

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ALBERT ERKİP

YAYIN KURULU
SELMA ATABEY, ALİ DOĞANAKSOY,
ALPARSLAN ERTUĞ, FİKRİ GÖKDAL,
H. TURGAY KAPTANOĞLU

DIZGI
NURAY (KIRAÇ) ÖZKAN

BASKI
ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, Matematik Vakfı'nın işbirliği ve
UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386 sayılı
kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1996)

Yurtiçi yıllık 400.000.-TL., Yurtdışı yıllık 800.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 215511 No.lu hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Matematik Dünyası

Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü

İnönü Bulvarı, 06561 ANKARA

Tel: 210 12 82 • 210 29 70

İÇİNDEKİLER

Prof. Dr. Orhan Ş. İçen, Hayatı ve Eserleri

Hülya Şenkon 1

Harflerle Sayı Yazılışı

R. İlknur Koçak 4

Bir Polinomun Gerçel Olmayan Köklerinin
Varlığı İçin Yeterli Şart

Nizamettin Iskenderov 5

"n" Noktada Uzaklık Toplamları ve
Eğriler Ailesi

Bilge Demirköz 7

Okul Matematiğinde Ne Öğretelim,
Nasıl Öğretelim?

Adnan Baki 11

Ekstreum Değerleri

Selma Atabey 16

Pisagor Üçlülere

Şafak Alpay 21

Harflerle Sayı Yazılışı, Çözüm

R. İlknur Koçak 23

Grafikleri Tasarlanamıyan Sürekli
Fonksiyonlar

Nurettin Ergun 25

Problemler ve Çözümleri 29

Prof.Dr.ORHAN Ş.İÇEN, HAYATI VE ESERLERİ

Hülya Şenkon *

Prof.Dr.Orhan Ş.İÇEN, bundan tam bir yıl önce, 13 Haziran 1995 tarihinde, kısa süren bir rahatsızlık sonucu aramızdan ayrıldı. İlk öğrencisi olmakla gurur duyan, yaklaşık 30 yıldır çalışma arkadaşı olarak yakın çevresinde bulunma mutluluğuna erişmiş, ancak, meslek yaşamındaki babasını zamansız kaybetmenin şokunu hala üzerinden atamamış bir kişi olarak, bu satırları kaleme almakta zorlandığımı itiraf etmeliyim. Kendisinden söz edilmesini istemeyen, kendisine “Hocam” diye hitabedilmesinden hiç hoşlanmayan sevgili Hocamın, o mükemmel ve alçak gönüllü insanın yaşam öyküsünü, eserleriyle matematiğe yaptığı katkıları ve kişisel özelliklerini, aralarında pek çok genç matematikçi adayının bulunduğu inandığım, Matematik Dünyası okurlarına sunarken, merhumun aziz hatırası önünde saygıyla eğiliyorum.

5 Ekim 1920 tarihinde Antalya'nın Kaş ilçesinde, Çocuk Hastalıkları Müttehassısı Dr. Ali Sami İÇEN ve eşi Emine Nesime Hanım'ın ilk çocukları olarak dünyaya gelen Orhan Ş. İÇEN, Kırkağaç (Manisa) da başladığı ilk öğrenimini 1931 de İzmir'de tamamlamış ve orta öğrenimine İzmir'de devam ederek, Haziran 1938 de (sonradan Atatürk Lisesi adını alan) İzmir Erkek Lisesi'nin Fen kolundan mezun olmuştur. Yüksek öğrenimine 1938 yılında Paris'te Louis le Grand Lisesi'nin “Mathematiques Speciales” sınıflarında başlamış, İkinci Dünya Savaşının çıkması üzerine 1939 da yurda dönerek, İstanbul Üniversitesi'nde öğrenimini sürdürmüştür ve 1942 yılında bu Üniversiteden Matematik-Astronomi Lisansı diploması almıştır. Aynı yıl Matematik Enstitüsü'ne Asistan olarak atanmış, 1943 te British Council tarafından verilen bir burstan yararlanarak İngiltere'ye Cambridge Üniversitesi'ne gitmiş ve yüksek öğrenimini orada sürdürmüştür, ancak savaş koşullarına dayanamayarak hastalanmış ve 1946 yazında yurda dönmek zorunda kalmıştır. Sağlığına kavuşup, 1947-48 yıllarında askerlik görevini yerine getirdikten sonra, Ekim 1950 de yüksek öğrenimine devam etmek üzere

bu kez Almanya'ya Göttingen Üniversitesi'ne gitmiş ve Mayıs 1955 te Prof.Dr. Theodor SCHNEIDER'in yanında Transandant Sayılar Teorisi konusunda hazırladığı doktora tezini [1] tamamlayarak “Doktor” unvanını almıştır. Aynı yıl yurda dönerek yeniden İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü'nde Asistan olarak göreve başlamış, 1956 da bilgi ve görgüsünü arttırmak üzere izinli olarak Hamburg Üniversitesi'ne Prof.Dr.H.HASSE'nin yanına gitmiş, 1958 de Doçentlik tezini [4] tamamlayarak yurda dönmüş ve “Üniversite Doçenti” olarak atanmış, 1962 yılında 6 ay süreyle Freiburg im Breisgau'da Albert Ludwigs Üniversitesi'nde Th. SCHNEIDER'in yanında çalışmıştır; 1969 da aynı yere giderek gerçekleştirdiği 9 aylık bir çalışmanın ürünü olarak hazırladığı Profesörlük Takdim Tezini [5] sunarak, 1970 te aynı kürsüde profesör kadrosuna atanmış ve bu görevini 1982 ye kadar sürdürmüştür.

Orhan Ş.İÇEN'in bilimsel araştırmaları, Fonksiyonlar Teorisi ile Sayılar Teorisinin birleştiği bir alan olan Transandantlık problemleri ile ilgilidir. π ve e gibi sayıların transandantlık incelemeleri, matematiğin en zor problemleri arasında yer almaktadır. O.Ş.İÇEN'in metin sonunda sıralanan bilimsel çalışmaları, bu alanda elde edilen kriterlerin uygulama alanlarını genişletmiş ve böylece birçok transandantlık kanıtını aynı bir prensibe bağlama olanağı sağlayarak, matematiğe çok büyük katkıda bulunmuştur. Her biri başlı başına bir “derya” olan bu bilimsel çalışmaların içeriği şöyle özetlenebilir:

[1] de tek kompleks değişkenli bir analitik fonksiyonunun aritmetik anlamda cebirselliği için 1951 yılında SCHNEIDER tarafından verilmiş olan iki kriterden ilki genelleştirilmekte ve aynı zamanda p -adik alana aktarılmaktadır. Bu aktarma sonucunda, “ $\alpha, 0$ ve 1 den farklı olan ve $|\alpha - 1|_p \leq p^{-1}$ koşuluna uyan bir cebirsel sayı, β ise bir irrasyonel tam cebirsel sayı olmak üzere, α^β sayısı p -adik alanda transandanttır” şeklinde

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

ifade edilen ve MAHLER-VELDKAMP Teoremi olarak bilinen ünlü teoremin yeni bir kanıtı verilmektedir.

[2] de SCHNEIDER'in yukarıda anılan ilk kriterinin [1] deki genelleştirilmiş, söz konusu analitik fonksiyonun, bir interpolasyon dizisinin terimleri için aldığı değerlere ek olarak, bu fonksiyonun ve bunun önemli bir uygulaması olarak, "p-adik alanda α , sıfırdan farklı ve $|\alpha|_p < p^{-(1/p-1)}$ koşuluna uyan bir cebirsel sayı ise e^α sayısı transandanttır" şeklinde ifade edilen ünlü MAHLER Teoreminin yeni bir ispatı verilmektedir.

