

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyası'ndan

Paralellik Aksiyomu Üzerine

Şafak Alpay

Yine Geometrik Eşitsizlikler Üzerine

John Righy

Alkan'ın Eşitsizliğine Ek

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun

Emre Alkan'ın Eşitsizliği Üzerine

Albert Erkip

Dışbükey Fonksiyonlar

H. Turgay Kaptanoğlu

Polinom Kökleri İçin Bir Algoritma

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun

Pratik ve İlginç Aritmetik İşlemler

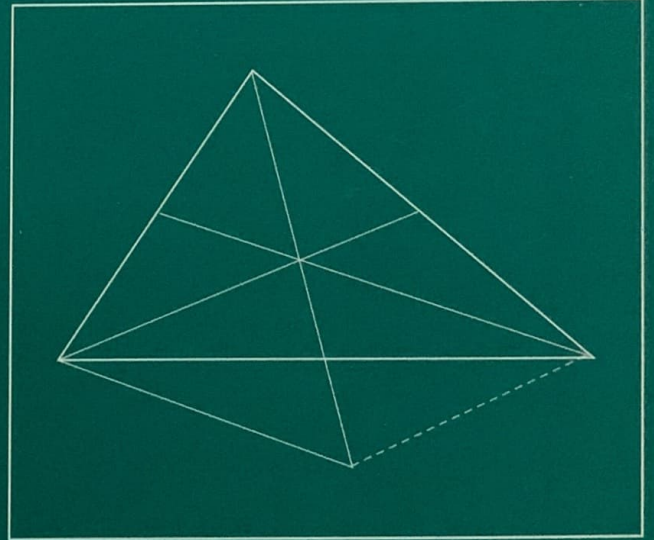
Hüseyin Kayadibi

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı

Albert Erkip

Problem Seminerleri

Problem ve Çözümleri



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR

ALBERT ERKİP

YAYIN KURULU

SELMA ATABEY, ALİ DOĞANAKSOY,
ALPARSLAN ERTUĞ, FİKRİ GÖKDAL,
H. TURGAY KAPTANOĞLU

DİZGİ

GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI

ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, Matematik Vakfı'nın işbirliği ve
UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386 sayılı
kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1996)

Yurtiçi yıllık 400.000.-TL., Yurtdışı yıllık 800.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 215511 No.lu hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Matematik Dünyası

Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü

İnönü Bulvarı, 06561 ANKARA

Tel: 210 12 82 • 210 29 70

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası'ndan 1

Paralellik Aksiyomu Üzerine 2

Şafak Alpay

Yine Geometrik Eşitsizlikler Üzerine 7

John Righy

Alkan'ın Eşitsizliğine Ek 9

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun

Emre Alkan'ın Eşitsizliği Üzerine 10

Albert Erkip

Dışbükey Fonksiyonlar 11

H. Turgay Kaptanoğlu

Polinom Kökleri İçin Bir Algoritma 19

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun

Pratik ve İlginç Aritmetik İşlemler 21

Hüseyin Kayadibi

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı 24

Albert Erkip

Problem Seminerleri 25

Problem ve Çözümleri 29

MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Bu sayıyla *Matematik Dünyası* altıncı yılına başlıyor. Ülkemizdeki kendi türünden dergiler göz önüne alındığında bu azımsanmayacak bir başarı. Bu başarıda en büyük pay kuşkusuz zaman zaman olan aksaklıklarımızı hoşgörülle karşılayarak dergiyi izlemeleriyle, problem çözümleriyle, eleştirileriyle ve yazılarıyla bizi destekleyen okurlarımızın.

Altıncı yılımıza bir nöbet değişikliğiyle girdik. Uzun bir süredir *Matematik Dünyası*'nın editörlüğünü yapan ve çoğu kez derginin sorumluluğunu tek başına üstlenen Şafak Alpaz görevini Albert Erkip'e devretti. Sevgili Şafak'a hem teşekkür ediyoruz, hem de onu sık sık meşgul edeceğimizi tekrarlıyoruz. Yayın Kurulu'muzda yeni bir isim problem köşemizi yürütmeye yardım edecek olan Fikri Gökdağ. Kendisi on yılı aşkın bir süredir olimpiyat takımlarımızı hazırlayan ve seçen ekipte yer alıyor. Gazi Üniversitesi'nde öğretim üyeliği yaptı; emekliliğinden sonra Betem Dershanesi'nde çalışıyor.

Geçtiğimiz beş yıla bir göz attığımızda epey yol aldığımızı görüyoruz. İlk sayılarda neredeyse tümüyle dar bir üniversite kesiminden yazılar yayımlarken, şimdi yazarlarımız çok geniş bir yelpazeden geliyor. Aynı şey problemler için de geçerli. Yeri gelmişken sorularla karşılaştığımız bir-iki noktaya değinelim. Bize yollanan yazılar önce Yayın Kurulu'nda inceleniyor. Gerektiğinde konunun uzmanlarına başvurularak yayımlanıp yayımlanmamasına karar veriliyor. Yayımlanacak yazılarda hem matematik hem de dizgi açısından bazı değişiklik ve düzeltmeler yapabiliyoruz; bazan da bir yazıyı kısaltmak ya da birkaç parçaya bölmek gerekebiliyor. Yayımlamaya karar verdiğimiz bir yazı yer ve konu durumuna göre birkaç sayı sonrasında çıkabiliyor. Uzunca bir zaman alabilen bu süreç içinde yazarlara hemen yanıt verilemiyebiliyor; bunun anlayışla karşılanacağını umuyoruz.

Alıştırma ve Yarışma Problemleri köşemizi için problem önerileri, bir ön elemenden sonra soru bankasına katılıyor ve yeri geldikçe kullanılıyor. Bize problem öneren okurlarımıza problemlerinin ne zaman yayımlanacağını söyleyebilmemiz bu nedenle zor. Bu arada problem önerilerinizin

mutlaka çözümlerinin de yollanması gerektiğini tekrar hatırlatalım; çözümü verilmemiş problemleri değerlendiremiyoruz.

Gönderdiğiniz yazıların Türkçe dilbilgisi kurallarına kesinlikle uyularak, düzgün, kısa ve tam cümlelerle, lüzumsuz noktalama işaretlerinden kaçınılarak yazılması gerektiğini tekrar hatırlatalım. Konumuzu oklarla, sembollerle, kısaltmalarla değil, yazı ile anlatalım; $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\therefore$ gibi işaretleri hiç ama hiç kullanmayalım. Her denklem bir tam cümlenin içinde yer almalı; yani üst üste denklem yığınlarından kaçınalım. n gibi harflerin Türkçe okunuşunun ne olduğunu ve n 'yinci denmesi gerektiğini de ekleyelim. Bu konuda dergimizin son birkaç sayısındaki yazıları incelemenizi öneririz.

Yazı ve problemleri bilgisayarda $\text{\LaTeX}$ (ya da diğer herhangi bir $\text{\TeX}$ türevi) ile yazan okurlarımız onları bize elektronik posta ile veya disket olarak iletebilirler. Elektronik posta adresimiz dunya@rorqual.cc.metu.edu.tr. Yalnız başka bilgisayar dillerinde yazılmış olan yazıların kâğıt üzerinde iletilmesini tercih ediyoruz.

Bilim dünyasında atıf çok önemli bir unsur. Bir makalede ilgili başka makalelere atıf yapılır; hatta yapılmalıdır, çünkü yapmamak başkasının işini kendi işi gibi göstermek demektir. Bir yazarın atıf alması yazısının başkalarınca okunduğunu, sonuçlarının değerlendirildiğini gösterir. Emre Alkan'ın Ekim 1995 sayımızdaki yazısı [1] sanırız *Matematik Dünyası*'nın atıf şampiyonu oldu. Bu sayımızda tam üç yazı, atıf vermekten öte, o yazıdan esinlenerek yazılmış. Emre Alkan'ı kutlarken matematiğin bu hoş yönünü de hatırlatalım. Çözülen bir problem, kanıtlanan bir teorem çoğu kez bir son değil, bir başlangıçtır. Matematikçi bir sonucu öğrenmek için değil, anlamak için okur ve onu nasıl kullanabileceğini, nasıl geliştirebileceğini düşünür. Emre Alkan'ın yazısına nasıl farklı yönlerden bakılabileceğini, nasıl geliştirilebileceğini bu sayıda okuyacaksınız.

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, *Bir Eşitsizlik Üzerine, Matematik Dünyası*, 5, sayı 4, 17-18 (1995).

PARALELLİK AKSİYOMU ÜZERİNE

Şafak Alpay *

Elemanlar adlı kitabın yazarı Öklit'in (M.S. 3. yüzyıl) matematik tarihinde özel bir yeri vardır. *Elemanlar*, o zamana kadar bilinen matematiğin büyük bir kısmını içermekte ve 13 kitaptan oluşmakta idi. Öklit'in dehası aykırı ve izole gibi görünen sonuçları kısıtlı sayıda aksiyomdan yola çıkarak, mantıksal bir sistematikte bir bütün halinde elde etmiş olmasıdır.

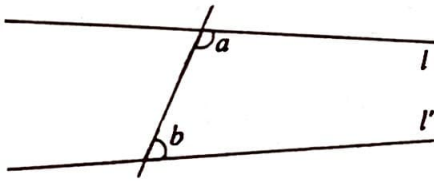
Öklit, *Elemanlar* adlı kitabını yazarken sadece aşağıdaki beş aksiyomdan yola çıkmıştı [1]. Bunlar,

1. herhangi iki noktayı birleştiren doğru çizilebilir;
2. düzlemde sonlu bir doğru parçası sürekli olarak devam ettirilebilir;
3. keyfi merkez ve yarıçaplı çember çizilebilir;
4. tüm dik açılar eşittir;

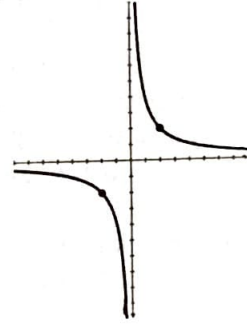
aksiyomları ile bu yazının konusu olan,

5. paralellik aksiyomu

olarak da anılan, belki de en iyi bir şekil yardımı ile anlaşılan aksiyom.



Aksiyoma göre, a ve b açılarının toplamı iki dik açıdan küçükse, l ve l' doğruları, açılarının olduğu tarafta bir noktada kesişirler. Paralellik aksiyomu, aksiyomlardan beklenen derecede besbelli değildir. Açılarının seçimine bağlı olarak kesiştikleri söylenen noktayı görmek de olası değildir. Üstelik



şekilde grafiği görünen hiperbol örneğinde olduğu gibi kesişmeyen ama paralel de olmayan eğrilerin varlığı aksiyomun anlaşılabilirliğini biraz daha zorlaştırıyor. x pozitif (veya negatif) sayılarda büyürken $\frac{1}{x}$, $y = 0$ doğrusuna istenildiği kadar yaklaşır ama onu hiçbir zaman kesmez. Asimtot olma olarak da betimlenen durumu, x sıfıra sağdan (veya soldan) yaklaşırken $\frac{1}{x}$ 'in yine sergilediği görülüyor. Bazıları Öklit'in paralellik aksiyomunun kullanımını birinci kitabın 29. önermesine kadar ertelemiş olmasını kendisinin de bu aksiyomdan pek memnun olmadığının kanıtı olarak verirler.

Öklit geometrisini paralellik aksiyomundan kurtarmak, onu daha kolay anlaşılır bir başkası ile değiştirmek; daha da iyisi, onu diğer aksiyom ve önermelerden teorem olarak elde etmeye çalışmak matematikçilerin yüzyıllarca uğraştığı bir problem olmuştur. Bu çalışmalar sonuçta paralellik aksiyomuna denk olduğu anlaşılan yeni aksiyomlar ortaya çıkarmışlarsa da, bu uğraşların en önemli katkısı paralellik aksiyomunun geçerli olmadığı yepyeni bir geometrinin doğmasına neden olmalarıdır.

Okul kitaplarında paralellik aksiyomunun yukarıdaki ifadesi yerine bir doğruya dışındaki bir noktadan sadece tek bir paralel çizilebileceğini söyleyen aksiyom verilir. Bu, Öklit'in paralellik aksiyomuna denk bir aksiyomdur ve beşinci yüzyılda Proclus tarafından bulunmuştur, ama çok sonraları bunu yeniden keşfeden John Playfair'in (1748-1819) anısına Playfair aksiyomu olarak anılır. İki aksiyomun denkliği ile

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

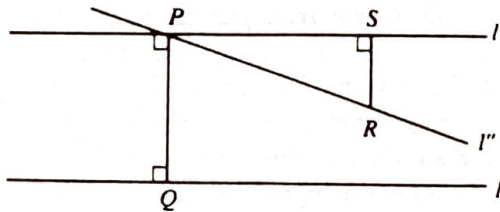
söylenmek istenen, paralellik aksiyyomunun Playfair aksiyyomunu gerektirdiği ve tersine Playfair aksiyyomunun paralellik aksiyyomunun gerektirdiğidir. Playfair'in, Öklit'in ilk altı kitabını yeniden ele aldığı *Geometrinin Elemanları* adlı yapıtı, 1795-1846 yılları arasında en az on kez basılmış ve belki de bu popülerliği nedeniyle Playfair aksiyyomu paralellik aksiyyomunun yerini almıştır. Esasında Playfair aksiyyomunun göreceli bir üstünlüğü de vardır. Öklit'in aksiyyomu kesişen doğrular hakkında iken Playfair aksiyyomu gerçekten paralel doğrular hakkındadır.

Öklit'in paralellik aksiyyomunu kanıtlama veya değiştirme uğraşları paralellik aksiyyomuna, yukarıdaki anlamda denk olan, birçok önerme ortaya çıkarmıştır. Bunlar arasında

1. paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser;
2. birbirlerinden uzaklıkları her yerde eşit olan doğrular vardır;
3. bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir;
4. herhangi bir üçgene benzer ama eşit olmayan üçgen vardır;
5. paralel iki doğrunun ikisine de dik doğru vardır;
6. doğrudan olmayan üç noktadan bir çember geçer;
7. aynı doğruya paralel doğrular paraleldirler;

önergelerini sayabiliriz.

Paralellik aksiyyomu üzerine yazanların öncüsü Proclus'tur. Astronom Ptolemy'nin paralellik aksiyyomu hakkındaki bir yazısındaki yanlış üzerine yazan Proclus, daha sonra Playfair aksiyyomunu kanıtlar. Bu harikulade basit usavuruşun üstünden hep beraber geçelim:



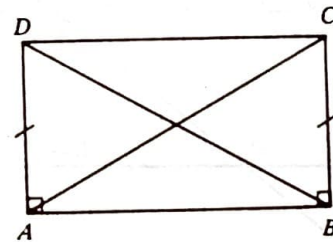
Kanıt. P , l doğrusu üzerinde olmasın. Q , P noktasından l doğrusuna inilen dikmenin ayağı olsun. l' , PQ doğrusuna P noktasında dik

ise, l ve l' , PQ ile aynı açıyı yaptıklarından paraleldirler. P noktasından geçen başka her doğrunun l doğrusunu kestiğini göstermek, P 'den geçen ve l doğrusuna paralel tek doğrunun l' olduğunu göstermek için yeterlidir. l'' böylesi bir doğru ve R , l'' üzerinde bir nokta ve l' , l arasında olsun. S , R noktasından l' doğrusuna inilen dikmenin ayağı ise, RS uzaklığı, R , l'' üzerinde P noktasından uzaklaştıkça büyür. Sonunda l'' doğrusu l doğrusunu kesmek zorunda kalacaktır. $\square$

Ancak Proclus'un kanıtına dikkatlice baktarsak, paralel iki doğru arasındaki uzaklığın her yerde aynı ve sınırlı olduğunun kabul edildiğini görürüz. Öklit'in diğer aksiyyomlarında böylesi bir varsayımı haklı kılacak nedenler yoktur. Paralel doğrular arasındaki uzaklığın değişmez olmasının paralellik aksiyyomunun gerektirdiği biliniyor. Yani, Proclus paralellik aksiyyomunu kanıtlıyacağım derken onu kullanarak temel bir hata yapıyordu.

Paralellik aksiyyomunu kanıtlama çabalarında aksiyyomun kendisi bilinçli veya bilinçsiz, açık veya kapalı bir biçimde işin içine giriyordu ve sonuçta paralellik aksiyyomu kanıtlanamadı. Geometrinin düşmanı olarak da anılan paralellik aksiyyomu konusunda çalışmalar tümü ile de meyvesiz olmamıştır. Kendileri farkında olmasalar da Saccheri, Lambert ve Legendre'in çalışmaları yeni bir geometrinin doğuşunu müjdeliyordu. Acaba paralellik aksiyyomu olmadan nasıl bir geometri yapılabilirdi? Pavia Üniversitesi'nde çalışan bir Cizvit papazı olan Gerolamo Saccheri (1667-1733) böylesi bir uğraşıya ilk girenlerdendir.

Saccheri bu konudaki araştırmalarında A ve B açılarının dik açıları ve $AD = BC$ olduğu $ABCD$ dörtgenini kullanıyordu.



Saccheri paralellik aksiyyomu ve ona bağlı bir sonuç kullanmadan kenar-açı-kenar bağıntısı (Öklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 4) ile BAD ve ABC üçgenlerinin eşitliklerini, buradan da $BD = AC$ elde ediyordu. Buradan kenar-kenar-kenar bağıntısı (Öklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 8) ile ADC ve BCD

üçgenlerinin eşitliğini elde edip, $\angle C = \angle D$ sonucuna varıyordu. Şimdi $\angle C$ ve $\angle D$ için üç olasılık vardı:

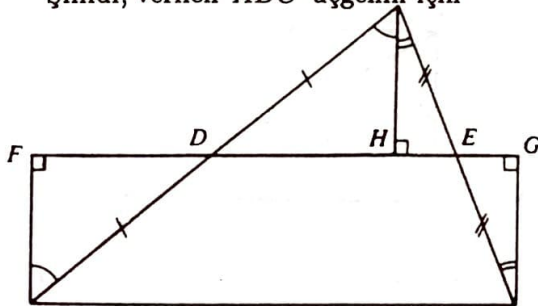
1. $\angle C = \angle D > 90^\circ$ (geniş açı hipotezi);
2. $\angle C = \angle D < 90^\circ$ (dar açı hipotezi);
3. $\angle C = \angle D = 90^\circ$ (dik açı hipotezi).

