

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Dirichlet İlkesi

İftihar Hacıyev

Matematikte Tamamlama

Recep Yücesan

Gama Fonksiyonu

H. Turgay Kaptanoğlu

Yunanistan'da Üniversite Giriş Sınavları

Şafak Alpay

Vektörlere Ait İki Teoremin Geometrik Uygulaması

Selma Atabey

Neden Birçok Öğrenci Calculus Dersinde Zorlanıyor?

Deborah Hughes Hallett

Eşçevre Problemi

Oğuz Silâhtar

Antalya Matematik Olimpiyadı

Gökhan Şahin

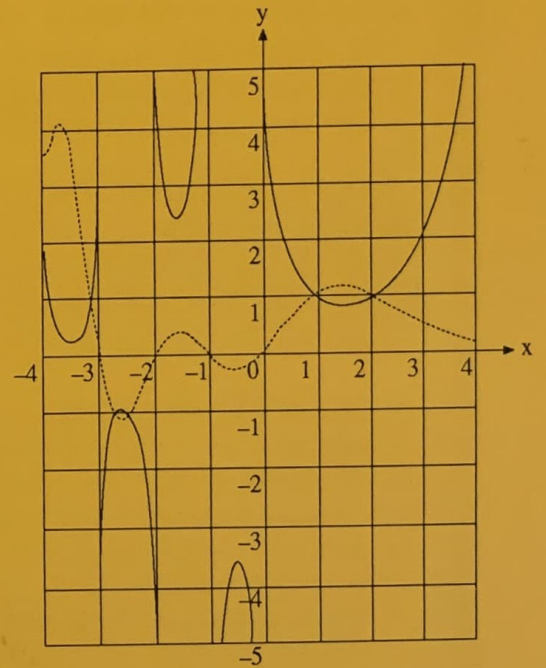
ODTÜ Matematik Topluluğu

ODTÜ Matematik Topluluğu

Uluslararası Matematik Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı

Albert Erkip

Problem Seminerleri - Problemler ve Çözümleri



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ALBERT ERKİP

YAYIN KURULU
SELMA ATABEY, ALİ DOĞANAKSOY,
ALPARSLAN ERTUĞ, FİKRİ GÖKDAL,
H. TURGAY KAPTANOĞLU

DİZGİ
NURAY (KIRAC) ÖZKAN

BASKI
ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, Matematik Vakfı'nın işbirliği ve
UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386 sayılı
kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1996)

Yurtiçi yıllık 400.000.-TL., Yurtdışı yıllık 800.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 215511 No.lu hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)
Matematik Dünyası
Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü
İnönü Bulvarı, 06561 ANKARA
Tel: 210 12 82 • 210 29 70

İÇİNDEKİLER

Dirichlet İlkesi

İftihar Hacıyev 1

Matematikte Tamamlama

Recep Yücesan 2

Gama Fonksiyonu

H. Turgay Kaptanoğlu 6

Yunanistan'da Üniversite Giriş Sınavları

Şafak Alpay 13

Vektörlere Ait İki Teoremin Geometrik Uygulaması

Selma Atabey 15

Neden Birçok Öğrenci Calculus Dersinde Zorlanıyor?

Deborah Hughes Hallett 18

Eşçevre Problemi

Oğuz Silâhtar 20

Antalya Matematik Olimpiyadı

Gökhan Şahin 21

ODTÜ Matematik Topluluğu

ODTÜ Matematik Topluluğu 22

Uluslararası Matematik Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı

Albert Erkip 23

Problem Seminerleri

24

Problemler ve Çözümleri

29

DIRICHLET İLKESİ

İftihar Hacıyev *

Dirichlet ilkesinin en yaygın şekli şöyledir: n tane kafeste m tane tavşan varsa ve $m > n$ ise, en az bir kafeste en az iki tane tavşan vardır [1].

Bu apaçık düşüncenin soruları çözmek için nasıl faydalı olacağı bu durumda aşikâr değildir. Gerçekten belli bir soruda "tavşan" ve "kafes"lerin ne olduğunu ve "tavşan"ların neden fazla olduğunu anlamak kolay olmayabilir. "Tavşan" ve "kafes"lerin seçimi bir çok durumda açık değildir ve soruya göre Dirichlet ilkesini nasıl kullanmak gerektiğini bulmak kolay olmayabilir. En önemlisi bu metot yapıcı olmayan ispat veriyor; biz tabii hangi kafeste en az iki tavşanın olduğunu söyleyemeyiz, sadece bu kafesin varlığı söylenebilir.

Bazı sorular Dirichlet ilkesine benzer metotlarla çözülür. Uygun kuralları açıklayalım; bunlar olmayana ergi yöntemi ile kolayca ispatlanabilir.

- Uzunluğu 1 birim olan doğru parçasının içinde uzunlukları toplamı 1 birimden büyük olan birkaç tane parça alırsak, bunlardan en az ikisinin ortak noktası vardır.
- Yarıçapı 1 birim olan çemberin üzerinde uzunlukları toplamı 2π birimden büyük olan birkaç tane yay alırsak, bunlardan en az ikisinin ortak noktası vardır.
- Alanı 1 birim kare olan bölgenin içinde alanları toplamı 1 birim kareden büyük olan birkaç tane bölge alırsak, bunlardan en az ikisinin ortak noktası vardır.

Örnek 1. Düzlemin noktaları iki renge boyanmıştır. Kesişim noktaları aynı renkte olan iki yatay ve iki dikey doğrunun olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Üç tane dikey ve dokuz tane yatay doğruyu göz önüne alalım. Yalnız bu doğruların kesişim noktalarını ele alacağız. Üç nokta 2 renkle $2^3 = 8$ türlü boyanabildiğinden, dokuz yatay

doğrunun en az iki tanesi üzerindeki üçer nokta dikey olarak aynı tür boyanacaklar. İki renkle boyanmış üç noktadan aynı renkle boyanmış iki nokta her zaman seçilebilir. Bu iki noktadan geçen iki dikey doğru, önceden seçilmiş iki yatay doğru ile sorunun şartını sağlayacaktır. □

Örnek 2. Her dışbükey $2n$ -genin hiç bir kenara paralel olmayan köşegeni olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. $2n$ -genin köşegen sayısı $\frac{1}{2}2n(2n-3) = n(2n-3)$ sayısına eşittir. Seçilen bir kenara paralel olan köşegen sayısının $n-2$ 'den fazla olmadığı kolayca ispatlanabilir. Bundan dolayı kenarlara paralel olan tüm köşegenlerin sayısı $2n(n-2)$ sayısından fazla değildir. $2n(n-3) < 2n(n-2)$ olduğundan, hiç bir kenara paralel olmayan köşegen vardır. □

Örnek 3. Uzunluğu 1 birim olan bir çubuk içinde birkaç tane parça öyle renklendirilmiştir ki, iki tane renkli parça arasındaki uzaklık 0.1 sayısına eşit değildir. Renklendirilmiş parçaların uzunlukları toplamının 0.5'ten büyük olmadığını ispatlayınız.

Çözüm. Çubuğu uzunluğu 0.1 olan 10 eşit kısa çubuğa bölelim. Bu kısa çubukları üst üste koyalım ve aynı uzunluktaki bir kısa çubuğa bunların dik izdüşümlerini alalım. Renkli iki parça arasındaki uzaklık 0.1 sayısına eşit olmadığından, iki komşu parçanın renkli noktalarının izdüşümleri farklıdır. Bundan dolayı bir nokta 5'den fazla renkli noktanın izdüşümü olamaz. Demek ki, renkli parçaların izdüşümlerinin uzunlukları toplamı $5(0.1) = 0.5$ sayısından büyük değildir. □

Örnek 4. Yarıçapı 16 olan bir daire içine 650 nokta yerleştirilmiştir. Dairenin içinde, iç yarıçapı 2 ve dış yarıçapı 3 olan ve içinde en az 10 nokta bulunan bir halkanın olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Önce X noktası, merkezi O noktasında olan halkanın içinde ise, O noktasının da merkezi X noktasında olan aynı büyüklükteki halkanın içinde olduğunu kaydedelim. Bundan dolayı dairenin noktalarından bir tanesinin, merkezleri verilmiş noktalarda olan bu tip halkalardan en az 10'u ile örtüldüğünü ispatlamak yeter. Ele aldığımız halkalar, yarıçapı $16 + 3 = 19$ olan 361π alanlı dairenin içindedirler. Geriye $9(361\pi) = 3249\pi$ ve halkaların alanları toplamının $650(5\pi) = 3250\pi$ olduğunu görmek kalır. $\square$

Örnek 5. (Avusturya-Polonya 1978 yılı öğrenci yarışması.) Her biri 40 elemanlı 1978 tane küme verilmiştir. Bu kümelerden her ikisinin tam bir tane ortak elemanı vardır. 1978 kümenin ortak elemanı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. A kümesi 1978 kümeden herhangi biri olsun. Bu kümenin diğer 1977 küme ile kesişimi boş değildir ve buna göre bu kümelerden en az 50 tanesinin elemanı olan $a \in A$ vardır. Gerçekten, A kümesinin her elemanı en fazla 49 kümenin ortak elemanı ise, toplam küme sayısı $40 \cdot 49 = 1960$ sayısından fazla değildir. a 'nın ortak elemanı bulunduğu kümeler $A, A_1, A_2, \dots, A_{50}$ olsun. a elemanının 1978 kümeden geriye kalan her B kümesinin de elemanı olduğunu ispatlayalım. Gerçekten $A, A_1, A_2, \dots, A_{50}$ kümelerinin her-

hangi ikisinin a 'dan farklı ortak elemanı yoktur, çünkü her iki kümenin tam bir tane ortak elemanı vardır. $a \notin B$ olduğunu varsayalım. O halde B kümesinin her $A, A_1, A_2, \dots, A_{50}$ kümesi ile a 'dan farklı ortak elemanı vardır ve bu elemanlar farklıdır. Bundan dolayı B kümesinin eleman sayısı en az 51'dir; bu ise olamaz. Demek ki a her kümenin elemanıdır. $\square$

Örnek 6. m ve n kendi aralarında asal tam sayılar olsun. $m^k - 1$ sayısı n sayısına tam olarak bölünmesini sağlayan bir k tamsayısının varlığını ispatlayınız.

Çözüm. $n + 1$ tane olan $m, m^2, \dots, m^{n+1}$ sayıları içinde n ile bölümlerinden kalanları eşit olan iki sayı vardır ve onların farkı n 'nin katıdır; diyelim bunlar m^l ve m^t 'dir. O halde $m^l - m^t = an$ veya $m^t(m^{l-t} - 1) = an$. $(m, n) = 1$ olduğundan, $(m^t, n) = 1$ ve demek ki $m^{l-t} - 1$ sayısı n 'nin katıdır; yani $k = l - t$ sayısı aranan sayıdır. $\square$

KAYNAKÇA

- [1] A. Erkip, Çekmeceler, Çoraplar ve Matematik Problemleri, Matematik Dünyası, 2, sayı 2, 22-24 (1992).

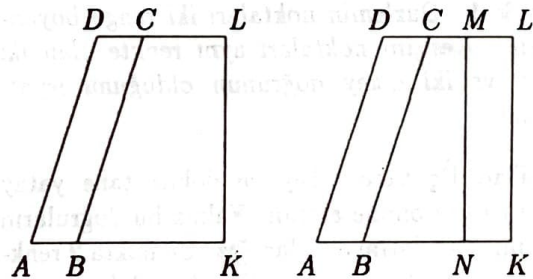
MATEMATİKTE TAMAMLAMA

Recep Yücesan *

Konumuza eski bir tamamlama sorusuyla başlayalım. Yaşlı bir adam vasiyetinde üç oğluna deve sürüsünü şöyle paylaşıyor: En büyük oğluna sürünün yarısını, ortancasına üçte birini ve en küçüğüne de dokuzda birini ayırıyor. Yaşlı adam ölüyor ve geride 17 devesi kalıyor. Oğulları normal olarak taksime başlıyorlar, fakat 17 sayısını 2, 3 ve 9'a tam bölemeyince ne yapacaklarını şaşırıyorlar. Sonra bir bilge kişiye başvuruyorlar. Bilge kişi yaşlı adamın vasiyetine göre develeri taksim ediyor. Ama nasıl?

Bu şaşırtıcı bilmece ile beyninizi fazla zor-

lamayın. Bu sadece bir şaka, çünkü bilge kişi kendi devesini sürüye katıyor. Sonra vasiyet-namedeki gibi dağıtım yapıyor. Geriye $(13 - 9 - 6 - 2 = 1)$ kendi devesi kalıyor.



* Özel Van Serhat Fen Lisesi matematik öğretmeni

Bir de şekildeki $ABCD$ paralelkenarını düşünelim ve buna $CBKL$ yamuğunu ekleyelim. Yamuğun tabanları olan $[BK]$ ve $[CL]$, $[AB]$ ve $[DC]$ 'nin uzantıları olup $[KL]$ ile diktirler. Şimdi $BKLC$ yamuğunu $[BC]$ ile $[AD]$ çakışana kadar sola kaydıralım. $[KL]$ 'nin yeni yeri $[NM]$ olur. Yamuğu kesip çıkarttığımızda geriye $ABCD$ ile aynı alana sahip $KLMN$ dikdörtgeni kalır. Fakat bu alan $(|NK| \cdot |KL|)$ paralelkenarın alanının aynısıdır! ($|NK|$ uzunluğu paralelkenarın $|AB|$ kenarının uzunluğuna ve $|KL|$ de onun yüksekliğine eşittir.)

Şimdi tamamlamanın cebirdeki kullanımını inceleyelim.

Tam Kareye Tamamlama

Eklemeye ve çıkarma tekniği cebir açılımlarında önemli bir yer tutar. Çarpımlara ayırmada ekleyip çıkarmak suretiyle toplamın veya farkın parantez karesi elde edilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= u^2 + v^2 + 2uv - 2uv \\ &= (u + v)^2 - 2uv, \end{aligned}$$

ve aynı şekilde $u^2 + v^2 = (u - v)^2 + 2uv$ elde edilir.

İkinci derece polinom denklemlerinin çözümünü veren formül de tam kareye tamamlama yoluyla elde edilir. $x^2 + px + q = 0$ ise, denkleme $p^2/4$ ekleyip çıkartıp kareye tamamlar ve sonra çarpımlara ayırırız:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - 4q\right) \\ &= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}}\right) \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}}\right). \end{aligned}$$

Bu eşitlikten kökler

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek. $x^4 + ux - 1 = 0$ eşitliğini çözünüz.

Çözüm. İfadeye $2x^2 + 1$ 'i ekleyip çıkartarak tam kareye benzetelim:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x - 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 4x - 2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Buradan $x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}(x - 1)$ elde ederiz. Bu ise

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$$

veya

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$$

demektir. Bu eşitlikleri çözersek,

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \mp \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2},$$

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \mp i\sqrt{4\sqrt{2} + 2}}{2}$$

çıkar. Bilindiği gibi $i = \sqrt{-1}$ demektir. $\square$

Örnek. n 'nin hangi pozitif tamsayı değeri için $n^4 + 4^n$ bir asal sayı olur?

Çözüm. Sadece $n = 1$ için. Eğer n çift ise, $n^4 + 4^n$ zaten çifttir. Eğer $n = 2k + 1$ ise, ifademiz $2^{n+1}n^2$ eklenip çıkartılarak şu şekilde çarpımlara ayrılır:

$$\begin{aligned} n^4 + 2^{2n} &= n^4 + 2n^2 2^n + 2^{2n} - 2^{n+1}n^2 \\ &= (n^2 + 2^n)^2 - (2^{k+1}n)^2 \\ &= (n^2 + 2^n - 2^{k+1}n)(n^2 + 2^n + 2^{k+1}n). \end{aligned}$$

İkinci çarpan her zaman birinci çarpandan büyüktür. Birincisi $n > 1$ için her zaman pozitifdir, çünkü $n^2 + 2^n \geq 2\sqrt{n^2 2^n} > n2^{k+1}$ 'dir. $\square$

$n^4 + 4$ sayısının asalılık koşullarını incelemeyi okuyuculara bırakıyoruz.

Örnek. $x^4 + bx^2 + c$ polinomunu ikinci dereceden çarpımlara ayırınız.

Çözüm. Eğer $\Delta = b^2 - 4c \geq 0$ ise,

$$x^4 + bx^2 + c = (x^2 - y_1)(x^2 - y_2)$$

yazılabilir. Buradaki y_1 ve y_2 'ler $y^2 + by + c = 0$ denkleminin kökleridir. Eğer $\Delta < 0$ ise, $2\sqrt{cx^2}$ çıkartıp eklenerek,

$$\begin{aligned} x^4 + bx^2 + c &= x^4 + 2\sqrt{cx^2} + c + (b - 2\sqrt{c})x^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{c})^2 - (2\sqrt{c} - b)x^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{c} - \sqrt{2\sqrt{c} - bx}) \\ &\quad \cdot (x^2 + \sqrt{c} + \sqrt{2\sqrt{c} - bx}) \end{aligned}$$

bulunur. $\square$

$x^4 + a^4$ ve $x^4 - a^2x^2 + a^4$ ifadelerinin çarpımlara ayrılmış halleri özellikle basittir.