[3] te, p-adik alanda her yerde yakınsak olan $\sum_{v=0}^{\infty} p^{a(v)} z^v$ $a > 0$, tam rasyonel) serisinin uygun rasyonel argümanlar için aldığı değerlerin irrasyonellik karakteri araştırılmaktadır ki, bu çalışma, 1948 yılında T.SZELE tarafından ileri sürülmüş olan " $\sum_{v=0}^{\infty} 2^{(v)}$ diyadik serisi, 2.dereceden bir cebirsel sayı olamaz" savının daha sonra H.HASSE tarafından genelleştirilmesi ve keskinleştirilmesi ile formüle edilen, " a, b, c tam rasyonel sayılar ve $a > 0$ ise p-adik alanda yakınsak ve irrasyonel olan $\sum_{v=0}^{\infty} a^{(v)+bv+c}$ serisi, bir transandant sayı gösterir" şeklindeki tahminin kanıtı doğrultusunda önemli bir adım oluşturmaktadır. O.Ş.İÇEN'in bu çalışmada elde ettiği sonuç, 1974 yılında tarafımdan keskinleştirilmiştir; ancak, SZELE Tahmini halen çözüm bekleyen açık bir problemdir.

[4] te iki önemli teorem verilmektedir. Bunlardan birincisi, [2] de verilen kriterin genelleştirilmiş olup, bunun sonucu olarak birkaç irrasyonellik kanıtı elde edilmektedir. İkinci teoremde ise SCHNEIDER'in verdiği 2. kriter, daha genel interpolasyon dizilerine genelleştirilmekte ve aynı zamanda p-adik alana aktarılmaktadır.

[5] ve [6] da, kompleks alandaki eliptik fonksiyonlar ile ilgili olarak 1937 yılında SCHNEIDER tarafından verilmiş olan transandantlık sonuçlarının benzerleri, p-adik alanda tanımlanan eliptik fonksiyonlar için elde edilmektedir. p-adik eliptik fonksiyonların tanım ve özelliklerinin geniş kapsamlı olarak ve büyük bir ustalıkla anlatıldığı bu çalışmaların üstün bir yanı da kullanılan aritmetik araçların zenginliğidir. Örneğin [5] te, verilen bir takım cebirsel sayılara belirli bir bağıntı ile bağlı bulunan bir cebirsel sayının yüksekliğini, söz konusu sayıların yükseklikleri

cinsinden sınırlayan bir Lemma kanıtlanmıştır ki O.Ş.İÇEN'in tüm öğrencileri, hemen hemen bütün araştırmalarında bu Lemmayı kaçınılmaz bir araç olarak kullanmışlardır.

[8] de ise eliptik fonksiyonlar teorisinde kullanılan bazı polinomların katsayılarının mutlak değerleri için üst sınırlar verilmektedir.

Türkiye'deki Transandant Sayılar Teorisi Ekolünün kurucusu olan Orhan Ş.İÇEN, Yüksek Lisans ve Doktora tezlerini yönetmiştir ki, bunlardan Prof.Dr.Hülya ŞENKON, Prof.Dr. Bedriye M.ZEREN, Prof.Dr. Kamil ALNIAÇIK ve Doç.Dr.Mehmet H.ORYAN, halen aynı bölümde görevlerini sürdürmektedirler.

TÜBİTAK Bilim Ödülü sahibi olan O.Ş.İÇEN, bir süre Tübitak Bilim Adamı Yetiştirme Grubunda görev yapmış ve bunun dışında, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde Matematik Bölümü Başkanlığı, Cebir ve Sayılar Teorisi Kürsüsü ve Anabilim Dalı Başkanlığı, Nazım Terzioğlu Matematik Araştırma Merkezi Müdürlüğü gibi idari görevlerde de bulunmuştur. O'nun unutulmaz hizmetlerinden biri de, İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Kütüphanesine yaptığı katkılarıdır.

Orhan Bey çok mükemmel bir öğretici ve son derece titiz bir araştırmacı idi. Bir konuyu öğrenirken kendi deyimiyle "konuyu didikleme" ve sürekli "Neden?", "Niçin?", "Nasıl?" sorularını sormayı ben ilk kez O'ndan öğrendim. Birlikte yaptığımız seminerlerde bazı genç konuşmacıların "Yazar diyor ki, ..." şeklindeki ifadelerine çok kızar, "Siz, yazarın veya makale sahibinin yaptıklarını iyice anlamalı, özümsemeli ve kendi yorumunuzu da katarak anlatabilmelisiniz" derdi. Ders anlatırken, en ufak bir ayrıntıyı ihmal etmeksizin, her şeyi tahtaya yazar, tanım, teorem ve örnekleri pedagojik bir sıralama ile verir, kanıtları son derece açık, boşluksuz ve hiçbir şüpheye yer bırakmayacak şekilde yapardı [10].

Orhan Bey'in en önemli özelliklerinden biri de Türkçeye olan hakimiyeti idi. Bir bilim adamının en az iki yabancı dil bilmesi gerektiğini ve bu dilleri iyi öğrenebilmek için de önce kendi ana diline hakim olması gerektiğini söylerdi. 1960'lı yıllarda kendisinden dinlediğim "Cebir" derslerinde "misal", "intac eder", "irca etmek", "mahreç", "suret" gibi sözcükleri çok sık kullanırken, birkaç yıl sonra bunlar yerine -sırasıyla- "örnek", "gerektirir", "indirgemek", "payda", "pay" sözcüklerini kullanır oldu ve son yıllarda gelişen öz Türkçe akımına bizlerden daha çabuk ve kolay uyum sağladığını

hayranlıkla gözlemledim. Kendisinin Türk Matematik Derneği için yaptığı çeviriler ([11], [15], [17]) arı dilini ve ifade gücünü kanıtlayan en güzel örneklerdir.

Orhan Bey, tam bir "İstanbul Efendisi" idi. Çalışma arkadaşlarına ve öğrencilerine karşı son derece kibar, nazik, saygılı, ölçülü ve hoşgörülü davranırdı. Yıllar süren beraberliğimiz sırasında, bir kez olsun, sesini yükselterek konuştuğuna veya kırıncı söz söylediğine tanık olmadım. İçine kapanık ve çok hassas bir insandı; çevresindekilerin bazı söz veya davranışlarına kırlılsa bile, bunu hiç belli etmez, alınganlık göstermezdi. Aynı zamanda son derece dürüst ve devlet malına karşı çok duyarlı bir insandı. Bölüm Başkanlığı yaptığı dönemde bile, meslekdaşlarıyla yazılı haberleşme için sekreterlikten kağıt istemez, yakındaki kırtasiyeciye bizzat giderek zarf-kağıt alır ve onları kullanırdı.

Orhan Bey'in karakteristik özelliklerinden biri de saat kullanmaktan hoşlanmaması idi. Öğrenciliğimin ilk yıllarında ceketinin iç cebinde taşıdığı bir köstekli saati vardı. Derse başlarken onu çıkarıp kürsünün üstüne koyardı, fakat kendisini dersin akışına öylesine kaptırırdı ki, saate bakmak aklına bile gelmezdi. İleriki yıllarda hiç saat kullanmaz oldu. Buna karşın zamanı, şaşılacak bir sezgi gücü ile doğru olarak tahmin ederdi. Beni hayrete düşüren bir başka özelliği de, ilk kez gördüğü bir kişinin yüz yapısına ve konuşmasına dikkat ederek, hangi yöreden geldiğini tahmin etmesi idi. Sanıyorum, derin kültürü ve tarihe olan büyük merakı, bunda en önemli etken idi.

Orhan Bey her öğretim yılı başında ve sonunda, ayrıca, birlikte gerçekleştirdiğimiz araştırma seminerleri sonrasında, Anabilim Dalındaki tüm öğretim elemanlarının katıldığı, çaylı ve pastalı sohbetler düzenlerdi ki, bunlar, Anabilim Dalı içindeki birliği ve bilimsel dayanışmayı perçinlemesi ve genç elemanların hocaları ile yakınlaşmalarını sağlaması bakımından büyük önem taşırdı.