Paralellik aksiyomu 3. hipoteze denk olduğundan, 1. veya 2. hipotezler ile varılacak bir çelişki paralellik aksiyomunu kanıtlayacaktı. Geniş açı hipotezi ile bir çelişkiye kolayca varan Saccheri, aynı başarıyı dar açı hipotezi ile elde edemedi. Bu hipotez ile elde ettiği teoremler tutarlılık ve güzellik açısından Öklit geometrisindekilerden aşağı değildiler. Ancak bir çelişki peşinde olan Saccheri'nin yeni bir geometri bulduğunun farkına varamamış olması ile insanlık en az bir yüzyıl kaybetmiş oldu.

Saccheri'nin yapıtları ile Berlin Akademisi'nde Euler ve Lagrange'in çalışma arkadaşı olan Johann Heinrich Lambert'in (1728–1777) çalışmaları arasında çok benzerlik vardır. Lambert, üç açısının dik açı olduğu bir dörtgen alır ve dördüncü açının geniş, dar veya dik açı olma durumlarını düşünür. Dördüncü açının geniş açı olması durumunda paralellik aksiyomunu elde ederek bir çelişkiye varan Lambert, dar açı hipotezi altında bir çelişkiye varamadığının farkında idi. Lambert bu arada hiç kimsenin farkına varamadığı bir gerçeği de gördü. Paralellik aksiyomunun eksikliğinde bir üçgenin iç açılarının toplamı, üçgenin alanının arttığı oranda azalıyordu!

Saccheri geniş açı, dar açı veya dik açı hipotezlerinin bir üçgenin iç açılarının toplamının sırayla 2 dik açıdan büyük, 2 dik açıdan küçük veya 2 dik açıya eşit olması gerektiğini gösterdi.

Şimdi, verilen ABC üçgenin için



D ve E sırayla AC ve BC kenarlarının orta noktası olsunlar. D ve E noktalarından geçen doğru parçasına A , B ve C -noktalarından inilen dikmelerin ayaklarını F , G ve H ile gösterelim. AFD ve CHD üçgenleri eşit üçgenlerdir. BHE

ve CHE üçgenleri de kenar-açı-açı (Oklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 26) bağıntısından dolayı eşit üçgenlerdir. Buradan $AF = CH = BG$ elde ederiz. Bu ise $ABGF$ dörtgeninin F ve G açılarının dik açı olduğunu verir. Böylelikle

$$\angle FAB = \angle FAD + \angle DAB = \angle HCD + \angle DAB$$

olacaktır. Öte yandan,

$$\angle GBA = \angle GBE + \angle EBA = \angle HCE + \angle EBA$$

eşitliklerini toplayarak

$$\begin{aligned} \angle FAB + \angle GBA &= \angle DAB + (\angle HCD \\ &\quad + \angle HCE) + \angle EBA \\ &= \angle A + \angle C + \angle B \end{aligned}$$

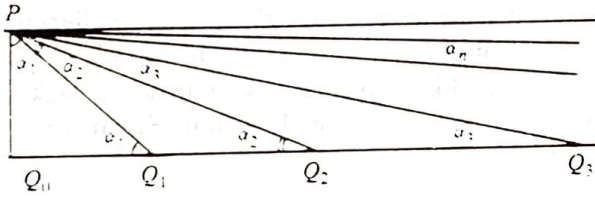
Başka bir deyişle, $ABGF$ dörtgenin taban açıları ile ABC üçgeninin iç açıları toplamı eşittir. Bu bilgilerden sonra eğer geniş açı hipotezinin, bir üçgenin iç açıları toplamının iki dik açıdan (veya dar açı hipotezinin iç açılar toplamını iki dik açıdan küçük) büyük demek olduğunu kolaylıkla görürüz.

Paralellik aksiyomuna en fazla emek verenlerin biri de ünlü Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre (1752–1833) idi. 18. yüzyılda geometrinin üniversite programlarına alınması ile geometriye yeniden ilgi doğdu. Örneğin Kuzey Amerika'nın en eski yüksek öğrenim kurumlarından olan Yale Üniversitesi'nde (kuruluşu 1701) 1733'te Öklit'in *Elemanlar*'ının okutulduğunu ve bunun *Elemanlar*'ın yüksek öğretimde ilk kullanımı olduğunu biliyoruz. Amerika'nın en eski yüksek öğrenim kurumu olan Harvard Üniversitesi'nde (kuruluşu 1636) yine Öklit'in *Elemanlar*'ının 1737'de okutulduğu biliniyor. Bu gelişmeler yeni geometri kitaplarına gereksinim yarattı ve birçok kitap yazıldı. Britanya adalarında *Elemanlar*'a sadık kalınarak, bu eser yüzyıllar boyunca uğradığı değişikliklerden ve yanlışlardan arındırılmaya çalışılırken, Fransızlar *Elemanlar*'a eleştirel gözle bakıyorlardı. Sonuçta Legendre'in 1794'de yazdığı *Eléments de Géométrie*, yazılan tüm kitapların en iyisi olarak görüldü. Bu yapıtta tamlik ve titizlikte ödün vermeden kanıtlar kolaylaştırılıyor ve Öklit'in geometrisinin önermeleri çok daha farklı bir sırada ele alınıyordu. Böylelikle hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin vazgeçemediği bir kitap ortaya çıkmıştı. Kanıtlarının açıklığı ve stiline çekiciliği Legendre'in kitabını tüm zamanların en iyi ders kitabı yapmıştır. Yazarın ölümünden önce 20 kez basılmış ve 100.000'den

fazla satılmıştı. Öte yandan bağımsızlık savaşının etkisi ile olacak, A.B.D. ve Fransa'nın yakınlaşması sonuç olarak, 1819 ve 1822'de başarılı tercümeleri nedeni ile A.B.D.'de de Legendre'in yapıtının Öklit'in *Elemanlar*'ının yerini almasını sağlıyor ve sadece bu ülkede 30 baskı yapılıyor. Böylesine değerli bu kitabın diğer bir önemi de Legendre'in 40 yıl boyunca süren paralellik aksiyomu konusundaki araştırmalarının bu kitabın çeşitli baskılarında ekler olarak yayınlanmış olmasıdır. Legendre da paralellik aksiyomu çalışmalarında bu aksiyoma denk aksiyomlar bulmuştur. Bunlar doğrudan olmayan üç noktadan bir çember geçmesi ve benzer fakat farklı bir büyüklükte üçgenlerin varlığı idi. Legendre da önceleri Saccheri ve Lambert gibi paralellik aksiyomu ile bir üçgenin iç açıları toplamı arasında ilişkiyi çalışmıştı. İşte bunlardan biri:

Teorem. *Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° ise. Öklit'in paralellik aksiyomu doğrudur.*

Kanıt. Playfair aksiyomunu göstermek yeterli olacaktır.



$P \notin \ell$ alalım. P den ℓ doğrusuna inilen dikmenin ayağı Q_0 olsun ve ℓ' , P noktasında ℓ doğrusuna çizilen paralel olsun. (ℓ' , P noktasında PQ_0 doğrusuna dik olarak elde edilebilir.) ℓ' 'nin çizilebilecek tek paralel olduğunu görmek için şekilde görüldüğü gibi $Q_0Q_1 = PQ$, $Q_1Q_2 = Q_1P$, $Q_2Q_3 = Q_2P$, ..., $Q_nQ_{n+1} = Q_nP$ sağlamak üzere $Q_0 = Q, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ noktalarını alalım. Q_i noktalarının seçimi ile hepsi de ikizkenar üçgenler olan Q_0PQ , Q_1PQ_2 , ..., Q_nPQ_{n+1} , ... üçgenler dizisini elde ederiz. İşimizi kolaylaştırmak için $\alpha_n = \angle Q_{n-1}PQ_n = \angle Q_{n-1}Q_nP$ ($n = 1, 2, \dots$) diyelim. $\angle Q_{n-1}Q_nP$ ve $\angle PQ_nQ_{n+1}$ birbirlerini tümleyen açılar olduklarından, her $n = 1, 2, \dots$ için

$$\alpha_n + \angle PQ_nQ_{n+1} = 180^\circ \quad (1)$$

elde edilir. Bir üçgenin iç açıların toplamının 180° olduğunu Q_nPQ_{n+1} üçgenlerine uygulayarak

$$\angle PQ_nQ_{n+1} + 2\alpha_{n+1} = 180^\circ \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

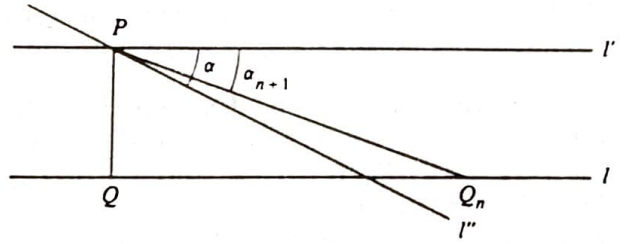
buluruz. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\alpha_n = 180^\circ - \angle PQ_nQ_{n+1} = 2\alpha_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

bulunur. Buradan

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1}{2^2}, \dots, \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\alpha_1}{2^n}$$

elde ederiz.



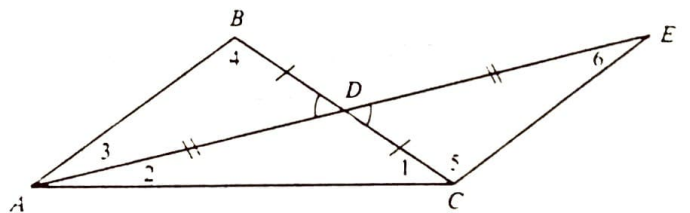
ℓ'' , P 'den geçen başka bir doğru ve α da ℓ'' ile ℓ' arasındaki açı ise, n yeteri kadar büyük seçilerek $\alpha_1/2^n$, α 'dan küçük yapılabilir. Yani, $\alpha_{n+1} < \alpha$ olur. Bu eşitsizlik ℓ'' doğrusunun PQ ve PQ_n arasında kalacağını ve bu nedenle ℓ doğrusunu keseceğini söyler. Başka bir deyişle, P noktasından ℓ doğrusuna çizilebilecek tek paralel ℓ' doğrusudur. $\square$

Bu teoremden yola çıkan Legendre, bir üçgenin iç açıların toplamının 180° 'den büyük veya 180° den küçük olması durumunda paralellik aksiyomuna bir çelişki çıkacağını umuyordu. Böylesi bir çelişki üçgenin iç açıları toplamını 180° olarak verecek ve buna denk olan paralellik aksiyomu kanıtlanmış olacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem bu amaç için önemli bir adımdı:

Yardımcı Teorem. $\angle A$, ABC üçgeninin keyfi bir açısı olsun. ABC üçgeni ile iç açıları toplamı aynı, ancak $\angle A_1 \leq \frac{1}{2}\angle A$ koşulunu sağlayan bir A_1 açısına sahip olan bir $A_1B_1C_1$ üçgeni vardır.

Kanıt. D noktası BC kenarının orta noktası olsun ve AD doğru parçasını $AD = DE$ olacak şekilde uzatıp bir E noktası alalım.



$BD = DC$, $AD = DE$ ve $\angle BDA = \angle CDE$ (Öklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 15) olduğundan BDA ve CDE üçgenleri kenar-açı-kenar bağıntısından eşittirler. Üçgenlerin eşitliğinden $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$ bulunur. Dolayısı ile ACE ile ABC üçgenlerinin iç açılar toplamı eşit olacaktır. $\angle 2 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 3 = \angle A$ olduğundan ya $\angle 2 \leq \frac{1}{2}\angle A$ veya $\angle 3 \leq \frac{1}{2}\angle A$ olmalıdır. Eğer $\angle 2 \leq \frac{1}{2}\angle A$ ise, aranan üçgen ACE üçgeni, eğer $\angle 3 \leq \frac{1}{2}\angle A$ ise, aranan üçgen yine ACE üçgeni, açı ise E açısıdır. $\square$

Yukarıdaki sonuç ile Legendre iç açılar toplamının 180° 'den büyük olamayacağını kolaylıkla gösterebiliyordu. Saccheri bu teoremi Legendre'den yüz yıl önce göstermiş olmasına karşın, aşağıdaki teorem Legendre'nin ilk teoremi olarak biliniyor:

Teorem. *Bir üçgenin iç açılar toplamı 180° 'den küçük veya ona eşittir.*

Kanıt. Bir çelişki elde etmek umudu ile $\alpha > 0$ olmak üzere iç açılarının toplamı $180^\circ + \alpha^\circ$ olan bir ABC üçgeninin var olduğunu kabul edelim. Yardımcı teoremi kullanarak, iç açıları toplamı $180^\circ + \alpha^\circ$ olan ve bir açısı A_1 'in $\angle A_1 \leq \frac{1}{2}\angle A$ olduğu bir $A_1B_1C_1$ üçgeni bulabiliriz. Yardımcı teoremi bu sefer $A_1B_1C_1$ üçgenine uygulayarak, iç açıları toplamı $180^\circ + \alpha^\circ$ olan ve A_2 açısının

$$\angle A_2 \leq \frac{1}{2}\angle A_1 \leq \frac{1}{2^2}\angle A$$

olduğu bir $A_2B_2C_2$ üçgeni bulabiliriz. Tümevarımla iç açıları toplamı $180^\circ + \alpha^\circ$ olan ve bir

açıları, diyelim A_n ,

$$\angle A_n \leq \frac{1}{2^n}\angle A$$

koşulunu sağlayan $A_nB_nC_n$ üçgen dizisi bulabiliriz. n yeteri kadar büyük seçilerek, $\frac{1}{2^n}\angle A < \alpha$ ve dolayısı ile $\angle A_n < \alpha$ sağlanabilir. Şimdi

$$180^\circ + \alpha^\circ = \angle A_n + \angle B_n + \angle C_n < \alpha + \angle B_n + \angle C_n$$

eşitsizliği $\angle B_n + \angle C_n > 180^\circ$ verir ki bu aranan çelişkidir. Zira Öklit'in (*Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 17) bir önermesine göre bir üçgenin herhangi iki açısının toplamı 180° 'den büyük olamaz.

Yukarıdaki teorem ile üçgenin iç açılarının toplamının 180° 'den büyük olamayacağını gösteren Legendre için yapılacak iş, iç açılar toplamının 180° 'den küçük olamayacağını da göstermektir. Verdiği "kanıt" gerçekten iç açılar toplamının negatif olduğunu veren bir çelişkiye yol açıyordu, ama Aması, tahmin edebileceğiniz gibi, kanıtı, sonraları paralellik aksiyomuna denk olduğu anlaşılan bir sav kullanıyordu. Bu sav, bir açının içindeki bir noktadan, açının kollarını kesecek biçimde doğruların çizilebileceği savı idi.

Paralellik aksiyomu hakkında kimi başka bilgileri *Bilim ve Ütopya* dergisinin Şubat 1995 sayısında bulabilirsiniz.

KAYNAKÇA

- [1] Ş. Alpay, *Öklit ve Elemanlar'ı*, *Bilim ve Ütopya*, Kasım (1994).

$$b^2 = a^2 + (b-a)(b+a),$$

$$b^3 = a^3 + 3ab(b-a) + (b-a)^3,$$

$$(a+1)^4 = a^4 + \frac{1}{2}[(2a+1)^3 + 2a+1]$$

özdeşliklerini, doğal sayıların karelerini, küplerini ve dördüncü kuvvetlerini kolayca hesaplamak için kullanabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} 28^2 &= 25^2 + (28-25)(28+25) \\ &= 625 + 3 \cdot 53 = 784, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21^3 &= 20^3 + 3 \cdot 20 \cdot 21(21-20) + (21-20)^3 \\ &= 8000 + 1260 + 1 = 9261, \end{aligned}$$

$$11^4 = 10^4 + \frac{1}{2}[(20+1)^3 + 20+1]$$

$$\begin{aligned} &= 10000 + \frac{1}{2}[9261 + 21] \\ &= 10000 + 4641 = 14641. \end{aligned}$$

Kıvanç Anıl Çelik
Çankaya Atatürk Anadolu Lisesi
Orta Kısım üçüncü sınıf öğrencisi

YİNE GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

John Rigby *

Çeviren: Ahmet Delil

20 yılı aşkın bir zaman önce Hacettepe Üniversitesi'nde (İngilizce olarak) 12 ay ders verdim. Matematiği Türkçe yazmayı hiç denemedim ve o zamanlar öğrendiğim Türkçe'yi de epey unuttum, ama bana *Matematik Dünyası*'nın iki sayısını ödünç veren ve bu makaleyi Türkçe'ye çevirmeyi nazikçe kabul eden araştırmacılarımızdan Ahmet Delil'e üç kelimeden oluşan çok teşekkür ederim demeyi biliyorum.

Emre Alkan'ın makalesi [1] hoşuma gitti, çünkü bana geometrik eşitsizlikler üzerine yaptığım çalışmaları anımsattı ve konu üzerinde tekrar düşünmemi sağladı. Hep güzel olur sonuçların yeni ispatlarını veren birilerinin olması. Aşağıda Emre Alkan'ın makalesindeki bazı problemler hakkında düşüncelerim var. Kolay izlenebilmesi için [1]'deki numaralanmamış problemleri numaralandırdım.

[2] ve [3], geometrik eşitsizlikler üzerine yazılmış önemli iki kitaptır. [2] kolay anlaşılabilir ve 150 sayfadır. Bu kitap birçok yeni araştırma için ilham kaynağı oldu ve 700 sayfalık ansiklopedik birçok eski ve yeni çalışmayı içeren [3]'ün yayınlanmasına yol açtı.

Problem 1.