Örnek. $r = a^{10} + a^5 + 1$ ifadesini tamsayı kat-sayıli iki polinomun çarpımı şeklinde yazınız.

Çözüm. Önce a , sonra da a^2 çıkartıp eklenerek,

$$\begin{aligned}
 r &= a^{10} - a + a^5 + a + 1 \\
 &= a(a^9 - 1) + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 \\
 &= a(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1) + a^2(a^3 - 1) \\
 &\quad + a^2 + a + 1 \\
 &= a(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^6 + a^3 + 1) \\
 &\quad + a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 \\
 &= (a^2 + a + 1) \\
 &\quad \cdot [(a^2 - a)(a^6 + a^3 + 1) + a^2(a - 1) + 1] \\
 &= (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Dikkat edilirse, $a^5 + a + 1$ polinomunu da arada çarpanlarına ayırırverdik. $a^8 + a + 1$ polinomunu da aynı yolla çarpanlara ayırınız. Eklenip çıkartılacak terimi bulmayı okuyuculara bırakıyoruz.

Çarpma-Bölme

Şimdiye kadar toplama ve çıkarma üzerine işlem yaptık. Diğer bir kullanışlı ters işlem ikilisi de çarpma ve bölmedir.

Örnek. $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ tane}}$ toplamını bulunuz.

Çözüm. Önce 9 ile çarpıp, sonra 9 ile bölelim; sonra da geometrik seri toplamını kullanalım:

$$\begin{aligned}
 9S_n &= 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ tane}} \\
 &= (10 - 1) + (10^2 - 1) + \dots + (10^n - 1) \\
 &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) \\
 &\quad - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ tane}} \\
 &= \frac{10^{n+1} - 10}{10 - 1} - n.
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

bulunur. $\square$

Örnek. $P_n = (n + 1)(n + 2) \dots (2n)$ çarpımını bölen 2'nin en büyük kuvveti kaçtır?

Çözüm. P_n ifadesini $n!$ ile bir çarpıp bir bölelim:

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{n!(n + 1) \dots (2n)}{n!} = \frac{(2n)!}{n!} \\
 &= \frac{2(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \dots (2n)(2 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1))}{n!} \\
 &= \frac{2^n n! (1 \cdot 3 \dots (2n - 1))}{n!} \\
 &= 2^n (2n - 1)!!
 \end{aligned}$$

olduğundan, cevap 2^n 'dir. $((2n - 1)!!$ ifadesi 1'den $2n - 1$ 'e kadar olan tek sayıların çarpımıdır.) $\square$

Örnek. $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$ toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned}
 \text{Çözüm. } xS_n &= x^2 + 2x^3 + \dots + nx^{n+1} \\
 xS_n - S_n &= -x + (x^2 - 2x^2) + (2x^3 - 3x^3) \\
 &\quad + \dots + (n - 1 - n)x^n + nx^{n+1} \\
 &= -x(1 + x + \dots + x^{n-1}) + nx^{n+1} \\
 S_n(x - 1) &= -x \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) + nx^{n+1} \\
 &= \frac{-x^{n+1} + x + (x - 1)nx^{n+1}}{x - 1}
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{x - x^{n+1} + nx^{n+2} - nx^{n+1}}{(x - 1)^2} \\
 &= \frac{nx^{n+2} - (n + 1)x^{n+1} + x}{(x - 1)^2}
 \end{aligned}$$

bulunur. $\square$

Örnek. $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ toplamını bulunuz.

Çözüm. $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ biliniyor. Eğer $\sin(x/2) \neq 0$ ise, bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
 S_n \sin \frac{x}{2} &= \sin \frac{x}{2} \sin x + \sin \frac{x}{2} \sin 2x \\
 &\quad + \dots + \sin \frac{x}{2} \sin nx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x \right) \quad \text{olur ve} \\
& = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x \right) \\
& = \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

bulunur. Eğer $\sin(x/2) = 0$ ise, $S_n = 0$ olduğu açıktır. $\square$

Örnek. $P = \cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^n x$ çarpımının sonucunu bulunuz.

Çözüm. $\sin x \neq 0$ kabul edelim ve P 'yi $\sin x$ ile bir çarpıp bir bölelim ve sinüs için çift açılı özdeşliğini defalarca kullanalım:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\sin x \cos x \cos 2x \dots \cos 2^n x}{\sin x} \\
&= \frac{\sin 2x \cos 2x \dots \cos 2^n x}{2 \sin x} \\
&\vdots \\
&= \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}
\end{aligned}$$

olur. (Eğer $\sin x = 0$ ise, $P = \pm 1$ 'dir.) $\square$

Yukarıdaki eşitlikte önce x yerine $2^{-n}x$ koyar, sonra $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ özdeşliğini kullanırsak, çok kullanışlı

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan π sayısı için Viète¹ formülünü bulabiliriz. Bunun için her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ iken limitini alır ve

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

limitini kullanırız. $n \rightarrow \infty$ iken, her x için $x/2^n \rightarrow 0$ sağlanır. O zaman

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} = x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \rightarrow x$$

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \dots = \frac{\sin x}{x}$$

çıkar. $x = \pi/2$ koyarsak,

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \dots = \frac{2}{\pi}$$

elde ederiz. $-\pi \leq x \leq \pi$ iken

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

dir. Dolayısıyla $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{2^n} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2^{n-1}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2^{n-2}}}} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n \text{ tane kök}}
\end{aligned}$$

değerlerini kullanabiliriz. Böylece

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \dots}}$$

bulunur.

KAYNAKÇA

- [1] N. Çalışkan, *Cebirsel Denklemlerin Kökleri*, Matematik Dünyası, 4, sayı 3, 9-13 (1994).

¹ Fransız matematikçi François Viète (1540-1603) üçüncü derece denklemlerin çözümünün trigonometrik halini de bulmuştur [1].

GAMA FONKSİYONU

H. Turgay Kaptanoğlu *

A. Tanım

Gama fonksiyonu, $0 < x < \infty$ değerleri için Euler integrali dediğimiz

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrali ile tanımlanır. Önce bu ifadenin ne demek olduğunu anlamaya çalışalım. $x-1$ bir gerçel sayı olduğundan, t^{x-1} ifadesi $e^{(x-1)\ln t}$ şeklinde tanımlanır. Bunun için de t 'nin doğal logaritmasının tanım kümesinde, yani $t > 0$ olması gerekir. Yani aslında

$$f(t) = t^{x-1} e^{-t}$$

funksiyonu $t = 0$ 'da tanımsızdır. Fakat az sonra bunun öneminin olmadığını göreceğiz. Ayrıca $t > 0$ iken $f(t) > 0$ 'dır ve $e^{-t} < 1$ gerçekleşir.

Hemen akla gelen ikinci soru bu integralin sonlu olup olmadığı, çünkü iki sorun var: Hem sonsuz uzunluktaki bir aralık üzerinde integral alıyoruz, hem de $0 < x < 1$ iken $f(t)$ fonksiyonu t sıfıra (sağdan) yaklaşırken sınırsız artıyor, yani

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{x-1} e^{-t} = +\infty$$

oluyor. Gama fonksiyonunu tanımlayan integrali, f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alan olarak yorumlarsak, bu iki nedenden dolayı integralin sonsuz çıkma olasılığı var. Ama x 'i pozitif bir sayı almamız bütün bu sorunları ortadan kaldırıyor; bunu açıklayalım.

Yukarıdaki integrale ne demek istediğimizi daha açık yazalım. ϵ ve M pozitif sayılar olsun. Eğer limitler varsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_{\epsilon} + \lim_{M \rightarrow \infty} J_M \end{aligned}$$

demektir. Buradan $f(t)$ 'nin $t = 0$ 'da tanımlı olmasının gerekmediğini hemen görürüz. Aslında $x \geq 1$ iken, $f(t)$ fonksiyonu $(0, 1]$ aralığında

sürekli ve sınırlı olduğundan, ilk integralde limit almaya gerek kalmaz.

Şimdi Γ 'nın tanımındaki limitlerin varlığını göstereyim.

$$\begin{aligned} I_{\epsilon} &= \int_{\epsilon}^1 t^{x-1} e^{-t} dt < \int_{\epsilon}^1 t^{x-1} dt \\ &= \frac{t^x}{x} \Big|_{t=\epsilon}^1 = \frac{1}{x} - \frac{\epsilon^x}{x} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden, $x > 0$ iken I_{ϵ} integralinin, $\epsilon > 0$ ne olursa olsun, $1/x$ ile üstten sınırlı olduğunu görürüz. $\epsilon \rightarrow 0^+$ iken, pozitif bir fonksiyonun gittikçe büyüyen bir aralıktaki integrali olduğu için I_{ϵ} artar. Üstten sınırlılık ve artanlık, $x > 0$ durumunda

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_{\epsilon}$$

limitinin varlığını gösterir. Bu hesaptan anlaşılması gereken, $0 < x < 1$ olsa bile, $t \rightarrow 0^+$ iken t^{x-1} 'in sınırsız arttığı, fakat yeteri kadar yavaş arttığı için, grafiğiyle x eksenı arasındaki alanın sonlu kalabildiğidir.

J_M integralinin limiti için şu sonuca ihtiyacımız olacak:

Önerme 1. n negatif olmayan bir tamsayı ve $t > 0$ ise,

$$e^t > \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

sağlanır.

İspat. Tümevarım kullanacağız. $n = 0$ iken $0! = 1$ diye tanımlarız. O zaman $t > 0$ iken $e^t > 1$ olacağı açıktır. Eşitsizliğin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $t \geq 0$ için

$$h(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \cdots - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

tanımlayalım. $h(0) = 1$ 'dir. Öte yandan

$$h'(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \cdots - \frac{t^k}{k!},$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

$t > 0$ iken tümevarım varsayımı gereği pozitiftir; yani $h(t)$, $t > 0$ aralığında artandır. $t = 0$ 'da 1 değerini alan ve pozitif sayılarda artan bir fonksiyonun, orada negatif veya sıfır olamayacağı açıktır. Bu önermenin özel bir hali negatif olmayan n tamsayıları için

$$e^t > \frac{t^n}{n!} \quad (t > 0)$$

eşitsizliğidir. $\square$

Artık J_M integraline bakabiliriz. n bir pozitif tamsayı olsun. Önerme 1'den

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \frac{n!}{t^n} \quad (t > 0)$$

ve sonra da

$$t^{x-1}e^{-t} < \frac{n!}{t^{n+1-x}} \quad (t > 0)$$

çıkar. Verilen bir $x > 0$ için $n > x$ sağlayan bir n pozitif tamsayısı seçelim.

$$\begin{aligned} J_M &= \int_1^M t^{x-1}e^{-t} dt < \int_1^M n! t^{x-n-1} dt \\ &= n! \frac{t^{x-n}}{x-n} \Big|_{t=1}^{t=M} = \frac{n!}{x-n} (M^{x-n} - 1) \\ &= \frac{n!}{n-x} \left(1 - \frac{1}{M^{n-x}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği, J_M integralinin, $M > 0$ ne olursa olsun, $\frac{n!}{n-x}$ ile üstten sınırlı olduğunu söyler. $M \rightarrow \infty$ iken J_M aynı zamanda arttığından,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_M$$

limiti vardır. Bu hesaptan da anlaşılması gereken, $t \rightarrow \infty$ olsa bile e^{-t} 'nin sıfıra iniş hızının t^{x-1} 'in sınırsız artış hızını, $t^{x-1}e^{-t}$ 'nin grafiğiyle x eksenini arasındaki alanı sonlu yapacak kadar etkili bir biçimde bastırdığıdır.

Böylece $x > 0$ için gama fonksiyonunun iyi tanımlanmış olduğunu göstermiş olduk.

B. Temel Özellikler

Şunu biliyoruz: $t > 0$ için $f(t)$ pozitif olduğundan, $x > 0$ için $\Gamma(x)$ de pozitiftir.

$x = 1$ için gama fonksiyonunun değerini hesaplamak kolaydır:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} [1 - e^{-M}] = 1. \end{aligned}$$

Öte yandan $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$ olur. Bu integrali $x > 0$ için parçalı integralleme yoluyla hesaplamaya çalışalım. $u = t^x$ ve $dv = e^{-t} dt$ dersek, $du = x t^{x-1} dt$ ve $v = -e^{-t}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ M \rightarrow \infty}} \int_0^M t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ M \rightarrow \infty}} \left[-t^x e^{-t} \right]_{t=\epsilon}^{t=M} \\ &\quad + x \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ M \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^M t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^x e^{-\epsilon} - \lim_{M \rightarrow \infty} M^x e^{-M} + x \Gamma(x) \end{aligned}$$

olur. Birinci limit açıkça 0'dır. İkinci limit de 0'dır; bunu görmeyen bir yolu x 'i sabit tutup M 'yi değişken olarak düşünerek M^x/e^M üzerinde L'Hôpital kuralını [5] uygulamaktır. Elde ettiğimiz

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

eşitliği gama fonksiyonunun *fonskiyonel denklemdir*.

Şimdi x 'i bir n pozitif tamsayısı olarak seçer, fonskiyonel denklemini kendisinin sağ tarafındaki $\Gamma(n)$ 'ye uygularsak $\Gamma(n+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)$ buluruz; sonra bu işlemi sağ tarafta $\Gamma(1) = 1$ çıkana kadar tekrarlırsak

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

buluruz. Bu bize, yalnızca doğal sayılarda tanımlı olan faktöriyel işleminin gama fonksiyonu aracılığıyla bütün pozitif gerçel sayılara genişletildiğini söyler.

Peki, gama fonksiyonunu pozitif olmayan sayılarda da tanımlı kılabilir miyiz? Evet, hem de yukarıdaki yolla. Bir n pozitif tamsayısı alır, fonskiyonel denklemini $\Gamma(x+1)$ yerine $\Gamma(x+n)$ için kullanır ve bu işlemi sağ tarafta $\Gamma(x)$ kalana kadar tekrarlırsak, her $x > 0$ için

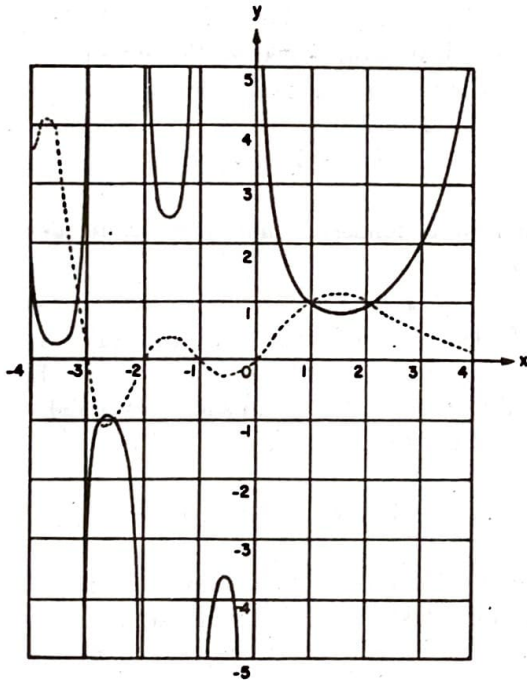
$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= (x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x\Gamma(x), \\ \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x} \end{aligned}$$

elde ederiz. $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olur ve $\Gamma(x+n)$ tanımlıdır. O halde son denklemini gama fonksiyonunu $-n < x < -n+1$ aralığında

tanımlamak için kullanabiliriz. Kala kala sıfır ve negatif tamsayılar kaldı. Bunlar için yapacak bir şey yok, çünkü son denklemin sağ tarafı buralarda anlamsız, ve gama fonksiyonu buralarda tanımsız kalacak, çünkü x sıfıra veya negatif tamsayıya yaklaştığında bu denklem $|\Gamma(x)|$ 'in sınırsız arttığını da söylüyor.

Aslında en başta gama fonksiyonunu yalnızca $(0, 1]$ aralığında tanımlamak yeterdi. $\Gamma(x + n)$ için yukarıda verdiğimiz denklem sayesinde, tanım aralığını $(n, n + 1]$ tipindeki tüm aralıklara, yani bütün pozitif gerçel sayılara genişletebilirdik.

Sonuç 2. Gama fonksiyonun tanım kümesi T , sıfır ve negatif tamsayılar dışında kalan bütün gerçel sayılardır.