Sevgili Hocamız, Eylül 1982 de ani bir kararla emekli olduktan sonra sık sık Fakülteye geliyor, bilimsel gelişmelerini yakından izlediği öğrencilerini ziyaret ediyor, onlarla sohbet etmekten ve fikir alışverişinde bulunmaktan büyük mutluluk duyuyordu. Bu sohbetler sırasında bize çok sevdiği torunlarından söz ediyor, özellikle en büyük torunu Efe'nin matematiğe çok meraklı olduğunu ve onun dersleri ile ilgilenmekten büyük zevk aldığını anlatıyordu. Vefatından çok

kısa bir süre önce öğrendiğimiz rahatsızlığının bir an önce iyileşeceğini ve O'nu yeniden aramızda göreceğimizi ümid ederken, o doyumsuz sohbetlerden ebediyen mahrum kalacağımızı nereden bilebilirdik?

ORHAN Ş. İÇEN'İN ESERLERİ

- [1] Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebrakriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen, *J. Reine Angew. Math.*, 198 (1957), 28-55.
- [2] Eine weitere Verallgemeinerung eines Schneiderschen Algebrakriteriums, *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 21 (1956), 155-187.
- [3] Über die Funktionswerte der p-adischen Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} p^{a(\frac{v}{2})} z^v$, *J. Reine Angew. Math.*, 202 (1959), 100-106.
- [4] Über die Charakterisierung der im arithmetischen Sinne algebraischen Funktionen, *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 33 (1968), 1-38.
- [5] Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I, *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 36 (1971), 53-87.
- [6] Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen II, *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 35 (1970), 139-166.
- [7] Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II", *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 38 (1973), 25-35.
- [8] Über die Größenordnung der Koeffizienten einiger in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommender Polynome, *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 35 (1970), 63-70.

- [9] Analiz Problemleri (N.TERZIOĞLU, G.SABAN, H.ŞAHİNCİ ile birlikte), İstanbul (1963).
- [10] Cebir Ders Notları (Teksir)(H.ŞENKON tarafından derlenmiştir), İstanbul (1967, 1968, 1969, 1970).
- [11] Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi (Diofant Denklemleri) (A.O.GELFOND'dan çeviri), İstanbul (1962), *Türk Matematik Derneği Yayınları*, Sayı: 8.
- [12] Sayılar Teorisine Giriş (H.W.E.JUNG'dan çeviri), İstanbul (1962), *Türk Matematik Derneği Yayınları*, Sayı: 12.
- [13] Sayılar ve Şekiller (H.RADEMACHER-O.TOEPLITZ'den çeviri), İstanbul (1964), *Türk Matematik Derneği Yayınları*, Sayı: 25.
- [14] Matematikte Endüksiyon ve Benzetme, I. Cilt, I. Kısım (G.POLYA'dan çeviri), İstanbul (1966), *Türk Matematik Derneği Yayınları*, Sayı: 30.
- [15] Matematikte Endüksiyon ve Benzetme, I. Cilt, II. Kısım (G.POLYA'dan çeviri), İstanbul (1966), *Türk Matematik Derneği Yayınları*, Sayı: 30.
- [16] Theodor SCHNEIDER ve Transandant Sayılar Teorisine Katkısı (25-28 Eylül 1989 tarihleri arasında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'de düzenlenen "Türk Matematik Derneği II. Ulusal Matematik Sempozyumu" na çağrılı konuşmacı olarak davet edilen Orhan Ş.İÇEN tarafından hazırlanan bu konuşma, Sempozyumda Hülya ŞENKON tarafından sunulmuştur).
- [17] Bilimin Uyanışı (B.L. van der WAERDEN'den çeviri; Yılmaz ÖNER ile birlikte), İstanbul (1994), *Türk Matematik Derneği Yayını*.

HARFLERLE SAYI YAZILIŞI

R. İlknur Koçak *

İşte zamanınızı değerlendirebileceğiniz ve hoşça vakit geçirebileceğiniz güzel bir matematiksel oyun. Bu oyunun fikri Scientific American dergisinin Mart 1994 sayısında yer alan Ian Stewart'ın "The New Merology of Beastly Numbers" adlı makalesinden alındı (s. 88-90).

Alfabadeki her harfe öyle tam sayı değerler verelim ki bir sayısından başlayarak her sayma sayının yazılışındaki harflerin sayısal değerlerini toplayarak o sayma sayıyı elde edelim.

Bu verdiğimiz değerler negatif, pozitif tam sayı ya da sıfır olabilir. Fakat aynı değeri iki ayrı harf için kullanmak yasaktır.

Örneğin başta **bir** kelimesindeki her harfe ayrı bir tamsayı verelim ki bu değerlerin toplamı tekrar bir sayısını versin:

$$b = 5$$

$$i = -3$$

$$r = -1 \text{ olsun.}$$

$$O \text{ zaman: } b + i + r = 5 - 3 - 1 = 1.$$

Şimdi bu örnekte $k = 8$ olsun. O zaman $i + k + i = (-3) + 8 + (-3) = 2$ elde ederiz.

Bu oyunda dikkat edilmesi gereken bir kural ise **bir** kelimesindeki **i** harfine verilen değerin aynısının **iki** ve diğer sayılardaki **i** harfleri için de kullanılmasıdır.

Oyunun başlangıcında fazla bir sorun yoktu. 1, 2, 3... gibi küçük sayıları elde etmek kolaydır. Fakat sayma sayılar büyüdükçe o sayılara değerlerinin toplamıyla ulaşılması güçleşiyor. İlk denememde değerleri tahmin ederek en fazla 29'a kadar gelebildim. Siz daha iyisini yapabilir misiniz? Deneyin, ve sonra çözümüne bakın. (Çözüm sayfa 23'de).

* Özel İzmir Amerikan Lisesi, 2. Sınıf Öğrencisi

BİR POLİNOMUN GERÇEL OLMAYAN KÖKLERİNİN VARLIĞI İÇİN YETERLİ ŞART

Nizamettin İSKENDEROV *

Bilindiği gibi, bir polinomun derecesi 1, 2, 3 ya da 4 olduğunda, köklerini bilinen yöntemlerle hesaplamak mümkündür. $n > 4$ olduğunda polinomun köklerini bulmak için hiç bir genel yöntem yoktur. Oysa derecesi $n \geq 1$ olan bir polinomun Cebirin Temel Teoremi adıyla bilinen Gauss teoremine göre en azından bir kökü vardır. Çoğu zaman bu köklerin içinde gerçel olmayan köklerin olup olmadığını önceden bilmek çok önemlidir. Herhangi dereceden polinomlara geçmeden önce, katsayıları geçek sayılar olan ikinci dereceden bir polinomu göz önüne alalım.

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

denkleminin gerçel olmayan kökü olması için

$$p^2 - 4q < 0 \quad (2)$$

olmalıdır. $q < 0$ için (2) sağlanmadığından gerçel olmayan kök yoktur. (2) eşitsizliği (1) denklemini çözerken ortaya çıkar. Bu yöntem yüksek dereceden polinomlar için geçerli değildir. (2) eşitsizliğini, genelde geçerli olan, başka bir yöntemle de göstermek mümkündür.

Gerçekten de, eğer x_1 ve x_2 (1) denkleminin gerçel kökleri ise,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 x_2^2} \quad (3)$$

doğrudur. Kökler toplamı ve çarpımı, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q$$

olur ve (3) eşitsizliği

$$p^2 - 2q \geq 2|q|$$

şeklinde alır. Buradan görüldüğü gibi,

$$p^2 < 2(q + |q|) \quad (4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (1) in köklerinin gerçel olmadığını anlaşılr. Böylelikle, (4) eşitsizliği gerçel

olmayan köklerin varlığı için yeterli şarttır. $q < 0$ olduğunda (4) sağlanmadığından (4) ü (2) şeklinde yazabiliriz.