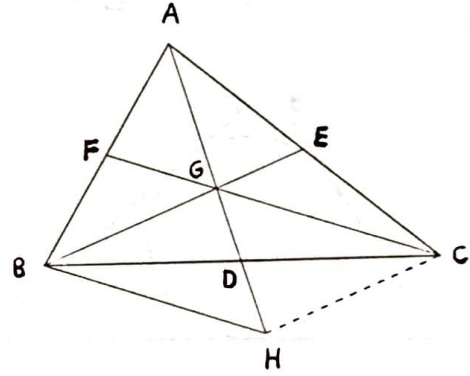
Şekil 1'deki gibi, alanı S , ağırlık merkezi G olan bir ABC üçgenini ele alalım. Bu durumda

$$4S \leq \sqrt{3}(|GB||GC| + |GC||GA| + |GA||GB|) \quad (1)$$

eşitsizliğini ispatlamak istiyoruz. Şekil 1'de H noktasını $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DH}$ (yani $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH}$) olacak biçimde seçelim. Bu durumda $BHCG$ bir paralelkenar ve BHG üçgeni, kenar uzunlukları $|GA|$, $|GB|$ ve $|GC|$ olan bir üçgen olur. Bu üçgenin kenarlarını a, b, c ve alanını Δ ile gösterelim. Böylece $\Delta = S/3$ olacaktır. (1) eşitsizliği şimdi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$bc + ca + ab \geq 4\sqrt{3}\Delta. \quad (2)$$

Bu eşitsizlik BHG üçgeninin kenarları ile alanı arasında kurulmuş bir eşitsizliktir. BHG üçgeni ile başlayarak şeklimizi tekrar oluşturabiliriz. Böylece (1) ve (2) eşitsizliklerinin denk olduğunu, yani birinin diğerinden elde edilebildiğini görürüz, ancak (2) daha kolay ispatlanabilir. Genel olarak $|GA|$, $|GB|$, $|GC|$ ve S 'yi içeren herhangi bir eşitsizliğe karşılık a, b, c ve Δ 'yi içeren bir eşitsizlik vardır ve bunun tersi de doğrudur.



Şekil 1

(2) eşitsizliği [2, §4.5]'te vardır. [2]'deki bir başka eşitsizlik de

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta, \quad (3)$$

eşitsizliğidir; bu da [2, §4.4]'tedir. Dahası, [2]'de olmayan başka bir eşitsizlik

$$2(bc + ca + ab) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}\Delta \quad (4)$$

eşitsizliğidir, ancak bunu [3, s. 179]'da buldum. $\sum bc = bc + ac + ab$, $\sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2$, vb. olarak tanımlayacak ve

$$\sum a^2 \geq \sum bc \geq 2\sum bc - \sum a^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta \quad (5)$$

olduğunu ispatlayacağız. O zaman (4) eşitsizliğinin (3)'ten, (3) eşitsizliğinin de (2)'den daha güçlü olduğu ortaya çıkacaktır. (4) eşitsizliğini kendime şu soruyu sorarak elde ettim: " $P(a, b, c)$

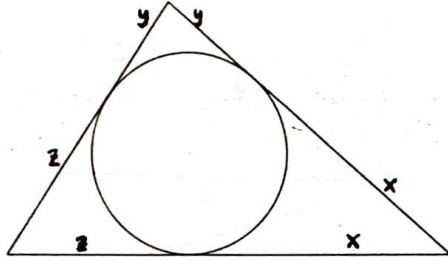
* University of Wales, College of Wales öğretim üyesi

simetrik, homojen bir ikinci derece polinomu olmak üzere, $a = b = c$ iken eşitliğin sağlandığı $P(a, b, c) \geq 4\sqrt{3}\Delta$ şeklindeki en uygun ya da en güçlü eşitsizlik nedir?" En uygun eşitsizlikler için okuyucuya [4] önerilir, ancak (5)'in ispatı zor değil.

(5)'in İspatı. $x = (b+c-a)/2$, $y = (a+c-b)/3$ ve $z = (a+b-c)/3$ pozitif sayıları kullanılarak, bir üçgenin a, b, c kenarları $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ biçiminde yazılabilir. Bunu geometrik olarak Şekil 2'den görebiliriz. Bu durumda, (5)'teki ilk iki eşitsizlik $\sum x^2 - \sum yz \geq 0$ olarak yazılabilir ve kolayca ispatlanabilir, çünkü (2) ile çarpıldığında $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ haline dönüşür. Ayrıca,

$$2 \sum bc - \sum a^2 > 0 \quad (6)$$

olduğunu görmeliyiz. Bu da doğrudur, çünkü x, y, z cinsinden yazdığımızda $4 \sum yz > 0$ haline dönüşür.



Şekil 2

(5)'teki son eşitsizlik olan (4)'ü ispatlamak için, kenarları a, b, c olan bir üçgenin alanına ilişkin Heron formülünü, yani s yarı çevre olmak üzere, $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ formülünü kullanacağız. x, y, z cinsinden yazılınca bu formül $\Delta = \sqrt{xyz(x+y+z)}$ haline dönüşür. Böylece (4)'ün her iki yanının karesi alınarak

$$16 \left(\sum yz \right)^2 \geq 48xyz(x+y+z), \quad (7)$$

veya buna denk olarak

$$8 \sum x^2(y-z)^2 \geq 0 \quad (8)$$

eşitsizliği bulunabilir. Bu son eşitsizlik doğrudur, çünkü sol tarafı üç karenin toplamıdır. Şimdi (7)'nin her iki yanının karekökünü aldığımızda, ki bunu yapabiliriz çünkü (6) doğrudur, elde edeceğimiz (4) eşitsizliğidir. Ayrıca, ancak $x = y = z$ (eşkenar üçgen) durumunda (8)'de eşitlik vardır. □

İlgi çekicidir ki (2), (3) ve (4) eşitsizliklerinden en güçlü olanı, kareler alıp x, y, z cinsinden ifade ettiğimizde en basit formdadır. ((2) ve (3)'ün karesini alıp ne elde ettiğinizi görün!) Burada görüldüğü gibi, bir sonucu ispatlamaya çalıştığımızda daha genel, daha iyi ya da daha güçlü bir şeyi ispatlamak çoğu kez daha kolaydır.

Problem 3.

$\sum a^4 - 2 \sum b^2c^2 + \sum a^2 - bc$ ifadesi ($\sum$ sembolü evvelki anlamında kullanılmak üzere) daha önceki gibi x, y ve z cinsinden yazıldığında pozitif olan

$$\sum x^2(y-z)^2 + \frac{1}{2} \sum yz(y-z)^2$$

haline dönüşür ve eşitlik sadece $x = y = z$, yani eşkenar üçgen halinde görülür. $a = b = c$ halinde eşitlik veren bütün simetrik dördüncü dereceden polinom eşitsizlikleri üzerine genel bir inceleme [4]'te verilmiştir. Ancak [4]'te dikkatsizce yapılmış bir hata var: 198. sayfanın 11. satırı

$$B = \frac{1}{2} \left[-\sum a^4 + 2 \sum a^3(b+c) - 2 \sum b^2c^2 - \sum a^2bc \right] \geq 0$$

şeklinde olmalı.

Problem 4.

$\sum$ sembolü yine evvelki anlamında kullanılmak üzere,

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

eşitsizliğini [2] veya [3]'te bulamadım, ancak daha zayıf olan

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}$$

eşitsizliği [2, §2.15]'te var. Daha zayıf, çünkü $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$ 'dir ve böylece $\frac{5}{8} + \frac{r}{4R} \leq \frac{3}{4}$ olur.

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{4R} \quad (9)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu tahmin ettim ancak ispatlayamadım. Eğer doğruysa, (9)'un bu tipteki eşitsizliklerin en güçlüsü olduğu söylenebilir, çünkü B ve C açıları eşit olan bir ikizkenar üçgende, B ve C 'yi 90° 'ye yaklaştırdığımızda $r/R \rightarrow 0$ olurken

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

olur. (9)'u da [2] veya [3]'te bulamadım, ancak (9)'un her iki tarafını

$$\csc \frac{A}{2} \csc \frac{B}{2} \csc \frac{C}{2} = \frac{4R}{r}$$

ile çarptığımızda

$$\sum \csc \frac{A}{2} \leq \frac{2(R+r)}{r} \quad (10)$$

eşitsizliğini buluruz. Bunu da [2] veya [3]'te bulamadım, ancak (10)'un her iki tarafını r ile çarpar ve ACB 'nin içmerkezini I ile gösterirsek,

$$|AI| + |BI| + |CI| \leq |CI| \leq 2(R+r)$$

buluruz. Bu eşitsizlik [2, §12.2]'de bulunabilir. Aynı yerden, H yüksekliklerin kesim noktası olmak üzere, $2(R+r) = |AH| + |BH| + |CH|$ olduğunu da öğreniyoruz. Orada verilen ispat zekice, ama burada vermek için biraz fazla uzun.

Bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmak üzere değişik bir problemle bitireyim. Bu problem Şekil 1'i çizerken aklıma geldi. Bu yazıyı yazarken (d)'ye henüz bir yanıt bulamadım, ancak iyi bilinen bir yanıtı da olabilir.

- (a) Şekil 1'de ABC ve GHB üçgenlerinin benzer ise, $|BC|$, $|CA|$ ve $|AB|$ kenar uzunlukları arasında hangi bağıntı vardır?

- (b) GHB ve ABC üçgenleri benzer iken, kenarları tamsayı olan tüm ABC üçgenlerini bulunuz.

- (c) GHB ve ABC yine benzer iken, her iki üçgenin birden kenar uzunluklarının tamsayı olması mümkün müdür?

- (ç) Kenarlarının ve kenarortaylarının uzunluklarının tümü tamsayı olan üçgenler var mıdır?

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, *Geometrik Eşitsizlikler III*, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 2, 16-19 (1995).
- [2] O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhof, Groningen, 1968.
- [3] D. S. Mitrinovič et al., *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 1989.
- [4] J. F. Rigby, *Quartic and Sextic Inequalities for the Sides of Triangles*, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 602 - 633, 195-202 (1978).

ALKAN'IN EŞİTSİZLİĞİNE EK

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun *

[1]'de Emre Alkan'ın gösteremediğini söylediği ilginç bir eşitsizliğin daha genel bir biçimi sanırsanız kolayca gösterilebilir. Hepimiz

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad \text{ve} \quad \frac{2}{xy} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

olduğunu biliriz. Özellikle bu sayılar pozitif ise,

$$\frac{1}{(x+y)^n} \leq \frac{1}{2^n \sqrt{x^n} \sqrt{y^n}} \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} \right)$$

bulunur. Bunun yardımıyla kolayca, pozitif x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gerçel sayıları için

$$\frac{1}{(x_1 + x_2)^n} + \frac{1}{(x_2 + x_3)^n} + \dots + \frac{1}{(x_{m-1} + x_m)^n}$$

$$+ \frac{1}{(x_m + x_1)^n} \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} + \dots + \frac{1}{x_m^n} \right)$$

elde edilir, çünkü x_i sayıları sol yanda ikişer tanedir.

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, *Bir Eşitsizlik Üzerine*, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 4, 17-18 (1995).

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

EMRE ALKAN'IN EŞİTSİZLİĞİ ÜZERİNE

Albert Erkip *

Emre Alkan, [1]'de aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu iddia etmişti.

İddia. x, y, z ve n pozitif sayılar olmak üzere,

$$\frac{1}{(x+y)^n} + \frac{1}{(x+z)^n} + \frac{1}{(y+z)^n} \leq \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} \right)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $x = y = z$ iken vardır.

[1]'de Emre Alkan istenen eşitsizliğin, h_a, h_b, h_c ve $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ sırayla bir ABC üçgeninin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları olmak üzere, $h_a^n + h_b^n + h_c^n \leq \Gamma_a^n + \Gamma_b^n + \Gamma_c^n$ eşitsizliğine denk olduğunu göstererek, iddiasını $n = 1$ ve $n = 2$ durumları için kanıtlamıştı.

Fonksiyonların dışbükeylik özellikleri kullanılarak iddiadaki ve benzeri eşitsizlikler kolayca kanıtlanabilir. Aşağıdaki teoremin dışbükeylikle ilgisi fonksiyonun grafiğinin üzerinde kalan bölgeye bakınca görülecektir.

Teorem. Bir I açık aralığında f iki kere türevlenebilir ve her $t \in I$ için $f''(t) > 0$ olsun. Her $a, b \in I$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $a = b$ iken vardır.

Kanıt. $g(t) = \frac{1}{2}(f(a) + f(t)) - f\left(\frac{a+t}{2}\right)$ fonksiyonuna bakalım. $t \in I$ için

$$g'(t) = \frac{1}{2} \left[f'(t) - f'\left(\frac{a+t}{2}\right) \right] = \frac{t-a}{4} f''(c) \quad (2)$$

olacaktır. İkinci eşitlikte Ortalama Değer Teoremi kullandık ve bu eşitlik t ile $\frac{a+t}{2}$ arasındaki uygun bir c için sağlanır. $f''(c) > 0$ olduğundan (2)'den g fonksiyonunun $t < a$ için azalan, $t > a$ için artan olduğu çıkar; yani g 'nin minimum değeri $t = a$ noktasındadır. $b \neq a$ için

$$\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(b) > g(a) = 0$$

Teorem 1'in kanıtını tamamlar. $\square$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

İddiadaki eşitsizliğe gelince, $f(t) = 1/t^n$ için

$$f''(t) = \frac{n(n+1)}{t^{n+2}} > 0$$

eşitsizliği $I = (0, \infty)$ aralığında geçerlidir. x, y, z pozitif sayıları için Teorem 1'den çıkan

$$\frac{2^n}{(x+y)^n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} \right)$$

ile $x+z$ ve $y+z$ için benzer eşitsizleri toplarsak iddiadaki eşitsizliği elde ederiz. Eşitlik ancak üç eşitlikte de eşitlik durumunda, yani $x = y = z$ iken vardır.

Teorem 1'de a ve b 'nin orta noktası $\frac{a+b}{2}$ yerine aralarındaki herhangi bir noktayı düşünebiliriz, bu bize aynı yolla kanıtlanabilen şu teoremi verir.

Teorem 2. Bir I açık aralığında f iki kere türevlenebilir ve her $t \in I$ için $f''(t) > 0$ olsun. Her $a, b \in I$ ve her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $a = b$ iken vardır.

Teorem 2'yi kullanarak Emre Alkan'ın eşitsizliğini biraz genelleştirebiliriz: x, y, z, α, β ve n pozitif sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha x + \beta y)^n} + \frac{1}{(\alpha y + \beta z)^n} + \frac{1}{(\alpha z + \beta x)^n} \\ \leq \frac{1}{(\alpha + \beta)^n} \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} \right) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $x = y = z$ iken vardır.

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, Bir Eşitsizlik Üzerine, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 4, 17-18 (1995).

DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR

H. Turgay Kaptanoğlu *

A. Dışbükey Kümeler

Geometri derslerinden (eğer orta öğrenimde hâlâ geometri dersi kalmışsa) düzlemdeki dışbükey şekillerin nasıl şeyler oldukları hakkında bir fikrimiz vardır. Üçgen, kare, daire, yamuk, düzgün beşgen, altıgen, vb. dışbükey şekillerdir, fakat yıldız değildir, çünkü yıldızın dışındaki bölge yıldızla doğru girintiler yapar. Bunun matematiğe daha uygun ifadesi şudur: Yıldızın içinde (farklı kollarında) öyle iki nokta bulabiliriz ki bu noktaları birleştiren doğru parçası mutlaka yıldızın dışına taşar.

A, B düzlemde iki nokta ve $t, 0 \leq t \leq 1$ sağlayan gerçel sayı ise, $(1-t)A + tB$ noktalarının kümesi A ile B 'yi birleştiren doğru parçasını verir. t sıfırdan bire doğru artarken, A 'dan B 'ye gideriz; $t = \frac{1}{2}$ iken A ile B 'nin tam ortasındayızdır. $t > 1$ veya $t < 0$ olması noktalardan birinin öbür tarafına geçmiş olduğumuzu gösterir. Koordinat kullanırsak, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ yazabiliriz ve

$$(1-t)A + tB = ((1-t)a_1 + tb_1, (1-t)a_2 + tb_2)$$

olur. A ve B 'nin n boyutlu gerçel uzayda ($\mathbb{R}^n$ 'de) noktalar olması durumunda da benzer kavramlar ve ilişkiler geçerlidir.

Tanım 1. $D \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $A, B \in D$ ve $0 \leq t \leq 1$ sağlayan her gerçel t için

$$(1-t)A + tB \in D$$

ise, D 'ye dışbükey küme deriz.

$\mathbb{R}^n$ 'de A ve B noktaları arasındaki uzaklığı

$$\|A - B\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

ile gösteririz. Uzaklığın üç temel özelliği şunlardır.

- (1) $\|A - A\| = 0$ 'dır ve $A \neq B$ ise $\|A - B\| > 0$ olur.

- (2) t bir gerçel sayı ise, $\|tA - tB\| = \|t(A - B)\| = |t| \|A - B\|$ sağlanır. $t = -1$ halinde ise bu $\|A - B\| = \|B - A\|$ verir; bu simetri özelliğidir.

- (3) $\|A - B\| \leq \|A - C\| + \|C - B\|$; bu üçgen eşitsizliğidir.

(1), farklı iki noktanın, birbirine ne kadar yakın olurlarsa olsunlar, aralarındaki uzaklığın sıfır olmayacağını söyler. (2), A 'nın B 'ye olan uzaklığı, B 'nin A 'ya olan uzaklığıyla aynıdır demekle eşdeğerdir. (3), bir üçgende en uzun kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından kısadır demekten başka bir şey değildir. Aynı zamanda iki nokta arasındaki en kısa yolun bir doğru olması anlamına da gelir.

Her dairenin dışbükey olduğunu göstereyim. Dairenin merkezi M ve yarıçapı $r > 0$ ise, bir X noktasının dairede olması demek, dairenin sınırı olan çemberi içerip içermediğine göre, $\|X - M\| \leq r$ veya $\|X - M\| < r$ eşitsizliklerinden birini sağlaması demektir. Diyelim ikincisidir. Şimdi dairede A ve B diye iki nokta alalım ve $0 \leq t \leq 1$ alalım. $C = (1-t)A + tB$ dersek,

$$\begin{aligned} \|C - M\| &= \|(1-t)A + tB - (1-t)M - tM\| \\ &\leq (1-t)\|A - M\| + t\|B - M\| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır; $1-t$ ve t , pozitif olduklarından $\|\cdot\|$ dışına olduğu gibi çıkarlar. Sonuç olarak $C = (1-t)A + tB$ 'nin de $0 \leq t \leq 1$ iken dairede olduğu anlaşılır. Bu ise dairenin dışbükey olması demektir.

