatlığı hangi beyinsiz sapığın ibda ettiğini bilmek isterdim!

hayatının merkezidir. Pisagor Teoremi'ni 9-nokta çemberi, Simson doğrusu, Ceva ve Menelaus Teoremleri ve geometrinin daha yüzlerce incisi takip eder. Lisede devrin mümtaz matematikçilerinden olan öğretmenleri Hasan Fehmi ve Lütfü Atalık Beylerin hayranlığını kazanır. Hasan Fehmi ve Mehmet İzzet Beyler tarafından çıkarılan o günlerin gözde dergisi *Talebe Mecmuası*'nda artık sık sık ismine rastlanmaktadır. 1935 yılında Darüşşafaka'dan mezun olur, giriş imtihanlarında büyük başarı kazanarak Yüksek Mühendis Mektebi'ne kabul edilir. ⁴ Birkaç ay sonra Almanya'da gemi mühendisliği ve Fransa'da maden mühendisliği tahsili için devlet burs imtihanlarını kazanır; Fransa'ya gitmeye karar verir. ⁵ Bu arada çıkan Soyadı Kanunu onu Demircioğulları'ndan Mustafa oğlu Hüseyin olmaktan çıkarıp Hüseyin Demir yapmıştır.

Hüseyin Demir 31 Mart 1936'da Fransa'ya ayak basar. St. Étienne'e yerleşir. Fransızca iyi okuyup yazmakla beraber konuşamamaktadır. Fransızca'sını geliştirmek için dönemin sonuna kadar bir liseye devam eder. Fransa'da mühendislik tahsili için mutad bir hazırlık olan "mathématiques spéciales" derslerine katılır. 1938'te giriş imtihanlarını kazanarak St. Étienne'deki École Supérieure de Mine'e kaydolar. Bu yıllarda Hüseyin Demir'in rahat ve mes'ut olduğunu tahmin etmek güç değil. İktisadî buhran içindeki Fransa'da Türk Lirası değerli ve burslar tatmin edicidir. Başarıyla devam ettiği tahsilinin yanısıra şoförlük ehliyeti alır, piyano öğrenmeye çalışır, seyahat eder. ⁶ Paris'te Palais de la Découverte'i bir ziyaretinde π sayısının silindirik şeklinde bir duvara hakkedilmiş ilk 701 hanesini defterine geçirir, 300 hanesini ezberler.

Bugün İkinci Dünya Savaşı olarak bildiğimiz facianın ilk günü sayılabilecek 1 Eylül 1939 tarihinde ⁷ Hüseyin Demir Bordeaux'da tatildedir. Kargaşa içindeki Fransa'da yolculuk aniden adeta imkansız hale gelir. Hüseyin Demir büyük zorluklarla Paris'e ulaşır, oradan da St. Étienne'e geçer. Bu arada Türkiye Cumhuriyeti Fransa'daki Türk öğrencilerine, tahsillerine Amerika'da devam etmeleri, aksi takdirde memlekete dönmeleri talimatını verir. Hüseyin Demir Amerika'ya gitmeyi tercih eder. Uzun ve meşakkatli bir bekleyişten sonra Marsilya'da vapura biner. Son anda çıkan resmi bir aksaklık yüzünden vapuru terketmeye mecbur edilir. Karayoluyla İtalya'ya gider. Genova'dan başka bir vapurla Amerika'ya doğru yola çıkar.

Fransa'daki bu zahmetli son birkaç hafta içinde Hüseyin Demir talihsiz Rumen matematikçisi Lalesco'nun ⁸ *La Géométrie du Triangle* adlı kitabına tesadüf eder ve bütün karışıklıklar içinde günde 8-10 saatlik çalışmayla bu gerçekten latif kitabı adeta yutar. Bu küçük eser ustamızın hayatında tam bir dönüm noktası olmuştur; o günden sonra ömrünün sonuna kadar Nagel, Gergonne, Feuerbach, Lemoine, Brocard, Spieker noktalarına, açı ve parça eşleniklerine ⁹ jonglörlerin yerçekimine meydan okuyan maharetiyle hükmedecektir.

15 Nisan 1940 günü New York'a ayak basan Hüseyin Demir, ¹⁰ orada tanıştığı bir Türk öğrencisinin yardımıyla kuzey eyaletlerinin birinde yabancı öğrencilere evinde oda kiralayan ve kiracılarına hususi İngilizce dersleri veren bir Amerikalı kadının evine yerleşir. Böylece biraz İngilizce öğrendikten sonra aynı yılın Eylül ayında New York'a döner ve Columbia Üniversitesi'nde derslere başlar. Eski Dünya'nın, beylik bir tabirle kan ve ateşe boğulduğu günlerde, Hüseyin Demir sakin ve verimli bir çalışma içindedir. 1944 yılında şeref kütüğüne girerek maden mühendisliği ve matematik dallarından birer "Master's Degree" ile mezun olur. Bu yılın şeref kütüğünde onunla birlikte inşaat mühendisliği ve matematik dallarında yer alan diğer bir Türk öğrencisi de sonradan ileri gelen

⁴ Sonradan ismi İstanbul Teknik Üniversitesi olarak değiştirilen ilim ve öğretim dünyamızın bu güzide kuruluşu 1970 lere kadar ayrı bir giriş imtihanına sahipti. Bu giriş imtihanı sonradan hiç görülemeyen seviyedeki zarif ve ağır sorularıyla matematik, fizik, kimya dallarında iddialı her gencin aşmaktan gurur duyacağı güzel ve köklü bir engeldi. Tabii ki bu imtihan onyıllarca Türkiye için yüz akı olan insanlar seçti. Bugün beşten bir çekmek kurnazlığından başka birşey öğrenme fırsatı veremediğimiz gençlerimiz ne kadar üzülse azdır!

⁵ Bu sırada Hüseyin Demir, 20 Ekim 1935 nüfus sayımında vazifelidir. Sayımını yaptıkları arasında büyük şairimiz Nazım Hikmet de vardır.

⁶ Hatta yolu Monte Carlo'ya düşmüş, yeşil çuha üzerinde dikkatli birkaç oyun da oynamış.

⁷ Wehrmacht'ın Polonya'ya girdiği meşum gün.

⁸ Trajan Lalesco, integral denklemler sahasının büyük mütehassıslarından olduğu gibi çoğunluğu 19. yüzyıl Alman ve Fransız üstadları tarafından yaratılmış ileri üçgen dokusunu da en iyi bilenlerden birisiydi. Ne yazık ki genç yaşta öldü.

⁹ Conjugué isogonal, conjugué isotomique.

¹⁰ Yaşlı bir insanın hafızası ne kaptiridir! Merhum, bir taraftan hayat hikâyesi için en ehemmiyetli noktaları hatırlayamaz, diğer taraftan da Amerika'ya inerken ilk gördüğü şeyin uçakla gökyüzüne yazılmış bir Pepsi-Cola reklamı olduğunu söyleyerek beni şaşırtırdı.

matematikçilerimizden olan Cengiz Uluçay'dır.

Hüseyin Demir'in tahsiline matematik dalında devam edeceği, iyi bir doktora yapacağı ve çok başarılı olacağından kimse şüphe etmemektedir. J. F. Ritt, E. Kasner, E. R. Lorch, P. A. Smith gibi hocaları onu bu yönde coşkunlukla teşvik etmektedirler. Ertesi dönemde Kasner'in yöneteceği bir seminerde Riemann-Roch Teoremi hakkındaki son ve en mühim konuşmanın onun tarafından yapılması kararlaştırılmıştır. *American Mathematical Monthly*'de problemleri basılmaktadır. O günlere ait en güzel hatırası büyük (ve eksantrik!) matematikçi P. Erdős'le tanışıp ondan sonraları "Erdős-Mordell Eşitsizliği" olarak şöhret kazanan teoremi öğrenmesidir.¹¹

Tam her şeyin yolunda gider gibi görüldüğü bu günler aslında onun hayatındaki merkezi trajediyi hazırlamaktadır. Hüseyin Demir bursunun uzatılması için müracaat ettiği öğrenci müfettişliğinden "mecburi hizmet"ini yapmak üzere memlekete dönmek talimatını alır. Bu bürokratik dar kafalılığın Hüseyin Demir'in sadece kendisine değil, Türkiye'ye verdiği tamiri imkansız zararı okuyucuların takdirine bırakıyorum.

Hüseyin Demir, 1945 yazında hâlâ Alman denizaltılarının tehdidi altındaki okyanusu dev bir müttefik konvoyunu koruyan bir savaş gemisiyle geçerek Türkiye'ye döner. Zonguldak'ın Gelik ilçesi kömür ocaklarına ocak mühendisi olarak tayin edilir.¹² Altı ay sonra Kandilli'deki ocaklara alınır. Matematik çalışmalarına devam etmektedir. *İççokgenler Üzerine Bir Etüd* adlı mühim çalışması *Fizik-Kimya-Matematik* dergisinde basılır. 1946 yılında askere gider. Ankara Yedeksubay Okulu'nda altı aylık temel eğitimden sonra, kıtada sadece altı ay geçirerek terhis edilir. Annesini yanına alarak Kandilli'ye döner. Emniyet mühendisliğine terfi eder. 1950 yılında uzun yıllar hasretiyle yaşadığı annesini kaybeder. 1951 de Münevver Çakır'la evlenir. 1954 yılında Alman sınırı yakınlarındaki maden ocaklarında¹³ "sulu dolgu"¹⁴ usulünü incelemek üzere teknik bir heyetle bir aylığına Fransa'ya gönderilir.

Çocukları Nafiz (1952), Nefise (1953) ve Nazmi (1955)'nin de doğumlarıyla beraber Hüseyin Demir, lojmanlardaki meslektaş aileleriyle ziyaretleşmeler, küçük potlarla poker ve sakin aile hayatı etrafında olağan bir müreffeh taşra mühendisi hayatına tamamen intibak etmiş gibidir. Halbuki görünüş aldatıcıdır. Bütün boş vaktini matematiğe hasretmektedir.

Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde Fen-Edebiyat Fakültesi dekanı olan Cengiz Uluçay, 1961 yılında Hüseyin Demir'e Matematik Bölümü'nde yardımcı profesörlük teklif eder. Akademik bir ilerleme ümidi bulunmamasına ve büyük maddi fedakarlıklar gerektirmesine rağmen, en nihayet sadece matematikle uğraşmasına fırsat veren bu teklifi Hüseyin Demir seve seve kabul eder. Ankara'ya taşınır; Bahçelievler'de bir ev satın alarak yerleşir. Kurulalı henüz birkaç yıl olan ve günümüzdeki itibarlı mevkiinden daha çok uzak bulunan bu genç üniversitenin, küçük fakat kendisinden büyük hizmetler beklenen bu bölümünde Hüseyin Demir temel analiz ve geometri dersleri verir, ders notları ve ders kitapları yazar, problem ve makale üretimine devam eder. 1968 yılında sadece bir şekil meselesinin halli olmak üzere Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü mensuplarından Prof. Dr. Esat Egesoy'un danışmanlığı altında *Simplekslere Dair* adlı bir tez yazarak matematik doktoru olur.¹⁵ Matematik Bölümü'ne sonradan katılan büyük matematikçimiz Cahit Arf, onun geometrici olarak vasıflarına hayranlık duymuş, hiç olmazsa doçent ünvanı alması için büyük gayret göstermiş, ne yazık ki bir netice alamamıştır. Hüseyin Demir çeyrek asırlık hizmetten sonra 1985 yılında yardımcı doçent ünvanıyla emekli olacaktır.

¹¹ Yıllar sonra Hüseyin Demir bu teoremin bir genellemesini *American Mathematical Monthly*'ye çözümüyle birlikte problem olarak sunar. Problem basılır; büyük ilgi görür. Ne yazık ki dergiye gönderilen çok sayıda çözümün hepsi hatalıdır. Bu arada Hüseyin Demir'in çözümü de kaybolur. Bu suretle muallakta kalan teorem ancak uzun süre sonra C. W. Dodge tarafından ispatlanır [2].

¹² Az evvel acı bir dille tenkid ettiğimiz resmî makamlara bir noktayı teslim etmemiz gerekli. Genç cumhuriyet, imparatorluk Türkiye'si'nin Avrupalı kan emiciler elinde düştüğü hale düşmemek için büyük gayret gösteriyor, bu mücadelede bilhassa teknik adam açığına parmak basıyordu. Gerçekten de ihtiyaç büyüktü. Gelik havzasında Fransız imtiyazları 1940'ta hitam bulmuş olmakla beraber, Hüseyin Demir Türkiye'ye geldiği zaman bu havzanın şefi M. Viroux adlı bir Fransız mühendistir. Olmak istediklerimizi Avrupa'nın bir eyaleti haline gelmeden olamayacağımızı iddia eden "yeni mandacılar" Avrupa'nın bizim için ne olduğunu hatırlamalıdır.

¹³ Tahminimce Molsheim civarı.

¹⁴ Remblais hydraulique. Metindeki Türkçe tabir resmî tercümedir. Benim bir dahlim yoktur.

¹⁵ Pek fazla ilmi değeri olmayan bu tezin bir nüshası elimindedir. Tez muhtevası ayrıca İngilizce bir makale olarak basılmıştır □

Emeklilik Hüseyin Demir'in hayatında güzel bir safhaydı. Ders verme mesuliyetinden kurtulmuş, bu satırların yazarıyla gençleştirici bir arkadaşlık ve verimli bir ilmi ortaklık kurmuştu. Kendini tamamen yapmaktan zevk aldığı işlere vermişti. *Matematik Dünyası* da onun için ayrı bir şevk kaynağıydı. Bu yıllarda, yani yaşı 70'in üzerindeyken, üç makale yazdı ve düzinelerle problem tanzim etti. Tanınmış matematikçilerin, dergi editörlerinin sık sık mektup yazarak fikrine müracaat ettiği bir insandı. ¹⁶ Tarih, edebiyat, felsefe gibi mevzular onu az ilgilendirmekle beraber ¹⁷ din hakkında bir kitapçık da yazdı. ¹⁸ Göğsünde büyük sıkıntılar ve bacaklarında aşırı güçsüzlük belirtileriyle son safhasına giren kalp hastalığı onu yataktan çıkamaz hale getirene kadar çalıştı. Son anına kadar zihni berrak ve şuuru açıktı. Hayat ve ölümle barış içinde aramızdan ayrıldı.

KAYNAKÇA

- [1] H. Demir, *On the Geometry of n -Dimensions and Extensions in E^n of Erdős-Mordell-Oppenheimer Inequalities*, *METU Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1, 175-197 (1968).
- [2] C. W. Dodge, *The Extended Erdős-Mordell Inequality*, *Cruz Mathematicorum*, 10, 274-281 (1984).
- [3] Ö. Özlük, A. Şahin & C. Tezer, *Pisagor Teoremi'nin Çeşitli İspatları*, *Matematik Dünyası*, 1, sayı 3, 6-9 (1991).



¹⁶ Gözleri çok zayıfladığı için muhaberatıyla çoğu zaman ben uğraşırdım. Ona yazanlar arasında J. F. Rigby, D. S. Mitrinović, D. Pedoe, J. Dou ve T. Otsuki'yi hatırlıyorum.

¹⁷ Hüseyin Demir, "Bunlara yöneltilmemişim!" diyerek bu eksiklikten esfle bahsederdi; Darüşşafaka'daki hocaları Hüseyin Siret ve Tahir Mevlevi'nin devrin mümtaz ediplerinden olmakla birlikte genç bir zihne yol göstericilik yapabilecek şahsiyetler olmadığından yakındı.

¹⁸ *Le Bon Sens* müellifi J. Meslier mesleğinde yarı felsefi bir tanrıtanımazlığı esas alarak dini bütün vecheleriyle batıl itikad ve hurafe hanesine yazan bu çalışma, Hüseyin Demir'le aramızdaki esaslı ihtilaflardan birisiydi. Buna rağmen metni okumamı ve fikrimi kendisine söylememi rica etmişti. Ben de hiç çekinmeden düşündüklerimi söylemiştim: Ehil olmadığı bir sahada yazdığı bu kitabın muhtevası da seviyesi de ilim adanı olarak bulunduğu mevki ile mütenasip değildi. Sık sık mütecavizleşmeye yüz tutan üslubu yüzünden kamu üzerinde aydınlatıcı değil ancak tahrik edici bir tesiri olabilirdi. Kendisine gelince, böyle bir kitap vasıtasıyla belki birkaç yarı aydından alkış alabilir, hatta "sansasyon"larla beslenen berbat şöhretlerden birisi olabilirdi; ama böyle şeyler onu ne zamandan beri alâkadar ediyordu? Bu ağır tenkidleri büyük zarafetle dinlemiş, bunların dostluğumuzu rahnedar etmesine asla müsaade etmemişti.