Şimdi ise,

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (5)$$

genel denklemini göz önüne alalım. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ gerçel sayılardır. Şimdi (5) denkleminin $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi n tane gerçel kökü olduğunu varsayalım (tekrarlanan kökler de bunların içindedir). Negatif olmayan $b_1, b_2, \dots, b_n$ sayıları için, Aritmetik Geometrik Ortalama eşitsizliği denilen

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \dots x_n^2} \quad (6)$$

olur. Buna göre (5) denkleminin katsayıları için aşağıdakiler doğrudur:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1, \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_n x_n = a_2.$$

O zaman

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

$$-2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) = a_1^2 - 2a_2$$

olduğundan dolayı, (6) eşitsizliğini

$$\frac{a_1^2 - 2a_2}{n} \geq \sqrt[n]{a_n^2} \quad (7)$$

biçiminde yazabiliriz. Demek ki (5) denkleminin bütün kökleri gerçel olduğunda, (7) eşitsizliği doğrudur, bir başka deyişle eğer (5) denkleminin için

$$a_1^2 - 2a_2 < n \sqrt[n]{a_n^2} \quad (8)$$

* Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü, Öğretim Üyesi

ise, o zaman bu denklemin **bütün kökleri gerçel olamaz**. Böylelikle, (8) koşulu (5) denkleminin gerçel olmayan köklerinin olması için yeterli koşuldur.

Eğer $a_n \neq 0$ ve $a_1^2 \leq 2a_2$ (özel halde $a_1 = a_2 = 0$) ise, diğer katsayılardan bağımsız olarak, her zaman gerçel olmayan kök vardır diyebiliriz.

(5) denkleminde $x = 1/y$ dönüşümü yapılırsa,

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + 1 = 0 \quad (9)$$

denklemini çıkar. Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ (5) in kökleri ise, $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n$ (9) un kökleri olur ($a_n \neq 0$ ise $k = 1, \dots, n$ için $x_k \neq 0$ olacaktır).

Buradan yukarıdaki işlemlere benzer şekilde göstermek mümkündür ki, (9) denkleminin gerçel olmayan köklerinin olması için

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n < n \sqrt[n]{a_n^{2n-2}} \quad (10)$$

şartı yeterlidir.

(10) eşitsizliğinden özel halde $a_{n-1}^2 \leq 2a_{n-2}a_n$ veya $a_{n-1} = a_{n-2} = 0$ olursa, ($a_n \neq 0$), (9) denkleminin her zaman gerçel olmayan kökleri vardır.

Hatırlatalım ki, (8) ve (10) şartları (5) ve (9) denklemlerinin gerçel olmayan köklerinin olması için genel halde yeterli şarttır, fakat gerekli değildir. Örneğin,

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 26 = 0 \quad (11)$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin kökleri $x_1 = 1$, $x_2 = 5 + i$, $x_3 = 5 - i$ dir.

$$a_1^2 - 2a_2 > 3 \sqrt[3]{a_3^2} \quad (49^3 > 27 \cdot 26^2)$$

olur. (11) denkleminin bütün kökleri gerçel değildir ve (8) yeterlilik şartı sağlanmıyor. İkinci dereceden denklem olması halinde ise (2) şartı yeterli ve gerekli şarttır.

Örnek: Katsayıları -1 ve 1 sayılarından oluşan ve yalnız gerçel kökleri olan bütün polinomları bulunuz.

Çözüm: $n = 1$ olduğunda bu tür polinomlar yalnız $x - 1$ ve $x + 1$ (yüksek mertebenin katsayısını 1 kabul etmek mümkündür.) şeklinde olur.

$n \geq 2$ olsun. Eğer $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ polinomunun kökleri gerçel ve $a_k \in \{-1, 1\}$ ise, o zaman (7) eşitsizliğini

$$1 - 2a_2 \geq n$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitsizlik yalnız $a_2 = -1$ ve $n \leq 3$ için doğrudur. Böylelikle yalnız $n = 2$ ve $n = 3$ halini gözönüne almalıyız.

a) $n = 2$ olsun. O zaman $f(x) = x^2 + a_1 x - 1$ $a_1 \in \{-1, 1\}$ dir. Aradığımız polinomlar ya $x^2 + x - 1$, ya da $x^2 - x - 1$ olur.

b) $n = 3$ halinde ise, $f(x) = x^3 + a_1 x - x + a_3$ olur $x = \frac{1}{y}$ dönüşümü yardımıyla,

$$g(y) = a_3 y^3 - y^2 + a_1 y + 1$$

çıkarak $g(y) = 0$ denkleminin bütün köklerinin gerçel olması için

$$1^2 - 2a_1 a_3 \geq 3 \sqrt[3]{a_3^4} = 3$$

şartı sağlanmalıdır. Buradan ise, a_1 ve a_3 ün ters işaretli olduğu gözüküyor. Sonuç olarak, bütün mümkün polinomlar $x^3 + x^2 - x - 1$ ve $x^3 - x^2 - x + 1$ olur.

Demek ki problemin şartını sağlayan yalnız 6 polinom vardır.

Aşağıdaki problemleri çözünüz:

1. p katsayısını öyle seçiniz ki,

$$x^5 + 6x^4 + px^3 + 2^2 + 8x + 32 = 0$$

denklemini gerçel olmayan çözüme sahip olsun. (Cevap, $p > 8$)

2. $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) denklemini verilmiştir. Gösteriniz ki,

a) $x = 1$ bu denklemin pozitif olan tek bir köküdür ve onun katlılığı 2 dir.

b) $n \geq 3$ olduğunda bütün kökler değildir.

c) n tek olduğunda negatif kök yoktur, n çift olduğunda ise katlılığı 1 olan ve $(-1, 0)$ aralığında yerleşen tek bir negatif çözüm vardır.

KAYNAKÇA

A.B Kujel. *Irticalen Matematik*, Vışa Şkola, 1983

“n” NOKTADA UZAKLIK TOPLAMLARI VE EĞRİLER AİLESİ

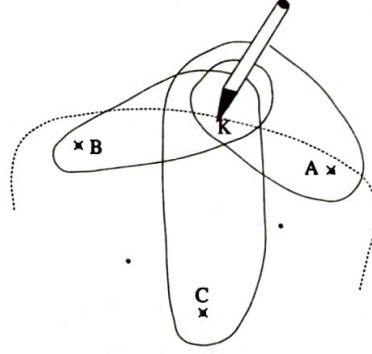
Bilge DEMİRKÖZ *

Daire bir nokta (odak) ve bir uzunluk kullanılarak çizilir ve dairedeki her noktanın odağa olan uzaklığı verilmiş olan uzunluk kadardır. Elips, iki nokta ve bir uzunluk verildiği zaman çizilebilen eğridir ki, bu eğri üzerindeki her noktanın odaklara olan uzaklıkları toplamı sabit ve verilen uzunluğa eşittir.

Konik kesitleri ve onun elemanları olan daire ve elipsi sınıfta işlerken aklıma şu geldi: Dairede bir, elipste iki nokta veriliyordu, ikisinde de bir uzunluk verilmişti; eğer üç nokta ve bir uzunluk verilmiş olsaydı nasıl bir eğri elde ederdik. Evet, bu eğrideki herhangi bir noktanın bu üç noktaya olan uzaklıklarının toplamı verilmiş olan uzaklığa eşit olsun. Bu soruya ise 3 nokta sorusu ismini verdim.

3 nokta sorusunun analitik incelemesini yapmadan önce, tahta bir düzlem üzerinde çivilerle tespit ettiğim üç noktaya iplik bağlayıp gergin bir şekilde kalemin ucuyla şekli çizdim. İpliğin uzunluğu bu şekilde verilmiş olan sabit uzunluk, üç çivi ise belirli odaklar gibi davrandı ve 3 nokta eğrisinin genel şekli üzerinde bir fikir verdi. (bkz. Şekil 1)

Bu eğrinin bir de geometrik çiziminin bulunmak gerekiyordu. Bunun için Machintosh'ta Geometer's Sketch Pad programını kullanarak (bkz. Şekil 2), FG 'yi sabit bir uzunluk, F, K ve R 'yi odaklarımız olarak alıp, J noktasını FG üzerinde serbest bir nokta olarak aldıktan sonra FJ uzunluğu ve F ve K noktaları ile bir elips, geriye kalan JG uzunluğu ile R merkezli bir daire çizer ve elips ile dairenin kesişim noktalarını bulursak 3 nokta eğrisi üzerinde noktalar bulmuş oluruz. Bu şekilde Y ve Z noktaları böyle iki noktadır, Y noktasını ele alırsak $FY + KY = FJ$ elips sayesinde sağlandığı için $FY + KY + RY, FG$ 'ye eşit olur. Bu çizimde J 'nin FG üzerinde animasyonu bütün eğriyi verir.