B. Dışbükey Fonksiyonlar

Tanım 2. $A \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in A$ ve $0 \leq t \leq 1$ sağlayan her gerçel t için

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

sağlanıyorsa, f 'ye dışbükey fonksiyon denir.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $A = (-\infty, \infty)$ aralığında dışbükey olduğunu görelim. $a, b \in \mathbb{R}$ ise önce $2ab \leq a^2 + b^2$ doğrudur, çünkü bu $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ 'a, bu da $(a - b)^2 \geq 0$ 'a denktir. $c = (1 - t)^2 a + tb$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ için

$$\begin{aligned} c^2 &= (1 - t)^2 a^2 + t^2 b^2 + a(1 - t)atb \\ &\leq (1 - t)^2 a^2 + t^2 b^2 + (1 - t)t(a^2 + b^2) \\ &= ((1 - t)^2 + (1 - t)t)a^2 + (t^2 + (1 - t)t)b^2 \\ &= (1 - t)a^2 + tb^2 \end{aligned}$$

buluruz ki bu Tanım 2'nin f için gerçekleşmesidir. $0 \leq t \leq 1$ olduğunu nerede kullandık? Eğer $t > 1$ veya $t < 0$ olsaydı, yukarıda ilk denklemdaki $t(1 - t)$ negatif olurdu ve ikinci satırdaki eşitsizlik tersine dönerdi. Aynı yolla, $g(x) = cx + d$ şeklindeki her fonksiyonun, yani doğruların da dışbükey olduğunu görürüz.

$x = (1 - t)a + tb$ yazarsak,

$$t = \frac{b - x}{b - a} \quad \text{ve} \quad 1 - t = \frac{x - a}{b - a}$$

olur ve Tanım 2'deki eşitsizlik

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \end{aligned}$$

halini alır.

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a),$$

f 'nin grafiğinde bulunan $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun denklemdir. O halde Tanım 2'deki eşitsizlik, f fonksiyonunun $x = a$ ile $x = b$ arasındaki grafiğinin $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında veya ona değiyor olduğunu ifadesidir. Ve bu A aralığındaki her a, b nokta çifti tarafından sağlanmalıdır. Tanım 2'de eşitliğin yalnız doğrular tarafından sağlandığını da buradan görürüz.

Bu geometrik özellikten yararlanarak, üstel fonksiyon $h(x) = e^x$ 'in bütün gerçel sayılar kümesi üzerinde dışbükey olduğunu görürüz; tabii bu bir ispat değildir; ispatı aşağıda vereceğiz. Gene aynı yolla $l(x) = \ln x$ hiçbir aralıkta dışbükey değildir; $k(x) = x^3$ ise sadece $[0, \infty)$ aralığı veya onun alt aralıklarında dışbükeydir.

İki çeşit dışbükeylik tanımladık. İlk akla gelen soru aralarında bir ilişki olup olmadığı. Var, hem de çok yakından. f , bir A aralığında

dışbükey olan bir fonksiyon olsun. E_f ile f 'nin A 'daki grafiğinin üzerinde kalan bölgeyi gösterelim; yani

$$E_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y \geq f(x) \}$$

olsun.

Teorem 3. f 'nin A 'da dışbükey olması için gerek ve yeter şart E_f 'nin dışbükey olmasıdır.

İspat. f dışbükey olsun ve $(a, c), (b, d) \in E_f$ alalım. Bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının denklemini

$$y = \frac{b - x}{b - a} c + \frac{x - a}{b - a} d \quad (a \leq x \leq b)$$

şeklinde yazabileceğimizi gördük. $a, b \in A$ ile $c \geq f(a)$ ve $d \geq f(b)$ gerçekleşir. Bunlar ve f 'nin dışbükeyliği sayesinde $a \leq x \leq b$ için

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) \\ &\leq \frac{b - x}{b - a} c + \frac{x - a}{b - a} d = y \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise doğru parçasının tamamının E_f 'de kaldığını, yani E_f 'nin dışbükey olduğunu söyler.

Tersine f dışbükey değilse, öyle $a, b \in A$ ve aralarında bir $x_0 \in A$ vardır ki

$$f(x_0) > \frac{b - x_0}{b - a} f(a) + \frac{x_0 - a}{b - a} f(b)$$

gerçeklenir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına s diyelim.

$$c = f(a) + \frac{f(x_0) - s}{2} \quad \text{ve} \quad d = f(b) + \frac{f(x_0) - s}{2}$$

tanımlayalım. Açıkça $c > f(a)$ ve $d > f(b)$ 'dir; yani (a, c) ve (b, d) noktaları E_f 'dedir. (a, c) ve (b, d) noktalarından geçen doğruyu g fonksiyonu ile gösterelim. x_0 ne olursa olsun

$$\frac{b - x_0}{b - a} + \frac{x_0 - a}{b - a} = \frac{b - a}{b - a} = 1$$

sağlandığından, s 'nin tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \frac{b - x_0}{b - a} c + \frac{x_0 - a}{b - a} d \\ &= \frac{b - x_0}{b - a} f(a) + \frac{x_0 - a}{b - a} f(b) + \frac{f(x_0) - s}{2} \\ &= s + \frac{f(x_0) - s}{2} = \frac{f(x_0) + s}{2} < f(x_0) \end{aligned}$$

buluruz. Bu ise (a, c) ve (b, d) noktalarını birleştiren doğru parçasının $x = x_0$ 'da, f 'nin grafiğinde olan $(x_0, f(x_0))$ noktasının altında olduğunu ve dolayısıyla bu doğru parçasının tamamının E_f 'de kalmadığını söyler; yani E_f dışbükey değildir. $\square$

$\alpha, \beta \geq 0$ ise ve f, g dışbükey fonksiyonlarsa, $\alpha f + \beta g$ de dışbükey olur. Dolayısıyla dışbükey iki fonksiyonun toplamı ile dışbükey bir fonksiyonun pozitif katları da dışbükeydir. Ama çarpımlar ve negatif katlar için aynı şeyi söyleyemeyiz.

Önerme 4. $A \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon ve $a < c < b$, A 'da noktalar olsun. O zaman

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir.

Bu önermenin geometrik anlamı şudur: $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $C = (c, f(c))$ dersek, $[AC]$ 'nin eğimi $[AB]$ 'nin eğiminden küçük veya ona eşit, o da $[BC]$ 'nin eğiminden küçüktür veya ona eşittir.

İspat. f dışbükey ve

$$c = \frac{b - c}{b - a}a + \frac{c - a}{b - a}b$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f(c) - f(a) &\leq \frac{b - c}{b - a}f(a) + \frac{c - a}{b - a}f(b) \\ &\quad - \frac{b - c}{b - a}f(a) - \frac{c - a}{b - a}f(a) \\ &= \frac{a - c}{b - a}f(a) + \frac{c - a}{b - a}f(b) \\ &= \frac{c - a}{b - a}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan ilk eşitsizlik çıkar. İkincisi de buna benzer. $\square$

Şimdi A açık bir aralık, $a < c < b$, A 'da noktalar ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey olsun.

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x \in [a, c) \cup (c, b])$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Önerme 4'ü $x < c < b$ üçlüsü ile kullanırsak, g 'nin $[a, c)$ 'de

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

sayısı ile üstten sınırlı olduğunu, Önerme 4'ü bir kez de $x < y < c$ üçlüsü ile kullanırsak, g 'nin $[a, c)$ 'de artan olduğunu görürüz. Bu son iki gözlem bize

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \text{eküs} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_-(c)$$

limitinin varlığını söyler. Aynı şekilde

$$\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \text{ebas} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_+(c)$$

limiti de vardır. Burada eküs ve ebas sırayla *en küçük üst sınır* ve *en büyük alt sınır* demektir.

Yukarıdaki iki limit birbirine eşit olmaya bilir. Örneğin $g(x) = |x|$ fonksiyonu $A = (-\infty, \infty)$ 'da dışbükeydir, ama $g'_+(0) = +1$ ve $g'_-(0) = -1$ verir. Bu fonksiyonun ayrıca dışbükey bir fonksiyonun türevli olmasının gerekmediğine de bir örnektir.

Şimdi bir kez daha Önerme 4'ü $c - h < c < c + h$ üçlüsü ile kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{f(c) - f(c - h)}{h} &\leq \frac{f(c + h) - f(c - h)}{2h} \\ &\leq \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \end{aligned}$$

buluruz. Ortadaki ifadeyi görmezlikten gelir ve $h \rightarrow 0$ iken limit alırsak, $f'_-(c) \leq f'_+(c)$ elde ederiz. Tekrar Önerme 4'ten ve $f'_+(a)$ 'nin tanımından

$$f'_+(a) \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

yazarız. Şimdi sağ tarafın $b \rightarrow c^+$ iken limitini alırsak $f'_+(c)$ buluruz ve eşitsizlikler korunur; yani $a < c$ için $f'_+(a) \leq f'_+(c)$ 'dir. f'_- için de aynı şey geçerlidir.

Sağ ve sol türevin elimizdeki özelliklerinden şunları da çıkartırız:

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq f'_-(c) \leq f'_+(c) \quad (x < c)$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq f'_+(c) \quad (x > c)$$

birlikte $x \in A$ ve $x \neq c$ için

$$f(x) \geq f(c) + f'_+(c)(x - c)$$

verir ki bu $x = c$ için de doğrudur. Benzer bir sonuç $f'_-(c)$ ile de vardır.

Şimdi toparlayalım:

Teorem 5. A açık bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey olsun. O zaman f 'nin A 'nın her noktasında sağ ve sol türevi vardır, bu türevler artan fonksiyonlardır ve bir noktadaki sağ türev aynı

noktadaki sol türevden küçük değildir. Ayrıca $c \in A$ ve $f'_-(c) \leq m \leq f'_+(c)$ ise,

$$f(x) \geq f(c) + m(x - c) \quad (x \in A)$$

geçerlidir.

Son eşitsizliğin geometrik anlamı şudur: Açık bir aralıktaki dışbükey bir f fonksiyonunun grafiği, grafiğin bir noktasından geçen ve eğimi, fonksiyonun o noktadaki sağ ya da sol türevi olan doğrunun üst tarafında kalır. Eğer aralığın bir noktasında f türevli ise, f 'nin bütün aralıktaki grafiği, f 'nin türevli olduğu noktada f 'nin grafiğine çizilen teğetin üst tarafındadır.

Teorem 5'i ispatlamaktaki amaçlarımızdan biri de şuydu:

Teorem 6. A açık bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey ise, f süreklidir.

İspat. A 'da $a \leq x < y \leq b$ noktalarını alalım. Sağ ve sol türevin tanımlarından ve özelliklerinden

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b)$$

elde ederiz. $|f'_+(a)|$ ile $|f'_-(b)|$ 'nin büyüğüne M diyelim. f o zaman $[a, b]$ aralığından Lipschitz şartı dedikimiz

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

eşitsizliğini sağlar. Buradan $y \rightarrow x$ iken $f(y) \rightarrow f(x)$ olur ve bu f 'nin sürekliliği demektir. $\square$

Bu teoremin geçerliliği A 'nın açık olmasına bağlıdır. Örneğin, $A = [0, 1]$ ise ve f 'yi $f(0) = 1$ ve $x \in (0, 1]$ iken $f(x) = 0$ diye tanımlarsak, f dışbükeydir fakat sürekli değildir.

Teorem 7. A açık bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ türevli olsun. f 'nin A 'da dışbükey olması için gerek ve yeter şart f' 'nin A 'da artan olmasıdır.

İspat. f dışbükey ise sağ ve sol türevlerin artan olduğunu Teorem 5'te söyledik. f 'nin türevli olması halinde sağ ve sol türevin ikisi birden türeve eşittir.

Tersine f' artan olsun. f dışbükey olmasa A 'da öyle $a < c < b$ noktaları buluruz ki

$$f(c) > \frac{b - c}{b - a}f(a) + \frac{c - a}{b - a}f(b)$$

sağlanır. Bu eşitsizlik ise Önerme 4'ün ispatında olduğu gibi

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} > \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

eşitsizliğine denktir. Her iki tarafa Ortalama Değer Teoremi'ni [2] uygularsak, öyle $a < x < c < y < b$ buluruz ki $f'(x) > f'(y)$ olur. Bu ise varsayımımızın aksine f' azalıyor demektir. Çelişki f 'yi dışbükey olmaya zorlar. $\square$

Sonuç 8. A açık bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ iki kere türevlenebilir olsun. f 'nin A 'da dışbükey olması için gerek ve yeter şart A 'da $f'' \geq 0$ olmasıdır.

İspat. f dışbükey ise, f' artandır; dolayısıyla $f'' \geq 0$ 'dır.

Tersine A 'da $f'' \geq 0$ olsun. $a < b \in A$ ve $t \in (0, 1)$ alalım ve $c = (1 - t)a + tb$ diyelim. Ortalama Değer Teoremi'nden $a < x < c < y < b$ olacak şekilde öyle $x, y \in A$ ve $x < y$ olduğundan ikisi arasında öyle bir z vardır ki

$$f(c) - f(a) = f'(x)(c - a)$$

$$f(b) - f(c) = f'(y)(b - c)$$

$$f'(y) - f'(x) = f''(z)(y - x)$$

yazabiliriz. $u = (1 - t)f(a) - tf(b)$ diyelim. Bunlardan ve c 'nin tanımından çıkan

$$f(c) - u = (1 - t)(f(c) - f(a)) - t(f(b) - f(c))$$

$$= (1 - t)f'(x)(c - a) - tf'(y)(b - c)$$

$$= (1 - t)t(b - a)f'(x) - (1 - t)t(b - a)f'(y)$$

$$= (1 - t)t(b - a)f''(z)(x - y) \leq 0$$

eşitsizliği f 'nin dışbükey olduğunu söyler. $\square$

Teorem 7 ve Sonuç 8 yardımıyla birçok tanınmış fonksiyonun dışbükey olup olmadığını gösterebiliriz. Örneğin $h(x) = e^x$ ise, her gerçel x için $h''(x) = e^x > 0$ 'dır ve dolayısıyla h , $\mathbb{R}$ 'de dışbükeydir. Buna karşılık olarak f 'nin tersi olan ve $(0, \infty)$ aralığında tanımlanan $l(x) = \ln x$ fonksiyonu tanımlandığı hiçbir yerde dışbükey değildir, çünkü $x > 0$ iken $l''(x) = -1/x^2 < 0$ 'dır. $p > 1$ iken $f(x) = x^p$ fonksiyonu $A = (0, \infty)$ aralığında dışbükeydir, çünkü bu aralıkta $f''(x) = p(p - 1)x^{p-2} > 0$ 'dır. Benzer şekilde polinomlar ve trigonometrik fonksiyonlar için de dışbükeylik aralıkları bulabiliriz.

C. Orta Nokta Dışbükeyliği

Tanım 9. A bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in A$ için

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

sağlanıyorsa, f 'ye orta noktada dışbükey denir.

Tanım 2'nin aksine t sayısı burada sadece $1/2$ değerini alabilmektedir; dolayısıyla orta noktada dışbükeylik, dışbükeylikten daha zayıf bir kavramdır. Teorem 10'da göreceğimiz gibi bu zayıflık süreklilikle kapatılabilir. Geometrik olarak anlamı, fonksiyonun grafiğinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta noktasının, fonksiyonu grafiğinin aynı düşey doğrultudaki noktasından aşağıda kalmamasıdır.

Teorem 10. A bir aralık, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ orta noktada dışbükey ve sürekli ise, f dışbükeydir.

İspat. $\{a_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$), A 'da bir dizi olsun. $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ diyelim. Tanım 9'dan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b}{4}\right) &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{4}(f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4)) \end{aligned}$$

çıkar. Böylece tümevarımla, 2^k şeklindeki her n için,

$$f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(a_1) + \dots + f(a_n)) \quad (*)$$

olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi $(*)$ 'in doğru olduğu bir $n = N$ alalım.

$$a_N = \frac{1}{N-1}(a_1 + \dots + a_{N-1})$$

diye yeniden tanımlarsak, sırayla

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{1}{N}(a_1 + \dots + a_N) \\ f(a_N) &= f\left(\frac{a_1 + \dots + a_N}{N}\right) \\ &\leq \frac{1}{N}(f(a_1) + \dots + f(a_{N-1})) + \frac{1}{N}f(a_N) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bunu $f(a_N)$ için çözerek

$$f(a_N) \leq \frac{1}{N-1}(f(a_1) + \dots + f(a_N))$$

buluruz. Bu ise $(*)$ 'in $n = N - 1$ için de doğru olduğunu söyler. Dolayısıyla $(*)$, her pozitif tam sayı n için geçerlidir.

Son olarak $0 \leq k \leq n$ tamsayılar ve $a, b \in A$ olsun. $(*)$ 'da ilk $n - k$ noktayı a , kalan k noktayı da b olarak alırsak,

$$f\left(\frac{n-k}{n}a + \frac{k}{n}b\right) \leq \frac{1}{n}((n-k)f(a) + kf(b))$$

yazabiliriz. Bu ise $0 < s < 1$ sağlayan her rasyonel sayı s için

$$f((1-s)a + sb) \leq (1-s)f(a) + sf(b)$$

olması demektir. $0 \leq t \leq 1$ bir gerçel sayı ise, ona yakınsayan $\{s_k\}$ rasyonel sayı dizisini bulabiliriz, ve son eşitsizliğin sağ tarafı açıkça $(1-t)f(a) + tf(b)$ 'ye yakınsar. f sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f((1-s_k)a + s_k b) &= f(\lim_{k \rightarrow \infty} ((1-s_k)a + s_k b)) \\ &= f((1-t)a + tb) \\ &\leq (1-t)f(a) + tf(b) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise Tanım 2'deki eşitsizlikten başka bir şey değildir. $\square$

D. Jensen Eşitsizliği

Matematikte çok bilinen ve kullanılan eşitsizliklerin birçoğu aslında *Jensen eşitsizliği*nin değişik dışbükey fonksiyonlarla kullanılmasından elde edilir. Bu, dışbükeylik kavramının ne kadar temel bir kavram olduğuna işaret eder. Aşağıda şaşırtıcı birkaç örnek vereceğiz. Öneminden dolayı Jensen eşitsizliğinin iki ayrı şeklini veriyoruz. Bu iki şekil aslında birbirinden çıkarılabilir.