—, $y = \Gamma(x)$, - - - -, $y = 1/\Gamma(x)$

Diğer bir önemli özellik için, bir $1 < p < \infty$ ve bunun eşleniği q ile Hölder eşitsizliğini [4] gama fonksiyonunun tanımındaki integrale uygulayalım. $0 < x, y < \infty$ olsun ki $\Gamma(x)$ ve $\Gamma(y)$ pozitif çıksın ve logaritmalarını alabilelim.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p} - \frac{t}{q}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^{1/p} (t^{y-1} e^{-t})^{1/q} dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{1/p} \\ &\quad \cdot \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1/q} \\ &= \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q} \end{aligned}$$

çıkar. Her iki tarafın logaritmasını aldığımızda, logaritma artan bir fonksiyon olduğundan eşitsizlik korunur. Logaritmayı çarpma üzerinde toplama olarak dağıtıp $a, b > 0$ için $\ln a^b = b \ln a$ özelliğini kullanırsak,

$$\ln \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \ln \Gamma(x) + \frac{1}{q} \ln \Gamma(y)$$

elde ederiz. Bu ise $\ln \Gamma$ fonksiyonunun dışbükey [4] olması demektir.

C. Çarpım Formülleri ve Sonuçları

Asıl ilginç olan, gama fonksiyonunun, şimdiye kadar verdiğimiz üç temel özelliğinden kesin olarak belirlenmesidir [2]:

Teorem 3. g , tanım kümesi $(0, \infty)$ aralığını içeren pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

- (a) $g(1) = 1$ ise,
- (b) $g(x+1) = xg(x)$ sağlanıyorsa, ve
- (c) $\ln g$ dışbükeyse,

o zaman g 'nin tanımlı olduğu her x için $g(x) = \Gamma(x)$ 'tir.

İspat. Yukarıdaki üç özelliği sağlayan yalnızca bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. Gama fonksiyonu da bu üç özelliğe sahip olduğundan, o bir fonksiyon gama fonksiyonu olacaktır. (b) özelliği sayesinde, g 'yi bir kere $(0, 1]$ aralığında belirlersek, tanımlı olduğu her yerde g belirlenmiş olacaktır.

$h = \ln g$ olsun; o zaman $h(1) = 0$ 'dır ve h dışbükeydir; ayrıca $0 < t < \infty$ için $h(t+1) = h(t) + \ln t$ sağlanır. Bu eşitlik $t = n$ diye pozitif bir tamsayı alınıp tekrarlandığında $h(n+1) = \ln(n!)$ verir. Bir kere de $t = n+1+x$ alınıp tekrarlandığında

$$h(n+1+x) = h(x) + \ln[x(x+1) \cdots (x+n)]$$

verir. Şimdi $0 < x < 1$ alalım. [4]'teki Önerme 4'ü $a = n + 1$, $b = n + 1 + x$ ve $c = n + 2$ alıp h 'ye uygularsak,

$$\begin{aligned} \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{x} &\leq \frac{h(n+2) - h(n+1)}{x} \\ &= \ln((n+1)!) - \ln(n!) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu $x = 1$ halinde de = olarak geçerlidir. $0 < x \leq 1$ alıp [4]'teki Önerme 4'ü bir defa da $a = n$, $c = n + 1$ ve $b = n + 1 + x$ ile uygularsak,

$$\begin{aligned} \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{x} &\geq \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{1} \\ &= \ln(n!) - \ln((n-1)!) \\ &= \ln n \end{aligned}$$

elde ederiz. Son iki eşitsizlik birlikte

$$\ln n \leq \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

verir. Daha önce $h(n+1+x)$ ve $h(n+1)$ için elde ettiğimiz formülleri burada yerine koyar ve logaritmanın bir özelliğini kullanırsak

$$\ln n \leq \frac{h(x) + \ln[x(x+1) \cdots (x+n)/n!]}{x} \leq \ln(n+1)$$

buluruz. Şimdi x ile çarpıp, $x \ln n$ çıkartıp, gene logaritmanın özelliklerini kullanıp sadeleştirirsek,

$$0 \leq h(x) - \ln \left[\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \right] \leq x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

çkar. Logaritmanın sürekliliğinden, sağ tarafın $n \rightarrow \infty$ iken limiti 0'dır. Dolayısıyla ortadaki ifadenin de $n \rightarrow \infty$ iken limiti 0'dır; yani h kesin olarak köşeli parantez içindeki ifadenin limiti olarak belirlenir. Logaritmanın birebir fonksiyon olması g 'nin de kesin olarak belirlendiğini gösterir. $\square$

İspatın sonunda Γ için elde ettiğimiz Gauss formülünü yazalım:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (0 < x \leq 1).$$

Bu formülün her $x \in T$ için geçerli olduğunu görmek için,

$$\Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

diyelim.

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x+1) &= \frac{n}{x+n+1} x \Gamma_n(x) \\ \Gamma_n(x) &= \frac{x+n+1}{n} \frac{1}{x} \Gamma_n(x+1) \end{aligned}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken bir $x \neq 0$ için bir tarafın limiti varsa, diğer tarafın da vardır, yani Gauss formülündeki limit, $x \neq 0$ için varsa, $x+1$ için de vardır, ve de $x+1$ için varsa ve $x \neq 0$ ise, x için de vardır. Özetle, $G(x)$ ile göstereceğimiz limit her $x \in T$ için vardır, $G(x+1) = xG(x)$ sağlanır, ve $0 < x \leq 1$ için $G(x) = \Gamma(x)$ 'tir. G tek olduğundan, G ile Γ , T kümesinde çakışır.

Şu önerme $\Gamma(x)$ için değişik bir formül elde etmemizde yararlı olacak:

Önerme 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$ limiti vardır.

Bu limit γ ile gösterilir ve γ 'ya Euler-Mascheroni sabiti denir.

İspat. $C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ve $D_n = C_n - 1/n$ dersek, her $n = 1, 2, \dots$ için

$$C_{n+1} - C_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

olduğunu görürüz.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın 1'den $\frac{n+1}{n}$ 'ye kadar integralini alırsak,

$$\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{dx}{x}$$

buluruz. $1/x$ fonksiyonunun $[1, \frac{n+1}{n}]$ aralığında aldığı en büyük değer 1, en küçük değer ise $\frac{n}{n+1}$ 'dir. Bu değerleri aralığın uzunluğu olan $1/n$ ile çarparsak, yukarıdaki integral için alt ve üst sınırlar bulmuş oluruz:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bu eşitsizlikleri $\{C_n\}$ ve $\{D_n\}$ dizilerinin fark formülünde kullanırsak, her n için

$$C_{n+1} - C_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

$$D_{n+1} - D_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

çıkarak, yani $\{C_n\}$ azalan bir dizi, $\{D_n\}$ artan bir dizidir. Tanımlarından her n için $D_n < C_n$ olduğundan, $D_1 = 0$ teriminin $\{C_n\}$ dizisi için bir alt sınır olduğunu görürüz. Azalan ve alttan sınırlı dizilerin ise limiti vardır (ve bu limit en büyük alt sınırdır). $\square$

Şimdi $\Gamma_n(x)$ 'i tanımlayan ifadede n^x yerine $e^{x \ln n}$ yazalım. Sonra $n!$ ifadesini $1/n!$ olarak paydaya taşıdıktan sonra, çarpanlarını sırayla $(x+1)(x+2)\dots(x+n)$ 'nin paydası olacak şekilde dağıtalım. Sonra da $\Gamma_n(x)$ 'i

$$1 = e^{-x} e^{-x/2} \dots e^x e^{x/2} \dots e^{x/n}$$

ile çarparsak elimize

$$\Gamma_n(x) = \frac{e^{x \ln n} e^{-x} e^{-x/n} \dots e^{-x/n}}{x \frac{x+1}{1} \frac{x+2}{2} \dots \frac{x+n}{n}} e^x e^{x/2} \dots e^{x/n}$$

geçer. Buradaki büyük kesirin payını tek bir üstel fonksiyonda birleştirebiliriz. Ayrıca paydadaki $\frac{x+k}{k}$ kesirlerini de $1 + x/k$ şeklinde yazabilir ve her birini $e^{x/k}$ ile beraber düşünebiliriz. O zaman $\Gamma_n(x)$ ifadesi

$$\frac{1}{x} \exp \left[x \left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right) \right] \prod_{k=1}^n \frac{e^{x/k}}{1 + x/k}$$

halini alır. Burada $\prod$, çarpımı gösterir; $\exp(\cdot)$ ise $e^{(\cdot)}$ demekten başka bir şey değildir. Önerme 4 sayesinde, $n \rightarrow \infty$ iken, yuvarlak parantez içindeki ifadenin limitinin $-\gamma$, sol tarafın limitinin ise T 'deki x 'ler için $\Gamma(x)$ olduğunu biliyoruz. O zaman her $x \in T$ için, $n \rightarrow \infty$ iken sağdaki çarpımın da limiti vardır; dolayısıyla

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} e^{x/k} \\ &= e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x+k} e^{x/k} \quad (x \in T) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik *Weierstrass çarpım formülüdür*.

Yukarıda $\{C_n\}$ dizisinin limiti olarak tanımladığımız γ 'nın ne büyüklükte bir sayı olduğu hakkında biraz fikir verelim. Her şeyden önce $\{D_n\}$ dizisinin de limiti vardır ve bu limit γ 'dır, çünkü iki dizinin terimleri arasındaki fark sadece $1/n$ 'dir ve bu 0'a yakınsar. $\{D_n\}$ dizisi artan olduğundan, γ onun en küçük üst sınırıdır. Dolayısıyla her n için $D_n < \gamma < C_n$ sağlanır. $D_2 = 1 - \ln 2 > 0$ 'dır, çünkü $1 < 2 < e$ ve $\ln 1 = 0 < \ln 2 < 1 = \ln e$ 'dir. Ayrıca

$C_2 = \frac{3}{2} - \ln 2 < 1$ 'dir, çünkü $\ln 2$ yaklaşık olarak 0.7'dir. Böylece $0 < \gamma < 1$ olduğu ortaya çıkar. n 'yi büyük seçerek γ için daha dar aralıklar bulabiliriz. γ için yaklaşık bir değer 0.57722'dir. Son bir not: γ 'nın rasyonel mi irrasyonel mi bir sayı olduğu bilinmiyor.

D. Beta Fonksiyonu

Bir başka *Euler integrali* de iki değişkenli bir fonksiyon tanımlar. *Beta fonksiyonu*, $x > 0$ ve $y > 0$ değerleri için

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

integrali ile tanımlanır. $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ iken, bu integral de gama fonksiyonunu tanımlayan integral gibi limitlerle verilir, çünkü t^{x-1} 'den dolayı 0'a yaklaşırken, $(1-t)^{y-1}$ 'den dolayı da 1'e yaklaşırken sorunlar vardır. Bu sorunlar gene gama fonksiyonunda yapıldığı gibi aşılar.

İntegralin içindeki ifade pozitif olduğundan beta fonksiyonu da pozitif değerlidir; o zaman logaritmasını almamızda sakınca yoktur. y 'yi sabit tutup x 'e değişken olarak baktığımızda, tıpkı gama fonksiyonu için kullandığımız yolla, $\ln B$ 'nin da dışbükey olduğunu görürüz. $B(1, y) = 1/y$ de kolayca hesaplanır. Beta fonksiyonu için de bir fonksiyonel denklem çıkartalım.

$$B(x+1, y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^x (1-t)^{x+y-1} dt$$

yazar,

$$u = \left(\frac{t}{1-t} \right)^x \quad \text{ve} \quad dv = (1-t)^{x+y-1} dt$$

diyip, parçalı integralleme yaparsak,

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

elde ederiz. Bütün bunların ayrıntılarını okuyucuya bırakıyoruz.

Şimdi sabit bir $y > 0$ alıp,

$$g(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y) \quad (x > 0)$$

fonksiyonuna bakalım. $g(x+1) = xg(x)$ ve $g(1) = 1$ olduğunu hemen görürüz. Logaritma çarpımı toplama çevirdiğinden ve dışbükey

fonksiyonların toplamı da dışbükey olduğundan [4] (y 'nin ve böylece $\Gamma(y)$ 'nin pozitif bir sabit olduğunu unutmayalım), $\ln g$ 'nin de dışbükey olduğunu anlarız. Artık yapılacak en doğal şey Teorem 3'ü uygulayıp, her $x > 0$ için $g(x) = \Gamma(x)$ yazmaktır. Bu da bize şu ilginç formülü verir:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0).$$

Bu formülden daha başka ilginç formüller de türetebiliriz. Integralde $0 < t < 1$ olduğundan $\sin^2 \theta = t$ sağlayan bir θ vardır ve $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ olur. O zaman gene pozitif x, y için

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^1 (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$$

gerçeklenir. Şimdi $x = y = \frac{1}{2}$ koyar, $\Gamma(1) = 1$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ olduğunu kulanırsak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

buluruz. (π sayısı yazıda bir yerde çıkmalıydı!) Geri dönüp gama fonksiyonunun ilk tanımında $t = s^2$ değişken değişimini yapmak

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds \quad (x \in T)$$

verir. Şimdi $x = \frac{1}{2}$ koyarsak,

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

elde ederiz. $y = e^{-s^2}$ fonksiyonunun grafiği y eksenini etrafında simetriktir; dolayısıyla $s > 0$ iken grafiğin altında kalan alanla $s < 0$ iken grafiğin altında kalan alan birbirine eşittir. Sonuç olarak

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

çıkar.

E. Türevlenebilme ve Dışbükeylik

Biraz da gama fonksiyonunun türevinin olup olmadığını araştıralım. Fonksiyonel denklemden dolayı pozitif sayılara bakmak yetecek. Pozitif sayılarda ise gama fonksiyonunun pozitif değerli olduğunu biliyoruz, dolayısıyla logaritmasını alabiliriz. Logaritma sürekli bir fonksiyondur

ve bundan dolayı limitlerle yer değiştirebilir. Logaritmanın sonlu çarpımları toplamlara çevirdiğini de biliyoruz. Diğer bir bildiğimiz, logaritmanın üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olduğu; yani her gerçel a için $\ln e^a = a$ ve her pozitif b için $e^{\ln b} = b$ sağlandığı. O zaman Weierstrass çarpım formülünden

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x) &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} e^{x/k} \\ &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln \left(\frac{k}{x+k} \right) \right) \\ &= -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(\frac{k}{x+k} \right) \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi türev almaya çalışırsak sağdaki sonsuz toplam sorun çıkartmaya aday. Sonlu toplamların türevinin her bir terimin türevinin toplamı olduğu doğru, fakat bu sonsuz toplamalarda da geçerli mi? Evet, eğer türevi elde edilecek olan sonsuz toplam burada pek bahsetmek istemediğimiz *düzgün yakınsaklık* özelliğine sahipse. Elimizdeki toplamlar için bu özelliğin olduğu biliniyor ve her terimin ayrı ayrı türevini alıp toplamamızda bir sakınca yok. Zincir kuralının birkaç uygulamasından sonra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

buluruz. Düzgün yakınsaklık özelliği tekrar tekrar türev alsak da sağlanıyor, dolayısıyla gama fonksiyonu sonsuz kere türevli ve

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m-1)}{(x+k)^m} \quad (m \geq 2)$$

formülü her $x > 0$ için geçerli. Yukarıda yaptığımız gibi fonksiyonel denklemler sayesinde bu formülü her $x \in T$ için geçerli yapmak da mümkün.

$m = 2$ hali biraz daha incelenmeğe değer, çünkü

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

her zaman pozitif. Buradan her $x \in T$ için

$$\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0$$

$$\Gamma(x)\Gamma''(x) > (\Gamma'(x))^2 \geq 0$$

çıkar. Bu ise her $x \in T$ için, $\Gamma(x)$ ve $\Gamma''(x)$ sayılarının ya her ikisinin birden pozitif ya da her ikisinin birden negatif olması demektir. $|\Gamma(x)|$ fonksiyonunu düşünürsek, ikinci türevi hep pozitif olur. [4]'teki Sonuç 8'den dolayı $|\Gamma(x)|$ fonksiyonu T üzerinde dışbükeydir. Dikkatli bakarsak, $\Gamma(x+n)$ 'yi veren formülden, gama fonksiyonunun işaretinin $(-n, -n+1)$ aralığında $(-1)^n$ 'nin işareti ile aynı olduğunu görürüz; burada n bir pozitif tamsayıdır. $x > 0$ iken de $\Gamma(x)$ pozitifdir. Dolayısıyla gama fonksiyonu $(0, \infty)$, $(-2, -1)$, $(-4, -3)$, ... aralıklarında dışbükeydir; T 'deki geri kalan aralıklarda ise $-\Gamma$ dışbükeydir.