Şekil 1
Üç Nokta Eğrisinin Fiziksel Çizimi

A, B ve C çiviler, ve K kalem olmak üzere ip şeklindeki gibi dolandırılır. Çiviler sabittir. İlk durumda K de sabit olarak alınıp, ipler bağlanır. Bu şekilde ipin uzunluğu da sabit olur. Sonra k 'yı ipler gergin durumda ilerletirsek, elinize bir eğri geçer. İpin uzunluğuna $2n$ dersek,

$$2KB + 2KC + 2KA = 2n \text{ olur ve ikiye bölünce}$$

$$KB + KC + KA = n,$$

3 nokta eğrisinin tanımı olan 3 uzaklık toplamının bir sabite eşit olma şartını sağladığından dolayı, elde edilen eğri 3 nokta eğrisidir.

Not: A, B ve C çivileri tahtaya çakılı olduğu için, K , bir çivinin yanına geldiği zaman, bütün ipler çivinin üstünden öbür tarafına atlattırılmakta ve yeniden gerginleştirilmektedir.

Bunların yanı sıra 3 nokta eğrisinin analitik olarak incelenmesi iki nokta arasındaki uzaklık formülü kullanılarak da yapılabilir. Verili (x_1, y_1) , (x_2, y_2) noktaları ve n uzaklığı için elipsteeki genel formül:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = n \text{ dir.}$$

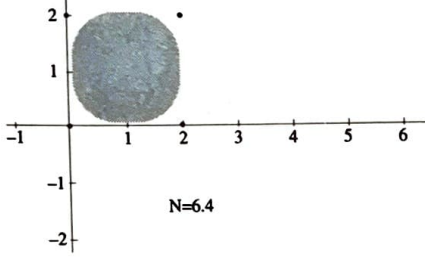
* İstanbul Özel Amerikan Robert Lisesi Öğrencisi.

1995-96 TÜBİTAK Lise Öğrencileri Araştırma Proje Yarışmasında Matematik dalında en iyi derece olan Üçüncülük Ödülü alan çalışmadan yazılmıştır.

4 nokta eğrisinin formülü ise yine uzaklık formülü kullanılarak yazılabilir.

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-d)^2 + (y-e)^2} = n$$

Örnek için; bkz.Şekil 5. Yüksek dereceden nokta eğrileri de aynı şekilde uzaklık toplamlarıyla yazılabilir. Fakat üçten büyük nokta eğrilerinde bir merkezin olma zorunluluğu yoktur. Genel olarak k nokta eğrilerinde bir merkezden bahsedemeyiz.



$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = N$$

Şekil 5

Şimdiye kadar hep uzaklık toplamlarından bahsettik fakat eğer "Bazı uzaklık toplamları çıkarılsa sonuç ne olur" gibi bir soru sorulabilir. Mesela hiperbolde noktalar toplanmak yerine çıkarılmıştır. Bunun cevabı uzaklıkları toplanan noktalar her zaman kümeyi çekerken uzaklıkları çıkarılanların ise her zaman kümeyi itmesidir. (bkz. Şekil 6)

Bu eğri ailelerinin bir özelliği ise şudur. Herhangi bir k nokta eğrisinde bir odak noktasını alıp bir başka odak noktasının üzerine koyarsak bu noktaya ait uzaklığı iki ile çarpmış oluruz ve $k-1$ bir nokta kullanarak yeni bir eğri elde etmiş oluruz. Örnek için; bkz.Şekil 7. Bunu bir kaç kez tekrarlayıp eğriyi bir nokta sorusuna bile indirgeyebiliriz. İşte bu özellik herhangi bir k nokta eğri ailesinin $k-1$ nokta eğri ailelerini ve daha aşağı eğri ailelerini kapsamasına yol açar.

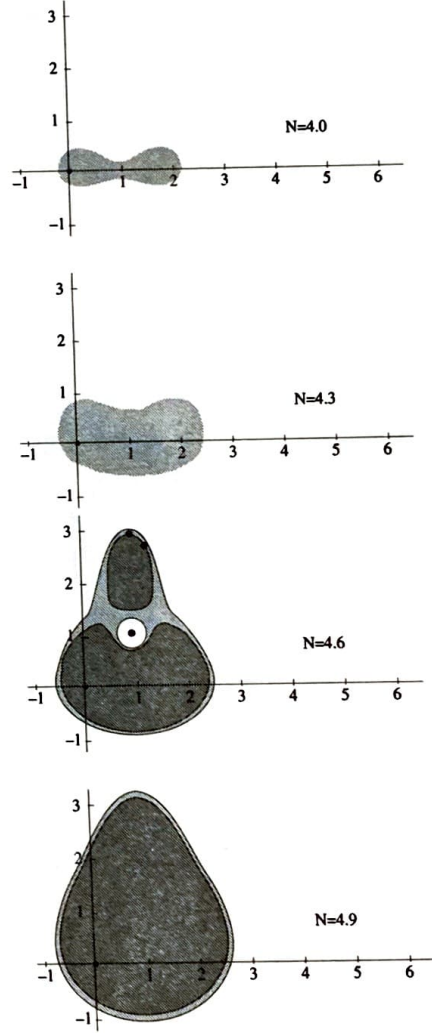
" k^m " notasyonu ile gösterdiğimiz pozitif eğri ailelerinden başka " k^{-m} " notasyonu ile gösterdiğimiz negatif nokta eğri aileleri de var. Negatif noktaların eğri ailesi uzaklıkların tersinin toplamalarının n ye eşit olduğu bir şekiller kümesidir. Buna göre -1 nokta eğrilerinin formülü şu olur.

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = n$$

Bu formül ise merkezi (x_1, y_1) 'de olan bir daire verir. -2 nokta eğrilerinin formülü ise şudur:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} = n$$

-2 nokta eğrisinin örneği için bkz.Şekil 8. -3 ve $-n$ nokta eğrilerinin formülü de aynı şekilde uzaklık formülü sayesinde yazılır. Örnek için bkz. Şekil 9.

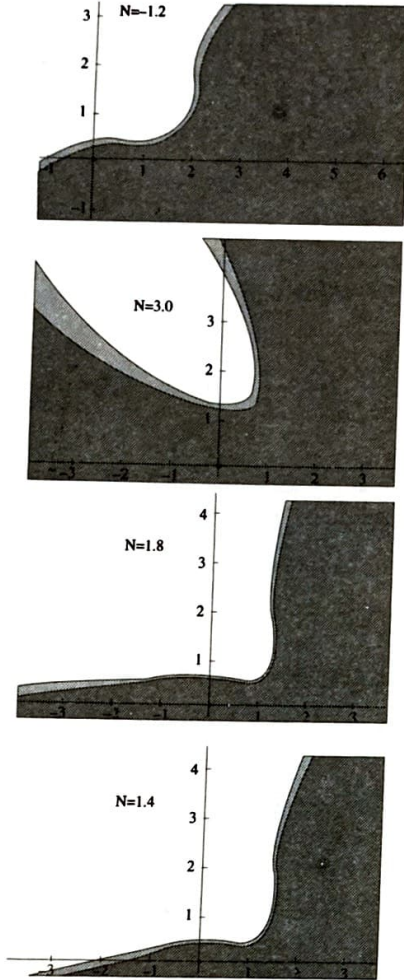


$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = N$$

Şekil 6

Negatif noktalar ailesinin fizikte bir uygulaması da vardır. Elektriksel alanlardaki eşit potansiyel çizgilerini, bu sayede çizdirebiliriz. Bir elektriksel yükten dolayı oluşan potansiyel fark $V = kq/r$ olarak ifade edilir. Bu yazılımda, q

yükün büyüklüğü r yükten uzaklık ve $k = 8.988 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2$ dir. Yakınında bir yük bulunan her nokta için eşit potansiyel çizgileri bu şekilde çizdirilir ve -1 nokta sorusunu çerçevesi içinde olup çeşitli daireler verir. Çünkü yük ve aldığımız nokta koordinat eksenine üstüne konulduğunda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ olur ve V 'yi kq ile böldüğümüzde n 'yi buluruz.