Teorem 11. A açık bir aralık ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey olsun. $t_1 + \dots + t_n = 1$ olacak şekilde pozitif sayılar ve $x_1 \leq \dots \leq x_n \in A$ alalım. O zaman

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart f 'nin $[x_1, x_n]$ aralığında bir doğru olmasıdır.

İspat. $p = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$ dersek,

$$\begin{aligned} p &\geq t_1 x_n + t_2 x_n + \dots + t_n x_n \\ &= (t_1 + \dots + t_n)x_n = x_n \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $p \leq x_1$ buluruz. Yani $p \in A$ 'dır. Teorem 5'ten her x_k için

$$f(x_k) \geq f'_+(p)(x_k - p) + f(p)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını t_k ile çarpıp ve sonra $k = 1$ 'den $k = n$ 'ye kadar

toplarsak,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n t_k f(x_k) &\leq f'_+(p) \sum_{k=1}^n t_k x_k - p f'_+(p) \sum_{k=1}^n t_k \\ &\quad + f(p) \sum_{k=1}^n t_k \\ &= p f'_+(p) - p f'_+(p) + f(p) \\ &= f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. n üzerinde tümevarım kullanarak değişik bir ispat verebilirdik. Eşitlik hali ile ilgili iddiayı da dışbükeyliğin tanımından sonra verdiğimiz geometrik açıklamadan rahatça görürüz. $\square$

Teorem 12. $g : [c, d] \rightarrow (a, b)$ sürekli ve $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey olsun. O zaman

$$f\left(\frac{1}{d-c} \int_c^d g(x) dx\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(g(x)) dx$$

sağlanır.

İspat. Teorem 11'in ispatına benzer şekilde

$$p = \frac{1}{d-c} \int_c^d g(x) dx$$

dersek, gene $a < p < b$ olur. Teorem 5'ten her $y \in (a, b)$ için $f(y) \geq f(p) + f'_+(p)(y - p)$ olduğunu biliyoruz. $y = g(x)$ alırsak $f(g(x)) \geq f(p) + f'_+(p)(g(x) - p)$ buluruz. Şimdi bu eşitsizliğin her iki tarafının c 'den d 'ye integralini alırsak,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(g(x)) dx &\geq f(p) \int_c^d dx + f'_+(p) \int_c^d g(x) dx \\ &\quad - p f'_+(p) \int_c^d dx \\ &= f(p)(d-c) + f'_+(p)p(d-c) \\ &\quad - p f'_+(p)(d-c) \\ &= (d-c) f\left(\frac{1}{d-c} \int_c^d g(x) dx\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Artık her iki tarafı $d-c$ 'ye bölmek yetercektir. $\square$

Bu ve bundan sonraki integralle ilgili sonuçlarda aslında integrali alınan fonksiyonun sürekli olması, tanım kümesinin bir aralık, hatta gerçel sayıların bir altkümesi bile olması bile

gerekmez. Üzerinde integral alınabilecek bir küme ve integrali tanımlanabilecek bir fonksiyon yeter.

Şimdi Teorem 12'de $f(x) = e^x = \exp x$ alırsak, $[0, 1]$ aradığında tanımlı sürekli bir g fonksiyonu için

$$\exp \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 e^{g(x)} dx,$$

ya da $h(x) = e^{g(x)}$ yazarsak $g(x) = \ln h(x)$ olacağından,

$$\exp \int_a^1 \ln h(x) dx \leq \int_0^1 h(x) dx$$

buluruz.

$t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ alır ve $f(x) = e^x$ 'i Teorem 11'de kullanırsak

$$\exp\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right) \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \dots + e^{x_n}),$$

ya da $y_k = e^{x_k}$ yazarsak $x_k = \ln y_k$ olacağından,

$$\begin{aligned}(y_1 \dots y_n)^{1/n} &= \exp \ln(y_1 \dots y_n)^{1/n} \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(y_1 \dots y_n)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} (\ln y_1 + \dots + \ln y_n)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise *aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği*dir. $n = 2$ aldığımızda iyi bildiğimiz

$$\sqrt{y_1 y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

şekline girer. Teorem 12'de bütün t_k 'leri eşit almak yerine her birini pozitif ve toplamı 1 olacak şekilde seçersek, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin daha genel hali olan

$$y_1^{t_1} \dots y_n^{t_n} \leq t_1 y_1 + \dots + t_n y_n$$

eşitsizliğini de buluruz [4].

Teorem 11'i bu kez $f(x) = e^{-x}$ dışbükey fonksiyonu ile kullanacak olursak, yukarıdakilere benzer işlemlerden sonra

$$\frac{1}{\frac{t_1}{y_1} + \dots + \frac{t_n}{y_n}} \leq y_1^{t_1} \dots y_n^{t_n}$$

eşitsizliğini buluruz. Bu, $n = 2$ ve eşit t_k 'ler ile

$$\frac{2}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}} \leq \sqrt{y_1 y_2}$$

biçimine girer. Son iki eşitsizliğin sol tarafına *harmonik ortalama* denir [4].

Harmonik, geometrik ve aritmetik ortalamaların arasındaki bağıntılarda eşitlik olması için Teorem 11'de söylendiği gibi $f(x) = e^x$ ve $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonlarının $[x_1, x_n]$ aralığında doğru vermesi şarttır. Bu da ancak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ iken mümkündür. Dolayısıyla verdiğimiz üç çeşit ortalamanın birbirine eşitliği ancak bütün sayılar birbirine eşitse oluşur.

Bu dergide başka yazılardaki [1,3,6] bazı eşitsizlikler de Jensen eşitsizliğinde uygun dışbükey fonksiyonlar seçilerek elde edilebilir.

E. Hölder, Cauchy-Schwarz ve Minkovski Eşitsizlikleri

Dışbükey fonksiyonlardan söz ederken çoğu kez toplamaları 1 olan iki pozitif sayı kullandık. Bu iki sayıyı biraz daha özel seçebiliriz: p ve q , toplamaları ve çarpımları aynı, yani $p + q = pq$ olan pozitif iki gerçel sayı olsun. Bu şart

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olması demektir. Böyle seçilen p ve q 'ya birbirinin *eşleniği* denir. p ve q eşlenik iseler, $1 < p, q < \infty$ olacağı açıktır; öbür türlü birinin negatif olması gerekirdi. Eşlenik iki sayıdan birinin sınırsız artması diğerinin 1'e yaklaşmasını gerektirir. Fakat ∞ bir gerçel sayı olmadığından dolayı $p = 1$ ya da $q = 1$ almayacağız. Önemli bir özel durum, $p = q = 2$ simetrik halidir.

Aşağıdaki teoremlerde seçeceğimiz sayılar ve fonksiyonlar gerçel veya karmaşık değerli olabilir. Duruma göre $|\cdot|$, mutlak değer veya modülü gösterir. Pozitif sayılar veya fonksiyonlar için tabii ki $|\cdot|$ kullanmaya gerek kalmaz.

Teorem 13. $1 < p < \infty$ ve q , p 'nin eşleniği olsun. $a_1, \dots, a_n$ ve $b_1, \dots, b_n$ sayıları

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliğini sağlar. Buna Hölder eşitsizliği denir.

İspat. Sayılardan sıfır olanları toplamalara katkıları olmadıklarından atılmış kabul edelim. Gösterdiğimiz eşitsizliğin sağındaki iki çarpıma sırayla A ve B diyelim. Açıkça $0 < A, B < \infty$ 'dur. O zaman $c_k = a_k/A$ ve $d_k = b_k/B$ tanımlamamızda sorun çıkmaz; c_k ve d_k 'ler de 0'dan farklıdır.

Üstelik

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^p = \sum_{k=1}^n |d_k|^q = 1$$

sağlanır. Üstel fonksiyon $(0, \infty)$ aralığındaki her değeri aldığından, her k 'ye karşılık $|c_k| = e^{s_k/p}$ ve $|d_k| = e^{t_k/q}$ gerçekleyen s_k ve t_k pozitif sayılarını bulabiliriz. p ve q eşlenik olduklarından üstel fonksiyonun dışbükeyliği

$$\exp\left(\frac{s_k}{p} + \frac{t_k}{q}\right) \leq \frac{1}{p}e^{s_k} + \frac{1}{q}e^{t_k} \quad (**)$$

verir. Bu ise

$$|c_k| |d_k| \leq \frac{1}{p}|c_k|^p + \frac{1}{q}|d_k|^q$$

demektir. Bu işlemi her $k = 1, \dots, n$ için yapıp toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |c_k| |d_k| &\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n |c_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n |d_k|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. c_k ve d_k 'nin tanımını hatırlarsak ispat biter. $\square$

Hölder eşitsizliğinin de integral hali vardır. İspatını, Teorem 13'ünküne çok benzer olduğundan vermiyoruz.

Teorem 14. $1 < p < \infty$ ve q , p 'nin eşleniği olsun. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı f, g sürekli fonksiyonları

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)| dx, \\ \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

$p = q = 2$ halinde Hölder eşitsizliği *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* adını alır. Mutlak değerlerin temel özellikleri olan

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \\ \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ile birleştirildiğinde, iki vektörün iç çarpımının mutlak değeri en fazla vektörlerin boylarının çarpımı kadardır anlamına da gelir.

İspatını incelersek, Teorem 13'te eşitliğin sağlanabilmesi için (**)’da her k için eşitlik olması gerektiğini görürüz. Ortalamalardaki eşitlik halleri ile ilgili açıklamalardan, bunun ancak her k için $s_k = t_k$ olması ile mümkün olduğu ortaya çıkar. Bu ise her k için $|c_k|^p = |d_k|^q$ olması demektir. Sonuç olarak Hölder şitsizliğinde eşitliğin var olabilmesi için gerek ve yeter şart her k için $|a_k|^p/|b_k|^q = C$ gerçekleyen sıfırdan farklı bir C sayısının varlığıdır. İntegralli durumda ise eşitlik için gerek ve yeter şart her $x \in [a, b]$ için $|f(x)|^p/|g(x)|^q = C$ gerçekleyen ve sıfır olmayan bir C sayısının varlığıdır. Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinde eşitlik için sağlanması gerekenler $|a_k|/|b_k| = C$ veya $|f(x)|/|g(x)| = C$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 15. $1 < p < \infty$ olsun. $a_1, \dots, a_n$ ve $b_1, \dots, b_n$ sayıları

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$$

eşitsizliğini sağlar. Buna Minkovski eşitsizliği denir.

İspat. Gene önce 0’ları atmakla işe başlayalım. O zaman bütün toplamalar 0 ile ∞ arasındadır.

$$\begin{aligned} (|a_k| + |b_k|)^p &= |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \\ &\quad + |b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \end{aligned}$$

yazıp toplar ve sağdaki terimlere ayrı ayrı Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

ve bunun a_k ile b_k ’nin yeri değiştirilmiş halini elde ederiz. Burada q , p ’nin eşleniğidir ve bu yüzden $(p-1)q = p$ olur. Elimizdekileri toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p &\leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1/q} \\ &\quad \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \right] \end{aligned}$$

buluruz. Şimdi her iki tarafı sağdaki ilk çarpana böler ve $1 - 1/q = 1/p$ olduğunu kullanırsak istediğimizi elde ederiz. $\square$

Teorem 16. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı f, g sürekli fonksiyonları

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar.

Minkovski eşitsizliği de mutlak değerın temel özellikleri olan

$$\begin{aligned} |a_k + b_k|^p &\leq (|a_k| + |b_k|)^p \\ |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ile birleştirilebilir. $p = q = 2$ halinde üçgen eşitsizliğini elde ederiz. Yazının başındaki üçgen eşitsizliğiyle ilişkiyi kurmak için, b_k ’leri $-b_k$ ’ler ile değiştirmek yeter.

Minkovski eşitsizliğinde eşitlik halini incelemek için, ispatında kullanılan Hölder eşitsizliklerinde eşitliğin hangi durumlarda olacağına bakarız. Buradan elde edilen gerek ve yeter şart her k için veya her $x \in [a, b]$ için $|a_k|/|b_k| = C$ veya $|f(x)|/|g(x)| = C$ gerçekleyen sıfırdan farklı bir C sayısının varlığıdır.

Yukarıdaki eşitsizliklerden bir kısmı bu dergide daha önce de yayımlanmıştı [5]. Ama burada daha genel hallerini verdik ve dayandıkları temel noktanın dışbükeylik olduğunu gösterdik.

KAYNAKÇA

- [1] E. Alkan, Bir Eşitsizlik Üzerine, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 4, 17-18 (1995).
- [2] Ş. Alpay, Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri, *Matematik Dünyası*, 2, sayı 5, 16-18 (1992).
- [3] Y. Avcı & N. Ergun, Alkan’ın Eşitsizliğine Ek, *Matematik Dünyası*, 6, sayı 1, 9 (1996).
- [4] H. Demir, Bazı Ortalamalar, *Matematik Dünyası*, 1, sayı 1, 17-21 (1991).
- [5] A. K. Erkip, Bazı Temel Eşitsizlikler, *Matematik Dünyası*, 1, sayı 4, 20-23 (1991).
- [6] A. K. Erkip, Emre Alkan’ın Eşitsizliği Üzerine, *Matematik Dünyası*, 6, sayı 1, 10 (1996).
- [7] J. van Tiel, *Convex Analysis*, Wiley, Chicester, 1984.

POLİNOM KÖKLERİ İÇİN BİR ALGORİTMA

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun *

Polinom köklerinin hesaplanması matematiğin en eski ve en çok uğraşılan sorunlarından biri olmuştur. Bu konudaki kısa bir tarihçe ve köklerin belirlenmesine ilişkin çözüm yöntemleri için [1]'e başvurulabilir. Biz bu yazıda az da olsa farklı bir yaklaşım önereceğiz. Polinomlara ilişkin bilgilerin gelişim tarihçesindeki en önemli iki sonuç, hiç kuşkusuz Gauss ve Abel tarafından sırasıyla 1792 ve 1826 yıllarında kanıtlanan şu şaşırtıcı sonuçlar olmuştur:

1. Derecesi n olan gerçel katsayılı bir polinomun, bazıları karmaşık sayı olabilen tam n tane kökü vardır.
2. Derecesi dörtten büyük olan gerçel katsayılı tüm polinomlar için, köklerin cebirsel yöntemler ve kök almalar yoluyla hesaplanmasına ilişkin bir algoritma yoktur.

Biz bu yazıda üçüncü ve dördüncü dereceden gerçel katsayılı polinomların kökleri için bir algoritma önereceğiz. Okuyucunun karmaşık sayılarla işlem yapabilmesi yazıyı kavramak için yeterlidir. Tüm polinomlar için genelliği bozmaksızın başat katsayı 1 olarak alınacaktır.

I. Üçüncü Dereceden Denklemler

Öncelikle şunu gösterelim:

$$p(x) = x^3 + px + q \quad (1)$$

biçimindeki özel üçüncü derece polinomlarının köklerini bulmak neredeyse anahtar niteliğindedir. Burada $q \neq 0$ varsayabiliriz, çünkü $q = 0$ ise köklerin 0 , $i\sqrt{p}$ ve $-i\sqrt{p}$ olduğu hemen görülür. Şimdi,

$$a^3 + b^3 + q = 0 \quad \text{ve} \quad 3ab + p = 0 \quad (2)$$

eşitliklerini gerçekleyen a ve b gerçel ya da karmaşık sayılarını eğer bulabilirsek, (1)'in aranan tüm çözümlerinin

$$x_0 = a + b, \quad x_1 = wa + w^2b, \quad x_2 = w^2a + wb$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Burada

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

karmaşık sayısının $w^2 + w + 1 = 0$ ve $w^3 = 1$ eşitliklerini gerçeklediği kolayca gözlenebilir. Gerçekten (2) gerçekleşiyorsa

$$(a+b)^3 + p(a+b) + q = a^3 + b^3 + q + (3ab+p)(a+b)$$

nedeniyle x_0 'ın bir kök olduğu hemen görülür. Oysa wa ve w^2b sayıları da (2) koşullarını gerçekler ve sonuçta x_1 sayısı da bir kök olur, çünkü

$$(wa)^3 + (w^2b)^3 + q = a^3 + b^3 + q, \\ 3(wa)(w^2b) + p = 3ab + p$$

olmaktadır. Benzer biçimde x_2 son köktür. (2) nedeniyle

$$a^3 + b^3 = -q \quad \text{ve} \quad 27a^3b^3 = -p^3$$

olduğundan, sonuçta

$$\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

belirteci yardımıyla

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\delta}} \quad \text{ve} \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\delta}}$$

bulunur. Eğer $\delta > 0$ ise, a ve b sayıları ile $x_0 = a + b$ kökünün gerçel, buna karşılık

$$x_1 = -\frac{x_0}{2} + i\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = -\frac{x_0}{2} + i\frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}$$

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

köklerinin ise eşlenik karmaşık sayılar olduğu görülmektedir. Eğer $\delta < 0$ ise, tüm kökler gerçel sayıdır. Gerçekten

$$a^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{|\delta|}$$

karmaşık sayısı için

$$|a^3|^2 = \frac{q^2}{4} + |\delta| = -\frac{p^3}{27} = \frac{|p|^3}{27},$$

$$\arg a^3 = -\arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)$$

olduğundan,

$$\theta = \arg a = -\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right),$$

$$a = \sqrt{\frac{|p|}{3}} e^{i\theta} = \bar{b},$$

ve $b = \bar{a}$, $w^2 = \bar{w}$ gözönüne alınarak

$$x_0 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)\right],$$

$$x_1 = aw + \bar{a}\bar{w}$$

$$= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \left(2\pi - \arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)\right)\right],$$

$$x_2 = bw + \bar{b}\bar{w}$$

$$= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \left(4\pi - \arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)\right)\right]$$

bulunur. Eğer $\delta = 0$ ise, kökler

$$x_0 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad \text{ve} \quad x_1 = x_2 = -a = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

olur. Dikkat edilirse çok yalın $p(x) = x^3 + x + 1$ polinomunun kökleri bile aşağıdaki çetrefilli sayılardır; burada $\delta = \frac{31}{108}$ olup,

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} < 0,$$

$$x_1 = -\frac{x_0}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} \right),$$

$$x_2 = \bar{x}_1$$

köklerdir. $p(x) = x^3 - 2x + 1$ polinomunun ise belirteci $\delta = -\frac{5}{108}$, kökleri ise $k = 0, 1, 2$ için

$$x_k = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\left[\frac{1}{3} \left(2k\pi - \arctan\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)\right]$$

gerçel sayıdır.