F. Sinüs Fonksiyonu İçin Bir Bağntı

Başlangıç olarak

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2^x \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

fonksiyonuna bakalım. Açıkça g en az $(0, \infty)$ aralığında tanımlı ve orada pozitif değerlidir. Ayrıca $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğinden

$$g(x+1) = \frac{2^{x+1}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{2^x}{2\sqrt{\pi}} 2\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = xg(x)$$

sağlanır.

$$\ln g(x) = (\ln 2)x + \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

özdeşliğinde sağdaki her terim dışbükey olduğundan, $\ln g$ dışbükeydir. O zaman g , Γ 'dan başka bir şey değildir (Teorem 3); yani

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-x} \Gamma(x)$$

özdeşliği, her iki taraf da tanımlı iken doğrudur; buna da Gauss formülü deniyor. Burada x yerine $1-x$ koyarsak,

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^x \Gamma(1-x)$$

elde ederiz.

Şimdi $\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon sadece tamsayı olmayan gerçel x 'ler için tanımlıdır. x yerine $1-x$ koyarsak

$$\varphi(x+1) = \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin(\pi x + \pi)$$

$$= x\Gamma(x) \frac{\Gamma(1-x)}{-x} (-\sin \pi x)$$

$$= \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x = \varphi(x)$$

buluruz; yani φ periyodiktir ve periyodu 1'dir. Az önce elde ettiğimiz bağıntıları kullanarak da

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$\cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x+1}{2}\right) \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} 2^{1-x} \Gamma(x) \sqrt{\pi} 2^x \Gamma(1-x)$$

$$\cdot 2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$= \pi \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x$$

$$= \pi \varphi(x) \quad (*)$$

elde ederiz. Bu özdeşlik de tamsayı olmayan x 'ler için geçerlidir.

Gama ve sinüs fonksiyonları sonsuz kere türevli olduklarından, φ de öyledir, tabii x tamsayı değilse.

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x} \Gamma(1-x) \sin \pi x$$

$$= \pi \Gamma(1+x) \Gamma(1-x) \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

yazalım. Bu eşitliğin sağ tarafının $x \rightarrow 0$ iken limitini alırsak $\pi \Gamma(1)^2 1 = \pi$ buluruz, çünkü gama fonksiyonu 1'de süreklidir. Eğer $\varphi(0) = \pi$ diye tanımlarsak, φ sıfırda da sürekli olur. Diğer tamsayılarda da aynı limiti buluruz, çünkü φ periyodiktir. O halde φ 'yi tamsayılarda π diye tanımlarsak, φ bütün gerçel sayılarda sürekli olur. Yukarıdaki eşitliğin türevini alıp tekrar $x \rightarrow 0$ iken limitine bakabiliriz. Gama fonksiyonu 1'de sonsuz kere türevli olduğundan yalnız $\sin \pi x / \pi x$ ifadesinden gelen terimlerde limiti araştırmak yeter. L'Hôpital kuralından [5] onların da limiti kolayca bulunur. Sonra tekrar $\varphi'(0)$ 'ı limit yardımıyla tanımlar ve periyodiklikle bütün tamsayılara genişletiriz. Özetle, φ bütün gerçel sayılarda sonsuz kere türevlidir. Ayrıca tanımından $0 < x < 1$ için $\varphi(x)$ pozitifdir. $\varphi(0) = \pi$ ve periyodiklik sayesinde bu her gerçel sayıda da doğrulanır. Böylece φ 'nin logaritması alınabilir.

$\ln \varphi$ 'nin ikinci türevine λ diyelim. λ da periyodiktir ve periyodu 1'dir. λ , $[0, 1]$ aralığında sürekli ve bunun sonucu olarak orada sınırlıdır. Periyodiklik gereği bütün gerçel sayılarda sınırlı olur; yani öyle bir M sayısı vardır ki, her gerçel x için $|\lambda(x)| \leq M$ sağlanır. Öte yandan (*)'ın her iki tarafının logaritmasını ve sonra iki kere türevini alınca

$$\frac{1}{4} \left(\lambda \left(\frac{x}{2} \right) + \lambda \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) = \lambda(x)$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} |\lambda(x)| &\leq \frac{1}{4} \left| \lambda \left(\frac{x}{2} \right) \right| + \frac{1}{4} \left| \lambda \left(\frac{x+1}{2} \right) \right| \\ &\leq \frac{M}{4} + \frac{M}{4} = \frac{M}{2} \end{aligned}$$

çıkar. Bu işlemi tekrarlırsak, $|\lambda|$ 'nın üst sınırını istediğimiz kadar ufaltabileceğimizi görürüz. Sonuç olarak her gerçel x için $\lambda(x) = 0$ 'dır. λ 'nın tanımından bu $\ln \varphi(x) = ax + b$ olması demektir. $\ln \varphi$ 'nin periyodikliğinden $a = 0$ olmalıdır; yani φ sabit bir fonksiyondur. $\varphi(0) = \pi$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla her gerçel x için $\varphi(x) = \pi$ 'dir.

Şimdi elimizde

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)}$$

var. Bu da Γ için bir başka fonksiyonel denklemdir. Weierstrass çarpım formülünü burada kul-

lanırsak

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \quad (-\infty < x < \infty)$$

elde ederiz. Bu formülün değişik bir elde edilişi [3]'te var. Aslında bu formül polinomlar için bildiğimiz bir özelliğin $\sin \pi x$ için yazılması. Bilindiği gibi her polinom köklerine ait çarpanların çarpımı olarak yazılabilir; tabii polinomların sonlu tane kökü vardır. Yukarıdaki formül bize sonsuz tane kökü olan $\sin \pi x$ gibi bazı fonksiyonların da köklerine ait çarpanların çarpımı olarak yazılabileceğini söylüyor.

KAYNAKÇA

- [1] E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964.
- [2] H. Bohr & J. Møllerup, *Laerebog i Matematisk Analyse*, Kopenhagen, 1922.
- [3] N. Çalışkan, *Bir Algorist: Leonhard Euler*, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 5, 13-15 (1995).
- [4] H. T. Kaptanoğlu, *Dışbükey Fonksiyonlar*, *Matematik Dünyası*, 6, sayı 1, 11-18 (1996).
- [5] M. A. Kocatepe, *L'Hôpital Kuralı Üstüne*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 2, 15-17 (1994).

YUNANİSTAN'DA ÜNİVERSİTE GİRİŞ SINAVLARI

Şafak Alpay *

Yunanistan'da lise mezunları üniversiteye girmek istediklerinde, girmek istedikleri programlara göre, dört tür sınava girmek zorundalar. Örneğin, mühendislik veya temel bilimler okumak isteyen öğrenciler, konuları matematik, fizik, kimya ve kompozisyonlardan oluşan yazılı sınavlara alınıyorlar. Kağıtlar iki farklı kişi tarafından değerlendiriliyor ve not farkı üç puandan fazla olduğu zaman üçüncü bir hakem gerekiyor. Alınan notlar sıralanıyor ve kontenjan durumuna göre öğrenciler programlara giriyorlar.

Bu ülkedeki yedi matematik bölümüne

girebilmek için öğrencilerin geçen yıl yanıtlamak zorunda oldukları problemleri *Matematik Dünyası* okurlarına sunuyoruz. Tüm sorularının yanıtlanması gereken sınavın süresi ise 3 saat.

Soru 1

(A) n bir pozitif tamsayı, I ve O , sırası ile, $n \times n$ birim ve sıfır matrisleri olsunlar. A ve B , $A = B^2 + I$ ile $B^4 = O$ eşitliklerini sağlayan matrisler ise,

(i) Her m pozitif tamsayısı için, $A^m = I + mB^2$ olduğunu kanıtlayınız;

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

(ii) $I + A^6 - A^8$ matrisinin tersinin olduğunu gösteriniz;

(iii) n bir tek sayı ise, $\det(2A - 3I) \leq 0$ olduğunu gösteriniz.

(B) (i) Herhangi iki z_1, z_2 karmaşık sayısı için $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ eşitliğinin doğru olması için gerekli ve yeterli koşulun $z_1 \bar{z}_2$ sayısının gerçel kısmının sıfır olması olduğunu gösteriniz.

(ii) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. $ab \neq 0$ olmak üzere $z = a^2 + if(a)$ ve $w = f(b) + ib^2$ ile tanımlanan karmaşık sayıları düşünelim. Eğer $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ ise $f(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığı içinde en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Soru 2

(A) $0 < a < b$ olmak üzere $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ve $C_2 : a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ elipslerini düşünelim. $0 < x$ ve $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $y = (\tan \phi)x$ doğrusunun C_1 elipsini $P_1 = (x_1, y_1)$ noktasında ve C_2 elipsini $P_2 = (x_2, y_2)$ noktasında kestiğini varsayalım.

(i) C_1 elipsine P_1 noktasında çizilen teğetin eğimi λ_1 ve C_2 elipsine P_2 noktasında çizilen teğetin eğimi λ_2 ise, $\lambda_1 \lambda_2 = (\tan \phi)^{-2}$ olduğunu gösteriniz.

(ii) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(\phi) = \lambda_1 \lambda_2$ olarak tanımlanan fonksiyonun azalan ve artanlığını araştırınız.

(B) $n, (1+i)^n = 16$ eşitliğini sağlayan pozitif bir tamsayı olsun. $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ da eşit olasılık olaylarının uzayı olsun. Ω içinden keyfi bir λ seçelim ve $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 2x^2 - 4x + \lambda$ tanımlayalım. $f(x) = 0$ denkleminin gerçel kökünün olmaması olasılığını bulunuz.

Soru 3

(A) a ve $b, a < b$ sağlayan gerçel sayılar olsun. $f(x) = (x-a)^5(x-b)^3$ ise,

(i) $x \neq a$ ve $x \neq b$ için

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-a} + \frac{3}{x-b}$$

olduğunu gösteriniz.

(ii) $g(x) = \ln |f(x)|$ fonksiyonunun (a, b) aralığında içbükey olduğunu gösteriniz.

(B) (i) $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli f fonksiyonu (a, b) 'deki her x için $f'(x) > 0$ sağlıyorsa, f 'nin $[a, b]$ 'de kesin artan bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $f'(x) > 0$ olsun. Verilen a, b gerçel sayıları için

$$F(x) = \int_a^b f(x-t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

ile tanımlanan F fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu, ve bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $F'(x_0) = 0$ ise, her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Soru 4

(A) $0 < a < b$ sağlayan iki gerçel sayı ve

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

koşulunu sağlayan sürekli bir $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu düşünelim. $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt$$

ile tanımlanmışsa, $(x_0, g(x_0))$ noktasında g 'nin teğetinin x eksenine paralel olduğunu ve $g(x_0) = 2 + f(x_0)$ eşitliğini sağlayan en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktasının varlığını gösteriniz.

(B) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ olan, sürekli ikinci türeve sahip, ve $f(0) = 1995, f'(0) = 1$ ve

$$1 + \int_0^x f''(t) \cos t dt = \cos^2 x + \int_0^x f'(t) \sin t dt$$

eşikliklerini sağlayan f fonksiyonunu bulunuz.

VEKTÖRLERE AİT İKİ TEOREMİN GEOMETRİK UYGULAMASI

Selma Atabey *

Bazı geometrik problemlerde verilen bir doğru parçasının verilen bir noktasının, bu doğru parçasını ayırdığı parçaların uzunluklarının oranını bulmamız, ya da noktanın doğru parçasını belli bir oranda böldüğünü göstermemiz gerekiyor. Aşağıdaki iki teoremi uygulayarak, bu soruların çözümü için genel bir metot vereceğiz.

Teorem 1. Bir ABC üçgeninde bir N noktası bu üçgenin $[BC]$ kenarını $m : n$ oranında bölüyorsa,

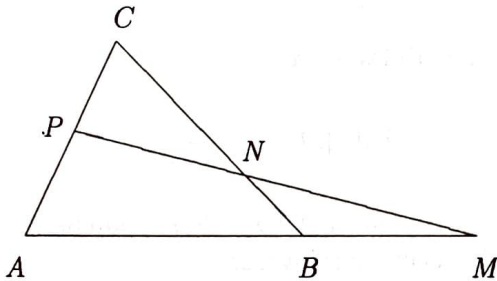
$$\overrightarrow{AN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m + n}$$

sağlanır.

İspat. N noktası $[BC]$ kenarı üzerinde ve $|BN| : |NC| = m : n$ 'dir. Bu son eşitlik, $n\overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{NC}$ olduğunu gösterir. Fakat $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$ ve $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC}$ 'dir. O zaman $n(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) = m(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC})$, $n\overrightarrow{AN} + m\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{AN} = \frac{m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}}{m + n}$$

bulunur. $\square$



Teorem 2. Bir ABC üçgeni verilsin ve AB , BC ve CB doğruları üzerinde $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{NC}$ ve $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{PA}$ olacak biçimde

sırayla M, N, P noktaları alınsın. P, M, N noktalarının aynı doğru üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\alpha\beta\gamma = -1$ olmasıdır.

İspat. $\alpha\beta\gamma = -1$ olsun. P, M, N noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu göstereceğiz. PNC üçgeninden $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$ 'dir. Ayrıca $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC}$ ve $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{NC}$ 'dir. O zaman $\beta\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC}$, yani $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{\beta+1}\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{BN} = \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BC}$ 'dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{CP} = \frac{\gamma}{\gamma+1}\overrightarrow{CA}$ 'dir. Dolayısıyla

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{\beta+1}\overrightarrow{BC} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\overrightarrow{CA} \quad (1)$$

olur. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ ve $\alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ eşitliklerinden $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AM} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$ olduğu da açıktır. Öte yandan $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ 'dir. O zaman

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{\alpha+1}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

bulunur. Fakat $\alpha = -\frac{1}{\beta\gamma}$ olduğu kullanılırsa

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}$$

sağlanır. (1)'den dolayı

$$\frac{\beta(\gamma+1)}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{NP} = \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}$$

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma\beta(\gamma+1)}{(\gamma+1)(1-\beta\gamma)} \overrightarrow{CA} \\
 & = \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)} \overrightarrow{BC} + \frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma} \overrightarrow{CA} \\
 & = \overrightarrow{MN}
 \end{aligned}$$

olur. Bu da $\overrightarrow{NP}$ ve $\overrightarrow{MN}$ vektörlerinin, yani P, M, N noktalarının, aynı doğru üzerinde olduğunu gösterir.

Şimdi de M, N, P noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kabul edelim. $\alpha\beta\gamma = -1$ olduğunu göstereceğiz. $\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{\alpha\beta} \overrightarrow{P'A}$ olacak biçimde AC doğrusu üzerinde bir P' noktası vardır. O zaman $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{\alpha\beta} \overrightarrow{P'A}$ ve $\alpha\beta(-\frac{1}{\alpha\beta}) = -1$ 'dir. İlk kısmın ispatından dolayı N, M, P' noktaları aynı doğru üzerindedir. O zaman P ve P' noktaları MN ve AC doğrularının kesişim noktaları olacaktır, yani $P' = P$ 'dir. Dolayısıyla $\alpha\beta\gamma = -1$ olur. $\square$

Soru 1. $ABCD$ bir paralelkenar olsun. M ve N , sırayla $[CD]$ ve $[DA]$ kenarlarının orta noktaları ve $[AM] \cap [BN] = \{O\}$ olsun. $|ON| : |OB|$ oranını bulunuz.

Çözüm. $|NO| = n$ ve $|OB| = m$ diyelim. O noktası ABN üçgeninin $[BN]$ kenarını $n : m$ oranında bölmektedir. O zaman Teorem 1'den dolayı,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AO} &= \frac{m\overrightarrow{AN} + n\overrightarrow{AB}}{m+n} = \frac{\frac{m}{2}\overrightarrow{AD} + n\overrightarrow{AB}}{m+n} \\
 &= \frac{m}{2(m+n)} \overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

olur. Öte yandan, $\overrightarrow{AO}$ ve $\overrightarrow{AM}$ vektörleri aynı doğru üzerindedir, yani

$$\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) = k\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$$

olacak biçimde k sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$\frac{m}{2(m+n)} \overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$$

sağlanır. Fakat $\overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{AB}$ vektörleri paralel değildir. O zaman $\frac{m}{2(m+n)} = k$ ve $\frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}$ olmalıdır. Son iki eşitlikten $\frac{m}{4(m+n)} = \frac{n}{m+n}$ ve $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$ bulunur. Dolayısıyla $|ON| : |OB| = 1 : 4$ olur. $\square$

Soru 2. $\overrightarrow{CN} = \alpha \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM} = \beta \overrightarrow{CB}$ ve $[AM] \cap [BN] = \{O\}$ olacak biçimde ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarları üzerinde sırayla N ve M noktaları alınsın. $|AO| : |AM|$ ve $|BO| : |BN|$ oranlarını bulunuz.