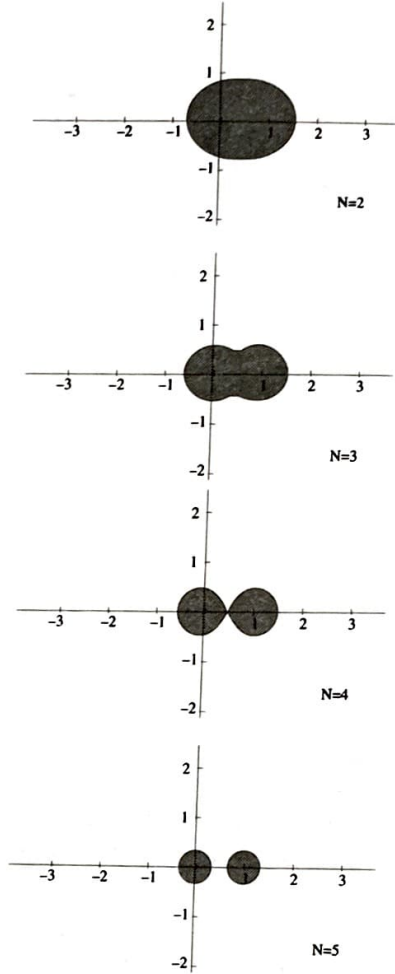
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y-2)^2} - 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = N$$

Şekil 7

İki tane yük olduğu durumda ise $V = kq_1/r_1 + kq_2/r_2$ olur ve -2 nota eğrilerini verir. Aynı şekilde üç yük olduğu zaman da bu uygulanır. Yine $-$ yüklü noktaların kümeyi ittiğini görebiliriz.

Yerçekimi alanlarında da aynı uygulama geçerlidir. GPE , yani yerçekimi potansiyel enerjisi Gm/r ye eşittir, m yerçekimi alanı yaratan cismin kütlesi, r cisme olan uzaklık ve $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ dir. Manyetik alanlarda

da B , manyetik alan, $1/r$ ile doğru orantılıdır ki burada I akımı, r ise uzaklığı belirtir. $-$ nokta eğrilerinin yine eşit alan potansiyeli çizgilerini bulmada uygulamaları vardır.

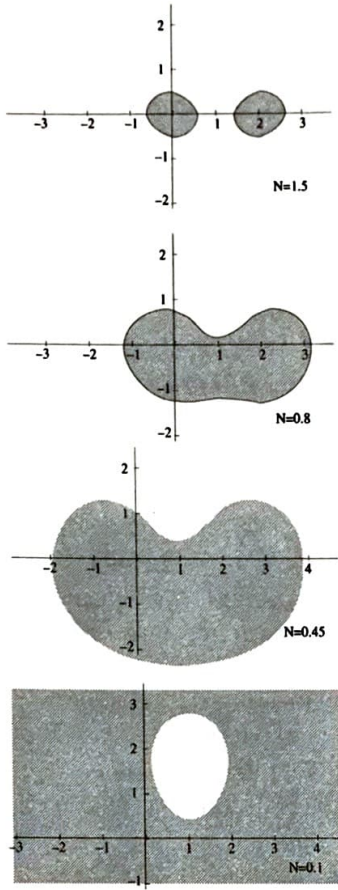


$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = N$$

Şekil 8

$+$ nokta eğrilerinde olduğu gibi $-$ nokta eğrilerinde de bir uzaklıklar her hangi bir sayıyla çarpılabilir. Bu sayede noktalara çeşitli rasyonel q yükleri de konulabilir. Kaçınıcı nokta eğrisi olduğu ise katsayıları tam sayı yapacak bir değerle çarptıktan sonra bu sayıların tam değerlerini toplamakla elde edilir.

Birçok soru bu projeye başladığından beri cevaplanmış durumda, fakat hala cevaplanmamış olanlar var. Bütün "Matematik Dünyası" okuyucularını bu kavramlarla uğramaya davet ediyorum. Bu sorulardan biricisi şekillerin alanının ne olacağı, ikincisi ise şeklin yay uzunluğunun ne olacağı. Amacım bu iki değere de olabildiği durumlarda formül bulabilmektir.



$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = N$$

Şekil 9

Eminim ki bu sorular cevaplandıktan sonra yeni sorular türeyecek ve bu konu eğer genişletilirse analitik geometrinin önemli bir parçası haline gelebilecektir.

Bu proje hazırlanırken, Machintosh üzerinde, Şekil 2 ve 4 ün çizimlerinde Geometer's Sketchpad, diğer çizimlerde ise Nucalc programı kullanıldı.

KAYNAKÇA

- Brown, Richard G., *Advanced Mathematics*, 1994, Boston.
 Dunham, William, *Journey Through Genius*, 1990, Toronto.
 Euclid, *The Thirteen Books of Elements*, 1956, Toronto.
 Locknod, E.H., *A Book of Curves*, 1961, Cambridge.
 Protter, Murray H. and Charles B. Morrey, Jr. *Calculus with Analytic Geometry A First Course*, 1977, Massachusetts.

OKUL MATEMATİĞİNDE NE ÖĞRETELİM, NASIL ÖĞRETELİM?

Adnan Baki *

Taştışmasız, toplumun devamlılığı ve kalkınmasında eğitimin hayati önemi bugün herkesçe kabul edilmektedir. Eğitim sistemimiz içerisinde matematik eğitimi önemli bir yer tutmasına rağmen matematik eğitimi tanımlamada çoğu zaman güçlük çekeriz. Eğer matematiği, okul matematiği ve akademik matematik olarak ikiye ayırırsak, matematik eğitiminden ne anlıyoruz sorusuna daha kolay cevap verebilme imkanı bulabiliriz. Bu sınıflamada akademik matematiği kısaca matematikçilerin uğraştığı matematik olarak tanımlayabiliriz. Amacı, matematiğin ulaştığı seviyeyi kullanarak teorik ve pratik alanda matematiğe bilimsel katkıda bulunmaktır. Okul matematiği ise toplum için nasıl bir insan yetiştirmek istiyoruz

sorusuna cevap ararken matematik ile ilgili ne öğretilim ve nasıl öğretilim konusu ile ilgilenir.

Bu sınıflandırmayı biraz daha aydınlatmak bakımından şunu da söylemeliyiz. Okul matematiğinin iki amacı var: Birincisi, toplumdaki büyük bir kitleyi matematik yönünden eğiterek sanayinin, teknolojinin ve günlük hayat-taki diğer alanların ihtiyaç duyduğu elemanları yetiştirmek; ikincisi de akademik matematiğin alt yapısını hazırlamak, yani akademik matematikte çalışacak matematikçileri daha küçük yaşlarda bir matematikçi gibi şekillendirerek hazırlamak ve onları matematik bilimcisi olarak akademik hayata kazandırmak.