HÜSEYİN DEMİR'İN YURT DIŞI YAYINLARI

- [1] Advanced Problem 4102, *American Mathematical Monthly*, **50**, 638 (1943).
- [2] Advanced Problem 4125, *American Mathematical Monthly*, **51**, 252 (1944).
- [3] Advanced Problem 4134, *American Mathematical Monthly*, **51**, 475 (1944).
- [4] Advanced Problem 4193, *American Mathematical Monthly*, **53**, 160 (1946).
- [5] Advanced Problem 4215, *American Mathematical Monthly*, **53**, 470 (1946).
- [6] Elementary Problem 1134, *American Mathematical Monthly* **61**, 568 (1954).
- [7] Elementary Problem 1160, *American Mathematical Monthly* **62**, 182 (1955).
- [8] Proposal 208, *Mathematics Magazine*, **28**, 27 (1954-1955)
- [9] Quicky 117, *Mathematics Magazine*, **28**, 37 (1954-1955).
- [10] Proposal 217, *Mathematics Magazine*, **28**, 103 (1954-1955).
- [11] Proposal 227, *Mathematics Magazine*, **28**, 160 (1954-1955).
- [12] Proposal 234, *Mathematics Magazine*, **28**, 234 (1954-1955).
- [13] Quicky 138, *Mathematics Magazine*, **28**, 241 (1954-1955).
- [14] Proposal 242, *Mathematics Magazine*, **28**, 284 (1954-1955).
- [15] Quicky 141, *Mathematics Magazine*, **28**, 292 (1954-1955).
- [16] Elementary Problem 1197, *American Mathematical Monthly*, **63**, 39 (1956).
- [17] Elementary Problem 1209, *American Mathematical Monthly*, **63**, 186 (1956).
- [18] Advanced Problem 4679, *American Mathematical Monthly*, **63**, 191 (1956).
- [19] Elementary Problem 1217, *American Mathematical Monthly*, **63**, 342 (1956).
- [20] Advanced Problem 4695, *American Mathematical Monthly*, **63**, 426 (1956).
- [21] Advanced Problem 4710, *American Mathematical Monthly*, **63**, 669 (1956).
- [22] Proposal 248, *Mathematics Magazine*, **29**, 46 (1955-1956).
- [23] Proposal 258, *Mathematics Magazine*, **29**, 163 (1955-1956).
- [24] Proposal 266, *Mathematics Magazine*, **29**, 222 (1955-1956).
- [25] Quicky 166, *Mathematics Magazine*, **29**, 229-230 (1955-1956).
- [26] Advanced Problem 4735, *American Mathematical Monthly*, **64**, 277 (1957).
- [27] Proposal 298, *Mathematics Magazine*, **30**, 164 (1956-1957).
- [28] Quicky 188, *Mathematics Magazine*, **30**, 172 (1956-1957).
- [29] Proposal 304, *Mathematics Magazine*, **30**, 223 (1956-1957).
- [30] Advanced Problem 4818, *American Mathematical Monthly*, **65**, 779 (1958).
- [31] Proposal 334, *Mathematics Magazine*, **31**, 228 (1957-1958).
- [32] Proposal 349, *Mathematics Magazine*, **32**, 47 (1958-1959).
- [33] Quicky 227, *Mathematics Magazine*, **32**, 55-56 (1958-1959).
- [34] Quicky 234, *Mathematics Magazine*, **32**, 113 (1958-1959).
- [35] Proposal 372, *Mathematics Magazine*, **32**, 220-221 (1958-1959).
- [36] Quicky 242, *Mathematics Magazine*, **32**, 229 (1958-1959).
- [37] Proposal 380, *Mathematics Magazine*, **32**, 278 (1958-1959).

- [38] *Les cercles podaires dans le polygone inscritible*, *Mathesis*, **68**, 51–54 (1959).
- [39] Proposal 384, *Mathematics Magazine*, **33**, 51 (1959-1960).
- [40] Proposal 398, *Mathematics Magazine*, **33**, 165 (1959-1960).
- [41] Proposal 407, *Mathematics Magazine*, **33**, 225–226 (1959-1960).
- [42] Proposal 415, *Mathematics Magazine*, **33**, 296 (1959-1960).
- [43] Quicky 266, *Mathematics Magazine*, **33**, 302 (1959-1960).
- [44] Question d'Examen 10, *Mathesis*, **69**, 249–250 (1960).
- [45] Question d'Examen 11, *Mathesis*, **69**, 250 (1960).
- [46] Question d'Examen 12, *Mathesis*, **69**, 251 (1960).
- [47] Question 3954, *Mathesis*, **69**, 255 (1960).
- [48] Question 3957, *Mathesis*, **69**, 375(1960).
- [49] Proposal 419, *Mathematics Magazine*, **34**, 49 (1960-1961).
- [50] Proposal 425, *Mathematics Magazine*, **34**, 109 (1960-1961).
- [51] Proposal 437, *Mathematics Magazine*, **34**, 174 (1960-1961).
- [52] Proposal 440, *Mathematics Magazine*, **34**, 237 (1960-1961).
- [53] Quicky 281, *Mathematics Magazine*, **34**, 308 (1960-1961).
- [54] Quicky 284, *Mathematics Magazine*, **34**, 308 (1960-1961).
- [55] Proposal 458, *Mathematics Magazine*, **34**, 364(1960-1961).
- [56] Proposal 472, *Mathematics Magazine*, **35**, 55–56 (1962).
- [57] Proposal 487, *Mathematics Magazine*, **35**, 186 (1962).
- [58] Proposal 498, *Mathematics Magazine*, **35**, 309 (1962).
- [59] Proposal 509, *Mathematics Magazine*, **36**, 133 (1963).
- [60] Proposal 517, *Mathematics Magazine*, **36**, (1963).197
- [61] Proposal 529, *Mathematics Magazine*, **36**, 264 (1963).
- [62] Proposal 537, *Mathematics Magazine*, **37**, 55 (1964).
- [63] Proposal 544, *Mathematics Magazine*, **37**, 119 (1964).
- [64] Proposal 563, *Mathematics Magazine*, **37**, 276 (1964).
- [65] Quicky 341, *Mathematics Magazine*, **37**, 286 (1964).
- [66] Quicky 343, *Mathematics Magazine*, **37**, 286 (1964).
- [67] Elementary Problem 1778, *American Mathematical Monthly*, **72**, 420 (1965).
- [68] Elementary Problem 1779, *American Mathematical Monthly*, **72**, 420 (1965).
- [69] Proposal 572, *Mathematics Magazine*, **38**, 52 (1965).
- [70] Proposal 587, *Mathematics Magazine*, **38**, 179 (1965).
- [71] *A theorem analogous to Morley's theorem*, *Mathematics Magazine*, **38**, 228–230 (1965).
- [72] Proposal 599, *Mathematics Magazine*, **38**, 241 (1965).
- [73] Proposal 600, *Mathematics Magazine*, **38**, 317 (1965).
- [74] Elementary Problem 1877, *American Mathematical Monthly*, **73**, 410 (1966).
- [75] Elementary Problem 1878, *American Mathematical Monthly*, **73**, 410–411 (1966).

- [76] Proposal 609, *Mathematics Magazine*, **39**, 69 (1966).
- [77] Maximum area of a region bounded by a polygon with given sides, *Mathematics Magazine*, **39**, 228–231 (1966).
- [78] Proposal 628, *Mathematics Magazine*, **39**, 246 (1966).
- [79] Proposal 639, *Mathematics Magazine*, **39**, 306 (1966).
- [80] Proposal 649, *Mathematics Magazine*, **40**, 100–101 (1967).
- [81] Elementary Problem 2100, *American Mathematical Monthly*, **75**, 670 (1968).
- [82] Elementary Problem 2101, *American Mathematical Monthly*, **75**, 670 (1968).
- [83] Elementary Problem 2109, *American Mathematical Monthly*, **75**, 780 (1968).
- [84] Elementary Problem 2110, *American Mathematical Monthly*, **75**, 780 (1968).
- [85] Elementary Problem 2124, *American Mathematical Monthly*, **75**, 899 (1968).
- [86] A trigonometric proof of Morley's theorem, *Delta*, **1**, 11–14 (1968).
- [87] Proposal 680, *Mathematics Magazine*, **41**, 42–43 (1968).
- [88] Elementary Problem 2160, *American Mathematical Monthly*, **76**, 300–301 (1969).
- [89] Proposal 724, *Mathematics Magazine*, **42**, 96 (1969).
- [90] Proposal 738, *Mathematics Magazine*, **42**, 214 (1969).
- [91] Proposal 743, *Mathematics Magazine*, **42**, 267 (1969).
- [92] Elementary Problem 2213, *American Mathematical Monthly*, **77**, 79 (1970).
- [93] Proposal 756, *Mathematics Magazine*, **43**, 103 (1970).
- [94] Proposal 763, *Mathematics Magazine*, **43**, 166 (1970).
- [95] Proposal 775, *Mathematics Magazine*, **43**, 278 (1970).
- [96] Elementary Problem 2311, *American Mathematical Monthly*, **78**, 793 (1971).
- [97] Elementary Problem 2312, *American Mathematical Monthly*, **78**, 793 (1971).
- [98] Proposal 806, *Mathematics Magazine*, **44**, 228 (1971).
- [99] Elementary Problem 2363, *American Mathematical Monthly*, **79**, 663 (1972).
- [100] Proposal 839, *Mathematics Magazine*, **45**, 228 (1972).
- [101] Proposal 859, *Mathematics Magazine*, **46**, 103 (1973).
- [102] Elementary Problem 2462, *American Mathematical Monthly*, **81**, 281 (1974).
- [103] Proposal 916, *Mathematics Magazine*, **47**, 286 (1974).
- [104] Elementary Problem 2625, *American Mathematical Monthly*, **83**, 812 (1976).
- [105] Proposal 963, *Mathematics Magazine*, **49**, 43 (1976).
- [106] Proposal 998, *Mathematics Magazine*, **49**, 252 (1976).
- [107] Proposal 1197, *Mathematics Magazine*, **57**, 238 (1984).
- [108] Proposal 1206, *Mathematics Magazine*, **58**, 46 (1985).

- [109] Proposal 1211, *Mathematics Magazine*, **58**, 111 (1985).
- [110] Elementary Problem 3135, *American Mathematical Monthly*, **93**, 215 (1986).
- [111] Elementary Problem 3164, *American Mathematical Monthly*, **93**, 566 (1986).
- [112] *Incircles within*, *Mathematics Magazine*, **59**, 77–83 (1986).
- [113] Quicky 710, *Mathematics Magazine*, **59**, 112 (1986).
- [114] Proposal 1298, *Mathematics Magazine*, **61**, 195 (1988).
- [115] Proposal 1305, *Mathematics Magazine*, **61**, 261 (1988).
- [116] *More on incircles*, *Mathematics Magazine*, **62**, 107–114 (1989).
- [117] Proposal 1327, *Mathematics Magazine*, **62**, 274 (1989).
- [118] Proposal 1356, *Mathematics Magazine*, **63**, 274 (1990).
- [119] Elementary Problem 3422, *American Mathematical Monthly*, **98**, 158 (1991).
- [120] Elementary Problem 3469, *American Mathematical Monthly*, **98**, 955 (1991).
- [121] *Reflections on a problem of V. Thébault*, *Geometriae Dedicata*, **39**, 79–92 (1991).
- [122] Proposal 1371, *Mathematics Magazine*, **64**, 132 (1991).
- [123] Proposal 1377, *Mathematics Magazine*, **64**, 197–198 (1991).
- [124] Proposal 1405, *Mathematics Magazine*, **65**, 265 (1992).

USTAYA NAZİRE**Fikri Gökdağ**

4.4.1995 günü 79 yaşındayken aramızdan ayrılan büyük geometri ustası Hüseyin Demir “alfametrik” bulmacaları çok severdi. Bu tarzda yayımladığı birkaç çalışması da vardı. Aşağıdaki bulmacayı onun aziz hatırasına ithaf ediyorum.

Her harf sıfır ile dokuz arasındaki bir rakamı temsil etmek üzere onluk tamsayı yazılımında

$$H \times DEMİR = 4 \times 4 \times 1995$$

ise,

$$H \times D \times E + M + İR$$

sayısını hesaplayınız.

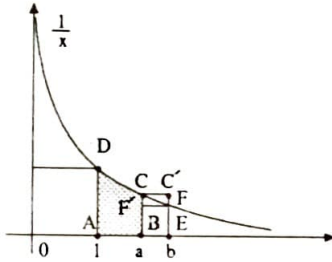
KOLAY YOLDAN LOGARİTMA

Yusuf Avcı, Kâmil Alnıaçık & Nurettin Ergun *

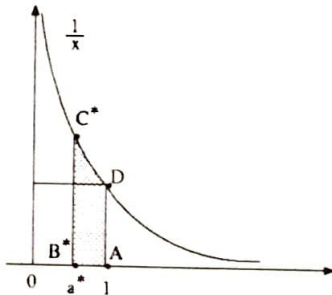
Lise öğrencilerine logaritma ve onun ters fonksiyonu olan üstel fonksiyonun sağlıklı ve eksiksiz inşasını vermek doğrusu pek olanaklı değildir. Sözelimi bir lise öğrencisi $2\sqrt{2}$ sayısının nasıl tanımlandığını pek bilemez. Hemen hemen tüm lise kitaplarında bu konudaki temel bilgiler ispatsız verilir ya da daha yerinde bir deyimle verilmek zorunda kalınır. Biz bu yazıda lise öğrenci ve öğretmenlerine logaritmanın bazı temel bilgilerini kolay ve sağlıklı bir yoldan vermek istiyoruz. En azından $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ eşitliğinin kanıtlanmasını kavramak için

(i) gerçel (reel) sayıların *Arşimet özelliği*, yani her pozitif x gerçel sayısı için $x < n$ gerçekleşecek biçimde bir n doğal sayısının varlığı bilgisi ile

(ii) $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$ gerçekleştiğini söyleyen *teleskopik toplam özelliği* ve benzeri basit ve temel eşitsizlik bilgileri yeterli olacaktır.



$\ln a = \text{Alan } ABCD$



$\ln a^* = \text{Alan } B^*ADC^*$

Doğal Logaritma Fonksiyonu

Bu fonksiyon, $f(x) = \frac{1}{x}$ hiperbölünün, düzlemin sağ üst dördünündeki kolu yardımıyla yukarıdaki gibi tanımlanır. Dikkat: yalnızca $0 < a$ gerçekleyen gerçel sayıların $\ln a$ doğal logaritma değerleri tanımlıdır ve $1 \leq a$ ya da $a^* < 1$ oluşuna göre bu tanımlama farklı yapılır.

O halde bu tanımlamadan kolayca $\ln 1 = 0$ elde edilir. Şimdi sırasıyla şunları gözleyelim:

I. $0 < a < b$ ise $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$ olur. Üç ayrı durum tek tek irdelenmelidir. Eğer $1 \leq a < b$ geçerliyse birinci şekil yardımıyla

$$\ln b - \ln a = \text{Alan}(AEFD) - \text{Alan}(ABCD) = \text{Alan}(BEFC)$$

$$\begin{cases} > \text{Alan}(BEFF') = \frac{b-a}{b} \\ < \text{Alan}(BEC'C) = \frac{b-a}{a} \end{cases}$$

bulunur. $a < 1 \leq b$ ve $0 < a < b < 1$ halleri benzer biçimde kolaylıkla yapılır. Dikkat edilirse $\ln a < \ln b$ olabilmesi için $0 < a < b$ gerçekleşmesi gerek ve yeterlidir.

II. $0 < a < b$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için

$$\left| \ln \frac{b}{a} - (\ln b - \ln a) \right| < \frac{(b-a)^2}{nab}$$

geçerlidir.

Önce $k = 0, 1, \dots, n$ için $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ gerçel sayılarını tanımlayalım. Kolaylıkla $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ ve $a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ elde edilir. I. özelliği kullanılırsa

$$(1) \ln b - \ln a = \sum_{k=1}^n (\ln a_k - \ln a_{k-1})$$

$$\begin{cases} < \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k-1}} \\ > \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \end{cases}$$

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

bulunur. Şimdi de $b_k = \frac{a^k}{a}$ gerçel sayıları tanımlanarak, önce $b_0 = 1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = \frac{b}{a}$, $b_k - b_{k-1} = \frac{b-a}{na}$, sonra

$$\ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a} - \ln 1 = \sum_{k=1}^n (\ln b_k - \ln b_{k-1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} < \sum_{k=1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{b_{k-1}}, \\ > \sum_{k=1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{b_k}, \end{array} \right.$$

ve dolayısıyla

$$(2) \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{b-a}{na} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} < \ln \frac{b}{a}$$

$$< \frac{b-a}{na} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_{k-1}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k-1}}$$

elde edilir. (1) ve (2) numaralı eşitsizlikler yardımıyla

$$\ln \frac{b}{a} - (\ln b - \ln a) \left\{ \begin{array}{l} < \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) \\ > \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}} \right) \end{array} \right.$$

elde edilir. Sağ yandaki teleskopik toplamlar kolayca hesaplanarak sonuçta

$$-\frac{(b-a)^2}{nab} < \ln \frac{b}{a} - (\ln b - \ln a) < \frac{(b-a)^2}{nab}$$

bulunur ki, bu istenenden başka birşey değildir.