Çözüm. $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA}$ eşitliğinden $\alpha \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA}$ ya da $\overrightarrow{NA} = (1-\alpha)\overrightarrow{CA}$ çıkar. Benzer şekilde $\overrightarrow{MB} = (1-\beta)\overrightarrow{CB}$ 'dir. AMC üçgeni ile NB doğrusuna Menelaus teoremini uygularsak,

$$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{1-\beta} \overrightarrow{MB} = \frac{1}{\beta-1} \overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\alpha-1}{-\alpha} \overrightarrow{CA} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \overrightarrow{CA},$$

ve $\overrightarrow{MO} = x\overrightarrow{OA}$ buluruz. O zaman

$$\frac{1}{\beta-1} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) x = -1, \quad \text{ve} \quad x = \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-1}$$

olur. Bu ise

$$\frac{|MO|}{|OA|} = \left| \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-1} \right|$$

demektir. $0 < \alpha < 1$ ve $0 < \beta < 1$ olduğu kolayca görülebilir. O zaman

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-1} \overrightarrow{OA}$$

dir. Fakat $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MA}$ eşitliğinde $\overrightarrow{MO}$ yerine az önce elde ettiğimizi kullansak,

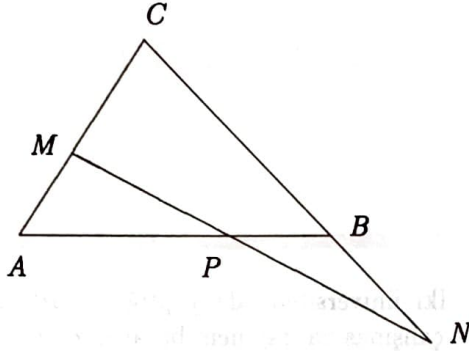
$$\frac{\alpha\beta-1}{\alpha-1} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MA}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$|OA| : |MA| = \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}$$

dir. Benzer şekilde de $|BO| : |BN|$ oranı bulunur; bunu okuyucuya bırakıyoruz. $\square$

Soru 3. n bir pozitif tamsayı olsun. Bir ABC üçgeninde $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{n} \overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CB}$ olacak biçimde M ve N noktaları verilsin. $P = [AB] \cap [MN]$ olsun. P noktasının $[AB]$ ve $[MN]$ doğru parçalarını böldüğü oranlarını bulunuz.

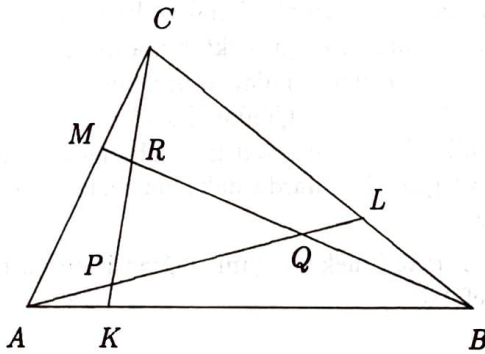


Çözüm. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$ verilen bilgilerden dolayı $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{MC} = \frac{n-1}{n}\overrightarrow{AC}$ ve dolayısıyla $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{n-1}\overrightarrow{MC}$ gerçeklenir. $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{PA}$ olsun. ABC üçgeni ile MN doğrusuna Menelaus teoremini uygulayalım. P, M, N noktaları aynı doğru üzerindedir ve $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m-1}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{PA}$ olur. Böylece

$$-2\left(\frac{1}{n-1}\right)x = -1$$

ya da $x = \frac{n-1}{2}$ 'dir; yani $|\overrightarrow{BP}| : |\overrightarrow{PA}| = \frac{n-1}{2}$ çıkar. Benzer şekilde $|\overrightarrow{MP}| : |\overrightarrow{PN}|$ oranı bulunur; bunu da okuyucuya bırakıyoruz. $\square$

Soru 4. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ olacak biçimde ABC üçgeninin kenarları üzerinde K, L, M noktaları verilsin. $[AL]$, $[BM]$ ve $[CK]$ doğru parçalarının kesiştiği noktalar PQR üçgenini oluştursun. P, Q, R noktalarının sırayla $[AQ]$, $[BR]$ ve $[CP]$ doğru parçalarının orta noktaları olduğunu ispatlayınız.



Çözüm. ALC üçgeni ile MB doğrusuna Menelaus teoremini uygulayalım. $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{LQ} = \beta\overrightarrow{QA}$ ve $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$ olduğu kolayca

görülebiliyor. O zaman $-2(\beta)3 = -1$, yani $\beta = \frac{1}{6}$ 'dır. Dolayısıyla $\overrightarrow{LQ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{QA}$ 'dır. Benzer şekilde, $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{6}\overrightarrow{RB}$ ve $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{PC}$ olduğu gösterilir. $|\overrightarrow{AP}| = n$ ve $|\overrightarrow{PQ}| = m$ diyelim. O zaman $|\overrightarrow{LQ}| = \frac{m+n}{6}$ 'dır. Teorem 1'den dolayı

$$\overrightarrow{CP} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CK} = \frac{6}{7}\left(\frac{2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{3}\right) = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \frac{\left(\frac{m+n}{6} + m\right)\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CL}}{7\left(\frac{n+n}{6}\right)} \\ &= \frac{\frac{7m+n}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2n}{3}\overrightarrow{CB}}{7\left(\frac{m+n}{6}\right)} \\ &= \frac{7m+n}{7(m+n)}\overrightarrow{CA} + \frac{4n}{7(m+n)}\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

dir. $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{CB}$ vektörleri paralel olmadığından, bunların $\overrightarrow{CP}$ için elde ettiğimiz iki ifadedeki katsayılarını eşitleriz ve

$$\frac{4}{7} = \frac{7m+n}{7(m+n)} \quad \text{ve} \quad \frac{2}{7} = \frac{4n}{7(m+n)}$$

elde ederiz. Buradan $m = n$ çıkar. Bu da P noktasının $[AQ]$ doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir. Benzer şekilde, Q ile R 'nin sırayla $[BR]$ ve $[CP]$ doğru parçalarının orta noktaları olduğu gösterilir. $\square$

Aşağıdaki soruları okuyucuya bırakıyoruz.

Soru 5. Bir $ABCD$ paralelkenarının $[AD]$ kenarı üzerinde $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ olacak biçimde M noktası ve $[AC]$ köşegeni üzerinde de $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ olacak biçimde K noktası alınsın. $\overrightarrow{MK}$ ve $\overrightarrow{KB}$ vektörlerinin aynı doğru üzerinde olduğunu ispatlayınız ve $|\overrightarrow{MK}| : |\overrightarrow{KB}|$ oranını bulunuz.

Soru 6. Bir $AMNO$ paralelkenarının $[ON]$ kenarı üzerinde $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$ olacak biçimde B noktası ve $[OM]$ köşegeni üzerinde $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM}$ olacak biçimde C noktası alınsın. A, B, C noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu ispatlayınız.

NEDEN BİRÇOK ÖĞRENCİ CALCULUS DERSİNDE ZORLANIYOR?

Deborah Hughes Hallett *

Editörün Notu. Bu yazıda sözü geçen *calculus* dersi, teknik dallardaki hemen hemen tüm üniversite öğrencilerinin birinci sınıfta almak zorunda oldukları ve lise üçüncü sınıfta da konularından bir kısmı işlenmeye çalışılan matematik dersidir. Türkçe’de analiz veya türevsel ve integral hesap adıyla da geçmektedir. Yalnız bu iki terim *calculus*’un tam karşılığı değildir; analiz bütün ispatlarıyla *calculus*’un teorisidir; öte yandan *calculus* dersinde genellikle türev ve integralden daha fazla konu vardır, analitik geometri, vektörler, seriler gibi. Bu nedenle Türkçe olmamasına rağmen, yazının aslındaki *calculus* sözünü değiştirmedik.

Tüm dünyada üniversite öğrencileri *calculus* dersi için çaba sarfetmektedirler. Bu çabaya rağmen pek çoğu başarısız olmaktadır. Başarısız olduklarında, harcanan zaman boşa gitmiş ve birçok düş de yıkılmış olur. Öğretim elemanları da, başarısız öğrencilere pek çok şeyi tekrar öğretmek zorunda kalırlar. Öğrencilerin mühendis veya temel bilimci olma hedefleri de kaybolur. Buradaki amacım, Türkiye’de ve başka yerlerdeki bu durum hakkında ve bunun nasıl önlenebileceği konusunda bir şeyler söylemektir.

ABD’nin çeşitli üniversitelerinde ve Harvard’da birçok defa *calculus* öğretmiş olmam ve Orta Doğu Teknik Üniversitesi’ne 1981-1982 yıllarında misafir öğretim görevlisi olarak gelmem bana kıyaslamam için iyi bir imkân sağladı. ODTÜ’de olmaktan o kadar memnun kaldım ki 1984’te bir dönemliğine tekrar geri geldim. Yüzlerce öğrenciye *calculus* öğrettim ve öğrencilerin *calculus* öğrenmekte neden güçlük çektikleriyle ilgilenmeye başladım.

Beni ilk şaşırtan, öğrencilerin üniversiteye giriş sınavları sonuçlarıyla, *calculus* dersinde başarılı olmaları arasında çok az bir ilişkinin olmasıydı. Ancak, öğrencilerin yaptığı hatalar beni daha az şaşırttı. Birçok hata Harvard’daki öğrencilerin yaptığı hatalara çok fazla benzi-

yordu. İki üniversitede de yaptığım gözlemler sonucu, çalışmasına rağmen başarılı olamayan öğrencilerin başarısızlıklarının nedeninin *calculus*’taki fikirleri zor bulmalarından değil de, *calculus* öncesi bilgilerinin yetersiz olmasından kaynaklandığını gördüm.

Örneğin, ODTÜ’de denklem çözemeyen, iki dereceli polinomun köklerini bulamayan, kesirli sayıları toplayamayan (esasinda birçoğu kesirli bir ifade gördüklerinde otomatik olarak bölümleri çarpıyorlardı), polinomları çarpanlara ayıramayan veya üstel fonksiyonlarla rahatlıkla uğraşamayan birçok öğrenciyle karşılaştım. Birçokları da fonksiyonlarla ilgili notasyonu, logaritmayı, trigonometriyi bilmiyorlardı. Fakat şunu da söylemem gerekir: Harvard’da ve ABD’nin diğer üniversitelerinde aynı altyapıya sahip olan öğrenciler var. Ancak aradaki fark şudur: Bu gibi öğrenciler *calculus* sınıflarında değil, çoğunlukla *calculus* öncesi sınıflarda bulunurlardı. Buna rağmen ODTÜ’dekibu gibi öğrencilere *calculus* öğretmeye çalıştım, üstelik de daha zor bir *calculus* dersini ... (ODTÜ’nin *calculus* dersleri Harvard’dakine göre daha fazla konu içeriyordu.)

Calculus dersini, *calculus* öncesi konuları anlamayan öğrencilere öğretmek durumunda kalanlar, bunun heves kıran bir çaba olduğunu bilirler. Öğretici için bu gibi öğrencilere konulardan anlam çıkarmak olanaksızdır ve iki taraf da anlamamanın getireceği zevkten mahrum kalırlar. Sonuçta öğrenciler konuları ezberlemekten başka çare bulamazlar. Çünkü konulardan anlam çıkarabilecek araçları yoktur. Ezberleme, unutmayı ve gelecek yıllarda daha da fazla sıkıntıyı getirir.

Birkaç örnek vereyim: Öğrencilerimin birçok defalar,

$$\frac{d}{dx}(x \ln x - x) = \ln x - 1$$

* Harvard Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

yazdıklarında ilk önce türev almayı anlamadıklarını düşündüm. Daha dikkatli baktığımda ise problemin bu olmadığını anladım. Sonuca

$$\frac{d}{dx}(x \ln x - x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

yazarak, ortadaki x 'lerin götürmesi ve "hiçbir şeyin kalmaması" biçiminde ulaşmalarıydı sorun. Diğer bir deyişle, *calculus* hatası gibi görünen, esasında *calculus* öncesinden gelen bir hataydı. Bir başka öğrencim,

$$\frac{0.4 \times 10^{-16}}{4} = 0.1 \times 10^{-4}$$

yazarak, çarpmanın çarpma üstünde dağılımı konusunda katı bir inanç sergilemişti.

Güçlük çektikleri alanları daraltmak istersek, Türk öğrencilerin en büyük iki problemi grafik çizimi ve cebirsel sadeleştirme diyebiliriz. Ne ABD'deki ne de Türkiye'deki öğrenciler grafik çizmeyi seviyor, fakat karşılaştırılırsa, Türkiye'deki öğrenciler Atlantik'in öbür tarafındakilere nazaran daha kötüydüler. ODTÜ'deki birçok öğrencim, çok basit grafikleri doğru olarak çizemiyordu. Bir fonksiyonun x ve y eksenini kestiği noktaları öğrettikten sonra özenerek çizdikleri grafikte buldukları noktalardan geçmediğini görmek beni hayal kırıklığına uğratmıştı. Açıkçası, ne yaptıklarını anlamamışlardı.

Buradaki problem, grafik çizmenin bir insanın düşünmesinde önemli bir yardımcı, yani ilham almak için veya sonucu kontrol etmek için istenilerek kullanılan bir araç olmasıdır. Ancak birçok Türk öğrenci için grafik çizimi bir "yardımcı"dan çok baş ağrısıdır. Bunun sonucu olarak, birçok öğrenci *calculus*'un, belki de matematiğin, en önemli araçlarından biri olan "yaptığını" şekilsel olarak canlandırmayı" kullanamıyordu.

İkinci olarak, okyanusun iki tarafındaki öğrenciler de sadeleştirme konusunda büyük güçlük çekmektedirler. Çoğu zaman terimleri sadeleştiremiyorlar, yapabilecekleri zaman da sadeleştirme yapmıyorlar. Sadeleştirmeyi problemi kolaylaştırmak olarak göreceklere, öğreticileri tarafından hazırlanan tuzaklar olarak düşünüyorlar. Fakat basitleştirmemek *calculus*'ta problemleri daha fazla iş gerektiren problemler haline getirir. Örnek olarak bir öğrencimin

türevini almak istediği ifadeye bakalım:

$$\frac{\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}}{\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2}}$$

Sadeleştirmeden emin olmadığından 2'lerin ifadede kalmasını seçer, ayrıca buna ilâve her küçük kesrin türevini bölüm türevi alma kuralına göre alır. Aslında söylemeye gerek yok ama problemin sonunda ifade o kadar içinden çıkılmaz hale gelir ki ümitsizce problemi bırakır.

Bundan nasıl bir sonuç çıkartabiliriz? Türkiye'de de ABD'de olduğu gibi öğrencilere çok fazla konu çok çabuk öğretiliyor. Sonuç olarak da, çok azını anlıyorlar ve hatırlıyorlar. Buna ek olarak, yeni bir ortamda öğrendiklerinin kullanılması istenildiğinde, bunu başaramıyorlar. Bir önceki bilgilerin parça parça olması, yarım yamalak anlaşılması yeni çalışmalara bir temel olamaz. Sonuçta da, öğrenciler *calculus*'tan kalır. Başarılı olmadıkça çoğunlukla matematiğe sevgi azalır.

Öğrencilerin lisede daha az konuyu çalışmalarının, fakat daha iyi ve tamamen öğrenmelerinin iyi olacağına inanıyorum. Bu durumda öğrenciler hem *calculus* hem de *calculus* öncesi derslerini alıyorlar, fakat her ikisini de tam olarak öğrenemiyorlar. *Calculus*'u hiç görmemiş ama, bunun yerine *calculus* öncesi derslerinde tam olarak ustalaşmış olmaları çok daha iyi olacaktır.

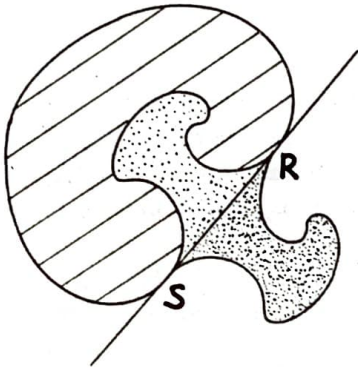
Harvard'da yaptığım araştırmaya göre, lisede *calculus* dersini az ya da çok görmüş olanlar, hiç görmemiş olanlara nazaran genellikle daha başarısızdı. Bunun nedeni, *calculus* dersini lisede alanların tam anlamıyla öğrenememeleri ve almayanlara göre *calculus* öncesi konuları da tam olarak bilememeleridir. Öte yandan, *calculus* dersini lisede almayanlar, *calculus* öncesi konuları tam olarak anlamadan üniversitede *calculus* dersini almamaktalar. Sağlam bir alt yapı *calculus*'taki başarı için en önemli etken olduğundan ikinci gruptakiler bu dersi daha iyi yapmaktadırlar.

Bana göre, bunun ifade ettiği şey çok açıktır. *Calculus*'u, daha önceki bilgiler tam anlamıyla öğrenilmeden başarıyla öğretemeyiz; daha ileri konuları açmak önceki konuları pekiştiremez. Eğer lise müfredatı daha az konuyu içermesi ve daha iyi öğretilmesi için değiştirilirse, bunun öğrencilerimizin matematiksel sağlığı açısından çok yararı olur.