Artık üçüncü dereceden genel bir $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun tüm köklerinin,

$$q(x) = x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 olmak üzere,

$$x_1 - \frac{a}{3}, \quad x_2 - \frac{a}{3}, \quad x_3 - \frac{a}{3}$$

sayıları olduğunu gözlemek güç değildir, çünkü dikkat edilirse $q(x) = p(x - \frac{a}{3})$ özdeşliği geçerlidir.

II. Dördüncü Dereceden Denklemler

Şimdi de

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dördüncü derece polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 ve x_4 için bir algoritma belirlemeye çalışalım. Bu polinomun kökleriyle katsayıları arasındaki ünlü

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 +$$

$$x_4x_1 + x_2x_4 + x_1x_3 = b(3)$$

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 = -c$$

$$x_1x_2x_3x_4 = d$$

bağıntılarından yararlanılırsa $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$, $y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ sayılarının,

$$q(x) = x^3 - bx^2 + (ac - 4d)x + 4bd - a^2d - c^2$$

üçüncü derece polinomuna ait kök-katsayı bağıntılarını gerçeklediği, söz gelimi $y_1 + y_2 + y_3 = -(-b)$ olduğu görülecektir. Bu gerçeklemeleri okuyucuya bırakıyoruz. O halde y_1, y_2, y_3 sayıları $q(x)$ polinomunun kökleridir, ve bu sayılar I'de anlatılan algoritma yardımıyla belirlenebilir. Şimdi bu belirlenmiş, yani bilinen sayılar yardımıyla, $p(x)$ polinomunun köklerini bulalım. (3)'ün ilk bağıntısı yardımıyla

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = -(x_1 + x_4)(a + x_1 + x_4)$$

olur ve $y_1 + y_2$ sayısının

$$(x_1 + x_4)^2 + a(x_1 + x_4) + y_1 + y_2 = 0$$

eşitliğini gerçekleştirdiği görülür. O halde kolaylıkla

$$x_1 + x_4 = \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 - 4(y_1 + y_2)} \right),$$

$$x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \left(-a - \sqrt{a^2 - 4(y_1 + y_2)} \right),$$

ve benzeri biçimde

$$x_1 + x_3 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (y_1 + y_3)},$$

$$x_2 + x_4 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (y_1 + y_3)},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (y_2 + y_3)},$$

$$x_3 + x_4 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (y_2 + y_3)}$$

bulunur. Oysa $y_1 + y_2 + y_3 = b$ kullanılırsa

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_1},$$

$$x_1 + x_3 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_2},$$

$$x_1 + x_4 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_3},$$

$$x_3 + x_4 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_1},$$

$$x_2 + x_4 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_2},$$

$$x_2 + x_3 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_3}$$

elde edilir. İlk iki bağıntıyla son bağıntı kullanılarak, $2x_1$ ve $2x_2$ için sırayla aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_1} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_3},$$

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_1} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_3}.$$

Benzer biçimde $2x_3$ ve $2x_4$ sırasıyla

$$-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_1} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_3},$$

$$-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_1} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_3}$$

olarak belirlenir. Bu köklü değerlerin bazılarının hesaplanmasında gerekeceği için, son olarak bir karmaşık sayının kare kökünün nasıl belirlendiğini anımsatarak yazıyı bitirelim:

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + i \operatorname{sgn}(\beta) \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

$\operatorname{sgn}(\beta)$, $\beta > 0$ iken $+1$, $\beta < 0$ iken -1 ve $\beta = 0$ iken 0 değerini alan fonksiyondur.

KAYNAKÇA

- [1] N. Çalışkan, *Cebirsel Denklemlerin Kökleri*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 3, 9-13 (1994).

PRATİK VE İLGİNÇ ARİTMETİK İŞLEMLER

Hüseyin Kayadibi *

Teknoloji dünyasında bütün bilimlerin temeli matematiksel sisteme dayanır. Bu sistemi zihinsel pratiklerle güçlendirmek hem yorumlama ve çözümleme yeteneğimizi kuvvetlendirir, hem de zevkli bir uğraş haline getirir.

Matematik ile uğraşanlar sayılar dizgesini

bir gizem içerisinde oluştururlar. Bu gizemden bazı örnekler verebiliriz.

1. Birler basamaklarındaki rakamların toplamı 10, diğer rakamları aynı olan eşit basamaklı iki sayının çarpımı. Sayılar A ve

* Gülhane Askeri Tıp Akademisi öğrencisi

E , bunların birler basamaklarındaki rakamlar H ve N , ve bu sayıların birler basamaklarındaki rakamlar atılınca kalan sayı K olsun. A ve E sayılarının çarpımının son iki rakamı H ve N rakamlarının çarpımıdır. Eğer bu çarpım tek basamaklı ise A ve E sayılarının çarpımının onlar basamağındaki rakamı 0, birler basamağındaki rakamı ise H ve N rakamlarının çarpımıdır. A ve E sayılarının çarpımının diğer rakamları ise $K(K+1)$ 'dir. Son rakamı beş olan sayıların karesi de bu yolla hesaplanabilir. Örnekler:

$$78 \cdot 72 = 5616,$$

çünkü $56 = 7(7 + 1)$ ve $16 = 8 \cdot 2$.

$$473 \cdot 477 = 225621,$$

çünkü $2256 = 47(47 + 1)$ ve $21 = 3 \cdot 7$.

$$8842 \cdot 8848 = 78234016,$$

çünkü $782340 = 884(884 + 1)$ ve $16 = 2 \cdot 8$.

2. Birler basamaklarındaki rakamları aynı, diğer her bir basamaktaki rakamları toplamı 10 olan eşit basamaklı iki sayının çarpımı. Sayılar H ve K , ortak birler basamakları E , sayılardan birler basamaklarındaki rakam atıldığında kalan sayılar N ve A , ve N ve A sayılarının basamak miktarı kadar E rakamının yan yana yazılmasıyla oluşan sayı Y olsun. H ve K sayılarının çarpımının son iki rakamı E^2 'dir. Eğer E^2 tek basamaklı ise, H ve K sayılarının çarpımının onlar basamağındaki rakamı 0 ve birler basamağındaki rakamı E^2 'dir. H ve K sayılarının çarpımının diğer rakamları ise N ve A sayılarının çarpımının Y sayısı ile toplamıdır. Örnekler:

$$78 \cdot 38 = 2964,$$

çünkü $29 = 7 \cdot 3 + 8$ ve $64 = 8^2$.

$$162 \cdot 942 = 152604,$$

çünkü $1526 = 16 \cdot 94 + 22$ ve $04 = 2^2$.

$$2473 \cdot 8633 = 213494009,$$

çünkü $213494 = 247 \cdot 863 + 333$ ve $09 = 3^2$.

3. Bütün rakamları 3, 6 ve 9 olan sayıların karesi. H , bütün rakamları 3 olan karesi bulunacak sayı olsun. 3^2 olan 9 rakamı 09 olarak değerlendirilir. H 'nin basamak miktarının bir eksiği kadar 1 rakamı $3^2 = 09$ 'daki 0'ın soluna,

aynı miktardaki 8 rakamı ise 0 ile 9'un arasına yazılır. Örnekler:

$$3^2 = 9,$$

$$33^2 = 1089,$$

$$333^2 = 110889,$$

$$3333^2 = 11108889.$$

K , bütün rakamları 6 olan karesi bulunacak sayı olsun. K 'nin basamak miktarının bir eksiği kadar 4 rakamı $6^2 = 36$ 'daki 3'ün soluna, aynı miktardaki 5 rakamı ise 3 ile 6'nın arasına yazılır. Örnekler:

$$6^2 = 36,$$

$$66^2 = 4356,$$

$$666^2 = 443556,$$

$$6666^2 = 44435556.$$

E , bütün rakamları 9 olan karesi bulunacak sayı olsun. E 'nin basamak miktarının bir eksiği kadar 9 rakamı $9^2 = 81$ 'deki 8'in soluna, aynı miktardaki 0 rakamı ise 9 ile 1'in arasına yazılır. Örnekler:

$$9^2 = 81,$$

$$99^2 = 9801,$$

$$999^2 = 998001,$$

$$9999^2 = 99980001.$$

H , K ve E 'nin karelerindeki rakamların toplamı 9'un katıdır.

4. Bütün rakamları 9 olan herhangi iki sayının çarpımı. Çarpılacak sayılardan büyük olanı M , küçük olanı T , M 'nin basamak miktarı K ve T 'nin basamak miktarı H olsun. M ve T sayılarının çarpımında

- birler basamağı daima 1'dir ve sonuçta sadece bir tane 1 rakamı vardır;
- H 'nin bir eksiği kadar 0 rakamı vardır ve bunlar 1 rakamının solundadır;
- $K - H$ kadar 9 rakamı 0'ların solundadır;
- (c)'de bahsedilen 9'ların solunda bir tane 8 rakamı vardır; bu 8 rakamı 0'ın hemen solunda ise çarpılan iki sayı aynı sayılardır; başka da 8 yoktur;
- $H - 1$ tane 9 rakamı bütün sayıların solundadır;

- (e) 1 rakamının solundaki 0'larla, 8 rakamının solundaki 9'ların miktarı eşittir.

Örnekler:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9 &= 81, \\ 999 \cdot 9 &= 8991, \\ 99 \cdot 99 &= 9801, \\ 999 \cdot 99 &= 98901, \\ 9999 \cdot 999 &= 9989001, \\ 999999 \cdot 999 &= 998999001. \end{aligned}$$

5. Herhangi bir sayının 11 veya 9 ile bölümündeki devreden bulunması. B 'nin 11 ile bölümündeki devreden sayı, B 'nin $(\text{mod } 11)$ 'deki denginin 9 katıdır. Örnekler:

$$\frac{1687}{11} = 153.\overline{36} \quad \text{ve} \quad \frac{178}{11} = 16.\overline{18},$$

çünkü $1687 \equiv 4 \pmod{11}$ ve $4 \cdot 9 = 36$, ve $178 \equiv 2 \pmod{11}$ ve $2 \cdot 9 = 18$.

C 'nin 9 ile bölümündeki devreden sayı, C 'nin $(\text{mod } 9)$ 'daki denginin 11 katıdır. Örnekler:

$$\frac{3508}{9} = 389.\overline{77} \quad \text{ve} \quad \frac{473}{9} = 52.\overline{55},$$

çünkü $3508 \equiv 7 \pmod{9}$ ve $7 \cdot 11 = 77$, ve $473 \equiv 5 \pmod{9}$ ve $5 \cdot 11 = 55$.

6. $n = 3k$ şeklindeki herhangi bir sayının rakamlarının küpleri toplanır, sonra çıkan sayının da rakamlarının küpleri toplanır. Bu işlem birkaç defa yapılıncaya 153 sayısı çıkar. Örnekler: Sayımız 729 ise, üç adımda

$$\begin{aligned} 7^3 + 2^3 + 9^3 &= 1080, \\ 1^3 + 0^3 + 8^3 + 0^3 &= 513, \\ 5^3 + 1^3 + 3^3 &= 153 \end{aligned}$$

buluruz. Halbuki 162 için dokuz adım gerekir:

$$\begin{aligned} 1^3 + 6^3 + 2^3 &= 225, \\ 2^3 + 2^3 + 5^3 &= 141, \\ 1^3 + 4^3 + 1^3 &= 66, \\ 6^3 + 6^3 &= 432, \\ 4^3 + 3^3 + 2^3 &= 99, \\ 9^3 + 9^3 &= 1458, \\ 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 &= 702, \\ 7^3 + 0^3 + 2^0 &= 351, \\ 3^3 + 5^3 + 1^3 &= 153. \end{aligned}$$

7. $n = 3k - 1$ şeklindeki herhangi bir sayının rakamlarının küpleri toplanır, sonra çıkan sayının da rakamlarının küpleri toplanır. Bu işlem birkaç defa yapılıncaya 407 veya 371 sayısı bulunur. Örnekler: 425 için,

$$\begin{aligned} 4^3 + 2^3 + 5^3 &= 197, \\ 1^3 + 9^3 + 7^3 &= 1073, \\ 1^3 + 0^3 + 7^3 + 3^3 &= 371; \end{aligned}$$

890 için ise

$$\begin{aligned} 8^3 + 9^3 + 0 &= 1241, \\ 1^3 + 2^3 + 4^3 + 1^3 &= 74, \\ 7^3 + 4^3 &= 407 \end{aligned}$$

buluruz.

Şimdi sizlere vereceğim işlemlerle, önceden öğrenmiş olduğunuz yöntemlerin ve benim önerdiğim yöntemlerin bir karşılaştırmasını yapınız:

$$1. \quad 8311 \cdot 8319 = ? \quad 941 \cdot 949 = ?$$

$$2. \quad 8842 \cdot 2262 = ? \quad 178 \cdot 938 = ?$$

$$3. \quad 33333^2 = ? \quad 66666^2 = ? \quad 99999^2 = ?$$

$$4. \quad 9999 \cdot 9999 = ? \quad 99999 \cdot 9999 = ?$$

5. 2410, 11'e bölündüğünde devreden sayı nedir? 8450, 9'a bölündüğünde devreden sayı nedir?

6. 843'ün rakamlarının küplerini toplayın, sonra çıkan sayının rakamlarının küplerini toplayın ve böyle devam edin. Ne buldunuz?

7. 473'ün rakamlarının küplerini toplayın, sonra çıkan sayının rakamlarının küplerini toplayın ve böyle devam edin. Ne buldunuz?

8. 8669'un rakamlarının küplerini toplayın, sonra çıkan sayının rakamlarının küplerini toplayın ve böyle devam edin. Ne buldunuz?

3. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Albert Erkip *

3. Ulusal Matematik Olimpiyadı'nın birinci aşama sınavı 29-30 Nisan 1995'te 799 öğrencinin katılımıyla 20 merkezde yapılmıştı. Bu sınav sonucunda 44 öğrencinin katılmaya hak kazandığı ikinci aşama sınavı diğer bilim olimpiyatlarıyla beraber 8-9 Aralık 1995'te Ankara'da yapıldı. Bu sınavın sorularını aşağıda bulacaksınız.

İkinci aşama sınavı sonuçlarına göre, 11 Aralık 1995 günü TÜBİTAK Feza Gürsey Salonu'nda yapılan törende Mehmet Ekmekçi (İzmir Semra Yiğitalp Lisesi) ve Yılmaz Koçer (İzmir Fen Lisesi) altın, Ali Ekber Gürel (İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi), Özgür Sümer (İzmir Fen Lisesi), Suat Namlı (İstanbul Özel Fatih Erkek Fen Lisesi) ve Umut Akdemir (Antalya Özel M. C. Ünal Fen Lisesi) gümüş, Mustafa Günseli (Ankara Özel Samanyolu Erkek Fen Lisesi), Fatih Sulak (İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi), Gülay Ünel (İzmir Fen Lisesi), Osman Toptan (Ankara Özel Samanyolu Erkek Fen Lisesi) ve Müjdat Tiryaki (İzmir Fen Lisesi) bronz madalyalarını aldılar.

Birinci Gün, 8 Aralık 1995

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

1. $m_1, m_2, \dots, m_k$, $2 \leq m_1$ ve $2m_i \leq m_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) koşullarını sağlayan tam sayılar olsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \dots, a_k$ tam sayılar olmak üzere

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$\vdots$

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

bağıntılarından hiçbirini gerçeklemeyen sonsuz sayıda x tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeni ile bu üçgenin düzleminde, üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını sırayla çap kabul eden k_1, k_2, k_3 çemberleri çiziliyor. Çemberlerin kuvvet merkezi K , $[AK] \cap k_1 = \{D\}$, $[BK] \cap k_2 = \{E\}$ ve

$[CK] \cap k_3 = \{F\}$ olmak üzere, $\text{alan}(\triangle ABC) = u$, $\text{alan}(\triangle DBC) = x$, $\text{alan}(\triangle ECA) = y$ ve $\text{alan}(\triangle FAB) = z$ ise, $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğunu ispatlayınız.

3. $\mathbb{N}$, pozitif tamsayılar kümesi olsun. Bir A gerçel sayısı ile $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq A$$

koşulunu sağlayan, üstten sınırlı olmayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi veriliyor.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \frac{A^{k(n)}}{a_n} \leq A$$

eşitsizliklerini sağlayan tek bir $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunun bulunduğunu ve k 'nin azalmayan ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(b) Yukarıdaki k fonksiyonu her değeri en fazla m kez alıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n \leq Aa_n$ olacak şekilde bir $C > 1$ gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

İkinci Gün, 9 Aralık 1995

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

4. Bir ABC ($|AB| \neq |AC|$) üçgeninin A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunun sırayla D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ çaplı (ve üçgenin düzleminde bulunan) çemberin herhangi bir F noktasından BC , CA , AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla K , L , M ise, $[KL] = [KM]$ olduğunu ispatlayınız.

5. A , boş olmayan sonlu bir tamsayı kümesi ise, A 'ya ait elemanların toplamını $t(A)$ ile gösterelim ve $t(\emptyset) = 0$ olarak tanımlayalım. Pozitif tamsayılardan oluşan öyle bir X kümesi bulunuz ki, her k tamsayısı için, A_k ve B_k , X 'in sonlu altkümeleri olmak üzere, $A_k \cap B_k = \emptyset$ ve $t(A_k) - t(B_k) = k$ koşullarını sağlayan tek bir (A_k, B_k) sıralı ikilisi bulunsun.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

6. $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini göstere-
lim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m \mid n \iff f(m) \mid f(n)$$

koşulunu sağlayan ve örten olan tüm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
fonksiyonlarını bulunuz.