III. $0 < a$ ve $0 < b$, ne olursa olsun

$$\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a \quad \text{ve} \quad \ln ab = \ln a + \ln b$$

eşitlikleri geçerlidir. İkincisi birincinin çok kolay bir sonucu olduğundan (neden?) yalnızca birinci eşitliği göstermek yeterli olacaktır. Kısalık amacıyla $A_{ab} = \ln \frac{b}{a} - (\ln b - \ln a)$ yazalım. Önce $0 < a \leq b$ durumunu irdeleyelim. Eğer $A_{ab} \neq 0$ olsaydı, Arşimet özelliği nedeniyle

$$\frac{(b-a)^2}{|A_{ab}|ab} < n_0$$

gerçekleyen bir n_0 doğal sayısı var olmak zorunda kalırdı, bu II. nedeniyle olanaksızdır. Demek ki $0 < a \neq b$ iken $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a$ geçerlidir. Üstelik

$$(3) \quad 0 < a \quad \text{için} \quad \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$$

gerçeğini de kolayca gözleyebiliriz. Gerçekten $a = 1$ için apaçık olan bu iddia, $0 < a < 1$ için son gösterilen eşitlik kullanılarak

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln a + (\ln 1 - \ln a) = 0;$$

$1 < a$ olduğunda ise $\frac{1}{a} < 1$ için bu son bilgi kullanılarak

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln \frac{1}{a} + \ln \frac{1}{1/a} = \ln \frac{1}{a} + \ln 1 - \ln \frac{1}{a} = 0$$

nedeniyle geçerlidir. O halde $b < a$ için (3) kullanılarak

$$\ln \frac{b}{a} = -\ln \frac{1}{b/a} = -\ln \frac{a}{b}$$

$$= -(\ln a - \ln b) = \ln b - \ln a$$

bulunur. Bitti!

Doğal Logaritmanın Tabanı

$\ln a = 1$ gerçekleyen biricik a pozitif gerçel sayısına doğal logaritmanın tabanı denir. Böyle bir gerçel sayının var olduğunu, doğal logaritma fonksiyonunun tanımında, birinci şekildeki $[BC]$ doğrusunu oynatarak kolaylıkla "sezinleyebiliriz," ama bunu kesin ve sağlıklı bir biçimde "kanıtlamak" ciddi bir iştir, çünkü ciddi ve derin bilgiler kullanmayı gerektirir. Biz bu gerçel sayıyı üstelik "keşfetmek," daha yerinde bir deyimle İsviçreli usta matematikçi Leonhard Euler'in 250 yıllık yöntemini burada yinelemek istiyoruz.

IV. Her n doğal sayısı için

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Başka bir yazıyla ise, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ve $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ şeklindeki rasyonel sayı dizileri

$$2 = a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \dots < b_1 = 4$$

gerçekler. Gerçekten ünlü Bernoulli eşitsizliğini [1], yani

$$1 + nx < (1 + x)^n \quad (n \in \mathbb{N}, -1 < x, x \neq 0)$$

kullanırsak, $n(n+2) < (n+1)^2$ yardımıyla

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n+1} &< 1 + (n+1) \frac{1}{n(n+2)} \\ &< \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{b_n}{a_{n+1}}, \end{aligned}$$

ve sonuçta $b_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})a_{n+1} < b_n$ bulunur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} &= 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - n \frac{1}{(n+1)^2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^n}{a_n}, \end{aligned}$$

ve sonuçta $a_n < (1 + \frac{1}{n+1})(1 + \frac{1}{n+1})^n = a_{n+1}$ bulunur. $a_{n+1} < b_{n+1}$ eşitsizliği ise apaçıktır. Yukardaki eşitsizlikleri elde etmenin güçlük neresinde diye sorabilirsiniz. Hayır, bunlar gerçekten güç değildir. Güçlük bundan sonra başlar. Gerçek sayılara ilişkin ve aslında birbirlerine eşdeğer olan bazı temel bilgiler şunları söyler (a_n ve b_n rasyonel sayıları yukarıda tanımlananlar olmak üzere):

(iii) Tüm bu $[a_n, b_n]$ aralıklarına ait olabilen tek bir gerçek sayı vardır (*Cantor iç içe azalan aralıklar özelliği*), çünkü bu aralıkların uzunlukları olan $\delta_n = b_n - a_n$ sayıları $a < \delta_n = \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$ nedeniyle $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ gerçekler.

(iv) Ya da $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ sonsuz elemanlı üstten sınırlı kümesi ile $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ alttan sınırlı kümesi için $\sup A = \inf B$ gerçeklenir (*supremum özelliği*), çünkü $\sup A \leq \inf B$ geçerli olup, $\sup A < \inf B$ gerçeklenemez. Bunu göstermeğe çalışmanızı öneririz!

(v) Ya da üstten sınırlı ve monoton artan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ile alttan sınırlı ve monoton azalan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ gerçeklenir (*monoton ve sınırlı dizilerin yakınsaklığı özelliği*). Neden bu iki limit eşittir?

İşte, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ kesişim kümesinin biricik elemanı olan ya da $\sup A (= \inf B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$ eşitliklerini gerçekleyen biricik gerçek sayı, matematikte onu ilk tanımlayan Euler'in anısına saygı olarak e işareti ile gösterilir. Matematğin bu ikinci en ünlü irrasyonel sayısının, rasyonel katsayılı hiç bir polinomun kökü olmadığı gerçeğini ilk kez

1874 yılında Fransız matematikçi Charles Hermite kanıtlamıştır. Bu irrasyonel sayının ondalık açılımındaki ilk basamakları

$$e = 2,71828182859045 \dots$$

şeklinde dir.¹

V. Şimdi $\ln e = 1$ gerçekleştiğini artık gösterebiliriz. $\ln ab = \ln a + \ln b$ özelliğinin bir sonucu olan $\ln a^n = n \ln a$ eşitliği, tümevarımla kolayca gösterilebilir. I. özelliği nedeniyle

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1 < \frac{1}{n}$$

kullanılarak kolayca

$$(4) \quad \frac{n}{n+1} < \ln a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

elde edilir. Üstelik $a_n < e < b_n$ nedeniyle

$$(5) \quad \ln a_n < \ln e < \ln b_n = \frac{n+1}{n} \ln a_n$$

geçerlidir. Burada bir başka bilgi, limitlerdeki ünlü *sıkıştırma bilgisi* kullanılıp (4) ve (5) bağıntılarında limit alınarak kolayca

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n \leq \ln e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln a_n\right) = 1,$$

yani $\ln e = 1$ sonucu elde edilir.

Şaşırtıcı Limit

Herhangi bir X gerçek sayısının bir logaritmik değer olduğunu, yani tek bir pozitif x gerçek sayısı sayesinde $X = \ln x$ gerçekleştiğini; $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = X$ gerçekleyen herhangi bir $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasyonel sayılar dizisi sayesinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nr_n}$$

şaşırtıcı limit işleminin gerçekleştiğini ve işte bu limit değerinin yukarıdaki eşitliği gerçekleyen pozitif x gerçek sayısı olduğunu kanıtlamadan yalnızca söylemekle yetinelim. Bu x pozitif sayısının varlığını kanıtlamanın daha başka yolları da vardır. Bütün bunları Analiz kitaplarına bırakıyoruz.

KAYNAKÇA

- [1] N. Ergun, *Gerçek Sayılarda Dokuz Temel Eşdeğerlik, Matematik Dünyası*, 4, sayı 5, 6-10 (1994).

¹ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yüz milyonuncu terimini bilgisayar yardımıyla hesaplayın! Ne buldunuz?

AYIRMAK YA DA AYIRMAMAK—İŞTE BÜTÜN SORUN

Doğan Dönmez *

Pek çoğumuz canımız sıkıldığında, elimizde bir kalem, önümüzde de bir kağıt varsa, bu kağıda eğriler çizeriz. Gelin bu eğriler üzerine biraz düşünelim. Bu yazıda el kaldırılmadan çizilen ve başlangıç noktasına geri dönen (yani *kapalı*) eğrilerle ilgileneceğiz. Örneğin bir çember, kare veya daha karmaşık bir şey, sonsuz sembolü gibi olabilir bu eğri.

Biz bu eğrinin kendisiyle değil de, düzlemin eğri üzerinde olmayan noktalarının kümesiyle (yani eğrinin noktalarının düzlemdeki tümleyeni ile) ilgileneceğiz. Bu kümelerin pek fazla ortak yönü yok gibi görünse de aşağıdaki iki özelliğin her örnekte var olduğunu görebilirsiniz. (Burada, eğrimizin bir parçası üzerinde birden fazla defa geçilmediğini de varsayıyoruz.)

1. Bu küme tek parça değildir; iki veya daha fazla parçadan oluşur.
2. Bu parçalardan yalnızca bir tanesi sınırsız, diğerleri sınırlıdır.

Kısacası, kapalı bir eğri düzlemi parçalara ayırır, bu parçalardan biri sınırsız diğerleri sınırlıdır. Burada *parça*, *sınırlı*, *sınırsız* sözcüklerinin tam matematiksel tanımını okuyanlara bırakalım. Dikkatli bir okuyucu yukarıdaki kapalı eğri tanımının yetersiz olduğunu (çünkü kalem, elimizi kaldırmadan gibi kavramlara dayanıyor) farkedecektir, matematiksel bir tanım, *süreklilik* kavramı kullanılarak yapılabilir.



Bu sonucu daha basitleştirmek ve başka yüzeylere de genelleştirebilmek için, kapalı eğrimizi üzerine bir koşul daha ekleyerek biraz daha

özel seçeceğiz. Kalemimizin, aynı nokta üzerinden tekrar geçmemesi koşulu eğrimizi, *basit* kapalı eğri diye adlandırılan eğri yapar. Basit kapalı bir eğri için yukarıdaki iki gözlem Şekil 1'deki şekle dönüşür.

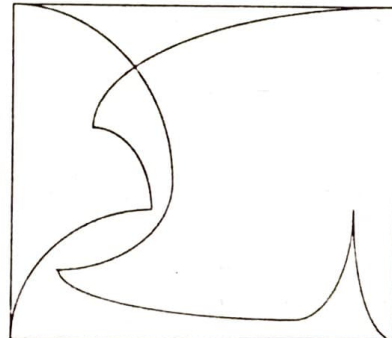
Basit kapalı bir eğri, düzlemi, biri sınırlı (eğrinin içi), diğeri sınırsız (eğrinin dışı) iki parçaya ayırır. (Düzlemin bu özelliği sayesinde, kümeleri Venn şemaları ile gösterebiliyoruz!)

Yukarıdaki gözlem apaçık görünse bile (en azından matematikçiler için) kanıtlanması gerekir. Bu da (ve biraz daha fazlası) ünlü Jordan Eğri Teoremi ile kanıtlanmıştır:

Jordan Eğri Teoremi 1. *Basit kapalı bir eğri, düzlemi, biri sınırlı, diğeri sınırsız iki parçaya ayırır ve eğrinin her noktasına her iki parçadan da istenildiği kadar yaklaşılabilir.*

Biz bu teoremin yalnızca ilk kısmı ile ilgileneceğiz. Bu neredeyse aşıkâr görünen teoremin kanıtı hiç de kolay değildir; örneğin [2]'de verilen kanıt tam dokuz sayfa uzunluğundadır.

Başka yüzeyler için aynı sorunun cevabını aramadan önce ayırma konusuna başka bir açıdan da bakabileceğimizi belirtelim. Düzlemi ayırmanın önemi, belli koşulları sağlayan eğrilerin kesişeceği sonucunu vermesindedir. Örneğin teoremdaki bu iki parçanın birinden başlayıp diğerinde sona eren (el kaldırmadan çizilen!) bir eğri ilk çizdiğimiz eğriyi kesmek zorunda kalır (parçalara ayırmanın matematiksel tanımı bu olacaktır). Kesişmeyle ilgili şu problemi düşünelim:

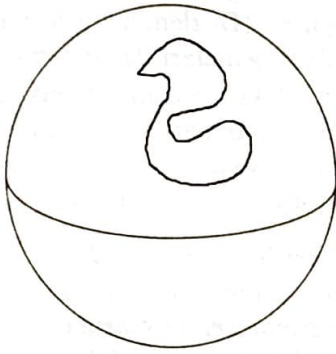


* Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

Bir dikdörtgenin karşılıklı köşelerini birleştiren eğrilerin (eğriler el kaldırılmadan çizilmek ve dikdörtgenin içinde kalmak koşuluyla) mutlaka kesiştiğini gösterin (Şekil 2). Bu "apaçık" gerçek de, kanıtlanması pek de kolay olmayan bir önermedir ve "elemanter" bir kanıt, Jordan Eğri teoremi yardımıyla yapılabilir.

([1]'deki ödüllü bulmaca da bunun gösterilmesine dönüşür, fakat oradaki eğriler daha özel (fonksiyon grafiği) olduklarından çok daha basit bir kanıt da vardır.)

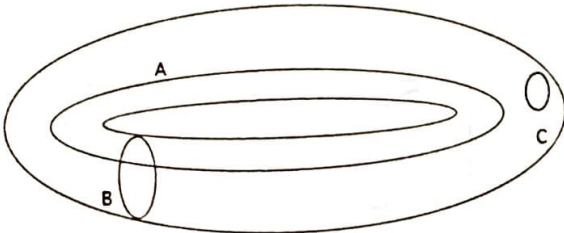
Şimdi basit kapalı bir eğrinin (dikkat edilirse bu tanım noktalar bir yüzey üzerinde olduğunda da anlamlıdır) başka yüzeyleri de ayırıp ayırmadığı sorusu üzerinde biraz düşünelim.



Yüzey olarak küreyi göz önüne aldığımızda da (Şekil 3) aynı sonuca varıyoruz, yani

Jordan Eğri Teoremi 2. *Küre üzerindeki basit kapalı bir eğri küreyi iki parçaya ayırır.*

Bu teoremlerin ikisine de Jordan Eğri Teoremi adı verilir, bunun nedeni, bunlardan birinden diğerinin kanıtının kolayca yapılabilmesidir. Bunun için de, kürenin bir noktası çıkarılınca kalan kümenin düzlemle "aynı" olduğu gözlemi kullanılır. Yani düzlemdeki ayırma özelliği küre için de geçerli; fakat bunun başka yüzeylerde doğru olmadığını birazdan göreceğiz.



Şimdi uzaydaki başka bir yüzeyi gözönüne alalım. *Torus* (veya *tor*) denen yüzey bir otomobil iç lastiği şeklindedir (şekil 4).

Bu yüzeyde Jordan Eğri Teoremi (biraz önce yazdığımız şekliyle) yanlıştır. Şekil 4'teki

A eğrisi basit kapalı bir eğri olduğu halde torusu ayırmaz; aynı şey B eğrisi için de geçerlidir; fakat C eğrisi, aynen düzlem ve kürede olduğu yüzeyi ayırır. Yani bazı basit kapalı eğriler torusu ayırıyor, bazıları ayırmıyor. Şimdi matematikçinin aklına doğal olarak şu soru gelecektir: "Hangi basit kapalı eğriler torus yüzeyini ayırır?" Yanıtı pek kolay olmayan bir soru bu. Yanıtını vermeden önce yeni bir kavram tanımlayacağız: (bir noktaya) *büzülebilme*. Matematiksel açıdan tam olmayan ama temel fikri veren tanımı şöyle yapılabilir: Basit kapalı bir eğri, eğer yavaş yavaş, fakat üzerinde bulunduğu yüzeyin dışına çıkmadan ve eğriyi koparmadan, bir noktaya büzülebiliyorsa ona (o yüzeyde) *büzülebilir* eğri denir. (Dikkat: büzülebilir olup olmamak, eğrinin içinde bulunduğu yüzeye bağlı!). Bunların örneklerini kolayca bulabiliriz: düzlemdeki ve küredeki her kapalı eğri büzülebilirdir ve torus üzerindeki C eğrisi büzülebilir eğrilerdir ama A ve B eğrileri (torus üzerinde!) büzülemez eğrilerdir. Bu örneklerle Jordan Eğri Teoremi'ni karşılaştırdığımızda, Jordan Eğri Teoremi'nin hem düzlem hem küre hem de torus için nasıl genelleştirileceğini tahmin edebilirsiniz.

Jordan Eğri Teoremi 3. *Düzlem, küre veya torus üzerindeki basit kapalı bir eğrinin, o yüzeyi iki parçaya ayırabilmesi için gerek ve yeter koşul o eğrinin (o yüzey üzerinde) büzülebilir olmasıdır.*

(Dikkat: bu sonuç uzaydaki her yüzey için geçerli değildir; örneğin silindir üzerinde çizili olan çember büzülemez fakat silindiri ayırır.)

Jordan Eğri Teoremi'ni başka yüzeylere de, büzülebilirlikten biraz daha karmaşık bir kavram kullanarak genişletilebiliriz. Düzlem, küre ve torus için bu iki kavramın çakışması nedeniyle bu yüzeylerde Jordan Eğri Teoremi'nin ifadesi daha basittir.

Jordan Eğri Teoremi'nin ifadesi ve kanıtı pek çok kitapta bulunduğu ve bu kitaplar torus için olanın kanıtında gereken her tekniği içermesine rağmen ben bu şekilde ifadesini ve kanıtını henüz bir yerde görmedim.

Bu gibi sonuçlar, matematiğin Cebirsel Topoloji olarak adlandırılan dalında kullanılan tekniklerle kanıtlanır. 19. yüzyıl sonlarında şekillenip çok hızlı bir şekilde gelişen ve geometri ve analizde pek çok problemin çözümünde önemli rol oynayan, aynı zamanda matematiğin diğer dallarını da etkileyen Cebirsel Topoloji'nin matematikle ilgilenenlere zevk ve heyecan vereceğinden eminim.

[1] B. Güvenç, *Ödüllü Problem, Matematik Dünyası*, 2, sayı 2, 21 (1992).

MÜKEMMEL SAYILAR ÜZERİNE

Sedat İlhan *

Tanım 1. Bir M pozitif tamsayısının bütün pozitif bölenlerinin toplamını $G(M)$ ile ifade edelim. M hariç ve 1 dahil olmak üzere, M 'nin pozitif bölenlerinin toplamı M 'ye eşit oluyorsa, M sayısına mükemmel (yetkin) sayı denir.