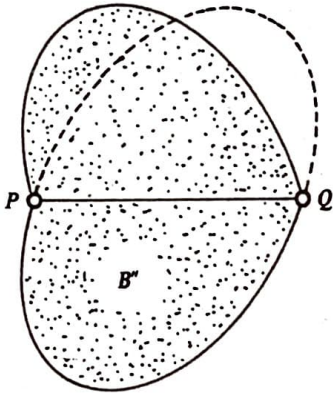
EŞÇEVRE PROBLEMİ

Oğuz Silâhtar * †

Eşçevre problemi belirli bir çevreye sahip şekiller arasında alanı en fazla olanını bulmaktır. [1]'de bu konunun değişik koşullardaki sorunları üzerine birçok ispat bulabilirsiniz. 1836 yılında Jakob Steiner'in geliştirdiği düşünce çok güzel bir ispat sayılabilir

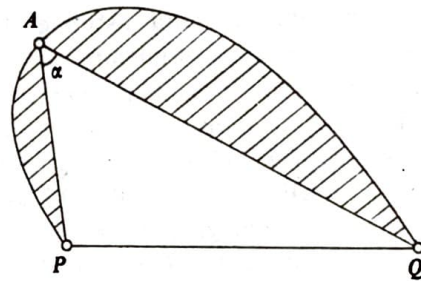


B şeklinin en çok alana sahip olduğunu varsayalım. Şeklin çevresine C diyelim. B içbükey olamaz. Eğer içbükey olsaydı, C üstünde öyle R ve S noktaları bulabilirdik ki $[RS]$ doğru parçası şeklin dışında kalırdı. Sonra $[RS]$ ve şekil arasını $[RS]$ etrafında dışa yansıtır ve böylece aynı çevreye ve daha fazla alana sahip bir şekil elde ederdik.

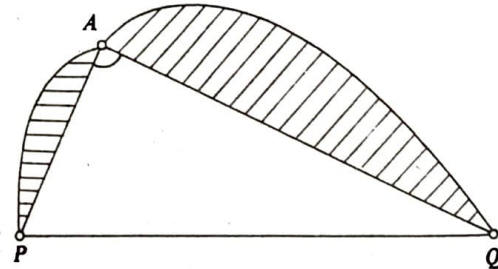


Şimdi C üzerinde öyle P ve Q nokta-

ları seçelim ki P ve Q , C 'yi iki eşit parçaya bölsün. $[PQ]$ doğru parçası B 'nin alanını iki eşit parçaya böler. Eğer bölmeseydi, büyük olan tarafı (B'') $[PQ]$ 'ya göre yansıtır ve böylece B ile aynı çevreye ve B 'den daha büyük alana sahip bir şekil elde ederdik.



B 'nin bir daire olduğunu ispatlamak için $[PQ]$ arasındaki eğrilerin yarım çember olduğunu göstermemiz yeter. C 'nin üst ve alt yarısına sırayla C' ve C'' diyelim ve C' 'nin yarım çember olmadığını varsayalım. C' üstünde bir A noktası alalım. α açısı 90° değildir. Şeklin A 'da menteşeli olduğunu varsayalım; yani taralı alanları aynı tutarak onları bir makas gibi açıp kapayalım.



$\alpha = 90^\circ$ olacak biçimde ayarlarsak, yeni oluşacak D şeklinde taralı alanlar B' 'dekinin aynıdır, ama PAQ üçgeni diktir ve alanı en büyük değerini alır; yani $\text{alan}(D) > \text{alan}(B')$ 'dir. $\text{alan}(B') = \text{alan}(B'')$ olduğuna göre D 'nin

* Özel İstanbul Amerikan Robert Lisesi üçüncü sınıf öğrencisi

† Matematik hocam Selim Tezel'e teşekkür ederim.

[PQ]'ye göre simetrisi alınınca oluşan şeklin alanı B' 'ninkinden büyüktür. Yani B' bir yarım daire olmalıdır. (Çevrelenen her açısı 90° olan bir şeklin yarım daire olduğu kolayca ispatlanır.) B'' de benzer bir yolla yarım dairedir. Buradan B daire olur.

KAYNAKÇA

- [1] N. D. Kazarinoff, *Geometrik Eşitsizlikler*, Türk Matematik Derneği, İstanbul.

ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI

Gökhan Şahin *

Akdeniz Üniversitesi öğrencilerinin 1994 yılında oluşturdukları Matematik Kulübü, bu yıl Antalya ili ve ilçelerindeki lise ve dengi okulların 9. ve 10. sınıflarındaki öğrencilerinin katıldığı, ödüllü bir Matematik Olimpiyadı düzenlemiştir. İki aşamada gerçekleştirilecek olan olimpiyadın birinci aşama sınavı, 3 Mart 1996 Cumartesi günü Akdeniz Üniversitesi merkezi dersliklerinde yapılmıştır. Sınava 153 öğrenci katılmıştır. Üniversitemizin Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Halil İ. Karakaş ve Doç. Dr. İlham Aliev tarafından hazırlanıp uygulanan çoktan seçmeli 20 sorudan oluşan sınavın değerlendirilmesi sonucu 50 öğrencinin ikinci aşamaya çağırılması uygun görülmüştür.

Antalya'da ilk kez düzenlenen bu olimpiyat kamuoyundan büyük ilgi görmüş, çeşitli kurum ve kuruluşlar başarılı öğrencilerin ödüllendirilmesine katkıda bulunmak istediklerini bildirmişlerdir.

Gelenekselleştirilerek ve geliştirilerek sürdürülmesi düşünülen Antalya Matematik Olimpiyadı'nın ikinci aşaması 13 Nisan 1996 Cumartesi günü gerçekleştirilecek ve Mayıs 1996 başlarında bir ödül töreni düzenlenerek başarılı öğrencilere ödülleri verilecektir.

1996 Antalya Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavının birkaç sorusunu *Matematik*

Dünyası okurları ile paylaşarak yazımızı bitiriyoruz.

Soru 8. $x < y < z$ asal sayıları

$$x + y + z = 68$$

$$xy + yz + zx = 121$$

denkleminin bir çözümü ise, yz çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1003 B) 989 C) 957 D) 919 E) 893

Soru 10. Ayşe, Bilge, Canan ve Deniz adlı dört kız bir konser verdiler. Konserde her şarkıyı 3 kız birlikte okudular. En çok şarkıyı Ayşe okudu: 8 şarkı. En az şarkıyı Bilge okudu: 5 şarkı. Konserde toplam kaç şarkı okunmuştur?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Soru 19. Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $\widehat{CAB}$ açısı 20° 'dir. $[AB]$ kenarı üzerinde $\widehat{BCD}$ açısı 50° olacak biçimde bir D noktası ve $[AC]$ kenarı üzerinde $\widehat{CBE}$ açısı 60° olacak biçimde bir E noktası alınıyor. $\widehat{DEB}$ açısı kaç derecedir?

- A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

* Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü

ODTÜ MATEMATİK TOPLULUĞU

ODTÜ Matematik Topluluğu

ODTÜ Matematik Topluluğu 1988 yılında bir grup Matematik Bölümü öğrencisi tarafından kurulmuştur. Topluluk öğrencilerden oluşan sekiz kişilik bir yönetim kuruluyla, ODTÜ Kültür İşleri Müdürlüğü'ne bağlı olarak yedi yıldır çalışmalarını başarıyla sürdürmektedir.

Ülkemizde temel bilimlerin yeteri kadar desteklenmediği bir ortamda, matematiği sevdirmek ve gelişmesi için matematiği seven insanların bir araya getirerek ortak çalışmalar yapabilmelerini sağlamayı amaçlayan topluluğumuz, bilimsel düşünceyi geliştirici yönde çalışmalar yapmaktadır. Bu amaçla sene içinde düzenli aralıklarla matematiğin çeşitli konularında bilgilendirici seminerler hazırlanmaktadır. Konuşmacılar ODTÜ Matematik Bölümü ya da yurt içi ve dışı üniversitelerden gelen, konusunda uzman matematikçiler olmaktadır.

Çağımızın vazgeçilmez iletişim aracı olan bilgisayar en iyi şekilde kullanmaya çalışan topluluğumuz, faaliyetlerimizden oluşan bir sayfayla *internet* iletişim ağında yerini almıştır. Bu sayfa ile dünyanın dört bir yanında ODTÜ Matematik Topluluğu tanınmaktadır. Bu sayfaya [http://www/metu.edu.tr.80/~wwwmathc/jwz/](http://www.metu.edu.tr.80/~wwwmathc/jwz/) adresiyle ulaşabilirsiniz.

Bir diğer önemli faaliyetimiz ise geleneksel ODTÜ Bahar Şenliği içinde düzenlediğimiz Matematik Haftası'dır. Bu hafta içinde çeşitli eğitici seminer ve paneller düzenlenmektedir. Diğer üniversitelerden gelen öğretim üyesi ve öğrenci misafirlerimizle tanışma ve kaynaşmayı sağlayıcı konser, saydam gösterili söyleşiler gibi sosyal faaliyetler de bu hafta içinde yer almaktadır.

Bunların yanı sıra iki senedir Ankara'da

düzenlediğimiz Zekâ Oyunları yarışmasını bu sene Türkiye çapında düzenliyoruz. Ayrıca bu sene liselerden gelen talep üzerine yedi yıldır Ankara çapında tüm liselere açık olan yarışmayı da Türkiye çapında yapıyoruz.

21 Nisan'da dokuz ilde (İstanbul, Ankara, İzmir, Adana, Bursa, Trabzon, Erzurum, Antalya, Samsun) gerçekleştirilecek olan yarışma hakkındaki bilgiler, il Milli Eğitim Müdürlükleri aracılığıyla ülke çapındaki tüm liselere duyurulmuştur. Yukarıda adı geçen dokuz ilin dışından başvuran liseler kendilerine en yakın ilde yarışmaya girebilmektedir. Her liseden üçer kişilik bir takım yarışmaya katılacaktır. Sınav, illerdeki üniversitelerde yapılacaktır. Meselâ İstanbul'da Boğaziçi Üniversitesi, İzmir'de Ege Üniversitesi, vs.

Yarı finale katılmaya hak kazanan takımlar Ankara'ya gelecek ve masrafları bizim tarafımızdan karşılanacaktır. Kâmil Koç firması yarı finale katılacak öğrencilerin geliş-gidiş biletlerini ücretsiz olarak vermeyi kabul etmiştir.

Yarı final programı ise şöyledir: 1. gün takımlar karşılanacak ve ODTÜ yurtlarının misafirhanelerine yerleştirilecek. Aynı gün öğleden sonra yarı final yapılacak. Akşam kokteyl verilecek. 2. gün sonuçlar açıklanacak ve finale kalan takımlara ODTÜ ve Ankara gezdirilecek. 3. gün final yapılacak ve ödül töreni gerçekleştirilecek. Final ve ödül töreni TRT'de yayınlanacaktır.

Topluluğumuzun posta adresi Matematik Topluluğu, Matematik Bölümü, ODTÜ, 06531 Ankara, telefon numarası (312) 210 36 23, faks numarası (312) 210 12 82 ve elektronik posta adresi ise wwwmaths@www.metu.edu.tr'dir.

37. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI TAKIM SEÇME SINAVI

Derleyen: Albert Erkip *

1996 matematik olimpiyadı takımımız 23-24 Mart 1996 günleri Ankara'da yapılan seçme sınavı sonucunda belirlendi. Mehmet Ekmekçi, Ali Ekber Gürel, Yılmaz Koçer, Suat Namlı ve M. Ali Yıldırım'dan oluşan takım, Mayıs ayında Romanya'da Balkan, Temmuz ayında ise Hindistan'da 37. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'na katılacak. Takımımıza iyi şanslar dileyerek, seçme sınavının sorularına yer verelim.

Birinci Gün, 23 Mart 1996

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

1. $\prod_{n=1}^{1996} (1 + nx^{3n})$ çarpımının, $a_1, a_2, \dots, a_m$ sıfırdan farklı ve $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ olacak şekilde açılımını $1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_mx^{k_m}$ ile gösterelim. a_{1996} katsayısını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ paralelkenarında $\hat{A}$ açısı dar açı olup, $[AC]$ köşegeni çap alınarak çizilen çember CB ve CD doğrularını E ve F noktalarında kesmektedir. Bu çemberin A noktasındaki teğeti BD doğrusunu P noktasında kesiyorsa, P, F, E noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

3. $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ olacak şekilde x_i gerçel sayıları veriliyor. Her $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ için $x_{i+1} - x_i \leq h$ ise,

$$\sum_{i=1}^n x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1})$$

toplamının

$$\left(\frac{1-h}{2}, \frac{1+h}{2} \right)$$

aralığında olduğunu kanıtlayınız.

Birinci Gün, 24 Mart 1996

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

4. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $\text{alan}(ABC) = \text{alan}(ADC)$ olup, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesim noktası E 'dir. E noktasından $[AD]$, $[DC]$, $[BC]$, $[AB]$ kenarlarına çizilen paralel doğrular $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ kenarlarını sıra ile K, L, M, N noktalarında kestiğine göre,

$$\frac{\text{alan}(KLMN)}{\text{alan}(ABCD)}$$

oranını hesaplayınız.

5. Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $S_{a,b} = \{n^2 + an + b : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde tanımlanan kümelerin en çok kaç tanesinin ikiye ikiye ayrık olduğunu belirleyiniz.

6. Hangi a, b pozitif gerçel sayıları için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_{n+1} - bx_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan her $\{x_n\}$ dizisinin limiti 0 olur?

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

PROBLEM SEMİNERLERİ

Hazırlayan: Hasan Fehmi Ateş, Selçuk Ateşkan, Halil Bayrak, Oytun Eskiyeentürk, Barış Fidan, Caner Kazancı, Çetin Ürtiş, Bayram Yenikaya *

Problem Semineri 96/6, 24 Nisan 1996

1. A , 13 farklı gerçel sayıdan oluşan bir küme ise,

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}$$

eşitsizliğini sağlayan $a, b \in A$ sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2. n ve k pozitif tamsayılar, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de gerçel sayılar ise,

$$0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq k$$

ve

$$|x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n| < \frac{1}{k^n}$$

koşullarını sağlayan $x_0, x_1, \dots, x_n$ tamsayılarının bulunduğunu gösteriniz.

3. $n \geq 2$ olmak üzere, düzlemde n farklı nokta verilmiş olsun. Bu noktaların ikiser ikiser birbirlerinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D , en küşüğüne ise d diyelim. Bu durumda

$$D > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1)d$$

olduğunu gösteriniz.

4. n pozitif bir tamsayı olsun. Düzlemde sonlu sayıda noktadan oluşan ve kendisine ait her P noktası için yine kendisine ait ve her birinin P 'ye olan uzaklığı 1 olan en az n nokta bulunacak şekilde bir kümenin var olduğunu gösteriniz.

Problem Semineri 96/7, 15 Mayıs 1996

Aşağıdaki problemlerdeki araç, deposuna en fazla 1 birim benzin alabilmekte, ancak istediği yere daha sonra kullanmak üzere istediği kadar benzin bırakabilmektedir. Aracın gittiği mesafe yaktığı benzinle doğru orantılıdır ve bir birim benzinle katettiği yol, mesafe birimi olarak kabul edilmektedir.

1. $n \geq 0$ bir tamsayı ve $0 \leq f \leq 1$ olmak üzere, başlangıç noktasında $n + f$ birim benzin

vardır. Aracın bu noktadan hareketle gidebileceği azami mesafenin

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{f}{2n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $m, k \geq 0$ tamsayılar, $0 \leq f, g < 1$ ve $m + g > k + f$ olsun. Başlangıç noktasında $m + g$ birim benzin vardır. Aracın görevi, bir F noktasına $k + f$ birim benzin bırakarak başlangıç noktasına geri dönmektir. Bu görevin yerine getirilebilmesi için F noktasının başlangıç noktasından en fazla ne kadar uzakta olabileceğini bulunuz.

3. $m > 0$ ve $k \geq 0$ tamsayılar, $0 \leq f, g < 1$ ve $m + g \leq k + f$ olsun. S noktasında $m + g$ birim, F noktasında ise $k + f$ birim benzin bulunmaktadır. Araç, S noktasından hareketle F noktasına gidip S 'ye geri dönecektir. Bunun başarılabilmesi için S ile F arasındaki uzaklığın en fazla ne kadar olabileceğini bulunuz.

4. Elimizde toplam $x \geq 2$ birim benzin bulunmaktadır. Bu kez S ile F noktalarını kendimiz seçip, elimizdeki benzini bu iki nokta arasında istediğimiz gibi bölüştürüyoruz. Araç, yine S noktasından hareketle F 'ye gidip, oradan S 'ye geri dönecektir. Bunun başarılabilmesi için S ile F arasındaki uzaklığın en fazla ne kadar olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Problem Semineri 95/10

1. xy koordinat düzlemindeki $y = \frac{a}{b}x$ doğrusunu ele alalım. Köşe koordinatları $(0, 0), (0, a), (b, 0), (b, a)$ olan dikdörtgenin içinde kalan tamsayı koordinatlı noktalardan köşegenin altında kalanların sayısı

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(b-1)a}{b} \right\rfloor,$$

* ODTÜ ve Bilkent Üniversitesi lisans öğrencileri

köşegenin üstünde kalanların sayısı da

$$\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor$$

olup bu iki sayı birbirine eşittir. $(a, b) = m \neq 1$ durumu ayrıca incelenebilir.