PROBLEM SEMİNERLERİ

28 Şubat 1996'dan itibaren yapılacak olan Matematik Problem Seminerleri'nde, problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara çeşitli ödüller verilecektir. Ödüle hak kazanabilmek için, yazılı ve tam çözümlerin, ilgili problem seminerinin başlamasından önce, postayla ya da elden Problem Semineri Grubu'na iletilmiş olması gerekmektedir. Çözümlerin iletileceği mektup adresi şöyledir: TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Matematik Problem Seminerleri, Atatürk Bulvarı, No. 221, 06100 Kavaklıdere, ANKARA

Her seminerdeki dört problem sırayla 1, 2, 3 ve 5 puan değerinde olacaktır. Her doğru çözüm için problemlerin zorluk derecelerine göre değişik ödüller verileceği gibi, bir dönem boyunca yapılacak yedi problem seminerinde aldıkları toplam puana göre ilk üç sırayı elde eden katılımcılara, toplam puanları 30'un üstünde olmak koşuluyla, ayrıca dönem ödülleri verilecektir.

Ödüle hak kazananların isimleri *Bilim ve Teknik* dergisinde ilân edilecek, ilginç çözüm ve yaklaşımlar her dönem sonunda yayınlanacak olan Problem Semineri Kitabı'na alınacaktır.

Problem Semineri 95/10, 8 Kasım 1995

1. a, b aralarında asal pozitif tamsayılar ise,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(b-1)a}{b} \right\rfloor \\ = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor \\ = \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz. (x gerçel sayısı için, $[x]$ ile x 'ten büyük olmayan en büyük tamsayıyı gösteriyoruz.)

2. a ve b aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. x ve y negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $ax + by$ biçiminde yazılamayan en büyük pozitif tamsayıyı bulunuz.

3. Tek kişilik bir oyunda, $a > b$ pozitif tamsayılar olmak üzere, oyuncu, oyunun her oynanımından sonra, ya a ya da b puan almaktadır. Oyun istenildiği kadar yinelenenilmekte ve toplam puan, oyunun her seferinde alınan puanların toplamı olarak hesap edilmektedir. Toplam puan olarak elde edilemeyen tam olarak 35 pozitif tamsayının bulunduğu ve bu sayılardan birinin de 58 olduğu bilinmektedir. a ve b 'yi bulunuz.

4. a, b ve c , herhangi farklı ikisi aralarında asal olan pozitif tamsayılar olsun. x, y, z negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $xbc + yca + zab$ biçiminde yazılamayan en büyük tamsayının $2abc - ab - bc - ca$ olduğunu gösteriniz.

Problem Semineri 95/11, 22 Kasım 1995

1. Düzlemde herhangi üçü doğrudan olmayan yedi nokta verilmiş olsun. Bu noktaları birleştiren doğru parçalarından bazılarını kırmızıya, bazılarını maviye boyuyoruz. Boyanmamış hiçbir doğru parçası kalmadığı gibi, bu yedi noktadan herhangi üçünü birleştiren doğru parçalarından en az biri kırmızıya boyanıyor. En az kaç doğru parçasının kırmızıya boyanması gerektiğini bulunuz.

2. Düzlemde herhangi üçü doğrudan olmayan n nokta verilmiş olsun. Bu noktaları birleştiren doğru parçalarından bir bölümünü kırmızıya, bir bölümünü de maviye boyuyoruz. Bu işlem sonucunda, boyanmamış hiçbir doğru parçası kalmadığı gibi, bütün köşeleri başlangıçtaki nokta kümesine ait ve bütün kenarları kırmızıya boyanmış hiçbir üçgen de oluşmuyor. En fazla kaç doğru parçasının kırmızıya boyanması gerektiğini bulunuz.

3. Tavan ve taban yüzeyleri $A_1A_2A_3A_4A_5$ ve $B_1B_2B_3B_4B_5$ beşgenleri olan bir prizma verilmiş olsun. Bu iki beşgenin kenarlarını ve $[A_iB_j]$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) doğru parçalarını ya kırmızı ya da maviye boyuyoruz. Bu boyama sonucunda, köşeleri prizmanın köşeleri olan ve tüm kenarları

aynı renge boyanmış hiçbir üçgen oluşmuyorsa, tavan ve taban beşgenlerinin tüm kenarlarının aynı renge boyanmış olduğunu gösteriniz.

4. Üç boyutlu uzayda herhangi dördü aynı düzlem üstünde bulunmayan dokuz nokta verilmiş olsun. Bu noktaları birleştiren doğru parçalarından bazılarını kırmızıya, bazılarını maviye boyuyor, bazılarını ise boyanmadan bırakıyoruz. Mavi ya da kırmızıya boyanmış doğru parçalarının sayısını n ile gösterirsek, n 'nin, bu boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın mutlaka tüm kenarları aynı renkte ve bütün köşeleri başlangıçtaki nokta kümesine ait bir üçgenin oluşmasını zorunlu kılan en küçük değerini bulunuz.

Problem Semineri 95/12, 6 Aralık 1995

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ; $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarının orta noktaları sırayla M, N, P ; $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{AMC} = \phi_a$, $\widehat{BNA} = \phi_b$, $\widehat{CPB} = \phi_c$; $S = \text{alan}(ABC)$; ve $n \geq 1$ için

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{(4S)^n} = K_n$$

olsun. Verilenlere göre aşağıdakileri ispatlayınız:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot \alpha$.
2. $\cot^2 \phi_a + \cot^2 \phi_b + \cot^2 \phi_c = K_2 - 1$.
3. $\frac{1}{\sin^2 \phi_a} + \frac{1}{\sin^2 \phi_b} + \frac{1}{\sin^2 \phi_c} = K_2 + 2$.
4. Her pozitif n tamsayısı için her üçgende $K_n \geq 3^{1-n/2}$ 'dir.

Problem Semineri 95/13, 20 Aralık 1995

Aşağıdaki sorularda $\mathbb{R}$ gerçel sayıları, $\mathbb{R}^+$ pozitif gerçel sayıları, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları, $\mathbb{Q}^+$ pozitif rasyonel sayıları, $\mathbb{Z}$ tamsayıları ve $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayıları göstermektedir.

1. Aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz:

- (a) Eğer $x < y$ ise $f(x) < f(y)$ 'dir.
- (b) Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$ 'dir.

2. F ile tüm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim. $A = \{f \in F : f(0) \neq 0 \text{ ve her } m, n \in \mathbb{Z} \text{ için } f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)\}$ olsun.

(a) $f(1) = \frac{5}{2}$ olan tüm $f \in A$ fonksiyonlarını bulunuz.

(b) $f(1) = \sqrt{3}$ olan tüm $f \in A$ fonksiyonlarını bulunuz.

3. α ve β gerçel sayılar olmak üzere, her x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) = y^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta f\left(\frac{y}{2}\right)$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xf(y)) = f(x)/y$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Problem Semineri 96/1, 10 Ocak 1996

1. Bir ABC üçgeni ile aynı düzlemli ve B, C noktalarından geçen O merkezli çember veriliyor. B ve C noktalarından sıra ile BA ve CA doğrularına çizilen dikmelerin kesiştiği nokta D olsun. D 'den BC 'ye çizilen dikmenin AO doğrusunu kestiği nokta ile A noktasının O noktasına göre simetrik olduğunu kanıtlayınız.

2. Düzlemde bir S çemberi ve bir A noktası verilmiş olsun. Merkezi S üzerinde bulunan ve A noktasından geçen çemberlerden birbirini dik kesenlerin kesişim noktalarının geometrik yerini bulunuz.

3. Bir çember üzerinde verilmiş farklı altı noktadan üç tanesini seçerek, bunların oluşturduğu üçgenin ağırlık merkezi ile geri kalan üç noktanın belirlediği üçgenin ortosantrından geçen doğruyu çizelim. Altı noktadan üçü 20 değişik biçimde seçilebileceğine göre, bu şekilde 20 doğru elde edilecektir. Bu doğruların aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

4. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir $ABCD$ teğetler dörtgeni verilmiş olsun. $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$, $R \in [CD]$ ve $S \in [DA]$ noktalarının aşağıdaki koşulları sağlayabilecek şekilde seçilebileceğini gösteriniz:

(i) P, Q, R, S noktalarından bir δ çemberi geçer;

(ii) kenar uzunlukları yine a, b, c, d olan herhangi bir $A'B'C'D'$ dörtgeni aldığımızda,

$$\begin{aligned} \frac{|PA|}{|PB|} &= \frac{|P'A'|}{|P'B'|}, & \frac{|QB|}{|QC|} &= \frac{|Q'B'|}{|Q'C'|}, \\ \frac{|RC|}{|RD|} &= \frac{|R'C'|}{|R'D'|}, & \frac{|SD|}{|SA|} &= \frac{|S'D'|}{|S'A'|} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $P' \in [A'B']$, $Q' \in [B'C']$, $R' \in [C'D']$ ve $S' \in [D'A']$ noktalarından da yine yarıçapı δ 'nın yarıçapıyla aynı olan bir çember geçer.

Problem Semineri 96/2, 28 Şubat 1996

$\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesini göstermek üzere, (F_n) Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olacak şekilde tanımlanmaktadır.

1. (a) $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega^n = F_n \omega + F_{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

(b) Her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{m+n} = F_m F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1} F_n$$

olduğunu gösteriniz.

2. p bir asal sayı olsun.

(a) $p \mid F_k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz. $m(p)$ ile bu koşulu sağlayan en küçük pozitif tamsayıyı gösterelim.

(b) n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $p \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şartın $m(p) \mid n$ olduğunu gösteriniz.

3. p bir asal sayı olsun. $m(p)$ sayısı çift ise

(a) $p \not\equiv 13 \pmod{20}$ veya $p \not\equiv 17 \pmod{20}$ olduğunu ve

(b) $p \equiv 3 \pmod{20}$ ya da $p \equiv 7 \pmod{20}$ olmasının $F_{m(p)-1} \equiv -1 \pmod{p}$ olmasını gerektirdiğini kanıtlayınız.

4. Fibonacci dizisinin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $F_{12} = 144$ dışında tam kare olan başka hiçbir teriminin bulunmadığını kanıtlayınız.

Problem Semineri 96/3, 13 Mart 1996

1. Bir küre, bu küre üstünde bir çember ve bu küre üstünde bulunmayan bir P noktası veriliyor. P noktası ile verilen çembere ait noktaları birleştiren doğruların, küreyle verilen çember dışında kesiştikleri noktaların, yine küre üstündeki bir çember üzerinde bulunacağını kanıtlayınız.

2. Bir dörtyüzünün iki aykırı kenarının orta noktalarından geçen herhangi bir düzlemin, dörtyüzlüyü eşit hacimli iki parçaya ayıracağını kanıtlayınız.

3. Bütün yüzleri eşkenar dörtgen olan ve köşelerinden yedi tanesi bir küre üstünde bulunan bir altıyüzlü veriliyor. Bu altıyüzünün geri kalan sekizinci köşesinin de aynı küre üstünde bulunması gerektiğini gösteriniz.

4. Bir küre ve bu kürenin içinde yer alan bir P noktası veriliyor. P noktasından çıkan ve birbirlerine dik olan ışın üçlülerinin küre ile kesiştikleri noktaların belirlediği düzlem üstünde P noktasının dik izdüşümlerinin oluşturduğu geometrik yeri bulunuz.

Problem Semineri 96/4, 27 Mart 1996

1. 18 takımlı bir futbol liginde her takım her hafta tam olarak bir maç yapmaktadır. Sekiz haftalık bir dönem boyunca herhangi iki takım en fazla bir kez karşılaşmışsa, bu dönemin sonunda herhangi ikisi aralarında maç yapmamış en az üç takımın bulunduğunu gösteriniz.

2. 1024 tenisçi ustalıklarına göre iyiden kötüye doğru $1, 2, \dots, 1024$ sayıları ile derecelendiriliyor. Ustalık dereceleri arasındaki fark ikiden büyük olan herhangi iki tenisçi karşılaştığında, derecesi küçük olan diğerini mutlaka yenmektedir. Bunun dışındaki durumlarda ise, her iki tarafın da oyunu kazanması mümkündür. Bu 1024 tenisçi arasında düzenlenen eleme usulü bir turnuvada, onuncu turda oynanan final maçı sonunda şampiyon belli olmaktadır. Şampiyonun ustalık derecesinin en fazla kaç olabileceğini saptayınız.

3. k tanesi Avrupa'dan olmak üzere toplam 20 ülkenin katıldığı tek devreli ve lig usulü bir dünya futbol şampiyonası yapılmaktadır. Yalnızca Avrupa takımlarının kendi aralarındaki maçlar dikkate alınarak Avrupa şampiyonu, bütün takımlar arasındaki karşılaşmalara göre de dünya şampiyonu belirlenmektedir. Her maçta galibiyet 2, beraberlik 1, mağlubiyet ise 0 puan getirmektedir. Sonuçta Avrupa şampiyonu olan takımın toplam puanının başka hiçbir takımın toplam puanına eşit olmadığı bilinmektedir. Bu şampiyonada

(a) hiçbir maçın beraberlikle sonuçlanmadığı,

(b) bazı maçların berabere bittiği durumlar için ayrı ayrı, Avrupa şampiyonu olan takımın dünya şampiyonasında sonuncu olmasını mümkün kılan k değerlerinden en büyüğünü bulunuz.

4. Tek devreli ve lig usulü yapılan bir hentbol turnuvasında, her maçta galibiyet 2, beraberlik 1, mağlubiyet 0 puan getirmektedir. Turnuvanın sonunda, turnuvaya katılan takımların boş olmayan her altkümesi için, bu altkümeyle dahil takımlarla yaptığı maçlarda tek sayıda toplam puan kazanmış en az bir takımın bulunduğu görülmüştür. (Bu takımın kendisinin verilen altkümeyle dahil olduğu durumlarda, toplam puan doğal olarak bu takımın kendi dışındaki takımlarla yaptığı maçlarda kazandığı toplam puan olarak yorumlanmaktadır.) Bu turnuvaya katılan takımların sayısının çift olduğunu kanıtlayınız.

Problem Semineri 96/5, 10 Nisan 1996

Her $n > 1$ tamsayısını, $p_1, \dots, p_t$ farklı asal sayılar ve $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ pozitif tamsayılar olmak üzere, tek türlü $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ olarak yazabiliriz. $P(n)$ ile $\{p_1, \dots, p_t\}$ kümesini, $E(n)$ ile de $\alpha_1 + \dots + \alpha_t$ sayısını gösterelim. Ayrıca $P(1) = \emptyset$ ve $E(1) = 0$ olsun. Bir n pozitif tamsayısına, aşağıdaki koşulları sağlayan $k > 0$, $a > 0$ $10^k > b > 0$ tamsayıları varsa bir LB sayısı diyeceğiz:

- (i) $n = 10^k a + b$;
- (ii) $P(n) = P(a) \cup P(b)$;
- (iii) $E(n) = E(a) + E(b)$.

1. $n < 100$ pozitif bir tamsayı ise, n 'nin bir LB sayısı olmadığını gösteriniz.

2. 1000'den küçük tüm LB sayılarını bulunuz.

3. Eğer n bir LB sayısı ise ve n 'nin tam olarak d rakamlı bir asal çarpanı varsa, n 'nin tam olarak $2d + 1$ rakamının bulunduğunu gösteriniz.

4. Bir LB sayısına başka bir LB sayısının 10 katı değilse ilkel diyeceğiz. Sonsuz sayıda ilkel LB sayısının bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

Problem Semineri 95/9

1. n asal değilse, $1 < n_1, n_2$ ve $n = n_1 n_2$ olacak şekilde n_1, n_2 tam sayıları bulunur. $y = x^{n_1}$ alırsak,

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= (x^{n_1-1} + \dots + 1)(y^{n_2-1} + \dots + 1) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de n 'nin asal olduğu duruma bakalım. $p(x)$ 'in indirgenemediğini farzedelim. O zaman $p(x + 1)$ de indirgenebilir. Öte yandan

$$p(x + 1) = \frac{(x + 1)^n - 1}{(x + 1) - 1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{k-1}$$

olur. n asal, $n \mid \binom{n}{k}$ ($k = 1, \dots, n - 1$), $n^2 \nmid \binom{n}{1}$ ve $n \nmid \binom{n}{n}$ olduğundan, Eisenstein kriterine göre $p(x + 1)$, dolayısıyla da $p(x)$ indirgenemez.

2. Polinomun tamsayılar üstünde indirgenemediğini farzedelim. O zaman $p(x)$, 2 moduna göre de indirgenebilir ve çarpanlarından birinin birinci ya da ikinci dereceden olması gerekir. Bu durumda $p(x)$ 'in 2 moduna göre çarpanlarından

biri x , $x + 1$ ya da $x^2 + x + 1$ olur. Oysa

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1 \\ &\equiv x^2(x + 1)(x^2 + x + 1) + 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

olduğundan, bu olanaksızdır.

3. $p(\pm 1) \neq 0$ ve $p(\pm 3) \neq 0$ 'dır. Dolayısıyla $p(x)$ 'in katsayıları tamsayılar olan birinci dereceden bir çarpanı yoktur. Şimdi $2 \leq k \leq n - 2$ ve $a_0, \dots, a_k$ ile $b_0, \dots, b_{n-k}$ tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} p(x) &= (a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0)(b_{n-k} x^{n-k} \\ &\quad + \dots + b_1 x + b_0) \end{aligned}$$

olduğunu farzedelim. O zaman $a_0 b_0 = 3$ olur. Genelliği yitirmeden $3 \mid a_0$ ve $3 \nmid b_0$ olduğunu kabul edelim. Öte yandan $a_1, \dots, a_k$ sayılarının hepsi 3 ile bölünemeyeceğinden, $3 \mid a_i$ ($i = 0, \dots, t - 1$) ve $3 \nmid a_t$ olacak şekilde bir $t \in \{1, \dots, k\}$ vardır. Ancak $1 \leq t \leq k \leq n - 2$ olduğundan, $a_t b_0 + a_{t-1} b_1 + \dots + a_0 b_t = 0$ olur. Burada $3 \nmid a_t b_0$ ve $3 \mid a_{t-1} b_1$ ($i = 1, \dots, t$) olması bir çelişki yaratır.