Bir başka deyişle, M pozitif tamsayısının bütün pozitif bölenlerinin (M dahil) toplamı, M 'nin iki katı oluyorsa M 'ye mükemmel sayı deriz. Buna, 6, 28, 496, 8128, ... gibi sayıları örnek olarak verebiliriz.

Şimdi de bir sayının mükemmel olması için hangi koşulları taşıması gerektiğini araştıralım.

(1) M bir asal sayı ise M mükemmel olamaz: $G(M) = M + 1 \neq 2M$ 'dir.

(2) $M = p^2$ (p asal) ise M mükemmel olamaz: $G(M) = 1 + p + p^2 \neq 2p^2$.

Daha genel olarak, $M = p^a$ (p asal ve a bir doğal sayı) ise, M mükemmel olamaz. M 'nin bütün pozitif bölenlerinin (M hariç) toplamı

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{a-1} = \frac{p^a - 1}{p - 1} \neq p^a$$

şeklinde dir.

(3) $M = p^a q^b$ (p ve q asal, $q \neq p$ ve $a, b \in \mathbb{N}$) sayısı da her zaman mükemmel olmaz, çünkü M 'nin pozitif bölenlerinin (M 'nin kendisi dahil) toplamı

$$G(M) = (1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^a) \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^b) \neq 2M$$

olacaktır. Ancak $a = 1$, $q = 2$ ve $p = 2^{b+1} - 1$ özel halinde $G(M) = 2M$ olup bu hal dışında M mükemmel olmaz. Sonuçta $M = 2^n(2^{n+1} - 1)$ sayısı, $2^{n+1} - 1$ asal olduğu zaman daima mükemmeldir diyebiliriz:

$$G(M) = G(2^n)G(2^{n+1} - 1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} (1 + 2^{n+1} - 1) \\ &= 2(2^n(2^{n+1} - 1)) = 2M. \end{aligned}$$

Hemen şu soru aklımıza gelebilir. "Hangi n 'ler için $2^{n+1} - 1$ sayısı asaldır?" Bu soruya vereceğimiz ilk yanıt, " $n + 1$ asal ise $2^{n+1} - 1$ sayısı asal olur" diye olursa bir yanılgıya varırız. Çünkü bu sayı her zaman asal olmaz. Örneğin, n tamsayısını 22 olarak alırsak $n + 1$ sayısı asal olduğu halde $2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot 178481$ asal olmaz. Böylece de $2^{22}(2^{23} - 1)$ sayısı mükemmel olmaz.

Söz konusu olan bu soru, günümüze kadar çözümü yapılamayan açık sorulardan biridir. Üstelik mükemmel sayıların sonsuz sayıda olup olmadığı bile açık bir sorudur.

Mersenne sayıları dediğimiz, p asal olmak üzere, $M_p = 2^p - 1$ şeklinde yazılıp asal olan sayılar ile mükemmel sayılar arasında bir ilişkinin var olduğunu söylememiz yanlış olmaz. Çünkü $p = 2, 3, 5, 7, 13, \dots, 216091, \dots$ değerleri için M_p 'nin asal, dolayısıyla $M = M_p(2^{p-1})$ sayının mükemmel olduğu bilinmekte, ama $p \leq 216091$ dışındaki p asal sayıları için M_p 'nin asal olup olmadığı bilinmemektedir. Buradaki M_{216091} sayısı 65050 basamaklı bir sayıdır [6].

Bütün bunlardan mükemmel sayıların bir çoğunun çift olduklarını söyleyebiliriz. "Tek mükemmel sayılar var mıdır?" sorusuna vereceğimiz cevap "bilinmiyor" olmakla beraber, bu sayılar hakkında çeşitli yaklaşımlarda bulunabiliriz.

Tanım 2. Ne 1, ne de M dahil, M sayısının bütün pozitif bölenlerinin toplamı M 'ye eşit, veya M 'nin bütün pozitif bölenlerinin toplamı $2M + 1$ oluyorsa, M sayısına bir $PM1$ sayısıdır deriz. Eğer M sayısının bütün pozitif

* Dicle Üniversitesi Matematik Bölümü araştırma görevlisi

bölenlerinin toplamı $2M - 1$ oluyorsa M sayısına bir PP1 sayısı denir.

Şimdi, $F(M) = 2M - G(M)$ ile M 'nin bölen farkını tanımlayalım. Bu tanım altında

- (a) $F(M) = 0$ ise M sayısı mükemmel olur;
- (b) $F(M) = -1$ ise M sayısı PM1 olur;
- (c) $F(M) = 1$ ise M sayısı PP1 olur.

Yukarıda yazdıklarımızdan aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz:

1. Eğer M bir PM1 sayısı ise, M bir tek karedir. Yani, p_i 'ler asal ve $p_i \neq 2$ olmak üzere, $M = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \dots p_s^{2n_s}$ olur [3].

Bundan sonra vereceğimiz sonuçlarda, PM1 sayısı M 'yi böyle düşüneceğiz.

2. $F(L) \leq 0$ ve $M = kL$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) ise, $F(M) < F(L)$ olur. Özellikle $F(K) < 0$ ise, L 'nin hiçbir katı PM1 olamaz [3].

3. Eğer N bir PM1 sayısı ise,

$$\left(\frac{p_1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_s}{p_s - 1} \right) \left(\frac{p_1^3 - 1}{p_1^3} \dots \frac{p_s^3 - 1}{p_s^3} \right) \leq 2 + \frac{1}{N} < \left(\frac{p_1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_s}{p_s - 1} \right)$$

sağlanır [bf2].

4. $M = Np^{2n}$, $p \nmid N$, p asal, ve M bir PM1 sayısı ise,

$$\frac{2N}{F(N)} - \frac{1}{p} \leq p < \frac{2N}{F(N)}$$

sağlanır. Özellikle

$$\frac{2N}{F(N)} - \frac{1}{3} \leq p < \frac{2N}{F(N)}$$

gerçeklenir. Bu sonuç, M sayısının PP1 olması halinde de doğrudur [3].

5. $(1, 10^7)$ aralığında hiçbir PM1 sayısı yoktur [2].

6. 2 'nin her kuvveti PP1'dir, çünkü $M = 2^n$ ise $G(M) = 2^{n+1} - 1$ olur ve

$$F(M) = 2M - G(M) = 2 \cdot 2^n - (2^{n+1} - 1) = 1$$

sağlanır.

7. N bir PP1 sayısı ve $2N - 1$ asal olmak üzere, $M = N(2N - 1)$ ise, M mükemmeldir, çünkü

$$G(M) = G(N)G(2N - 1) = G(N)2N = (2N - 1)2N$$

olur ve $F(M) = 2M - G(M) = 0$ sağlanır.

Editörün Notu. Yazar, Mersenne sayıları ile yetkin sayılar arasında bir ilişkinin olduğunu söylemenin yanlış olmayacağını söylüyor. Gerçekten de öyle! Öklit ve Euler tarafından kanıtlanan ve Mersenne sayıları ile yetkin çift sayılar arasında bire bir ilişki kuran şu teoremin kanıtı ve açıklayıcı örnekler [4]'te var.

Teorem. n bir çift tamsayı olsun. n 'nin yetkin olması için gerekli ve yeterli koşul, p ve $2^p - 1$ asal olmak üzere n 'nin $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ şeklinde yazılabilesidir.

Bilinen en büyük Mersenne sayısı 756839. Sonsuz tane Mersenne sayısının var olduğu ileri sürülmesine karşın bu henüz kanıtlanmamış bir sav. Yetkin sayı tanımı M.Ö. 300 yıllarında Öklit tarafından verilmiş. Öklit 23 yüzyıl önce tüm yetkin sayıların çift sayılar olduğunu ileri sürmüş, ama bugün hâlâ bir tek sayının yetkin olup olmayacağını bilemiyoruz. Ancak bir tek sayının yetkin olması için gerekli koşullar kanıtlanmış. Örneğin, (eğer varsa) tek ve yetkin bir sayının en az sekiz tane asal böleni olması ve en az yüz basamaklı olması gerekiyor. Ancak bu sayılar hakkındaki en çarpıcı sonuç Euler'in şu teoremi:

Teorem. n bir tek ve yetkin tamsayı ise, $p, q_1, \dots, q_r$ asal ve $p \equiv a \equiv 1 \pmod{4}$ olmak üzere $n = p^a q_1^{2b_1} q_2^{2b_2} \dots q_r^{2b_r}$ şeklinde yazılabilir.

KAYNAKÇA

- [1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4. baskı, Clarendon, Oxford (1960).
- [2] A. M. İbrahim & F. A. Salama, *On Odd Perfect Numbers*, *Journal of Institute of Mathematics and Computer Sciences*, 4, sayı 1 (1993).
- [3] R. P. Jerrad & N. Temperley, *Almost Perfect Numbers*, *Mathematics Magazine*, 46, sayı 2 (1973).
- [4] H. T. Kaptanoğlu, *Sayılar Dünyasında Gezintiler*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 4, 12-16 (1994).
- [5] H. Rademacher & O. Toeplitz (çeviren O. Ş. İçen), *Sayılar ve Şekiller*, 2. baskı, Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1964.
- [6] L. Welsh, *Bibliography and Listing of Mersenne Numbers*, pub/Math/mersenne.zip, Bilkent Üniversitesi FTP Arşivi, (1989).

FERMAT VE EULER TEOREMLERİ ÜZERİNE UYGULAMALAR

Emre Alkan *

Fermat ve Euler teoremlerini daha önce kanıtlarıyla beraber vermiştik [1]. Bu teoremlerin kullanılmasını sergilemek amacıyla bu yazıda bir dizi uygulama yapacağız. Bu yazıda sayı kelimesi tamsayı anlamında kullanılacak.

Lemma. $(a, m) = 1$ olsun. $a^x \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde en küçük x sayısı n olsun. $a^k \equiv 1 \pmod{m}$ ise $n \mid k$ olur.

Kanıt. $a^x \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde en küçük bir x sayısı vardır, çünkü Euler teoremiyle $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ olduğunu biliyoruz. Bu en küçük sayı n olsun. Bölme algoritmasıyla $k = qn + r$ ($0 \leq r < n$) yazılabilir. Böylece $a^k \equiv a^{qn+r} \equiv a^r \pmod{m}$ elde edilir. n en küçük pozitif sayı olduğundan $r = 0$, dolayısıyla $n \mid k$ elde edilir.

Problem. p bir asal sayı ve $(p, m) = 1$ olmak üzere $n = p^k m$ olsun. $p \mid 2^n - 1$ ise, $p \mid 2^m - 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n = pt$ olsun.

$$2^{tp} - 1 = (2^p - 1)(2^{(t-1)p} + 2^{(t-2)p} + \dots + 2^p + 1).$$

Fermat teoremiyle $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ olduğundan $p, 2^p - 1$ 'i bölmez. Böylece

$$p \mid 2^{(t-1)p} + 2^{(t-2)p} + \dots + 2^p + 1.$$

Kolayca

$$\begin{aligned} 2^{(t-1)p} + 2^{(t-2)p} + \dots + 2^p + 1 &\equiv \\ 2^{t-1} + 2^{t-2} + \dots + 2 + 1 &\equiv 2^t - 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

olduğundan, $p \mid 2^t - 1$ elde edilir. Bu sonucu yineleyerek $p \mid 2^m - 1$ elde ederiz.

Problem. $n > 1$ ise $n, 2^n - 1$ 'i bölmez.

Çözüm. $n > 1$ ise n asal çarpanlarına ayrılabilir. En küçük asal çarpan p olsun. $n = p^k p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ yazalım. $n \mid 2^n - 1$ kabul edelim.

Böylece $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ ve Fermat teoremiyle $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ elde ederiz. Lemma ile $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ olacak şekilde en küçük $k > 1$ sayısı vardır. $k = 1$ olamaz; $k \mid n$ ve $k \mid p - 1$ olur. Fakat böyle bir k sayısının olmayacağı açıktır. Dolayısıyla $n, 2^n - 1$ 'i bölmez.

Problem. $n_1, n_2, \dots, n_k$ pozitif tamsayıları için $n_1 \mid 2^{n_2} - 1, n_2 \mid 2^{n_3} - 1, \dots, n_{k-1} \mid 2^{n_k} - 1$ ve $n_k \mid 2^{n_1} - 1$ ise, $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n_1 > 1$ olsun. n_1 asal çarpanlarına ayrılabilir. n_1 'in en küçük asal çarpanı p_1 olsun. $p_1 \mid 2^{n_2} - 1$, yani $2^{n_2} \equiv 1 \pmod{p_1}$ ve $2^{p_1-1} \equiv 1 \pmod{p_1}$ Fermat teoremi sayesinde yazılabilir. Lemma ile $2^d \equiv 1 \pmod{p_1}$ olacak şekilde en küçük bir $d > 1$ sayısı bulabiliriz. Buradan şu elde edilir: Öyle bir p_2 asal sayısı vardır ki $p_2 \mid n_2$ ve $p_2 \mid p_1 - 1$. Bu akıl yürütme devam ettirilerek şöyle bir asal sayılar dizisi bulunur: $p_3 \mid n_3$ ve $p_3 \mid p_2 - 1, \dots, p_k \mid n_k$ ve $p_k \mid p_{k-1} - 1$. Ve nihayet $n_k \mid 2^{n_1} - 1$ olduğundan $p_k \mid 2^{n_1} - 1$ olur ve bundan dolayı öyle bir asal $p' \mid n_1$ vardır ki $p' \mid p_k - 1$ olur. Böylece $p_1 - 1 > p_2, p_2 - 1 > p_3, \dots, p_k - 1 > p_k$ ve $p_k - 1 > p'$ elde edilir. Fakat $p' \geq p_1$ olduğundan bu durum mümkün değildir. Dolayısıyla $n_1 = 1$ böylece $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$ elde edilir.

Problem. Bir m pozitif sayısı veriliyor. $M, 2^k - 2^m - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) şeklindeki sayıların kümesi olsun. M 'nin herhangi iki elemanı arasında asal bir sonsuz alt kümesi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İstenen alt kümeyi tümevarımla kuracağız. Herhangi bir $a_1 \in M$ ile başlayalım. Kabul edelim ki ilk n sayı $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ şartını sağlasın. a_{n+1} için, $(a_{n+1}, a_i) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmalıdır. $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarının hepsinin asal çarpanlara ayrılışında geçen

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

asal sayılar $p_1, p_2, \dots, p_r$ olsun.

$$a_{n+1} = 2^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)} - 2^m - 1$$

olarak seçelim. Eğer $(a_{n+1}, a_i) > 1$ ise $\{1, 2, \dots, r\}$ içinde bir j için $p_j \mid a_{n+1}$ olmalıdır. Kolayca

$$2^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)} \equiv 2^m + 1 \pmod{p_j}$$

elde edilir. Öte yandan $2^{p_j-1} \equiv 1 \pmod{p_j}$ Fermat teoremiyle yazılabilir. Bu iki denklemden $2^m + 1 \equiv 1 \pmod{p_j}$ ve $p_j = 2$ elde edilir ki bu mümkün değildir. $(a_{n+1}, a_i) = 1$ olur. Dolayısıyla tümevarımla M 'nin böyle bir sonsuz alt kümesinin varlığı anlaşılır.

Problem. (1990 Uluslararası Matematik Olimpiyadı) $n^2 \mid 2^n + 1$ olacak şekildeki tüm $n > 1$ sayılarını bulunuz.

Çözüm. $n^2 \mid 2^n + 1$ ise $n \mid 2^n + 1$ olur. $n > p$ ise $3 \mid n$ olduğunu görelim. n 'nin en küçük asal çarpanı p olsun. $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{p}$ ve $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ Fermat teoremiyle yazılabilir. $2^d \equiv 1 \pmod{p}$ olacak şekilde en küçük bir $d > 1$ sayısı vardır. $d \mid 2n$ ve $d \mid p-1$ 'den kolayca $d = 2$ elde edilir. Dolayısıyla $p = 3$ ve $3 \mid n$ olur. $n = 3^k d$, $(d, 3) = 1$ ve $k \geq 1$ alalım. $3^{2k} \mid 2^{3^k d} + 1$ yazılabilir. Çarpanlara ayırma ile

$$2^{3^k d} + 1 = (2^d + 1) \prod_{t=0}^{k-1} (2^{3^t 2^d} - 2^{3^t d} + 1)$$

yazılabilir. Şunları gözleyelim:

$$2^{3^t 2^d} - 2^{3^t d} + 1 \equiv 2^{3^t d} - 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

ve $2^{3^t d} \equiv 2 \pmod{9}$ ise, $(-1)^d \equiv 2 \pmod{9}$ olur ki bu mümkün değildir. Öte yandan $(d, 3) = 1$ olduğundan $2^d \equiv -1 \pmod{3}$ ve $2^d \not\equiv -1 \pmod{9}$ olur. Böylece $2^{3^k d} + 1$, tam olarak 3^{k+1} ile bölünür. Kolayca $2k \leq k+1$ ve $k \geq 1$ 'den $k = 1$ elde ederiz. $n = 3d$ şeklinde olmalıdır. $d > 1$ ise d 'nin en küçük asal çarpanı p_1 olsun. Kolayca $2^{2 \cdot 3d} \equiv 1 \pmod{p_1}$ ve $2^{p_1-1} \equiv 1 \pmod{p_1}$ Fermat teoremiyle yazılabilir. Öte yandan $p_1 \geq 5$ olmalıdır. $2^a \equiv 1 \pmod{p_1}$ olacak şekilde en küçük bir $a > 1$ sayısı vardır. $a \mid 6d$ ve $a \mid p_1 - 1$ olduğundan $a = 2, 3$ veya 6 olur. $a = 2$ ise $p_1 = 3$ olur. $a = 3$ veya 6 ise de $p_1 = 7$ elde edilir. Fakat her $s \in \mathbb{Z}^+$ için $7 \nmid 2^s + 1$ olduğundan, $d > 1$ olamaz; $d = 1$ elde edilir. $n^2 \mid 2^n + 1$ olacak şekildeki tek sayı $n = 3$ olarak bulunur.