2. Bulunması istenen tamsayıya m diyelim. $(a, b) = 1$ olduğundan, $m = au + bv$ yapacak u, v tamsayıları vardır. Öte yandan, her tamsayı k için $m = a(u - kb) + b(v + ka)$ 'dir. $k_0 = \max\{k : u - kb \geq 0\}$ diye tanımlarsak, $0 \leq u - k_0b < b$ sağlanır. $u' = u - k_0b$ ve $v' = v + k_0a$ diyelim. O zaman $m = au' + bv'$ olur. Şimdi $m \notin \{ax + by : x, y \in \mathbb{N}_0\}$ olması ile $0 \leq u' < b$ ve $v' < 0$ olmasının eşdeğer olduğu açıktır. Böyle u' 'lerin en büyüğü $u' = b - 1$ ve v' 'lerin en büyüğü de $v' = -1$ 'dir. O zaman da $m = a(b - 1) + b(-1) = ab - a - b$ olur.

3. Elde edilen toplam puanların kümesini E ile, E 'nin eleman sayısını da $|E|$ ile gösterelim. Negatif olmayan tamsayılar kümesine $\mathbb{N}_0$ dersek, o zaman $E = \{ax + by : x, y \in \mathbb{N}_0\}$ olur. $|\mathbb{N}_0 \setminus E| < \infty$ olduğundan, $(a, b) = 1$ çıkar. Şimdi $|\mathbb{N}_0 \setminus E| = \frac{1}{2}(a - 1)(b - 1)$ olduğunu gösterelim.

Birinci dördüldeki tamsayı koordinatlı noktalara T diyelim. $m \in E$ ise, $ax + by = m$ doğrusu üstünde T 'ye ait bir nokta bulunacaktır. Eğer $(a_1, y_1), (x_2, y_2) \in T$, $ax_1 + by_1 = m$ ve $ax_2 + by_2 = m$ ise, o zaman $x_1 = x_2 + bt$ ($t \in \mathbb{Z}$) olur. $ax + by = m$ üstünde T 'ye ait ardışık iki nokta arasındaki yatay mesafe de b olur. Dolayısıyla $m \geq ab$ ise, $b \leq \frac{m}{a}$ olduğundan $m \in E$ bulunur. Eğer $0 \leq m < ab$ ise, $\frac{m}{a} < b$ olduğundan, $ax + by = m$ üstünde T 'ye ait en fazla bir nokta bulunabilir. Dolayısıyla $\{(x, y) \in T : 0 \leq ax + by < ab\}$ ile $E \cap [0, ab)$ kümeleri arasında birebir eşleme vardır. Şimdi $\{(x, y) : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a\}$ bölgesinde T 'ye ait $(a + 1)(b + 1)$ nokta vardır. O halde elde edilemeyen toplam puanların sayısı,

$$ab - \frac{(a + 1)(b + 1) - 2}{2} = \frac{1}{2}(a - 1)(b - 1)$$

dir.

Verilen bilgiye göre $70 = (a - 1)(b - 1)$ 'dir. $70 = 1 \cdot 70 = 2 \cdot 35 = 5 \cdot 14 = 7 \cdot 10$ şeklinde yazılabilir. $a > b$ ve $(a, b) = 1$ olduğundan, ya $a = 71$ ve $b = 2$, ya da $a = 11$ ve $b = 8$ olacaktır. Ancak $58 = 71 \cdot 0 + 29 \cdot 2$ ve $58 \notin E$ olduğundan $a = 71$ ve $b = 2$ olamaz. Öte yandan $11x + 8y = 58$ doğrusu üstünde T 'ye ait

eleman yoktur. Sonuç olarak, oyunda alınabilen puanlar $a = 11$ ve $b = 8$ 'dir.

4. $E = \{xbc + yca + zab : x, y, z \in \mathbb{N}_0\}$ olsun. Farzedelim ki $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$ olacak biçimde $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ bulunsun. O zaman $2abc = (x + 1)bc + (y + 1)ca + (z + 1)ab$ çıkar. Ancak $(a, b) = (a, c) = d$ olduğundan, $a \mid x + 1$ elde edilir. Benzer biçimde $b \mid y + 1$ ve $c \mid z + 1$ olur. O zaman da

$$2abc = (x + 1)bc + (y + 1)ca + (z + 1)ab \geq 3abc$$

olur. Dolayısıyla farzedişimiz yanlıştır.

Şimdi $n > 2abc - ab - bc - ca$ ise, $n \in E$ olduğunu gösterelim. a, b pozitif tamsayı ve $(a, b) = 1$ ise,

$$\max(\mathbb{Z} \setminus \{ax + by : x, y \in \mathbb{N}_0\}) = ab - a - b$$

dir. $b = 1$ veya $c = 1$ ise $n \in E$ olduğu kolaylıkla görülür. $b > 1$ ve $c > 1$ olsun. $b(c - 1) > c - 1$, yani $bc - b - c > -1$ 'dir. $a > 0$ olduğundan $abc - ab - ac > -a$ olur. Ama $(a, bc) = 1$ olduğundan, $x, w \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n = xbc + wa$ şeklinde yazılabilir ve $0 \leq x < a - 1$ ile $w > 0$ sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} wa &= n - xbc \geq n - (a - 1)bc \\ &= n - abc + bc > abc - ab - ca \\ w &> bc - b - c \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $y, z \in \mathbb{N}_0$ için $w = yc + zb$ şeklinde yazılabilir. Böylece $x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n = xbc + yca + zba$ olur.

Problem Semineri 95/11

1. A_1, A_2, A_3, A_4 ve B_1, B_2, B_3 noktalarımız olsun. Bütün $[A_i A_j]$ ve $[B_i B_j]$ 'leri ($i \neq j$) kırmızıya, $[A_i B_j]$ 'leri ise maviye boyayalım. Toplam 9 kırmızı doğru parçası vardır ve istenen şart sağlanır. Şimdi de 9'dan az doğru parçasını boyamakla istenen şartın sağlanamayacağını gösterelim.

Kırmızı doğru parçalarının sayısının 9'dan az olduğunu farzedelim. O zaman öyle bir nokta vardır ki bu noktadan en az dört mavi doğru parçası çıkar. Bu noktaya X diyelim. Bu doğru parçalarından dördünü ele aldığımızda bunların diğer uçlarındaki X_1, X_2, X_3, X_4 noktalarını ikiye ikiye birleştiren 6 doğru parçası kırmızı olmak zorundadır; yani $[XX_i]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) mavi ve $[X_i X_j]$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4$) kırmızıdır. Kalan noktalara A ve B diyelim.

$[AX]$ ya da $[AX_1]$ kırmızı, $[BX]$ ya da $[BX_1]$ kırmızı, $[AX_2]$, $[BX_2]$ ya da $[AB]$ kırmızı olmak zorundadır. O zaman da kırmızı doğru parçalarının sayısı sekizi geçer.

2. Herhangi üç noktayı aldığımızda bunları birleştiren doğru parçalarından en az biri mavi olacak. n tekse, noktaları $\frac{n-1}{2}$ ve $\frac{n+1}{2}$ elemanlı iki kümeye; n çiftse, noktaları $\frac{n}{2}$ ve $\frac{n}{2}$ elemanlı iki kümeye ayıralım. Her iki kümenin noktalarını kendi içinde mavi doğru parçalarıyla birleştirip kalan doğru parçalarını kırmızıya boyayalım. O zaman kırmızı doğru parçalarının sayısı $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 'tür. Bunun maksimum sayı olduğunu tümevarım ile gösterelim.

İfadenin $k = 3$ için doğru olduğu açıktır. İfadenin $3 < k \leq n$ için de doğru olduğunu varsayalım. $n + 1$ noktadan en az bir kırmızı doğru parçası çıktığını varsayabiliriz. (Yoksa kırmızı doğru parçalarının sayısı $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ 'ten küçük olurdu.) Bu doğru parçasının iki ucundaki noktalar dışındaki $n - 1$ noktanın birleştirilmesiyle elde edilen doğru parçalarının en fazla $\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$ tanesi kırmızıdır. Bu iki noktayı diğer $n - 1$ noktaya birleştirirken en fazla $n - 1$ kırmızı doğru parçası kullanabiliriz. (Her ikisini de aynı noktaya kırmızı doğru parçasıyla birleştiremeyiz). O zaman maksimum sayı

$$\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + n - 1 + 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor$$

olur.

3. Beşgenlerden birinin kenarlarının hepsinin aynı olmadığını varsayalım. B_2 noktasında iki farklı renkteki kenar buluşsun. B_2 'den çıkan doğru parçalarından üçü aynı renktir ve bu üçünün ikisi ardışık A_i 'lere gidecektir. $[B_1B_2]$ mavi, $[B_2B_3]$ kırmızı, $[B_1A_1]$ ve $[B_1A_2]$ mavi olsun. $[A_1A_2]$, $[A_1B_3]$ ve $[A_2B_3]$ kırmızı olmak zorundadır. Bu durumda da bütün kenarları kırmızıya boyanmış bir üçgen oluşmuş olur. Demek ki her iki beşgenin de kenarları kendi içinde aynı renkli olmak zorundadır.

Taban ve tavan beşgenlerinin farklı renklerde olduklarını varsayalım. B_1 'i ele alalım. B_1 'i A_i 'lere birleştiren doğru parçalarının en az üçü aynı renktedir. Bu üç doğru parçasından ikisi ardışık kenarlara gider. $[A_2A_3]$ kırmızı, $[B_1A_2]$ ve $[B_1A_3]$ mavi olsun. $[A_2B_2]$ ve $[A_3B_2]$ mavi olmak zorundadır. Aynı zamanda $[A_2B_3]$ de mavi renklidir. Bu durumda da bütün kenarları mavi olan $A_2A_3B_2$ üçgeni oluşur. O zaman taban ve

tavan beşgenlerinin tüm kenarları aynı renktedir.

4. p tane noktayı ikiye ikiye birleştiren tüm doğru parçalarının kümesine K_p diyelim. K_p 'ye p köşeli tam graf denir. K_9 'da toplam 36 doğru parçası vardır. Elimizdeki şekilde K_6 bulunuyorsa kenarları aynı renk olan üçgen de var demektir. n , şekildeki doğru parçalarının sayısı olsun. $n = 36$ ise K_6 vardır. $n = 35$ ise, eksik doğru parçasının iki ucundaki noktalar haricindeki 7 nokta K_6 'yı içerir. $n = 34$ ise $[A_1A_2]$ ve $[A_3A_4]$ veya $[A_1A_2]$ ve $[A_2A_3]$ hariç, diğer doğru parçaları vardır. A_1, A_2, A_3, A_4 hariç diğer beş nokta ve A_4, K_6 'yı oluşturur.

$n = 33$ ise, en fazla 6 nokta diğer noktalardan bazıları ile birleştirilmemiş olabilir. Bu 6 noktadan üçü birbirleriyle doğru parçaları ile bağlantılıdır. Bu üç nokta ve ilk baştaki 6 nokta haricindeki üç nokta K_6 'yı oluşturur. $n = 32$ ise, X_1, X_2, X_3, X_4 ve X_5 noktalarını, $[X_1X_2]$, $[X_2X_3]$, $[X_4X_5]$ ve $[X_5X_6]$ 'yı maviye, geri kalan 10 doğru parçasını da kırmızıya boyuyarak birleştirelim. $[A_1X_1]$ 'i boş bırakarak ve diğer noktalardan X_1 'e çizilen doğru parçalarının aynı renklisini A_1 'e çizerek, A_1 'i de şekle ekleyelim. A_1 ve X_1 çifti için yaptığımız işlemleri benzer şekilde önce (A_2, X_2) sonra (A_3, X_3) ve daha sonra da (A_4, X_4) çiftleri için de yaparak A_2, A_3 ve A_4 'ü de sırayla şekle eklemiş olalım. Toplam 32 doğru parçası kullanılmış olup, hiç aynı renkli üçgen oluşmamış olur. Aynı renkli üçgeni zorunlu kılan en küçük sayı 33'tür.

Problem Semineri 95/12

Bu seminerdeki problemlerin çözümleri için [1]'e bakınız.

Problem Semineri 95/13

1. (a) özelliğinden fonksiyonun birebir olduğu anlaşıyor. (b)'de $y = 1$ alınırsa,

$$f(f(x)) = x^2 f(x) \quad (1)$$

eşitliği elde edilir. (b)'de y yerine $f(y)$ alınca da

$$f(f(y)f(x)) = x^2 f(xf(y)) = x^2 y^2 f(xy) \quad (2)$$

eşitliği elde edilir. (1)'de x yerine xy alınca

$$f(f(xy)) = x^2 y^2 f(xy) \quad (3)$$

eşitliği bulunur. (2), (3) ve fonksiyonun birebir olma özelliğinden $f(x)f(y) = f(xy)$ bağıntısı bulunur. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun bütün şartları sağladığı görülüyor.

ve OBD üçgeninde Stewart bağıntısından,

$$\frac{|OB|^2|QD| + |OD|^2|QB|}{|QD| + |QB|} - |QB||QD| = |QO|^2$$

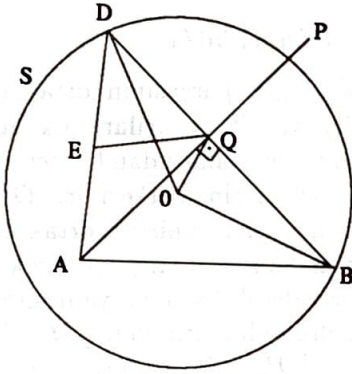
bulunur. $|OB| = |OD| = R$ alınırsa,

$$R^2 = |AQ|^2 + |QO|^2 = 2|EQ|^2 + 2|EO|^2$$

ve

$$|QE|^2 = \frac{R^2 - 2|EO|^2}{2}$$

elde edilir ki bu sabittir. $|OP| = 2|EQ|$ olduğundan P 'nin geometrik yeri S ile aynı merkezli bir çemberdir.



3. Rasgele üç noktanın ağırlık merkezi G_1 ve ortosantrı H_1 , kalan üç noktanın ağırlık merkezi G_2 ve ortosantrı H_2 olsun. O verilen çemberin merkezidir. Euler teoremine göre O, G_1, H_1 doğrusaldır ve O, G_2, H_2 de doğrusaldır. Ayrıca $[G_1G_2], [H_1H_2]$ 'ye paraleldir. OG_1M ile OH_1D benzer üçgenlerdir; TMG_2 ile TDH_1 de benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla

$$\frac{|MG_1|}{|DH_1|} = \frac{|MG_2|}{|DH_2|} = \frac{x}{3x},$$

$$\frac{|MG_2|}{|DH_1|} = \frac{|MG_1|}{|DH_2|} = \frac{|MT|}{|TD|},$$

ve böylece

$$\frac{|MG_1|}{|MG_2|} = \frac{|DH_1|}{|DH_2|} \quad \text{ve} \quad \frac{|MG_2|}{|MG_1|} = \frac{|DH_1|}{|DH_2|}$$

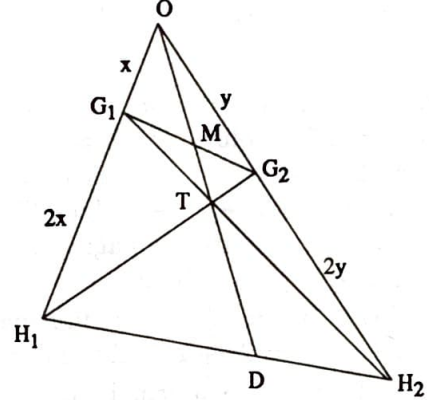
sağlanır. Bunlardan $|MG_1| = |MG_2|$, $|DH_1| = |DH_2|$,

$$\frac{|MT|}{|TD|} = \frac{|MG_1|}{|DH_1|} = \frac{1}{3},$$

$$|TD| = 3|MT|,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|OM|}{|MD|} = \frac{|OM|}{|MT| + |TD|} = \frac{|OM|}{|MT| + 3|MT|}$$

ve $|OM| = 2|MT|$ elde edilir. M , $[G_1G_2]$ 'nin orta noktası, G_1 üç noktanın, G_2 diğer üç noktanın ağırlık merkezi olduğuna göre, M altı noktanın ağırlık merkezi olan sabit bir noktadır. Dolayısıyla T noktası, sabit OM doğrusu üzerinde $2|MT| = |OM|$ olacak şekilde sabit bir noktadır.