4. $x^5 + mx + n = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e)$ olduğunu varsayalım. Katsayıları karşılaştırarak

$$n^2 + (4am - 11a^5)n + a^2(m + a^4)(4m - a^4) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$n = \frac{1}{2} \left(11a^5 - 4am \pm 5a^3 \sqrt{5a^4 - 4m} \right)$$

olur. n 'nin tamsayı olabilmesi için, $5a^4 - 4m = z^2$ olacak şekilde bir z tamsayısı bulunmalıdır. $m = \pm 1$ olduğuna göre, $z^2 - 5a^4 = \pm 4$ olur. Burada $x = a^2$, $y = \frac{1}{2}(x + z)$ dönüşümlerini yaparsak, $y^2 - xy - x^2 = \pm 1$ eşitliğini elde ederiz. Bu denklemi sağlayan tamsayılar Fibonacci sayılarıdır. Öte yandan, tam kare olan Fibonacci sayıları 0, 1 ve 144'tür. Dolayısıyla $x = 0$, $x = 1$ ya da $x = 144$ 'tür. $x = 0$ ise, $m = -1$ ve $n = 0$ olur. Bu durumda $x^5 + mx + n = x^5 - x$ polinomunun birinci dereceden çarpanı vardır. Bu nedenle $x = 1$ ya da $x = 144$, yani $a = \pm 1$ ya da $a = \pm 12$ 'dir.

$m = 1$ durumunda, $a = \pm 1$ ise, $n = \pm 1$ ya da $n = \pm 6$ olur; $a = \pm 12$ ise, n için tamsayı çözüm bulunmaz. $m = -1$ durumunda ise, $a = \pm 1$ için, $n = 0$ ya da $n = \pm 15$; $a = \pm 12$ için de $n = \pm 22440$ ya da ± 2759640 olur. Öte yandan, $n = 0$ dışındaki tüm durumlar için $x^5 + mx + n$ polinomunun ikinci ve üçüncü dereceden çarpanlarının indirgenemediği kolaylıkla görülür.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A126. $32n - 7 = m^2$ koşulunu sağlayan sonsuz çoklukta (m, n) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz.

A127. Çevresi bir birim olan ikizkenar üçgenlerden alanı en büyük olanı bulunuz. (Burhan Bursevi)

A128. İki merkezli bir $ABCD$ dörtgeninin alanı S , köşegen uzunlukları e ve f ise, $ef \geq 2S$ eşitsizliğinin sağlandığını ve eşitliğin ancak $ABCD$ harmonik bir dörtgen ise geçerli olduğunu gösteriniz. (Dinçer Akay)

A129. Her noktada türevli ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ özdeşliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

A130. Bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi O , yarıçapı R , içteğet çember merkezi I ve yarıçapı r olsun. $[OI]$ 'nin ortasının kenarlara uzaklıklarının toplamı $\frac{1}{2}(R + 4r)$ 'dir; kanıtlayınız. (Ergün Yaraneri)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y126. Dışbükey ve aldığı değerler alttan ve üstten sınırlı olan bütün $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.)

Y127. A bir açık aralık, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey ve $c \in A$ olsun. f 'nin c noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.)

Y128. $a_1 = 2$ ve her tamsayı $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

toplamını hesaplayınız.

Y129. Dışbükey düzgün bir beşgenin alanının, köşegenlerinin oluşturduğu yıldızın or-

tasındaki küçük düzgün beşgenin alanına oranını hesaplayınız. (Hüseyin Demir)

Y130. Bir ABC üçgeninin içinde alınan birbirine dıştan teğet eş iki çember $[BC]$ 'ye, çemberlerden biri $[AB]$ 'ye ve öteki $[AC]$ 'ye teğet olup, ortak iç teğet $[BC]$ 'yi D 'de kesiyor. Benzer çizimler $[CA]$ ve $[AB]$ için yapıldığında benzer noktalar E ve F ise, $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ 'nin noktadaş olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

ÇÖZÜMLER

A116. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $[AC]$ çaptır ve $|DC| < |CB| < |BA| < |AD|$ geçerlidir. Çemberin çapı r olduğuna göre, $\text{alan}(ABCD) \leq 2r^2$ olduğunu gösteriniz. (Cuma Arslan)

Çözüm. ABC üçgeninde B köşesine ait yüksekliğin alabileceği en büyük değer, AC çap olduğundan, r 'ye eşittir. Buradan

$$\text{alan}(ABC) = \frac{1}{2}|AC|h_B \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$$

çıkar. Aynı şekilde $\text{alan}(ABD) \leq r^2$ ve sonuçta $\text{alan}(ABCD) \leq r^2 + r^2 = 2r^2$ bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Levent Koçoğlu, Ali Işıtan, Semih Özlem, Samanyolu Problem Grubu, Fatih Selimefendioğlu, Ali Törün.)

A117. $\sum_{k=-\infty}^0 2^k k^2$ toplamını hesaplayınız.

(Ergün Yaraneri)

Çözüm. İstenen toplam

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

limitine eşittir. $k^2 x^k = x^2 (x^k)'' + x(x^k)'$ özdeşliğinden

$$\sum_{k=0}^n k^2 x^k = x^2 \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'' + x \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'$$

elde edilir. $x \neq 1$ için

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

sağlanır. Türev alınarak

$$T'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

$$T''_n(x) = \frac{1}{(x+1)^3}[(n^2 - n)x^{n+1} - 2(n^2 - 1)x^n + (n^2 + n)x^{n-1} - 2]$$

bulunur. $x = \frac{1}{2}$ alınarak sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} = 0$$

olduğundan, aranan toplam $\sum_{k=-\infty}^0 2^k k^2 = 6$ 'dır.

(Çözenler: Murat Aygen, Atasagun Baykal, Semih Özlem, Samanyolu Problem Grubu, Fatih Selimefendil, Ali Törün.)

A118. Bir çemberin dışındaki bir A noktasından, çembere B ve C noktalarında değen teğetler ile A 'dan geçen ve çemberi birbirinden farklı E ve G noktalarında kesen bir doğru çiziliyor. AE ve BC doğrularının kesim noktası F ise,

$$\frac{|AE|}{|AG|} = \frac{|EF|}{|FG|}$$

olduğunu gösteriniz. (Recep Zihni)

Çözüm. $|AB|$, $|AC|$, $|AE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|BF|$, $|FC|$ uzunlukları sırayla x, x, u, v, t, y, z ile gösterilsin. ABC üçgeninde Stewart bağıntısından $(u+v)^2 = x^2 - yz$ ve F noktasının çembere göre kuvvetinden $yz = vt$ bulunur; dolayısıyla $(u+v)^2 = x^2 - vt$ olur. A noktasının çembere göre kuvvetinden de $x^2 = u(u+v+t)$ yazılırsa, $(u+v)^2 = u(u+v+t) - vt$ ve buradan $v/t = u/(u+v+t)$, yani $|AE|/|AG| = |EF|/|FG|$ elde edilir.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu.)

A119. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ve $\widehat{ACB} = 45^\circ$ 'dir. $[AB]$ üzerinde $|AL| = |LB|$ olacak şekilde bir L noktası, $[BC]$ üzerinde de $\widehat{LKA} = 30^\circ$ olacak şekilde bir K noktası alınıyor. $[AK] \cap [LC] = \{M\}$ ise, $\widehat{CMA}$ 'yı hesaplayınız. (Alaattin Aktaş)

Çözüm. $[BC]$ üzerinde $|LA'| = |LB|$ olacak biçimde alınan A' noktası için, $BA'A$ üçgeni bir dik üçgen, ALA' üçgeni bir eşkenar üçgen, $AA'C$ üçgeni bir ikizkenar dik üçgen, $LA'C$ üçgeni bir ikizkenar üçgen, $\widehat{LCA'} = 15^\circ$ ve $\widehat{ACL} = 30^\circ$ olur. $[AL]$, K ve C noktalarından eş açılarla görüldüğünden, $ALKC$ dörtgeni bir kirişler dörtgeni ve dolayısıyla $\widehat{LAK} = 15^\circ$ 'dir. Buradan $\widehat{CMA} = 60^\circ$ bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Ali Işıtan, Semih Özlem, Samanyolu Problem Grubu, Ali Törün, Erol Ünal, Adem Yekerek.)

A120. 1 ve 1000 dahil olmak üzere, 1'den 1000'e kadar tüm doğal sayıların rakamları toplamını hesaplayınız. (Cuma Arslan)

Çözüm. 000'dan 999'a kadar olan sayılarda toplam $3 \cdot 1000 = 3000$ rakam vardır. Her rakam eşit sayıda tekrarlandığından, 000'dan 999'a kadar olan sayılarda 0, 1, 2, ..., 9 rakamlarının her biri $3000/10 = 300$ kere görünür. Bu rakamların toplamı

$$300(0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 300 \cdot 45 = 13500$$

tür. 1000 sayısı için de $1 + 0 + 0 + 0 = 1$ ekleyince aranan toplam 13501 olarak bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Erol Ünal.)

Y116. Dar açılı bir ABC üçgeninde A, B, C köşelerinden geçen yükseklikler çevrel çemberi ikinci defa A', B', C' noktalarında keserlerse ve $A'B'C'$ üçgeninin alanı S ile gösterilirse,

$$|AA'|^2 \sin 2A + |BB'|^2 \sin 2B + |CC'|^2 \sin 2C > 6S$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Rauf Harput)

Çözüm. Dar açılı bir üçgende yükseklikler, yükseklik ayaklarını köşe kabul eden üçgenin açıortaylarıdır. $|A'B'| = x$, $|B'C'| = y$, $|A'C'| = z$ olmak üzere $2S = xz \sin 2A$ 'dır. B ve C için de benzer eşitlikler yazılarak

$$6S = xz \sin 2A + xy \sin 2B + yz \sin 2C$$

elde edilir. $[AA'] \cap [B'C'] = \{P\}$, $|PC'| = u$, $|PB'| = v$, $|AP| = m$, $|A'P| = n$ denirse, $A'B'C'$ üçgeninde $[A'P]$ açıortayının uzunluğu $|A'P|^2 = xz - uv$ ile hesaplanır. P 'nin çembere göre kuvvetinden $uv = mn$ yazılarak $n|AA'| = xz$ bulunur. P , $[AA']$ 'nin bir iç noktası olduğundan $|AA'| > |A'P|$ ve $|AA'|^2 > n|AA'|$, yani $|AA'|^2 > xz$ 'dir. Benzer biçimde diğerleri de

yazılır. A, B, C dar açılar olduklarından sinüsleri pozitifdir. Buradan $|AA'|^2 \sin 2A > xz \sin 2A$ ve $|B'|^2 \sin 2B > xy \sin 2B$ yazılıp, taraf tarafa toplama ile istenen eşitsizlik elde edilir.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.)

Y117. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan düzgün bir n -gende, bir köşenin diğerlerinden uzaklıklarının toplamının $2R \cot \pi/2n$ ve çarpımının nR^{n-1} olduğunu gösteriniz. (Ferit Öktem)

Çözüm. Düzgün çokgenin köşeleri $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ olsun. Bilinen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\alpha = \frac{\sin(n-1)\alpha \sin n\alpha}{\sin \alpha}$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_0 A_k| = \sum_{k=1}^{n-1} 2R \sin \frac{k\pi}{n} = 2R \cot \frac{\pi}{2n}$$

bulunur.

Gene bilinen

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\prod_{k=1}^{n-1} |A_0 A_k| = \prod_{k=1}^{n-1} 2R \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} R^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}} = nR^{n-1}$$

elde edilir.

Y118. Bir ABC üçgeninin alanı S , çevrel çember yarıçapı R ve içteğet çember yarıçapı r ise,

$$\frac{27Rr^3}{2} \leq S^2 \leq \frac{r(4R+r)^3}{27}$$

olduğunu gösteriniz. (Dinçer Akay)

Çözüm. ABC üçgeninde $bc \sin A = ah_a$ ve $h_a = c \sin B = b \sin C'$ olduğundan, $h_a \sin A = a \sin B \sin C$ ve benzer yolla $h_b \sin B = b \sin A \sin c$ ile $h_c \sin C = c \sin A \sin B$ bulunur; bu eşitliklerden $h_a h_b h_c = 2S^2/R$ elde edilir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden çıkan

$$\frac{1}{r^3} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right)^3 \geq 27h_a h_b h_c = \frac{27R}{2S^2}$$

bize eşitsizliklerden soldakini verir.

ABC üçgeninin dışteğet çember yarıçapları r_a, r_b, r_c için

$$rr_a r_b r_c = \frac{S^4}{u(u-a)(u-b)(u-c)} = S^2$$

ve

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= S \left(\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u} \right) \\ &= \frac{abc}{S} = 4R \end{aligned}$$

sağlanır. Yine aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden çıkan

$$(4R+r)^3 = (r_a + r_b + r_c)^3 \geq 27r_a r_b r_c = \frac{27S^2}{r}$$

istenen eşitsizliklerden sağdakini verir.

(Çözen: Atasagun Baykal.)

Y119. Eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olan bir elipsin herhangi bir noktasından çizilen normalinin elips içinde kalan kısmının uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz. (Süreyya Tevfik)

Çözüm. Elipsin denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir. Simetriden dolayı $b \geq a$ olduğunu kabul edebiliriz. Elipsin üzerinde bir (x_0, y_0) noktası alalım. Bu noktada teğetin eğimi $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ olduğundan, normalin denklemi

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0),$$

ya da sadeleştirilmiş haliyle

$$y = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} x + \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) y_0 = mx + n$$

olarak bulunur. Normal, elipsi (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarında kessin. $y_i = mx_i + n$ ($i = 0, 1$) olduğundan, kirişin uzunluğunun karesi

$$d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = (1 + m^2)(x_0 - x_1)^2$$

olarak bulunur. x_0, x_1 reel sayıları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + n)^2}{b^2} = 1,$$

yani

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 + \frac{2mn}{b^2}x + \left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

denkleminin kökleridir. Buradan

$$\frac{(x_0 - x_1)^2}{4} = \frac{\frac{m^2 n^2}{b^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2}$$

bulunur.

$$\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}$$

olduğunu kullanarak sadeleştirmeleri yaparsak,

$$d^2 = \frac{4b^2[(b^2 - a^2)x_0^2 + a^4]^3}{[(b^4 - a^4)x_0 + a^6]^2}$$

bulunur. $x_0^2 = t$ dersek, $|x_0| \leq a$ olduğundan t değeri $[0, a^2]$ aralığındadır. $G = b^2 - a^2 \geq 0$ kısaltmasını da kullanırsak istenen uzunluğun karesi

$$f(t) = \frac{4b^2(Gt + a^4)^3}{[(a^2 + b^2)Gt + a^6]^2}$$

ile ifade edilir. $f'(t)$ 'ye eşit olan şu ifade

$$\frac{4b^2G(Gt + a^4)^2[5(a^2 + b^2)Gt + 5a^6 + 2b^2a^4]}{[(a^2 + b^2)Gt + a^6]^3}$$

ancak t negatifken 0 olduğundan, f' 'nin minimum ve maksimum değerleri $t = 0$ ve $t = a^2$ 'de alınır. Yani en küçük ve en büyük kirisler sırayla $x = 0$ ve $x = \pm a$ noktalarındadır. O halde

aranan en büyük ve en küçük değerler $2b$ ve $2a$ 'dır.

(Çözen: Atasagun Baykal.)

Y120. $[AB]$ ve $[CD]$ kenarları paralel olan $ABCD$ yamuğunun A ve D köşelerinden çizilen içaçıortaylar X , C ve B köşelerinden çizilen içaçıortaylar Y noktasında kesişiyor. $|XY|$ 'yi yamuğun kenar uzunlukları cinsinden ifade ediniz. (Coşkun Üstün)

Çözüm. $\hat{A}$ ile $\hat{D}$ ve $\hat{B}$ ile $\hat{C}$ bütünden açılar olup açıortayları birbirine diktir. $\widehat{A \times D} = 90^\circ$ olduğundan, $[DA]$ 'nın orta noktası E olmak üzere, $|EX| = |EA|$ ve dolayısıyla $EX \parallel AB$ 'dir. $[BC]$ nin orta noktası F olmak üzere $FY \parallel AB$ 'dir. $EF \parallel AB$ olduğundan, E, X, Y, F aynı doğru üzerindedir. $|EF|$ orta taban uzunluğu, $|EX| = \frac{1}{2}|DA|$ ve $|FY| = \frac{1}{2}|BC|$ olduğundan,

$$|XY| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD| - |AD| - |BC|)$$

bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Ali Işıtan, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Ali Törün, Erol Ünal, Adem Yekerek.)

KAYNAKÇA

- [1] H. T. Kaptanoğlu, *Dışbükey Fonksiyonlar, Matematik Dünyası*, 6, sayı 1, 11-18 (1996).

Matematikçiler Derneği kuruldu. Olağan ilk genel kurul toplantısını 18 Kasım 1995'te yapan derneğin adresi Strasbourg cad., No: 18/18, Sıhhiye, Ankara; telefon numarası (312) 231 31 73. Derneğe üye olmak isteyenlerin, Karayolları Genel Müdürlüğü, Bilgi-İşlem Şubesi Müdürlüğü'nde (312) 419 14 30 / 361 numaralı telefondaki Gülten Öner'e başvurmaları gerekiyor.

Derneğin amaçları "matematik mezunları arasında birlik ve dayanışmayı sağlamak, mezunların meslek sorunlarının çözülmesi ve mesleki gelişmenin sağlanması için bilimsel araştırma ve yayın çalışması yapmak, matematikçilerin haklarını yurt çıkarları doğrultusunda savunmak" olarak özetleniyor. Bu yönde dernek, anayasal statü olan oda kimliğini kazanmayı da hedefliyor.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Prof.Dr. Albert Erkip, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Nisan 1996 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdhan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 350.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1996 yılı abone ücreti 400.000.-TL., tane satış fiyatı ise 100.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

Saygılarımızla