Problem. a ve b pozitif sayıları için, $2a - 1$, $2b - 1$ ve $a + b$ asal sayılar iseler, $a + b$ 'nin $a^b + b^a$ ve $a^a + b^b$ sayılarını bölmediğini gösteriniz.

Çözüm. $(a, a + b) = (b, a + b) = (ab, a + b) = 1$ ve

$$a + b \mid (a^a + b^b)(a^b + b^a) = a^{a+b} + b^{a+b} + (ab)^a + (ab)^b$$

olur. $a > b$ ve Fermat teoremiyle

$$a^{a+b} + b^{a+b} \equiv a + b \equiv 0 \pmod{a + b}$$

kabul edebiliriz. Kolayca $(ab)^{a-b} \equiv -1 \pmod{a + b}$, yani $(ab)^{2a-2b} \equiv 1 \pmod{a + b}$ elde edilir. Öte yandan yine Fermat teoremiyle $(ab)^{a+b-1} \equiv 1 \pmod{a + b}$ olur. $(ab)^d \equiv 1 \pmod{a + b}$ sağlayan en küçük bir d sayısı vardır. $d = 1$ ise $ab \equiv 1 \pmod{a + b}$ ve $(ab)^{a-b} \equiv 1 \pmod{a + b}$ olur ki bu mümkün değildir. $d \mid 2a - 2b$ ve $d \mid a + b - 1$ 'den kolayca $d \mid 2(2a - 1)$ ve $d \mid 2(2b - 1)$, $2a - 1$ ve $2b - 1$ de asal olduğundan $d = 2$ buluruz. $(ab)^2 \equiv 1 \pmod{a + b}$ ve $ab \not\equiv 1 \pmod{a + b}$ olduğundan $ab \equiv -1 \pmod{a + b}$, yani $a + b \mid ab + 1$ elde edilir. Öte yandan $a + b \mid a^2 + ab$, $a + b \mid (a-1)(a+1)$, ve $a + b$ asal olduğundan $a + b \mid a - 1$ veya $a + b \mid a + 1$ elde edilir ki her iki durum da mümkün değildir.

Problem. a, m pozitif sayıları için $x_0 = 1$ ve $x_{n+1} = a^{x_n}$ olacak şekilde bir x_n dizisi tanımlanıyor. Öyle bir N pozitif sayısının varlığını gösteriniz ki $N \leq h \leq k$ için $x_h \equiv x_k \pmod{m}$ olsun [7].

Çözüm. $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ kümesi $\pmod{m}$ de periyodik olur. Periyot uzunluğu b olsun. Bu kümede periyodik olmayan terimler olabilir, ama belli bir sınırdan sonra kümenin kendisi periyodik olmalıdır. Belli bir a^k 'den sonra

$$x_h = a^{a^{\dots}} \quad \text{ve} \quad x_k = a^{a^{\dots}}$$

oldüğundan $x_h = x_k \pmod{m}$ ancak ve ancak $x_{h-1} \equiv x_{k-1} \pmod{b}$ elde ederiz. $(a, m) > 1$ ise $a^x \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde bir x pozitif sayısı yoktur. Böylece $b < m$ olur. Öte yandan $(a, m) = 1$ ise, Euler teoremiyle $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ olur ki bundan yine $b \leq \phi(m) < m$ elde edilir. Dolayısıyla bu akıl yürütme tekrarlanarak, elde edilen modül tabanları azalan bir dizi oluştururlar. Sonlu sayıda adımdan sonra (diyelim ki t 'yinci adım) $x_{h-t} \equiv x_{k-t} \pmod{2}$ eşdeğer koşulu elde edilir. Fakat $\pmod{2}$ 'de dizinin tüm terimlerinin, x_0 terimi hariç, denk

olacağı açıktır. Eğer N sayısı, $N \geq t$ olacak şekilde seçilirse istenen $N \leq h \leq k$ için $x_h \equiv x_k \pmod{m}$ elde edilir.

Şimdi $N \leq h \leq k$ ve $x_h \equiv x_k \pmod{m}$ olacak şekilde bir N bulmak istiyoruz. Azalan bir modül dizisi bulduk. Böylece $\pmod{2}$ 'ye indirgeme en fazla m adımda biter. Fakat her adımda bir sonraki modüle geçebilmek için bazı şartlar vardır. $x_h \equiv x_k \pmod{m}$ ise $x_{h-1} \equiv x_{k-1} \pmod{b}$, $a^i \equiv a^j \pmod{m}$ ve $i < j$ olacak şekilde en küçük sayı i ise, $x_{h-1} \geq i$ olmalıdır ve bu şart her adımda olmalıdır. Elde edilen azalan modül dizisi $b, b_1, b_2, \dots, b_s$ olsun. Her defasında $a^i \equiv a^j \pmod{b_i}$ ve $i < j$ olacak şekilde en küçük i sayısı için $i < b_i < m$ olur. Şimdi başlangıç için x_h 'yi $x_h = a^{a^a}$ olarak seçebiliriz.

$a^{a^a} > m$ olacak şekilde bir x sayısı bulabiliriz. İndirgeme en fazla m adım sürebileceğinden (her adımda bir a eksiliyor), x_h 'yi $x_h = a^{a^{a^a}} \dots a^{a^a}$ olarak seçeriz. $h - 1 = x + m$ olacağından $N = x + m + 1$ almak işimizi görür.

Problem. a, b pozitif sayılar ve p asal olmak üzere, $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ ise, $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Fermat teoremiyle $a^p \equiv a \pmod{p}$ ve $b^p \equiv b \pmod{p}$ olduğundan, $a \equiv b \pmod{p}$ ve $p \mid a - b$ elde ederiz.

$$a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})$$

ve $i = 1, 2, \dots, p$ için $a^{p-i}b^{i-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olduğundan,

$$p \mid \frac{a^p - b^p}{a - b}$$

elde edilir. Dolayısıyla $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ olur. Burada $(a, p) = (b, p) = 1$ olduğunu kabul ettik. Eğer $p \mid a$ ve $p \mid b$ ise $p^2 \mid a^p - b^p$ olur ki $p \geq 2$ olduğundan yine $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ elde ederiz.

Şimdi Euler teoreminin bir genellemesini vereceğiz. Önce bir Lemma.

Lemma. n pozitif sayısının pozitif bir böleni d ise, $n - \phi(n) \geq d - \phi(d)$ olur.

Kanıt. Sol taraf n ile ortak asal böleni olan sayıların sayısıdır. Sağ taraf da aynı şekilde belirtilebilir. $d \mid n$ olduğundan d ile ortak asal böleni olan bir sayının, n ile de ortak asal böleni olacaktır.

Teorem. Herhangi a ve m pozitif sayıları için $a^m \equiv a^{m-\phi(m)} \pmod{m}$ olur.

Kanıt. $m \mid a^{m-\phi(m)}(a^{\phi(m)} - 1)$ olduğunu göreceğiz. $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \dots q_k^{\beta_k}$ olacak şekilde çarpanlara ayıralım. Burada $p_1, p_2, \dots, p_r, a$ 'nın da asal bölenleri olsunlar. $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için Euler teoremiyle $a^{\phi(q_i^{\beta_i})} - 1 \mid a^{\phi(m)} - 1$ ve $q_i^{\beta_i} \mid a^{\phi(q_i^{\beta_i})} - 1$ olduğundan, $q_i^{\beta_i} \mid a^{m-\phi(m)}(a^{\phi(m)} - 1)$ elde ederiz. Şimdi bir $p_i^{\alpha_i}$ alalım. $p_i^{\alpha_i} \mid a^{m-\phi(m)}$ olduğunu göstereceğiz. $p_i \mid a$ olduğundan $\alpha_i \leq m - \phi(m)$ olduğunu görmek yeter. Lemma ile $m - \phi(m) \geq p_i^{\alpha_i} - \phi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i-1}$ elde ederiz. $p_i \geq 2$ olduğundan $2^{\alpha_i-1} \geq \alpha_i$ olduğunu görmek yeter. $n \geq 1$ için $2^{n-1} \geq n$ olduğu tümevarımla gösterilebilir.

Şu sonucu daha önce göstermiştik [2].

Teorem. Tamsayı katsayılı, sabit olmayan bir $p(n)$ polinomu, belli bir sınırdan sonraki her n sayısı için asal olamaz.

Bu sonucu benzer daha ilginç bir teoremi göstereceğiz.

Teorem. $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m$ tamsayılar ve $Q_j(x)$ 'ler tamsayı katsayılı polinomlar olsun.

$$f(n) = Q_1(n)a_1^n + Q_2(n)a_2^n + \dots + Q_m(n)a_m^n$$

ise, $f(n)$ sonsuz sayıda tamsayı n için asal değerler almaz. ($n \rightarrow \infty$ iken $f(n) \rightarrow \infty$ olduğu kabul ediliyor.)

Kanıt. Tersine $f(n)$ 'nin belli bir sınırdan sonra hep asal olduğunu kabul edelim. $f(n) \rightarrow \infty$ olduğundan öyle bir n bulunabilir ki p asal olmak üzere, $f(n) = p > a_m$ olsun. Her k tamsayısı için $Q_i(n+kp) \equiv Q_i(n) \pmod{p}$ olduğunu biliyoruz. Öte yandan $(a_i, p) = 1$ olduğundan, Fermat teoremiyle $a_i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ yazabiliriz. Bu iki sonucu aynı anda kullanabilmek için, $f(n+kp(p-1))$ sayılarına bakılırsa,

$$f(n+kp(p-1)) \equiv f(n) \pmod{p}$$

olduğu görülür ki f hep asal kabul edildiğinden, $f(n+kp(p-1)) = p$ elde edilir. Bu ise $n \rightarrow \infty$ iken $f(n) \rightarrow \infty$ olmasıyla çelişir.

Şimdi Fermat teoreminin tersinden bahsedeceğiz. a, m pozitif sayıları için, $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ise m asal olur mu? Bunun her zaman doğru olmadığını görelim.

Teorem. a pozitif bir sayı ise, $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde asal olmayan sonsuz tane m sayısı bulunabilir.

Kanıt. $(a, p) = 1$ olacak şekilde bir $p \geq 3$ asal sayısı alalım.

$$m = \frac{a^{2p} - 1}{a^2 - 1} = \left(\frac{a^p - 1}{a - 1} \right) \left(\frac{a^p + 1}{a + 1} \right)$$

olsun; m asal değildir. Kolayca, $a^{2p} \equiv 1 \pmod{m}$ olur. Eğer $2p \mid m - 1$, eşdeğer olarak

$$2p(a^2 - 1) \mid a^2(a^{p-1} - 1)(a^{p-1} + 1)$$

olmasını sağlarsak teorem kanıtlanmış olacak. Fermat teoremiyle, $p \mid a^{p-1} - 1$. Öte yandan $p - 1$ çift olduğundan $a^2 - 1 \mid a^{p-1} - 1$, ve p üzerine $p \nmid a^2 - 1$ şartı da getirilirse, $p(a^2 - 1) \mid a^{p-1} - 1$ elde edilir. $2 \mid a^2(a^{p-1} + 1)$ olduğu açıktır. $p \nmid a(a^2 - 1)$ olacak şekilde sonsuz tane p seçimi bulunacağından teorem elde edilir.

Tanım. $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ve m asal olmayacak şekildeki m sayılarına *yalancı asal* denir.

Şu sonuç Fermat teoreminin tersi olarak kabul edilebilir.

Teorem. $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, $x < m - 1$ ve $x \mid m - 1$ için $a^x \not\equiv 1 \pmod{m}$ ise, m asaldır.

Kanıt. $a^d \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde en küçük bir d sayısı vardır. $d \mid m - 1$ olduğundan $d = m - 1$ olmalıdır. Öte yandan $(a, m) = 1$ olduğundan, Euler teoremiyle $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ yazılabilir ve kolayca $m - 1 \mid \phi(m)$ olur. Fakat $\phi(m) \leq m - 1$ olduğundan $\phi(m) = m - 1$ olur ki bu m 'in asal olması demektir.

Problem. $n > 3$ bir tek sayı olsun. $p \mid 2^{\phi(n)} - 1$ ve $p \nmid n$ olacak şekilde bir p asal sayısının var olduğunu gösteriniz [5].

Çözüm. $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ ve p_i 'ler asal olsun.

$$\phi(n) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \dots p_r^{k_r-1} (p_1 - 1) \dots (p_r - 1)$$

olur. $2^{(p_1-1)\dots(p_r-1)} - 1$ sayısını ele alalım. Bu sayının $p_1, p_2, \dots, p_r$ sayılarından farklı bir asal bölene olduğunu gösterirsek,

$$2^{(p_1-1)\dots(p_r-1)} - 1 \mid 2^{\phi(n)} - 1$$

olacağından problem sonuçlanmış olur. Eğer her $i = 1, 2, \dots, r$ için $p_i \geq 5$ sağlanırsa, kolayca $3 \mid 2^{(p_1-1)\dots(p_r-1)} - 1$ elde edilir. Bu halde işimiz biter.

Öteki durumda genelliği bozmadan $p_1 = 3$ kabul edelim. Elimizdeki sayı $2^{2(p_2-1)\dots(p_r-1)} - 1$ olur; veya n sayısında 3'ten başka asal sayı yoktur, yani $n = 3^k$ 'tür.

$$2^{2(p_2-1)\dots(p_r-1)} - 1 = \underbrace{(2^{(p_2-1)\dots(p_r-1)} - 1)}_a \underbrace{(2^{(p_2-1)\dots(p_r-1)} + 1)}_b$$

ve $(a, b) = 1$ olur. Öte yandan Fermat teoremiyle $p_2 p_3 \dots p_r \mid a$ elde edilir. $b \equiv 2 \pmod{3}$ olduğundan $3 \nmid b$. Ayrıca $i = 2, 3, \dots, r$ için $p_i \mid a$ olduğundan, b sayısının yeni bir asal bölene ihtiyacı vardır: $p_{r+1} \mid b$. Kolayca $p_{r+1} \mid 2^{\phi(n)} - 1$ ve $p_{r+1} \nmid n$ olur.

$n = 3^k$ durumunda ise, $k \geq 1$ ise

$$2^{\phi(n)} - 1 = 2^{2 \cdot 3^{k-1}} - 1$$

olur. $k \geq 2$ ise $7 \mid 2^{\phi(n)} - 1$ ve $7 \nmid n$ elde edilir. $k = 1$ ise $n = 3$ olmak üzere problemin şartı sağlanmaz. Dolayısıyla $n > 3$ olan her tek n sayısı için $p \mid 2^{\phi(n)} - 1$ ve $p \nmid n$ olacak şekilde bir p asal sayısı vardır.

Fermat ve Wilson teoremleri aynı teoreme birleştirilebilirler [3]:

Teorem. (Leo & Moser) Her a pozitif sayısı ve p asal sayısı için $p \mid (p-1)!a^p + a$ olur.

Kanıt. $(p-1)!a^p + a \equiv -a^p + a \equiv 0 \pmod{p}$ Fermat ve Wilson teoremleriyle elde edilir. Tersine her a için $p \mid (p-1)!a^p + a$ ise $a = 1$ alarak $p \mid (p-1)! + 1$ Wilson teoremiyle elde edilir. Böylece $p \mid (p-1)!a^p + a^p$ ve $p \mid a^p - a$ elde edilir ki bu da Fermat teoremidir.

Not. [1]'de sondan bir önceki teoremden $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ olduğunu gösterirken nasıl $\phi(ab) \leq \phi(a)\phi(b)$ elde ettiğimizi belirgin bir şekilde şöyle gösterebiliriz: $(x, ab) = 1$ ise $(x, a) = (x, b) = 1$ olur. Şu halde $x \equiv r_i \pmod{a}$ ve $x \equiv s_j \pmod{b}$ yazılabilir. $(a, b) = 1$ olduğundan Çinli Kalan Teoremi'yle bu sistemin bir x çözümü vardır ve x , a ve b 'nin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. $x \equiv 1 \pmod{a}$ ve $x \equiv 0 \pmod{b}$ denkliklerinden $x = bt$ ve $bt \equiv 1 \pmod{a}$ olacak şekilde bir t bulunabilir, çünkü $(a, b) = 1$ 'dir. $(t, a) = 1$ olduğundan $t \in \{r_1, r_2, \dots, r_{\phi(a)}\}$. Benzer şekilde $x \equiv 0 \pmod{a}$ ve $x \equiv 1 \pmod{b}$ denkliklerinden $x = at'$ ve $at' \equiv 1 \pmod{b}$ olacak şekilde bir t' bulunabilir; $(t', b) = 1$ olduğundan $t' \in \{s_1, s_2, \dots, s_{\phi(b)}\}$.