Özetlersek, matematik alanında yeni bilgi üretmek veya yeni buluşlar yapmak akademik

* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Öğretim Üyesi

matematiğin işi ve o bilginin genç nesillere aktarılması da okul matematiğinin işidir. Ama belitmeliyiz ki günümüzde mevcut matematiksel bilgi birikimi okul süresince öğretilbilecek olanın kat kat üstündedir. Bu nedenle okul matematiğinde öğrencilere ancak temel kavramlar ve matematiksel bilgi edinme yolları öğretilmelidir. Bunu da başarabilmesi için okul matematiğinin her seviyede belirli müfredatı olmalıdır. Örneğin, ilk ve orta dereceli okullarda okul matematiğinin amacı, öğrenciye istenilen matematik kültürü vermek ve arzu edilen matematik beceriler yanında matematiksel düşünme yeteneğini de geliştirmek olarak özetlenebilir.

Üniversite seviyesinde ise okul matematiğini iki farklı alanda düşünmek zorundayız. Birincisi Fen Fakültelerindeki matematik bölümlerinde okutulan matematik, ikincisi de eğitim fakültelerinin matematik eğitimi bölümlerinde okutulan matematik.

Matematik bölümlerinde okutulan matematiğin amacı öğrenciye ayrıntılı matematik bilgisi vermek, matematiksel düşünme seviyesini yükseltmek, böylece matematik biliminin dallarının farkında olan öğrenciyi bu bilim dalında araştırma yapabilecek seviyeye yükseltmek olmalıdır. Kısaca öğrenciyi matematikçi yapabilmek olmalıdır. Şüphesiz, aynı yaklaşımla bunu yüksek lisans ve doktora programları için düşünürsek, bu programlarda okutulan matematiği de okul matematiği olarak kabul edebiliriz. Ancak bu program içerisindeki matematikçinin ortaya koyduğu ürün akademik matematiğin kümesine dahil olur.

Eğitim fakültelerinde okutulan matematik ilk ve orta dereceli okullarda okutulan matematik müfredatlarına paralellik arzeden, onları kapsayan ve daha yüksek seviyede ele alan bir matematik programı olmalıdır. Yani öğretmen adayının sahip olması gereken alan bilgisini sağlayan bir matematik programı söz konusudur. Aynı karakteri sınıfa yansıtması ondan beklediğine göre, bu programda, öğretmen adayına en azından bir matematikçi karakteri verilmelidir. Belki burada okutulan matematik teorik bakımdan matematik bölümlerinde okutulan matematikle eş değerde olmak zorunda değildir. Ancak mahiyet ve kapsamı en azından aynı düzeyde olmalıdır.

Nasıl öğrenilirse öyle öğretilir gerçeği göz önünde tutulursa, matematik eğitimi bölümündeki müfredatın ve derslerin verilisinin daha çok ayrıntılar ihtiva etmesinin

zorunluluğu ortaya çıkar. Öğrendiğinin nasıl öğretildiğini öğrenen öğretmen adayı aynı ekolü gittiği okullarda devam ettirir [5]. Dolayısıyla, öğrendiğinin nasıl öğretildiğini aynı zamanda öğrendiği için, öğretilenin nasıl öğretildiği fakülte sıralarında çok daha önem kazanır. Bunun için matematik eğitimi bölümündeki hocaların matematikçilikleri yanında eğitimcilikleri de aynı ölçüde önemlidir.

OKUL MATEMATİĞİNDE REFORM İHTİYACI

Yukarıda yaptığımız ayrımı hatırlamamız açısından tekrar edersek, okul matematiği, öğrenciye istenilen matematik kültürü vererek ve matematiksel düşünme yeteneğini geliştirerek, toplumun ihtiyaç duyduğu teknisyen, teknokrat, mühendis ve bilim adamlarını yetiştirmeyi amaçlar. Kısaca, toplum bugün okullardan şunu bekliyor: Okullarda bütün öğrenciler matematikte belli seviyede yetiştirme fırsatı bulmalı, hayatımızın bir parçası olan teknolojiyi anlayabilecek şekilde bilgilendirilmeli. Şimdi burada matematikte belli bir seviyede yetişmeden ne anlıyoruz? Bundan, bir kişinin keşfetme, bulma karar verme, mantıksal çıkarımda bulunabilme ve birçok matematiksel metotları ve yöntemleri etkili bir biçimde kullanarak problem çözebilme seviyesine gelmesi için görmesi gereken eğitimi kastediyoruz. Bu amaç okul matematiğine her ülkede büyük sorumluluklar yüklemiştir.

Örneğin, 60'lı yıllarda Sputnik'in Rusya'da uzaya fırlatılması ile birlikte Rusya ile uzayda yarışabilmek için, Amerika reform hareketleri başlatmıştır. Bunun da başlangıç noktasını okul matematiği oluşturmuştur [2]. Yüksek seviyede iyi yetişmiş teknisyen, mühendis ve bilimciler ile bu yarışın mümkün olabileceğine inanan Amerika bugün hepimizin bildiği modern matematik hareketini başlatmış ve modern matematik müfredatını 60'lı yıllarda geliştirerek uygulamaya koymuştur. Türkiyede modern matematik müfredatına 70'li yıllarda geçilmiştir.

Ama 90'lı yıllarda modern matematik müfredatının yetersizliği Amerika'da tartışılır olmuş, matematik eğitimi yükseltmek ve her kesime yaygınlaştırmak Amerikan eğitimcilerinin son yıllardaki en önemli gündemi haline gelmiştir. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)'in hazırlamış olduğu rapor [4], gündemde olan bu konuyu göstermesi bakımından en çarpıcı örnektir.

Bu çalışmaya sebep olan birinci faktör, okullardan mezun olan gençlerin istenilen

düzeyde veya ihtiyaç duyulan seviyede matematik bilgisine ve becerisine sahip olmamalarıydı. Mezunlar matematik yönden günlük hayatta arzu edilen fonksiyonu gösteremiyor ve iş hayatının talep ettiği nitelikte eleman olamıyordu. Bu ihtiyaca cevap vermek düşüncesi ile Amerikan eğitimcileri matematik eğitimini yükseltmek ve her kesime yaygınlaştırmak amacı ile bahsettiğimiz raporu 1989'da kaleme almışlar ve arkasından 90'lı yıllarda ülke çapında uygulamaya koymuşlardır [3].

Amerikada eğitimciler bu raporda belirlenen amaçlar ve hedefler doğrultusunda müfredatlar ve stratejiler geliştirmek için yoğun çaba sarfetmektedir. Şüphesiz ülkemizde de aynı ihtiyaçlar mevcuttur ve bizim de müfredatlarımızı ve eğitim stratejilerimizi yeniden gözden geçirmemiz gerekmektedir. Bizim NCTM gibi güçlü bir organizasyonumuz yok, dolayısıyla müfredatın geliştirilmesi, stratejilerin belirlenmesi bizlere (üniversite ve bakanlık çalışan eğitimcilere) düşmektedir. Bakanlık bu konuda üniversitelerle ne derecede işbirliğine hazır, bunu bu aşamada net bir şekilde ortaya koymak mümkün değildir. Belki de bakanlıkta akla ilk gelen Amerikalı eğitimcilerin hazırladıklarını tercüme etmek olabilir, ama bu işi halletmeyecektir. Çünkü bunun bir örneğini modern matematik müfredatlarını ve kitaplarını hazırlarken yaptık. Hareketin muhtevasını amacını ve felsefesini bilmeyenler ülkemizde uzun zaman tartışılan *modern matematik kaosuna* sebep oldu. Kolaycılığa kaçmamız, modern matematik uygulamasında yaptığımız hatanın tekrarı olur [1].