4. P, Q, R, S noktaları

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{d}{b}, \quad \frac{|QB|}{|QC|} = \frac{a}{c}, \quad \frac{|RC|}{|RD|} = \frac{b}{d}, \quad \frac{|SD|}{|SA|} = \frac{c}{a}$$

olacak şekilde seçilirse, bu dört noktadan bir çember geçer. Bu oranları sabit tutarak alınacak başka dört noktadan da eş yarıçaplı bir çember geçer. Bunu şöyle görebiliriz: $I, ABCD$ teğetler dörtgenin içteğet çemberinin merkezi olsun.

$$|IP| = \frac{\sqrt{abcd}}{(a + b + c + d)/2}$$

sağlanır. Bu bağıntı kosinüs, sinüs ve Stewart teoremleri kullanılarak kolayca çıkarılmaktadır. P, Q, R, S simetrik noktalar oldukları ve $|IQ|$ uzunluğu sadece a, b, c, d 'ye bağlı olduğu için, $|IP| = |IQ| = |IR| = |IS|$ bulunur. Dolayısıyla bu dört noktadan (oranlar sabit kalmak üzere her dört noktadan) bir çember geçer ve bu çemberin yarıçapı $ABCD$ 'nin sadece kenar uzunluklarına bağlıdır, yani yarıçap sabittir.

KAYNAKÇA

- [1] S. Atabey, Kotanjant Teoremi ve Uygulamaları, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 5, 24-26 (1995).

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

A131. $a < b < c < d$ için

$$f(x) = |x - a| + 2|x - b| + 3|x - c| + 4|x - d|$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

A132. n bir tamsayı olsun ve $1 \leq i \leq n$ için $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ aralığında x_i noktaları verilsin.

$$\left| \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

A133. y ekseninde sabit $(0, k)$ noktasında dik kesişen iki doğru x eksenini A ve B noktalarında kesiyorlar. $[AB]$ üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin geometrik yeri nedir?

A134. Bir ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen çember, AB ve AC doğrularını X ve Y noktalarında kesiyor. XY doğrusu BC doğrusunu bir Z noktasında kesiyorsa,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{|XB| \cdot |AB|}{|YC| \cdot |AC|}$$

olduğunu ispatlayınız.

A135. Bir parabolün odağı F , parabol üzerindeki bir nokta P , P noktasının parabolün eksenindeki dik izdüşümü Q ve parabolün tepe noktası A ise, $|PQ|^2 = 4|AF| \cdot |AQ|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y131. *MATEMATİK* sözcüğündeki harflerin tümünü kullanarak, bunların gelişigüzel dizilimleriyle elde edilen anlamlı, anlamsız tüm 9 harfli sözcüklerden kaç tanesinde iki ünsüz harf ard arda gelmez? (*Nurettin Ergun*)

Y132. Bir havuzun çevresinde saat yönünde sırayla 0 dan 60'a kadar numaralanmış 61 tane taş var. 0. taşın üzerindeki bir kurbağa önce 1. taş, oradan 2. taşın üstünden atlayıp 4. taş, oradan 4 taşın birden üstünden atlayıp 9. taş, ... şeklinde sıçrayarak havuzun çevresinde doluyor. Kurbağa $k + 1$ 'inci sıçrayışta

saat yönünde $2k$ taşın üstünden atlayıp bir sonrakine sıçırıyor. Yeterince uzun bir süre sonunda kurbağanın üzerine basmadığı taş kalır mı? Kalırsa kaç tane böyle taş kalır? (*Albert Erkip*)

Y133. Bir parabolün herhangi üç teğetinin ikişer ikişer kesişme noktaları X, Y, Z ise XYZ çemberinin bu parabolün odağından geçtiğini ispatlayınız.

Y134. Birbirinin dışında bulunan A ve B merkezli iki çemberin ortak dış teğetleri bir C noktasında kesişiyor. Ortak iç teğetlerden biri de dış teğetleri D ve E noktalarında kesiyor. CDE çemberinin $[AB]$ 'nin orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

Y135. A, B, C açılarının ölçüleri sırayla 1, 2, 4 ile orantılı olan bir ABC üçgeninin alanını çevrel çemberinin yarıçapı cinsinden hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

A121. $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$ denkleminin gerçel çözümlerini bulunuz. (*Selma Atabey*)

Çözüm. Denklemi $\sqrt[3]{4}$ sayısına bölelim. $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ ve $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ olduğundan

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1$$

bulunur. $T = \sqrt[3]{3/2}$ alırsak, $T^2 - T - 1 = 0$ 'dan

$$T_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

köklerini buluruz. $T > 0$ olduğundan $+$ işaretini seçer ve

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2}$$

buluruz.

(Çözenler: Mustafa Akyüz, İhsan Aydemir, Atasagun Baykal, Barış Demir, Namık Gök, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu.)

A122. Her n pozitif tamsayısı için

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2$$

eşitsizliğini kanıtlayınız. (Turgay Uçkun)

Çözüm. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ sayılarının geometrik ortalaması $\sqrt[n]{1^2 2^2 \dots n^2} = (n!)^{2/n}$ 'dir. Aritmetik ortalaması ise

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}$$

olur. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(n!)^{2/n} \leq \frac{2n^2 + 3n + 1}{6},$$

ve dolayısıyla istenen sonuç çıkar.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Barış Demir, Celalettin Orhan, Samanyolu Problem Grubu.)

A123. $0 < r < 1$ şeklindeki bir r rasyonel sayısının ondalık açılımı $r = 0.x_1x_2x_3\dots$ olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

limitini hesaplayınız. (Nurettin Ergun)

Çözüm. Limitini aradığımız ifadeye A_n diyelim. Rasyonel sayıların ondalık açılımı devirlidir; o halde

$$r = 0.x_1x_2\dots x_p\overline{y_1y_2\dots y_m}$$

şeklinde yazılabilir. $0 \leq q < m-1$ olacak şekilde, n 'yi $n = km + q$ diye yazalım.

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{n} + \frac{k(y_1 + y_2 + \dots + y_m)}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{q-1}}{n}$$

olacaktır. n büyüdükçe ilk terim ve son terim sıfıra, n/k oranı ise m 'ye gideceğinden, aranan limit

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m},$$

yani devirli kısmın rakamlarının ortalaması olacaktır. Burada bazı sayılar için aranan limitin açılıma bağlı olduğuna işaret edelim. $r = \frac{1}{10}$ için $r = 0.10$ yazarsak limit sıfır, $r = 0.09$ yazarsak limit dokuz olacaktır.

(Çözenler: Emre Alkan, İhsan Aydemir.)

A124. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan iki merkezli bir dörtgenin alanının $S = \sqrt{abcd}$ olduğunu gösteriniz.

(Hem çevrel hem de içteğet çemberi olan bir dörtgene *iki merkezli dörtgen* adı verilir.)

Çözüm. Teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların toplamı eşittir. $a + c = b + d$, yani $a - d = b - c$ 'den kare alarak

$$a^2 + d^2 - 2ad = b^2 + c^2 - 2bc \quad (1)$$

bulunur. Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılarının toplamı 180° 'dir. ABD ve DBC üçgenlerinde kosinüs teoreminden

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

ve $\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$ olduğundan,

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A \quad (2)$$

çıkar. (2)'den (1)'i çıkarırsak

$$\cos A = \frac{ad - bc}{ad + bc}$$

ve

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{abcd}}{ad + bc} \quad (3)$$

bulunur. Dörtgenin alanı ABD ve DBC üçgenlerinin alanlarının toplamı, yani

$$S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C = \frac{\sin A}{2}(ad + bc)$$

sayısıdır. (3)'ten $S = \sqrt{abcd}$ çıkar.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasagun Baykal, Namık Gök, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Muhsin Yılmaz.)

A125. Bir ABC üçgeninin kenarları a, b, c , çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. ABC dar açılı ise, $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Çözüm. Çevrel çemberin B noktasından geçen çapı $[BA']$ olsun. B açısı dar açı olduğundan $AA'C$ açısı geniş açı olur ve buradan $|AA'|^2 + |A'C|^2 < b^2$ bulunur. Diğer taraftan BAA' ve BCA' birer dik üçgen olup $c^2 + |AA'|^2 = 4R^2$ ve $a^2 + |CA'|^2 = 4R^2$ sağlanır. Dolayısıyla

$$a^2 + b^2 + c^2 > a^2 + c^2 + |AA'|^2 + |CA'|^2 = 8R^2$$

çıkar.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Namık Gök, Ülkü Öztaş, Samanyolu Problem Grubu.)

Y121. $2m - 1 \leq n$ olacak şekilde n, m pozitif tamsayıları için

$$\binom{2n}{2m-1} = 2 \left[\binom{n}{2m-1} + \binom{n}{2m-2} \binom{n}{1} + \binom{n}{2m-3} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{m} \binom{n}{m-1} \right]$$

olduğunu gösteriniz. (Nurettin Ergun)

Çözüm. Eşitliğin sol tarafı $(1+x)^{2n}$ çarpımının açılımında x^{2m-1} 'in katsayısıdır. Bu çarpımı $(1+x)^n(1+x)^n$ şeklinde hesaplırsak, x^{2m-1} elde etmek için ilk çarpımdan x^{2m-k} , ikincisinden de x^k 'li terimleri çarpmak gerekir. $(1+x)^n$ açılımında x^k 'nin katsayısına c_k diyelim. $0 \leq k \leq m-1$ ve $m \leq k \leq 2m-1$ aralıklarındaki terimler simetriden dolayı sırayla birbirlerine eşit olacağından, x^{2m-1} 'in katsayısı

$$2(c_{2m-1}c_0 + c_{2m-2}c_1 + \dots + c_m c_{m-1})$$

olur. $c_k = \binom{n}{k}$ olduğundan, bu bize aranan eşitliğin sağ tarafını verir.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.)

Y122. Bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları, r içteğet çemberin yarıçapı, $2s = a + b + c$, $p = ab + bc + ac$ ve S üçgenin alanı olsun. ABC üçgeninin bir dik üçgen olması için gerek ve yeter koşulun

$$r^3 - sr^2 + (p - s^2)r - \frac{S^2}{s} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (Selma Atabey'in bir sorusundan türetildi.)

Çözüm. Bir ABC üçgeninde A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul $r = s - a$ olmasıdır. Bunu b ve c kenarları için tekrarlarsak, ABC üçgeninin dik olması için gerek ve yeter koşul

$$(r - (s - a))(r - (s - b))(r - (s - c)) = 0$$

olmasıdır. Bu son çarpım açılıp gerekli sadeleştirme yapılmış istenen koşul elde edilir.

(Çözen: Atasagun Baykal.)

Y123. $N > 2$ bir tamsayı ve $n = 3N$ ise, düzgün bir n -gende uzunluklarının farkı bir kenarın uzunluğuna eşit olan iki köşegen olduğunu gösteriniz. (Ferit Öktem)

Çözüm. Düzgün bir n -genin bir kenarı $2 \sin \frac{\pi}{n}$, köşegenleri ise $k = 2, 3, \dots, n-2$ için

$2 \sin \frac{k\pi}{n}$ uzunlukları ile orantılıdır.

$$\sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{j\pi}{n} = 2 \cos \frac{k+j}{2n} \pi \sin \frac{k-j}{2n} \pi$$

olduğundan, $k - j = 2$ ve $\frac{k+j}{2n} = \frac{1}{3}$ seçebilirsek istenen koşul sağlanır. $n = 3N$ olduğundan, $k = N + 1$ ve $j = N - 1$ bulunur. $N > 2$ ise istenen sağlanacaktır. $N = 2$ için ise bir köşegenle bir kenarın farkı bir kenara eşit olacaktır.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.)

Y124. $(x-1)^n(2x^2+1)^n$ çarpımının açılımı $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{3n}x^{3n}$ olsun. $A_0 + A_3 + A_6 + \dots + A_{3n}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. Verilen polinoma $P(x)$ diyelim.

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

için $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\omega}$ ve $\omega^3 = 1$ olduğu görülür. ($\bar{\omega}$, ω 'nın karmaşık eşleniği demektir.) O halde $1 + \omega^{3k} + (\omega^2)^{3k} = 1 + 1 + 1 = 3$, $1 + \omega^{3k+1} + (\omega^2)^{3k+1} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$ ve $1 + \omega^{3k+2} + (\omega^2)^{3k+2} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ sağlanır.

$$P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) = \sum_{j=0}^{3n} A_j(1 + \omega^j + (\omega^2)^j) = 3(A_0 + A_3 + \dots + A_{3n}),$$

ve dolayısıyla

$$A_0 + A_3 + \dots + A_{3n} = \frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2)}{3}$$

olacaktır. Öte yandan $P(1) = 0$,

$$\begin{aligned} P(\omega) &= [(\omega - 1)(2\omega^2 + 1)]^n \\ &= [2\omega^3 - 2\omega^2 + \omega - 1]^n \\ &= [-2\omega^2 + \omega + 1]^n = (-3\omega^2)^n \\ P(\bar{\omega}) &= P(\bar{\omega}) = \overline{P(\omega)} = \overline{(-3\omega^2)^n} = (-3\omega)^n \end{aligned}$$

olduğundan,

$$P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) = (-3)^n[\omega^n + \omega^{2n}]$$

bulunur. $n = 3k$ ise $\omega^n + \omega^{2n} = 2$ ve de $n \neq 3k$ ise $\omega^n + \omega^{2n} = \omega + \omega^2 = -1$ olduğundan, aranan toplam

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{3} & \quad \text{ise} \quad -2(-3)^{n-1}, \\ n \not\equiv 0 \pmod{3} & \quad \text{ise} \quad (-3)^{n-1} \end{aligned}$$

olacaktır.

(Çözen: Murat Aygen.)

Y125.

$$f_p(n) = \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (n+1) \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_1^{p-1} & C_2^{p-1} & \dots & C_{p-2}^{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1} \\ 1 & C_1^p & C_2^p & \dots & C_{p-2}^p & C_{p-1}^p & (n+1)^p \\ 1 & C_1^{p+1} & C_2^{p+1} & \dots & C_{p-2}^{p+1} & C_{p-1}^{p+1} & (n+1)^{p+1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan f_p fonksiyonu için $f_p(n) = 1 + 2^p + 3^p + \dots + n^p$ olduğunu gösteriniz. (Tamer Adanır)

Çözüm. Bilindiği gibi

$$C_k^m = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$$

demektir. Önce $f_p(n) - f_p(n-1) = n^p$ olduğunu gösterelim. Determinant fonksiyonu matrislerin satır ve sütunlarına göre doğrusal olduğundan,

$$f_p(n) - f_p(n-1) = \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (n+1) - n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & (n+1)^2 - n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{2} & \dots & \binom{p-1}{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1} - n^{p-1} \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} & (n+1)^p - n^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p-1} & (n+1)^{p+1} - n^{p+1} \end{vmatrix}$$

elde ederiz. Şimdi $k = 1, 2, \dots, p$ iken sırayla k 'yinci sütunu $-n^{k-1}$ ile çarpıp $p+1$ 'inci sütuna ekleyelim. Determinantın değeri değişmez; ayrıca

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} - 1 - n \binom{p+1}{1} - n^2 \binom{p+1}{2} - \dots - n^{p-1} \binom{p+1}{p-1} = \binom{p+1}{p} n^p,$$

$$(n+1)^p - n^p - 1 - n \binom{p}{1} - n^2 \binom{p}{2} - \dots - n^{p-1} \binom{p}{p-1} = 0,$$

ve benzer şekilde diğerleri de sıfır olur. Böylece

$$f_p(n) - f_p(n-1) = \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{2} & \dots & \binom{p-1}{p-1} & 0 & 0 \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} & 0 \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p-1} & \binom{p+1}{p} n^p \end{vmatrix}$$

haline gelir. Köşegeninin üstündeki bütün elemanları sıfır olan böyle bir matrisin determinanı köşegen elemanlarının çarpımıdır. Buradan derhal

$$f_p(n) - f_p(n-1) = \frac{1}{(p+1)!} n^p \binom{p+1}{p} \binom{p}{p-1} \binom{p-1}{p-2} \dots 2 \cdot 1 = \frac{(p+1)!}{(p+1)!} = n^p$$

elde edilir. Bu indirgeme bağıntısıyla $f_p(n) = n^p + (n-1)^p + \dots + 2^p + 1^p + f_p(0)$ olur. Öte yandan $f_p(0)$ 'a bakılırsa, birinci ve $p+1$ 'inci sütunlar aynı olduğundan, $f_p(0) = 0$ çıkar. Sonuç olarak $f_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ buluruz.

(Çözen: Emre Alkan.)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Prof.Dr. Albert Erkip, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 30 Haziran 1996 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihî ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdhan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 350.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1996 yılı abone ücreti 400.000.-TL., tane satış fiyatı ise 100.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

Saygılarımızla