Şimdi $bt \equiv 1 \pmod{a}$, $t' \equiv 0 \pmod{a}$, $t \equiv 0 \pmod{b}$ ve $at' \equiv 1 \pmod{b}$ denkliklerinden

$$\begin{aligned} btr_i &\equiv r_i \pmod{a} & at's_j &\equiv 0 \pmod{a} \\ btr_i &\equiv 0 \pmod{b} & at's_j &\equiv s_j \pmod{b} \end{aligned}$$

bulunur. Bunlar taraf tarafa toplanarak $btr_i + at's_j \equiv r_i \pmod{a}$ ve $btr_i + at's_j \equiv s_j \pmod{b}$ elde edilir. Kolayca $(tr_i, a) = 1$ ve $(t's_j, b) = 1$ olduğundan, $x = as_i + br_j$ biçiminde yazılır ve $\phi(ab) \leq \phi(a)\phi(b)$ olur.

Gene [1]'de Euler Teoremi'nin 3. kanıtında M 'nin bir grup olduğunu gözlemeye çalıştık. $(a, m) = 1$ olan her a için $ax_0 \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde bir x_0 bulup $x_0 \equiv z_0 \pmod{m}$ alarak $z_0 = a^{-1}$ dedik. Burada $(z_0, m) = 1$ olduğu belirtilmelidir. $(x_0, m) = 1$ olduğundan $(z_0, m) = 1$ olduğu açıktır. Ters elemanın varlığı yetmez, o elemanın ayrıca M 'nin bir elemanı olması gerekir.

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, *Fermat ve Euler Teoremleri*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 3, 7-8 (1994).
- [2] E. Alkan, *Sayılar Teorisinde Çözülmemiş Problemler*, *Matematik Dünyası*, 3, sayı 3, 17-21 (1993).
- [3] Ş. Alpay, *Wilson Teoremi*, *Matematik Dünyası*, 3, sayı 4, 12-14 (1993).
- [4] G. H. Hardy & E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5. baskı, Clarendon, Oxford, 1979.
- [5] C. A. Nicol & J. L. Selfridge, Problem E3452, *American Mathematical Monthly*, 98, 645 (1991).
- [6] W. Sierpinski (çeviren A. Sharma), *A Selection of Problems in the Theory of Numbers*, Pergamon, Oxford, 1964.
- [7] W. P. Wardlaw, Problem 10324, *American Mathematical Monthly*, 100, 688 (1993).

PROBLEMLERLE EĞLENELİM (Mİ?) (III)

1. Bir sayının 7, 11 veya 13 ile bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun sayının basamaklarını sağdan başlayarak üçlü gruplar halinde sırayla bir toplayıp, bir çıkartarak elde edilen sayının 7, 11 veya 13 ile bölünebilmesi olduğunu kanıtlayınız. Örneğin, $N = 48286615$ alalım; $48 - 286 + 615 = 377$ ve $13 \mid 377$ olduğundan, $13 \mid N$ dir. fakat $7 \nmid N$ ve $11 \nmid N$ olur.
2. Bir sayının $10^k + 1$ ile bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun sayının basamaklarını sağdan aşılayarak k 'li gruplar halinde sırayla bir toplayıp, bir çıkartarak elde edilen sayının $10^k + 1$ ile bölünebilmesi olduğunu kanıtlayınız. Örneğin, $7 - 55 + 48 = 0$ ve $101 \mid 0$ olduğundan $101 \mid 75548$.
3. $(a, b) = 1$ olmak üzere, bir sayının ab ile bölünebilmesi için a ve b ile bölünebilmesinin yeterli olduğunu gösteriniz.
4. M , şu koşulları sağlayan $n \times n$ matrislerin kümesi olsun:
(i) Birim matris $I \in M$.

(ii) $A, B \in M$ ise, ya $AB \in M$ veya $-AB \in M$; fakat aynı anda AB ve $-AB$, M 'de olamazlar.

(iii) $A, B \in M$ ise, ya $AB = BA$ ya da $AB = -BA$.

(iv) $A \in M$ ve $A \neq I$ ise, $AB = -BA$ koşulunu sağlayan en az bir $B \in M$ vardır.

M kümesinde n^2 tane matris olduğunu kanıtlayınız.

5. Burhaniye'de hiç kimsenin 13.000'den fazla saç teli yoksa ve orada 13.000'den fazla kişi yaşıyorsa, orada en az iki kişinin saç tellerinin aynı sayıda olduğunu kanıtlayınız [1].

KAYNAKÇA

- [1] A. Nesin, *Şapkadan Güvercin Çıkarmak*, *Bilim ve Ütopya*, Kasım, 1994.

36. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI TAKIM SEÇME SINAVI

Derleyen: Ali Doğanaksoy *

3. Ulusal Matematik Olimpiyadı 1. Aşama Sınavı 29 Nisan 1995 tarihinde yapıldı. 799 lise ve ortaokul öğrencisinin katıldığı bu sınav sonunda 40 öğrenci Aralık ayında yapılacak olan 2. Aşama Sınavı'na katılmaya hak kazandı. Bunun yanı sıra, 41 öğrenci ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarına hazırlama kampına katılma hakkını elde etti.

13-23 Temmuz 1995 tarihleri arasında Kanada'da yapılacak olan 36. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'nda ülkemizi temsil edecek olan ulusal takım, 15-16 Nisan 1995 tarihlerinde yapılan sınav sonucu belirlendi. Bu olimpiyatta yarışacak takımımızı oluşturan öğrenciler Halil Bayrak, Ethem Çanakoğlu, Mehmet Ekmeççi, N. Aytek Erdil, Caner Kazancı ve Bayram Yenikaya'dır.

Aşağıda takım seçme sınavının soruları yer almaktadır.

Birinci Gün, 15 Nisan 1995

1. $b \geq a$ olmak üzere verilen a, b gerçel sayıları için aşağıdaki sistemin tüm çözümlerini bulunuz.

$$\begin{aligned}x_1^2 + 2ax_1 + b^2 &= x_2 \\x_2^2 + 2ax_2 + b^2 &= x_3 \\&\vdots \\x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 &= x_n \\x_n^2 + 2ax_n + b^2 &= x_1\end{aligned}$$

2. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\sigma(j) \geq j$ koşulunu sağlayan tam olarak iki j 'nin bulunduğu $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ permütasyonlarının sayısını bulunuz.

3. Bir ABC eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin O merkezli çevrel çemberinin $\widehat{AC}$ (küçük) yayı üzerinde A ve C 'den farklı bir D noktası alınıyor. D 'den BC ve AC doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla E ve F olmak üzere, EF ile OD 'nin kesim noktasının geometrik yeri nedir?

İkinci Gün, 16 Nisan 1995

4. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $\widehat{CAB} = 40^\circ$, $\widehat{CAD} = 30^\circ$, $\widehat{DBA} = 75^\circ$ ve $\widehat{DBC} = 25^\circ$ 'dir. $\widehat{BDC}$ 'yi bulunuz.

5. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız:

Her a pozitif tamsayısı için $n \mid a^n - n \iff n$ 'nin her p asal böleni için $p^2 \nmid n$ ve $p - 1 \mid n - 1$.

6. $\{x_n\}$ gerçel sayı dizisi

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3} \quad (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanıyor.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{an^b} = 1$$

olacak şekilde a ve b gerçel sayılarının varlığını gösteriniz.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A111. 999999999 sayısını hangi sayı ile çarptığımızda, tüm rakamları 1 olan bir sayı elde ederiz?

A112. $a, b > 0$ gerçel sayıları için

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

olduğunu ispatlayınız.

A113. Bir $ABCD$ dörtgeninde $|AB| = |AD|$, $\widehat{CAB} = 3\widehat{CAD}$, $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ ve $|BC| > |AD|$ ise, $\widehat{ACD}$ 'yi bulunuz. (Ergün Yaraneri)

A114. $\frac{1}{\sqrt[5]{99+70\sqrt{2}}}$ sayısını $\sqrt{a} + b$ şeklinde ifade ediniz. (Cuma Arslan)

A115. $n > 2$ bir doğal sayı ise,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y111. ABC üçgeninde $\hat{A} = 45^\circ$ ve $\hat{B} = 75^\circ$ 'dir. AB kenarı üzerinde $\widehat{ACP} = 15^\circ$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $|PB| = 2|AP|$ olduğunu ispatlayınız.

Y112. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2$ denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

Y113. a, b, c, d pozitif gerçel sayıları veriliyor. Kenar uzunlukları $\sqrt{a^2 + b^2 + d^2 + 2ab}$, $\sqrt{a^2 + c^2 + d^2 + 2cd}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$ olan bir üçgenin alanının, a, b, c, d cinsinden rasyonel ifadesi bulunduğunu gösteriniz.

Y114. O merkezli ve r yarıçaplı çemberin üzerinde ve içinde kesişmeyecek şekilde $[AB]$ çapı ve $[CM]$ kirişi çiziliyor. $\widehat{ACM} + \widehat{BMC}$ 'yi hesaplayınız.

Y115. ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı R , içteğet çember yarıçapı r ve ortak üçgeninin içyarıçapı p ise,

$$p \leq 1 - \frac{(1+r)^2}{3}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Turgay Uçkan)

(Bir üçgenin *ortık üçgeni*, köşeleri kenarlar üzerindeki yükseklik ayakları olan üçgendir.)

ÇÖZÜMLER

A101. ABC üçgeninde $[BR]$ ve $[CS]$ sırasıyla $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarına ait yüksekliklerdir. $\frac{|SR|}{|BC|} = \cos \hat{A}$ olduğunu gösteriniz. (C. Alparslan Ertuğ)

Çözüm. $\sin \hat{A} = \frac{|BR|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|AC|}$, $\cos \hat{A} = \frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|}$ ile

$$|SR|^2 = |AS|^2 + |AR|^2 - 2|AS||AR|\cos \hat{A},$$

$$|AR|^2 = |AB|^2 - |BR|^2,$$

$$|AS|^2 = |AC|^2 - |CS|^2$$

bağıntılarından

$$|BR| = |AB|\sin \hat{A},$$

$$|AR| = |AB|\cos \hat{A},$$

$$|CS| = |AC|\sin \hat{A},$$

$$|AS| = |AC|\cos \hat{A}$$

yazılır. Bunlardan

$$|AR|^2 = |AB|^2 - |AB|^2 \sin^2 \hat{A} = |AB|^2 \cos^2 \hat{A},$$

$$|AS|^2 = |AC|^2 \cos^2 \hat{A},$$

ve buradan da $|AR||AS| = |AB||AC|\cos^2 \hat{A}$ bulunur.

$$|SR|^2 = |AC|^2 \cos^2 \hat{A} + |AB|^2 \cos^2 \hat{A}$$

$$- 2|AB||AC|\cos^2 \hat{A} \cos \hat{A}$$

$$= \cos^2 \hat{A}(|AC|^2 + |AB|^2 - 2|AB||AC|\cos \hat{A})$$

$$= |BC|^2 \cos^2 \hat{A}$$

olduğundan, $\frac{|SR|}{|BC|} = \cos \hat{A}$ elde edilir.

(Çözenler: Nuran Aysal, Atasâğın Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Zafer Dumlu, Murat Ergünel, Erol Gedikli, Muammer Keleş, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Batur Orkun,

Osman Özkurt, Gültekin Polat, Melih Sertaç, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldırım, Recep Zihni.)

A102. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ve $\widehat{ACB} = 40^\circ$ 'dir. $[AC]$ kenarı üzerinde $\widehat{MBC} = 20^\circ$ olacak şekilde bir M noktası ve $[BM]$ doğrusu üzerinde de $\widehat{OCB} = 10^\circ$ olacak şekilde bir O noktası alınıyor. O 'dan $[BC]$ 'ye çizilen dikme $[AB]$ 'yi N noktasında kestiğine göre $\widehat{NMO} = \widehat{NMB}$ 'yi bulunuz. (Dinçer Güler)

Çözüm. M 'den $[OC]$ 'ye çizilen dikme $[OC]$ 'yi Q ve $[ON]$ 'yi P 'de kessin. $\widehat{PQC}$ ve $\widehat{PRC}$ açıları $[PC]$ kenarını aynı açı gördüklerinden $PQRC$ bir kirişler dörtgenidir. Buradan $\widehat{RPQ} = 10^\circ$ bulunur. Q , OC 'nin orta noktası olduğundan, $\widehat{QPC} = 10^\circ$ 'dir. Ayrıca $\widehat{BNP} = \widehat{BMP} = 60^\circ$ olduğu için, $PBNM$ bir kirişler dörtgeni ve $\widehat{BPN} = \widehat{NMO}$ olur. Öte yandan, $PBOC$ bir kirişler dörtgenidir, çünkü $\widehat{OPC} = \widehat{OBC} = 20^\circ$. Dolayısı ile $\widehat{OPB} = \widehat{OCB} = 10^\circ$ ve $\widehat{NMO} = 10^\circ$ bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Hasan Denker, Erol Gedikli, Batur Orkun, Ergün Yaraneri.)

A103. Bir dikdörtgenin paralel iki kenarının her biri m eşit parçaya bölünüp karşılıklı noktalar birer doğru parçası ile birleştirilip m tane dikdörtgen elde ediliyor. Bu şekilde, uç noktaları köşeler olan çizilmiş bütün doğru parçalarının sayısını bulunuz. Bu sayının tam kare olup olmadığını araştırınız. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Dikdörtgenin $[AB]$ tabanı üzerinde $n + 1$ tane 'köşe' olduğundan, bunları uç kabul eden doğru parçalarının sayısı $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ olur. $[CD]$ üst taban için de aynı sayı bulunacağından toplam $(n + 1)$ elde edilir. Bu sayıya, tabana dik olan $n + 1$ doğru ilave edilirse $n(n + 1) + n + 1 = (n + 1)^2$ bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Alper Çay, Erek Göktürk, Nazım Utku.)

A104. $p(x)$ bir polinom ve $q(x) = p(x) + 1$ olsun. $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ polinomunun $p(x)q(x)$ ile bölünebildiğini gösteriniz. (M. Şahin)

Çözüm. $A(x) = [p(x)]^{2n} + [p(x) + 1]^n - 1$ diyelim. $A(x)$ 'in $p(x)q(x)$ ile bölünebilmesi için $p(x)$ ve $q(x)$ ile bölündüğünde kalan 0 olmalıdır.

$p(x) = 0$ yazalım; $A(x)|_{p(x)=0} = 0$ olur, yani $A(x)$, $p(x)$ ile bölünebilir. $q(x) = 0$ (yani $p(x) = -1$) alırsak, $A(x)|_{p(x)=-1} = 0$ olur, yani $A(x)$, $q(x)$ ile bölünür.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Batur Orkun, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Nazım Utku, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldırım.)

A105. ABC üçgeni içinde bir P noktası alınıyor. BPC , CPA , APB üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırası ile R_x , R_y , R_z ise,

$$\text{Alan}(ABC) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{R_x R_y R_z}$$

olduğunu ve eşitlik için üçgenin eşkenar olması gerektiğini gösteriniz. (Dinçer Akay)

Çözüm. ABC üçgeninin alanı S olsun. $\widehat{BPC} = \alpha_x$, $\widehat{CPA} = \alpha_y$, $\widehat{APB} = \alpha_z$ diyelim.

Önce $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &\geq \cos A + \cos B + \cos C \\ &= 2 \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right) - 3, \\ \frac{9}{4} &\geq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

yazılır. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{4} \right)^3 &\geq \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right)^3 \\ &\geq 27 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}, \\ \frac{9^3}{4^3 2^3} &\geq \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}, \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} &\geq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= \sin \frac{B+C}{2} \frac{1}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= \sin(B+C) [\sin B + \sin C] \\ &= \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

ve

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (1)$$

elde edilir.

Şimdi de $\sin \alpha_x \sin \alpha_y \sin \alpha_z \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ olduğunu gösterelim.

$$Q = \sin \alpha_x + \sin \alpha_y + \sin \alpha_z = 2 \sin \frac{\alpha_x}{2} \cos \frac{\alpha_x}{2} + 2 \sin \frac{\alpha_y + \alpha_z}{2} \cos \frac{\alpha_y - \alpha_z}{2}$$

yazılır. $\frac{\alpha_y + \alpha_z}{2} + \frac{\alpha_x}{2} = 180^\circ$ olduğundan

$$\cos \frac{\alpha_x}{2} = -\cos \frac{\alpha_y + \alpha_z}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha_x}{2} = \sin \frac{\alpha_y + \alpha_z}{2}$$

sağlanır. Bu değerleri yerine yazınca

$$Q = -2 \sin \frac{\alpha_x}{2} \cos \frac{\alpha_y + \alpha_z}{2} + 2 \sin \frac{\alpha_x}{2} \cos \frac{\alpha_y - \alpha_z}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha_x}{2} \left(\cos \frac{\alpha_y - \alpha_z}{2} - \cos \frac{\alpha_y + \alpha_z}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha_x}{2} 2 \sin \frac{\alpha_y}{2} \sin \frac{\alpha_z}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha_x}{2} \sin \frac{\alpha_y}{2} \sin \frac{\alpha_z}{2}$$

elde edilir. $\frac{\alpha_x}{2} + \frac{\alpha_y}{2} + \frac{\alpha_z}{2} = 180^\circ$ olduğundan bu açılar bir üçgenin iç açılarıdır. Dolayısıyla (1) gereğince

$$\sin \frac{\alpha_x}{2} \sin \frac{\alpha_y}{2} \sin \frac{\alpha_z}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Bu eşitsizlik son ifadeye monte edilirse

$$Q = 4 \sin \frac{\alpha_x}{2} \sin \frac{\alpha_y}{2} \sin \frac{\alpha_z}{2}$$

$$\leq 4 \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden

$$27Q \leq (\sin \alpha_x + \sin \alpha_y + \sin \alpha_z)^3$$

$$\leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

ve

$$\sin \alpha_x \sin \alpha_y \sin \alpha_z = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (2)$$

elde edilir.

Artık problemi çözebiliriz. (1) ve (2)'den

$$\sin A \sin B \sin C \sin \alpha_x \sin \alpha_y \sin \alpha_z \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^2,$$

ve buradan

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{27}{64} \frac{1}{\sin \alpha_x \sin \alpha_y \sin \alpha_z}$$

bulunur. $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$, $\sin \alpha_x = \frac{a}{2R_x}$, $\sin \alpha_y = \frac{b}{2R_y}$, $\sin \alpha_z = \frac{c}{2R_z}$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\frac{abc}{8R^3} \leq \frac{27}{64} \frac{1}{\frac{abc}{8R_x R_y R_z}},$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{16R^2} \leq \frac{27}{16} R R_x R_y R_z$$

elde edilir. $S = \frac{abc}{4R}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{R R_x R_y R_z}$$

sonucuna varılır.

(Çözenler: Atasağın Baykal)

$$\text{Y101. } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \int_0^x t e^t dt}{e^x \sin x - \int_0^x e^t \sin t dt}$$

limitini hesaplayınız. (Hasan Kullap)

Çözüm. $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali söz konusudur. L'Hospital kuralı uygulanarak

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x e^x - x e^x}{e^x \sin x + e^x \cos x - e^x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x \cos x} = 1$$

bulunur.

Çözenler: Atasağın Baykal, Alper Çay, Güler Çavuşoğlu, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Kerem Güngör, Levent Koçoğlu, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Emre Topaloğlu, Nazım Utku, Naim Uygun, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldırım.)

Y102. ABCD karesinin [BC] kenarı üzerinde $\widehat{BAE} = 7.5^\circ$ olacak şekilde E noktası işaretleniyor. $\tan(\widehat{ADE})$ 'yi hesaplayınız. (Cuma Arslan)

Çözüm. Karenin kenar uzunluğunu 1 alalım. $|EC| = x$ olsun. $\widehat{ADE} = \widehat{DEC}$ olup, $\tan(\widehat{ADE}) = \frac{1}{x}$ olur.

$$\tan(15^\circ) = \frac{2 \tan(7.5^\circ)}{1 - \tan^2(7.5^\circ)},$$

$$\tan(15^\circ) = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

olduğundan

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(1-x)}{1-(1-x)^2} = \frac{2(1-x)}{x(2-x)},$$

ve buradan $(\sqrt{3}-1)x^2 - 4\sqrt{3}x + 2(\sqrt{3}+1) = 0$ denklemi elde edilir. Denklemin kökleri

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{8}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})}{\sqrt{3}-1}$$

dir. $x_1 > 1$ ve $x_2 < 1$ olduğundan, $x = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-1}$ olur. yazılır. Buradan da

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{2}$$

elde edilir.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Ereğ Göktürk, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Batur Orkun, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkan, Nazım Utku, Naim Uygun, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldırım, Recep Zihni.)

Y103. ABC üçgeninde iç teğet çember $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ kenarlarına sırası ile K, M, L noktalarında değmektedir. Bu kenarların orta noktaları da sıra ile P, R, S 'dir. $[KP]$, $[MR]$ ve $[LS]$ doğru parçalarının orta noktaları da X, Y, Z ise

$$\frac{\text{Alan}(XYZ)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{3R+2r}{16R}$$

olduğunu gösteriniz. (R , çevrel çemberin yarıçapı; r , içteğet çemberin yarıçapıdır.) (Ergün Yaraneri)

Çözüm. $2u = a+b+c$ ve $S = \text{Alan}(ABC)$ diyelim. $|MA| = |AL| = u-a$, $|BL| = |BK| = u-b$ ve $|KC| = |CM| = u-c$ 'dir.

$$|RK| = u-b - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2},$$

$$|RX| = |XK| = \frac{c-b}{4},$$

$$|BX| = \frac{2a+c-b}{4},$$

$$|XC| = \frac{2a-c+b}{4},$$

$$|MR| = \frac{a-c}{2},$$

$$|MY| = |YR| = \frac{a-c}{4},$$

$$|CY| = \frac{2b+a-c}{4},$$

$$|YA| = \frac{2b-a+c}{4},$$

$$|SL| = \frac{a-b}{2},$$

$$|SZ| = \frac{a-b}{4},$$

$$|BZ| = \frac{2c+a-b}{4},$$

$$|ZA| = \frac{2c-a+b}{4}$$

$$S = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}),$$

$$\text{Alan}(BXZ) = \frac{1}{2} \frac{(2a+c-b)}{4} \frac{(2c+a-b)}{4} \sin(\hat{B})$$

eşitliklerinden

$$\text{Alan}(BXZ) = \frac{(2a+c-b)(2c+a-b)}{16ac} S,$$

ve benzer şekilde

$$\text{Alan}(CXY) = \frac{(2a-c+b)(2b+a-c)}{16ab} S,$$

$$\text{Alan}(AYZ) = \frac{(2b-a+c)(2c-a+b)}{16bc} S$$

olur. Ayrıca XYZ , BXZ , AYZ , ve CXY üçgenlerinin toplam alanı S 'dir. Yukarıdaki eşitlikleri kullanarak ve gerekli sadeleştirmelerle,

$$\begin{aligned} \text{Alan}(XYZ) &= \frac{3abc(a+b+c) + 16S^2}{16abc(a+b+c)} \\ &= \frac{3\frac{abc}{4S} + \frac{4S}{a+b+c}}{4\frac{abc}{S}} \end{aligned}$$

bulunur.

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(a+b+c)r}{2}$$

olduğundan

$$\frac{\text{Alan}(XYZ)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{3R+2r}{16R}$$

elde edilir.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Hasan Denker, Erol Gedikli, Ruhi Tabur.)

Y104. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(x+h^2+h) = \varphi(x-h^2-h) + \frac{4xh}{x^2+1995}$$

eşitliği sağlanıyor. $\varphi(0) = 0$ ise $\varphi(1)$ değerini hesaplayınız. (M. Şahin)

Çözüm 1. $x = \frac{1}{2}$ ve $h = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ alınırsa, $h^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ve $h^2 + h = \frac{1}{2}$ olduğundan, $x + h^2 + h = 1$ ve $x - h^2 - h = 0$ olur. Böylece

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{4(\frac{1}{2})(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4} + 1995} = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{7981}$$

bulunur.

Çözüm 2.

$$\frac{\varphi(x + h^2 + h) - \varphi(x - h^2 - h)}{h} = \frac{4x}{x^2 + 1995}$$

ve buradan

$$(h+1) \left(\frac{\varphi(x + h^2 + h) - \varphi(x)}{h(h+1)} + \frac{\varphi(x - h^2 - h) - \varphi(x)}{-h(h+1)} \right) = \frac{4x}{x^2 + 1995}$$

yazılır. $h \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$2\varphi'(x) = \frac{4x}{x^2 + 1995}$$

ve

$$\varphi(x) = \ln(x^2 + 1995) + C$$

elde edilir. $\varphi(0) = 0$ şartından $C = -\ln(1995)$ bulunur.

$$\varphi(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 1995}{1995} \right)$$

ve sonuçta

$$\varphi(1) = \ln \left(\frac{1996}{1995} \right)$$

olur.

İki farklı yoldan elde edilen farklı iki sonucun yorumlanmasını gelecek sayıya bırakıyoruz. (İpucu: Çözüm yollarını bir yana bırakıp φ fonksiyonunun tanımını incelemelidir.)

Y105. ABC üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde $|AE| = |EF| = |FG| = 2$ ve $|GC| = 6$ olacak şekilde E, F, G noktaları işaretleniyor. $[AB]$ kenarı üzerinde de $|AD| = 3$ ve $|DB| = 5$ olacak şekilde D noktası işaretleniyor. $\widehat{GDC} = \widehat{EBF}$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Çözüm. Kosinüs kuralından

$$|BE|^2 = 68 - 32 \cos \hat{A},$$

$$|BF|^2 = 80 - 64 \cos \hat{A},$$

$$|DG|^2 = 45 - 36 \cos \hat{A},$$

$$|DC|^2 = 153 - 72 \cos \hat{A}$$

olur. Öte yandan,

$$4 = |BE|^2 + |BF|^2 - 2|BE||BF| \cos(\widehat{EBF}),$$

$$36 = |DG|^2 + |DC|^2 - 2|DG||DC| \cos(\widehat{GDC})$$

da sağlanır. Buradan $\cos(\widehat{EBF}) = \cos(\widehat{GDC})$ ve $\widehat{EBF} = \widehat{GDC}$ elde edilir.

Çözenler: Murat Aygen, Atasâğın Baykal, Hasan Denker, Namık Gök, Erek Göktürk, Batur Orkun, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Emre Topaloğlu, Turgay Uçkan, Erol Ünal, Uğur Yıldırım.)

Ali Nesin'den

**Matematik ve Oyun, Matematik ve Korku
Önergeler Mantığı**

Düşün yayınevi tarafından çıkartılan bu üç kitabın tatil aylarında size iyi arkadaşlar olacağını düşünüyoruz. İyi okumalar ve tatiller!

PROBLEM SEMİNERLERİ

Bu seminerlerle ilgili daha ayrıntılı bilgi Nisan 1995 sayımızda verilmişti. Şimdi sadece, TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No: 221, Kavaklıdere, Ankara adresinde saat 15:00'te yapıldığını ve mektupla ya da telefonla (Telefon: (312) 468 53 00 / 2201) başvurulabileceğini hatırlatalım.

Seminerlere Haziran ayındaki tek seminerden sonra ara verilip Ekim ayında yeniden başlanacaktır.

Problem Semineri 95/5, 3 Mayıs 1995

1. $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu, şu şekilde tanımlanıyor: $f(1) = 1$ ve

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n) + 2, & f(f(n) - n + 1) = n \text{ ise;} \\ f(n) + 1, & \text{değilse.} \end{cases}$$

(a) f için bir açık ifade bulunuz.

(b) $f(f(n) - n + 1) \neq n$ ise, $f(f(n) - n + 1) = n + 1$ olduğunu gösteriniz.

2. $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, & f(3) &= 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

$f(n) = n$ ve $n \leq 1995$ koşullarını sağlayan pozitif tamsayıların sayısını bulunuz.

3. Sabit bir k pozitif tamsayısı alalım. $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ şu şekilde tanımlanıyor.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \leq k+1 \text{ ise;} \\ f(f(n-1)) + f(n-f(n-1)), & n > k+1 \text{ ise.} \end{cases}$$

F_m dizisini ise şu şekilde tanımlayalım:

$$F_m = \begin{cases} 1, & \text{eğer } m \leq k \text{ ise;} \\ F_{m-1} + F_{m-k}, & \text{eğer } m > k \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda $m \geq 1$ için $f(F_{m+k}) = F_m$ olduğunu kanıtlayınız.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\mathbb{R}^2$ 'deki birim kareyi, herhangi bir yatay veya dikey doğru en fazla n

dikdörtgenin iç bölgesiyle kesişecek şekilde parçalayabileceğimiz maksimum dikdörtgen sayısı $f(n)$ olsun.

(a) $3 \cdot 2^{n-1} - 2 \leq f(n) \leq 3^n - 2$ olduğunu gösteriniz.

(b) $f(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ olup olmadığını belirleyiniz.

Problem Semineri 95/6, 24 Mayıs 1995

Aşağıdaki toplamaları bulunuz:

1. $r \leq n$ ve $0 \leq p \leq 1$ için

$$\sum_{k=r}^n \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \right]$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{k}}{(k+1)4^k}$$

$$3. \sum_{r=0}^n \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{n}{r} \binom{n+1}{k}$$

$$4. \sum_{k=0}^m \binom{m+k}{k} 2^{-k}$$

Problem Semineri 95/7, 7 Haziran 1995

1. Üç boyutlu uzaydaki noktaları her rengi en az bir kez kullanmak üzere beş değişik renge boyuyoruz. En az dört değişik renk içeren bir düzlemin bulunduğunu gösteriniz.

2. Düzlemdeki noktaları iki değişik renge boyuyoruz. Bütün köşeleri aynı renge boyanmış ve kenar uzunluğu ya 1 ya da $\sqrt{3}$ olan eşkenar bir üçgenin varlığını gösteriniz.

3. Düzlemde herhangi bir nokta seçip, bu noktaya olan uzaklığı irrasyonel bir sayı olan tüm noktaları siyaha boyuyoruz. Bu yolla düzlemdeki bütün noktaları siyaha boyamak için böyle en az kaç nokta seçmek gerekir?

4. Düzlemdeki noktaları n değişik renge boyuyoruz. Bu boyama işleminin, hangi n değerleri için, aralarındaki uzaklık 1 olan aynı renge boyanmış herhangi iki nokta bulunmayacak biçimde yapılmasının mümkün olduğunu belirleyiniz.

ÇÖZÜMLER

Bu sayımızda 95/2, 95/3 ve 95/4 seminerlerinin kısa çözümleri yer almaktadır.

Problem Semineri 95/2

Yönetim: Ali Doğanaksoy, Selçuk Ateşkan, Barış Fidan

1. İlk olarak, verilen iki çemberi dik kesen çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulalım. Verilen çemberler $\mathcal{C}_1(K_1, k_1)$ ve $\mathcal{C}_2(K_2, k_2)$ olsun. $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'nin bu çemberleri dik kesen bir $\mathcal{C}'$ çemberinin X merkezindeki kuvvetleri aynıdır. Bu gözleme dayanarak, önce iki çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaların geometrik yerini bulalım. Pisagor Teoremi kullanılarak X 'ten K_1K_2 doğrusuna indirilen dikmenin ayağının bu doğru üzerindeki sabit bir F noktası olduğu gösterilebilir. Buna göre söz konusu geometrik yer K_1K_2 'yi sabit F noktasında dik kesen doğru üzerindedir. Yine Pisagor Teoremi'ne göre bu doğru üzerindeki her noktanın $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'ye göre kuvvetleri aynı olacağından, aranan geometrik yer (aynı zamanda $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'yi dik kesen çemberlerin geometrik yeri) $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'nin merkezlerini birleştiren doğruyu dik kesen sabit bir doğrudur. Bu doğruya $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'nin *kuvvet eksen*i adı verilir.

Kuvvet eksen, çemberler kesişiyorsa, kesişim noktalarını birleştiren doğru olarak kolayca bulunur. Çemberlerin kesişmemesi durumunda, basit bir şekilde kanıtlanabilen Monge Teoremi'ni kullanmamız gerekir.

Monge Teoremi. *Üç çemberin üç kuvvet eksen, bu üç çemberin kuvvet merkezi adı verilen bir noktadan geçer.*

Kesişmeyen $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'nin kuvvet eksenini bulmak için önce bu iki çemberi kesen bir $\mathcal{C}'$ çemberi çizilir. $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}')$ ve $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}')$ ikililerinin kuvvet eksenlerinin kesişim noktası kullanılarak $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ 'nin kuvvet eksenleri çizilir.

Bu açıklamalardan sonra, verilen üç çemberin kuvvet merkezini belirleyebiliriz. Bu merkez bütün çemberlerin dışındaysa, bu merkezi merkez kabul eden ve yarıçapı bu merkezden, çemberlerden herhangi birine çizilen teğetin uzunluğuna eşit olan çember, verilen üç çemberi de dik kesecektir. Kuvvet merkezinin çemberlerin birinin içinde kalması halinde ise problemin çözümü yoktur.

2. Problemin çözülmüş olduğunu kabul edelim. Verilen çember $\mathcal{C}$; verilen noktalar A, B, C ; istenen üçgen XYZ olsun. XZ, ZX, XY doğruları sırasıyla A, B, C noktalarından geçsin. Çizim için 4 yardımcı noktadan yararlanacağız:

N_1 : AB 'ye paralel ve X 'ten geçen kirişin çemberi kestiği ikinci nokta;

N_2 : YN_1 ve AB doğrularının kesiştiği nokta;

N_3 : N_2C 'ye paralel ve X 'den geçen kirişin çemberi kestiği ikinci nokta;

N_4 : CN_2 ve N_1N_3 doğrularının kesiştiği nokta.

(i) Çember içi açı bağıntılarını ve kirişler dörtgeninin özellikleri kullanılarak $(AN_2)(AB)$ çarpımının $\mathcal{C}$ çemberinin A noktasındaki kuvvetine eşit olduğu bulunur. A ve B noktalarının yeriyle çemberin A noktasındaki kuvveti bilindiğinden, N_2 noktasının yeri $AN_2 = \frac{P}{AB}$ eşitliğinden belirlenir.

(ii) Benzer şekilde $(N_2N_4)(N_2C)$ çarpımının $\mathcal{C}$ çemberinin N_2 noktasındaki kuvvetine eşit olduğu bulunur. Buradan da N_4 noktasının yeri belirlenir.

(iii) Çember içi açı bağıntılarından $N_1\widehat{XN_3}$ açısının bilinen $AN_2N_4 = w$ açısına eşit olduğu bulunur.

(iv) N_4 'ten geçen ve gördüğü yayın açısı w olan kirişin $\mathcal{C}$ çemberini kestiği noktalar N_1 ve N_3 noktalarını verir.

(v) X noktası N_3 'ten geçen ve N_2N_4 'e paralel olan doğrunun $\mathcal{C}$ çemberini kestiği nokta. Y noktası N_1N_2 doğrusunun $\mathcal{C}$ çemberini kestiği nokta; ve Z noktası AY doğrusunun $\mathcal{C}$ çemberini kestiği noktadır.

3. Verilen çember $\mathcal{C}_1$, çemberin merkezi M , yarıçapı r , verilen iki nokta P_1 ve P_2 olsun. M noktasını merkez kabul eden dik koordinat sisteminde P_1 ve P_2 'nin koordinatları sırasıyla (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen OS_1 ve OS_2 doğruları aranan OS_1S_2 ikizkenar üçgeninin kenarlarıysa, bu eşit kenarların OM doğrusuyla yaptığı Φ_1 ve Φ_2 açıları eşittir. O noktasının koordinatları (c, d) olmak üzere, bu iki açıyla ilgili trigonometrik bağıntıları kullanarak, $A = a + a_2$, $B = b_1 + b_2$, $C = a_1b_2 + a_2b_1$, ve $D = (a_1a_2 - b_1b_2)$ olmak üzere

$$C(c^2 - d^2) - 2Dcd + (c^2 + d^2)(Ad - Bc) = 0 \quad (1)$$

eşitliği elde edilir. $O(c, d)$ noktası çemberin

üzerinde olduğundan

$$c^2 + d^2 = r^2 \quad (2)$$

sağlanır ve

$$C(c^2 - d^2) - 2Dcd + r^2(Ad - Bc) = 0 \quad (3)$$

olur.

O noktasının yeri (2)'de denklemi verilen çemberle (3)'te denklemi verilen hiperbolün kesiştiği dört noktadan biridir.

P_1 ve P_2 noktalarının çemberin M merkezinden M_1 ve M_2 uzaklıklarının eşit olduğu durumda (3) denklemi

$$2a_2r^2d - 2m_2^2cd = 0 \quad (4)$$

halini alır. Bu denklem de

$$(c, d) = (\pm r, 0) \quad \text{ve} \quad c = a_2 \frac{r^2}{m_2^2}$$

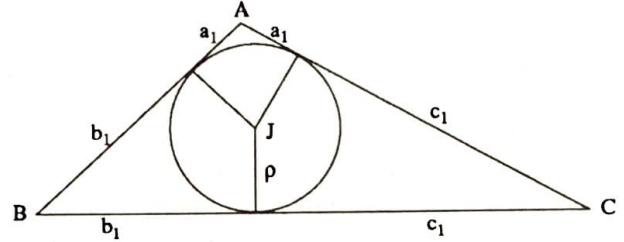
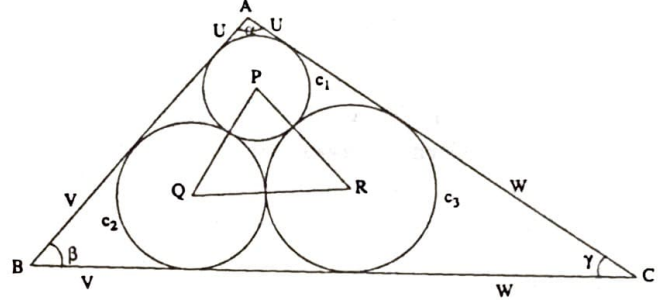
değerleri için sağlanır.

$c = a_2 \frac{r^2}{m_2^2}$ için O noktasının yerini de şöyle bulabiliriz: M noktasından geçen ve çapı $MN = n = \frac{m_2^2}{a_2}$, x ekseninde yer alan ζ_2 çemberinin ζ_1 çemberiyle kesim noktası $L(k, 1)$ olmak üzere MNL bir dik üçgendir ve $ML^2 = MNk$, $r^2 = kn$ olur. Buradan $k = c$ elde edilir. ζ_1 ve ζ_2 noktalarının kesiştiği nokta(lar) aradığımız O noktasının yerini verir. (İki çemberin kesişmesi için $n > r$ veya $m_1^2 > a_2r$ koşullarının sağlandığını kabul ediyoruz). Bir çemberin içinde merkeze eş uzaklıkta iki nokta verildiğinde, çemberin üzerinde ve bu iki noktaya uzaklıkları toplamı minimum olan noktaların, verilen çember ile verilen noktalar ve verilen ilk çemberin merkezinden geçen çemberin kesiştikleri noktalar olduğu Batlamyus Teoremi'yle gösterilebilir. Böylece O noktasının yeri bulunabilir.

OP_1 ve OP_2 doğrularının ζ_1 çemberini kestiği ikinci noktalar istenen ikizkenar üçgenin diğer iki köşesini, S_1 ve S_2 'yi verir.

4. Aranılan çemberler $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ve üçgenin kenar uzunlukları a, b, c olsun. $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları sırayla P, Q, R ve p, q, r olsun. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi de J olsun. u, v, w ile $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ çemberlerinin üçgene teğet olduğu noktaların A, B, C noktalarına olan uzaklığını; a_1, b_1, c_1 ile, ABC üçgeninin içteğet çemberinin

üçgene teğet olduğu noktaların A, B, C köşelerine olan uzaklıklarını gösterelim. $|PR| = l$, $|PQ| = m$ ve $|QR| = k$ olsun. s 'yi $2s = a + b + c$ olacak şekilde tanımlayalım; $s = 1$ kabul edelim.



P, α 'nın AJ , Q, β 'nin BJ , R de γ 'nin CJ açıortayı üzerinde olduğundan, üçgen benzerlikleri kullanılarak $p = \frac{ru}{a_1}$, $q = \frac{rv}{b_1}$, $r = \frac{rw}{c_1}$ elde edilir. Pisagor Teoremi kullanılarak $m = 2\sqrt{pq}$, $l = 2\sqrt{pr}$, $k = 2\sqrt{qr}$ bulunur. $\rho^2 = \frac{a_1b_1c_1}{a_1+b_1+c_1}$ eşitliğine dayanarak p, q, r 'nin yukarıda bulduğumuz değerlerini kullanırsak üç eşitlik elde ederiz:

$$\begin{aligned} a &= v + w + 2\sqrt{a_1}\sqrt{vw} \\ b &= w + u + 2\sqrt{b_1}\sqrt{wu} \\ c &= u + v + 2\sqrt{c_1}\sqrt{uv} \end{aligned}$$

$s = 1$ olduğundan dolayı a, b, c, u, v, w uzunlukları 1'den küçüktür ve bu uzunluklar 6 dar açının sinüslerinin kareleri cinsinden yazılabilir. $a = \sin^2 \lambda$, $b = \sin^2 \mu$, $c = \sin^2 \nu$, $u = \sin^2 \psi$, $v = \sin^2 \varphi$, $w = \sin^2 \chi$ olsun. $a_1 = \cos^2 \lambda$, $b_1 = \cos^2 \mu$, $c_1 = \cos^2 \nu$ olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki üç denklemi tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + \sin^2 \chi + 2 \sin \varphi \sin \chi \cos \lambda &= \sin^2 \lambda \\ \sin^2 \chi + \sin^2 \psi + 2 \sin \chi \sin \psi \cos \mu &= \sin^2 \mu \\ \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi + 2 \sin \psi \sin \varphi \cos \nu &= \sin^2 \nu \end{aligned}$$

Bu denklemlere dayanarak $\lambda = \varphi + \chi$, $\mu = \chi + \psi$,

$\nu = \psi + \varphi$ elde edilir. $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$ için, $\varphi = \sigma - \lambda$, $\varphi = \sigma - \mu$, $\chi = \sigma - \nu$ olur.

Bu bilgilerin ışığında, sinüslerinin karesi verilen üçgenin kenarlarına eşit olarak λ, μ, ν açılarını çizeriz. Bu açıların yadımıyla σ, φ, χ açılarını elde ederiz. Bu açılar sinüslerinin karelerini çizerek, içteğet çemberlere çizilen teğetlerin uzunluklarını buluruz. Böylece iç teğet çemberleri çizilebilir.

Problem Semineri 95/3

Yönetim: Ali Doğanaksoy, Oytun Eskiyeentürk, Özcan Öztürk

1. m lirası olan ve $P > \frac{1}{2}$ olasılıkla 1 lira kazanan bir adamın, tüm parasını kaybetme olasılığının $\left(\frac{1-P}{P}\right)^m$ olduğu, indirgeme denklemleri yazılarak görülebilir. Eğer bu adam $m+n$ liraya ulaşınca kazanırsa, kaybetme olasılığı Q ,

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m = Q + (1-Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$$

denkleminde bulunur. $p = \frac{18}{37}$ alırsak, Q , ikinci yöntemin vereceği kazanma olasılığı olur ve $Q \cong 0.25$ 'tir. Ancak bu değer $\frac{18}{37}$ 'den küçüktür. Dolayısıyla ilk yol daha iyidir.

2. P_{2n} , A 'nın $2n$ oyunda kazanma olasılığı olsun. O zaman,

$$P_{2n} = \sum_{x=n+1}^{2n} p^x q^{n-x}$$

olur. $2n$ oyunun en iyi olması için, $P_{2n-2} \leq P_{2n} \leq P_{2n+2}$ olmalıdır. Ancak P_{2n+2} ile P_{2n} arasındaki fark iki durumdan kaynaklanabilir.

(a) İlk $2n$ oyunda, A 'nın $n+1$ oyun kazanıp, sonraki iki oyunu kaybetmesi;

(b) İlk $2n$ oyunda A 'nın n oyun kazanıp, son iki oyunu da kazanması.

Bu durumların olasılıklarından,

$$P_{2n+1} - P_{2n} = p^2 \binom{2n}{n} p^n q^n - q^2 \binom{2n}{n+1} p^{n+1} q^{n-1}$$

olur. Gerekli işlemleri yaparak,

$$\frac{1}{1-2p} - 1 \leq 2n \leq \frac{1}{1-2p} + 1$$

elde ederiz.

3. Her oyunda beklenen kazanç

$$\frac{2}{N+1}N - \frac{N-1}{N+1} = 1$$

liradır. Dolayısıyla, 100 oyun sonunda 200 lira kazanma şansı en fazla 0.5 olur. Her tek sıradaki oyunda 1, her k 'yinci çift oyunda $99+k$ seçip, bir kere kazandıktan sonra hep 1 seçilirse, sonuçta ya 200 ya da 0 lira kazanılır. Demek ki bu en iyi yoldur. Ayrıca, 101, 103, 109 sayılarını sırayla 100 oyun içine, $1 \leq k \leq 100$ için ilk k oyunda, 1'lerin sayısı en az bunların sayısı kadar olacak şekilde yerleştirirsek, yine 0.5 kazanma olasılığı elde ederiz. Bu tür yolların sayısı ise

$$\frac{1}{51} \binom{100}{50} \cong 1.58 \times 10^{27}$$

dir.

4. Önceki keselerden daha büyük bir keseye aday diyelim. k 'yinci sıradaki bir aday, ancak onu seçmekle kazanma şansımız, devam edip en iyi yolu izlediğimiz takdirde elde edeceğimiz kazanma şansından daha büyük ise seçilmelidir. k 'yinci sıradaki bir adayla kazanma şansı $\frac{k}{100}$ 'dür. k 'den sonraki en iyi yolun şansı ise, k arttıkça azalır veya sabit kalır. Demek ki bir noktadan sonra ilk olasılık ikinciye geçer. Bu da en iyi yöntemin, m tane keseyi pas geçip, ondan sonraki ilk adayı seçmemiz ($m < k \leq 100$ için, $\frac{m}{k-1}$ olasılıkla) olduğunu söyler. Bu olasılığa $f(m)$ dersek,

$$f(m) = \frac{1}{100} \sum_{k=m+1}^{100} \frac{m}{k-1}$$

olur. $f(m-1) \leq f(m) \leq f(m+1)$ eşitsizliği çözülürse, $m = 37$ elde edilir.

Problem Semineri 95/4

Yönetim: Semih Koray, Tolga Ertü, Çetin Ürtiş

1. Bu şekildeki asal sayılar kümesini A ile gösterelim; yani

$$A = \{p \text{ asal} : p = x^2 + y^2, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

$2 = 1^2 + 1^2$ şeklinde yazılabildiğinden $2 \in A$ 'dır. Şimdi $p > 2$ için şu teoremi kanıtlayacağız.

Teorem. $p = 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ için gerek ve yeter şart $p = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{Z}$ olmasıdır.

Kanıt. $p = 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ olsun. $\frac{1}{2}(p-1) = 2n$ olduğu için

$$2 \cdots \frac{1}{2}(p-1) = (-1)(-2) \cdots \left(-\frac{p-1}{2}\right) \\ \equiv (p-1)(p-2) \cdots \left(\frac{p+1}{2}\right) \pmod{p}$$

denkliğini elde ederiz. Buradan

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2} \frac{p+1}{2} \cdots (p-1) \\ \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

denkliğini, yani $p \mid a^2 + 1$ 'i elde ederiz. Bu ise $(p, a) = 1$ 'i gerektirir. Burada şu teoremi kullanacağız:

Thue Teoremi. $m \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(m, a) = 1$ ise, $m \mid ax + y$ veya $m \mid ax - y$ olacak şekilde $x, y \leq \sqrt{m}$ doğal sayıları vardır.

Thue Teoremi'ni kullanırsak, $(p, a) = 1$ olduğundan $p \mid ax + y$ veya $p \mid ax - y$ olacak şekilde $x, y \leq p$ doğal sayıları vardır ve buradan $p = x^2 + y^2$ elde edilir.

Diğer yönün kanıtı için $p = x^2 + y^2$ olduğunu kabul edelim. Bir sayının karesi (mod 4)'te 0, 1 veya 2'ye denktir. Bundan dolayı $x^2 + y^2$, (mod 4)'te 0, 1 veya 2'ye denktir. Bu ise $p > 2$ için sadece $p = 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ olduğu durumda mümkündür. Böylece kanıtı tamamlamış oluruz.

Sonuç olarak,

$$A = \{2\} \cup \{p > 2 \text{ asal} : p = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$$

bulunur.

2. Birinci sorudan, $4k + 3$ şeklindeki asalların istenen şekilde yazılamayacağını biliyoruz. Şimdi ise asal çarpanlara ayırımında tek kuvvete sahip $4k + 3$ şeklindeki asalları bulunan tamsayıların bu şekilde yazılamayacağını, diğer pozitif tamsayıların ise yazılabileceğini göstereceğiz. Bunun için şu yardımcı teoremi kullanacağız:

Yardımcı Teorem. Eğer bir p tek asal sayısı aralarında asal iki tam sayının kareleri toplamını bölüyorsa, p , $4k + 1$ formunda olmalıdır.

Bu yardımcı teoremi modüler aritmetik yardımı ile kanıtladıktan sonra, yine modüler aritmetik ve ortak bölenleri kullanarak şartımızın

gerekliliğini gösteririz. Daha sonra ise

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

eşitliğini, 2 ve $4k + 1$ formundaki asalların, iki tam karenin toplamı şeklinde yazılabildiğini de kullanarak şartımızın yeterliliğini de gösterir ve kanıtı bitiririz.

3. Sorumuzun cevabı, k ve l negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $4^l(8k + 7)$ şeklindeki sayıların üç tam karenin toplamı şeklinde yazılamadığı, diğer tüm pozitif tamsayıların ise yazılabildiği şeklindedir. Bu cevabın ilk kısmını (mod 4) ve (mod 8) içerisindeki işlemler ve olmayana ergi yöntemleriyle kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ancak diğer kısım için ilk olarak Gauss tarafından bulunan çözüm, henüz tam olarak elementer hale getirilememiş, buna karşın gerek Landau ve Dirichlet'nin, gerekse N. C. Angheny'nin bu konuda birtakım çabaları olmuştur. Bu konuda Landau'nun *Elementary Number Theory* isimli kitabına başvurulabilir.

4. Negatif olmayan tüm tamsayıların bu şekilde yazılabildiğini göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki iki teoremi kullanacağız.

Teorem 1. $p > 2$ asal sayısı, en az birisi p ile bölünmeyen 4 karenin toplamını bölsün. Bu durumda p , 4 karenin toplamıdır.

Teorem 2. Her asal sayı 4 karenin toplamıdır.

Burada Teorem 1, Teorem 2'nin kanıtında kullanılmaktadır. Şimdi Teorem 2'yi kullanarak negatif olmayan tüm tamsayıların dört tamsayının toplamı olarak yazılabildiğini göstereceğiz.

Euler eşitliğini ele alalım:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) = \\ (aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1)^2 \\ + (ac_1 - ca_1 + db_1 - bd_1)^2 + (ad_1 - da_1 + bc_1 - cb_1)^2$$

Bu eşitlikten dolayı 4 karenin toplamı olan iki tamsayının çarpımı yine 4 karenin toplamıdır. Tümevarımla bunu sonlu sayıda çarpan için genişletebiliriz. Birden büyük her tamsayı asal sayıların çarpımı olduğundan, Teorem 2'den dolayı kendisi de 4 karenin toplamıdır. Ayrıca $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ ve $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ olduğundan çözüm tamamlanmış olur.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Doç. Dr. Ali Doğanaksoy, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Ekim 1995 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- Konu sunuşları.
- Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş önemli problemlerin tanıtımı.
- Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığılmasından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 250.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1995 yılı abone ücreti 300.000.-TL., tane satış fiyatı ise 75.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

Saygılarımızla