Bu da şimdiye kadar batıda matematik eğitimi reformları ile ilgili bilimsel çalışmalardan ve NCTM raporlarından yararlanmayacağımız anlamına gelmemelidir. Ülke gerçeklerimiz ve ihtiyaçlarımız göz önünde tutularak okul matematiğimiz için kendi müfredatımızı geliştirirken şüphesiz matematik eğitiminde yapılan çalışmalardan ve başta bahsettiğimiz NCTM standartlarından yararlanmamızın bilimsel açıdan da doğru olacağı kanaatindeyim. Nitekim bu çalışmada, yeni matematik müfredatımızın amaçları olarak sunduğumuz aşağıdaki dört amaç NCTM 1989 raporunun ışığı altında tespit edilmiştir. Bu amaçlar şu şekilde özetlenebilir:

1. Öğrenci matematiğe değer vermeyi öğrenmeli

Hazırlanacak yeni matematik müfredatı, matematiğin insanlık tarihinde oynadığı rol,

kültürümüzle ilişkisi ve günlük hayatımızdaki yeri hakkında öğrencinin bilinçlenmesini sağlamalı. Büyük matematikçilerin hayatları ve yaptıkları matematiksel çalışmalarının bugünkü medeniyetimizin gelişmesindeki rollerini ortaya koyan örneklerin seçilerek müfredata koyulması, öğrencinin matematiğin değerini kavraması açısından çok önemlidir. Ayrıca matematik müfredatının içerdiği faaliyetlerin günlük hayat ile yakından ilişkilendirilmesi de öğrencinin matematiğe karşı olumlu tavır geliştirmesine yardım edecektir. Bir bakıma herkes matematikçi sayılır. Pazarda alışveriş yaparken, arsasını ölçerken, borsaya bakıp hissesinin değerinin artışı miktarını hesaplarken, kişi bilinçli bir şekilde matematik yapıyor, matematik becerilerini ve bilgilerini kullanıyor. Bu bakış açısından hareketle yeni müfredat düzenlenmeli. Okul matematiği günlük hayat ile ilişkilendirilmeli, istatistiksel uygulamalar, veri-tabanı oluşturma ve günlük hayattan problemlerin seçilmesi gibi. Böylece, matematikle uğraşmanın hiç de yabancı olmayan bir uğraş ve insanın kaçınılmaz günlük faaliyetlerinden biri olduğu öğrenci tarafından fark edilecek ve gözünde matematik, soyut kavramlar yığını olmaktan çıkacak, onun için korkulur değil, öğrenilmesi gerekli bir ders haline gelecektir.

2. Öğrenci matematiksel düşünmeyi öğrenmeli

Varsayımda bulunma, sonuç çıkarma, kanıt elde etme, hipotezler kurarak bunları teoremlerle destekleme becerileri matematiksel çalışmanın esaslarını oluşturur. Bu becerileri geliştirmek okul matematiğinin esas amaçlarından biri olmalıdır. Bu amacın gerçekleşmesi için öğretmen bir teoremin ispatı veya bir problemin çözümü sırasında sesli düşünmeli ve ifadelerini matematik terminolojisinden seçmeli. Öğretmen matematiksel düşünmenin önemini vurgulamalı, mantıksal çıkarım yollarını ve alternatif çözüm yollarını öğrencileri ile birlikte tartışmalı ve sadece öğretmenin matematiğini veya çözümlerini tekrar etme mahiyetinde olan ödevlerden kaçınmalı. Bu yolla öğrenci sadece öğretmenin veya kitabın doğru çözüm olmadığını bilecek ve matematiksel varsayımları sorgulama alışkanlığı kazanacaktır. Böyle bir eğitim ortamında öğrenci artık bilginin kaynağının yalnız öğretmen ve okul kitabının olmadığını kavrayacak, kendi matematik bilgisini kurabileceği başka kaynaklar aramaya yönelecektir.

3. Öğrenci matematiksel konuşmayı öğrenmeli

Okul matematiği, öğrencinin matematiksel terminolojiyi iyi kullanabilecek bir seviyeye gelmesinin sağlayacak stratejiler ve faaliyetler içermelidir. Öğrenci atif olarak sınıf içi diyaloglara katılabilir. Bu yolla, öğrenci düşüncelerini uygun matematik dili kullanarak akıcı ve anlaşılır biçimde ifade etmeyi öğrenecektir. Örneğin, sınıf içi kolektif çalışmalar ve grup çalışmaları sırasında matematiksel düşüncelerin ve problemlerin tartışılması, okunması ve yazılması bu türden faaliyet ve stratejilerdir. Kişinin matematik dilini konuşabilmesi onun matematiksel düşüncesinin gelişmesine katkıda bulunacaktır. Ayrıca, problem çözümü sırasında veya bir problemin ifadesinde matematik dili kullanabilme becerisi veya fiziksel yada sosyal bir olayı matematik kavramlarla ifade edebilme becerisi kişiyi toplumda farklı bir konuma getireceği muhakkaktır. Bu gerçek yeni müfredatın hazırlanması sırasında mutlaka ön planda tutulmalı.

4.Öğrenci iyi bir problem çözücü olarak yetiştirilmeli

Problem çözümü öyle bir yöntemdir ki onun vasıtasıyla öğrenci matematiğin gücünü keşfeder ve kullanır. Problem çözüme becerisini geliştirmek için problemler öğrencinin ilgisini çeken türden olmalı. Öyle ki öğrenciyi uzun süre usandırmadan meşgul etmeli. Bunun için Piaget'nin *disequilibrium* teorisine uygun problemler üretilebilir. Bu tür problemlerde daha çok öğrencinin mevcut bilgi ve tecrübesi ile başlangıçta çelişkili gibi görünen yapılar vardır. Öğrenci böyle problemleri çözerken aynı zamanda önceki bilgilerinin de doğruluğunu test eder, yeni varsayımlar kurma imkanı bulur. Okul matematiğinde yer alan problemler öğrencinin o andaki seviyesinin çok altında veya çok üstünde olmamalı. Aksi durum, öğrencinin problem çözümü faaliyetine karşı ilgisinin azalmasına neden olur.

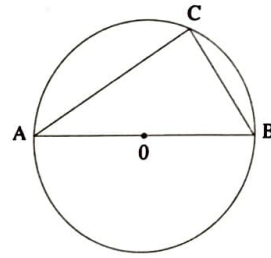
Problem öğrencinin seviyesinden çok yüksek ise, büyük bir ihtimal öğrenci problemi çözmekten vazgeçer. Bunu ünlü Rus psikolog Vigostky [6] *Scaffolding* benzetmesi ile açıklıyor Problem öyle bir yerde olmalı ki öğrenci mevcut bilgilerini kullanabilsin ve bir ileri aşamayı gerektiren düşünce ve kavramlarla problemin çözümü sırasında tanışabilsin.

Çoğu zaman, seçilen problemlerin tek doğru çözümünün olmamasına veya belli formüle ya da algoritmaya dayanmamasına özen

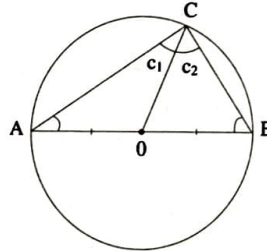
gösterilmeli. Alışılmış problemler yerine sıradan olmayan problemlere yer verilmeli. Öğretmen bu tür faaliyetlerde, teorem ispatı veya problem çözümü sırasında farklı stratejiler geliştirmeli, değişik kaynaklar ve çözüm yolları denemeli. Bunu bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Bir Örnek:

Kabul edelim ki öğretmen sınıfında "bir çember üzerinde çapı gören çevre açısı dik" önermesinin doğruluğunu gösterecektir. Öğretmen farklı fakat birbirleriyle ilişkili matematiksel kavramları kullanarak farklı çözüm yolları üretebilir. Örneğin, birinci çözüm yolu olarak sentetik geometriyi kullanabilir:



Bu durumda öğretmen önce, ABC üçgenini AB kenarı çemberin çapı ve C , çember üzerinde bu üçgenin bir köşesi olacak şekilde çizer. Burada önermenin ispatı için, öğretmenin C açısının dik açı olduğunu göstermesi yeterli olacaktır.



Çember üzerine çizilen ABC üçgeninde $|AO| = |OC|$ ve $|OB| = |OC|$ olduğundan AOC ve COB üçgenleri birer ikizkenar üçgen olacaktır. Bir ikizkenar üçgende taban açıları eşit olduğundan

$\hat{A} = \hat{C}_1, \hat{B} = \hat{C}_2$ dir. Ayrıca, ABC üçgeninde

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ ise}$$

$$\hat{A} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) + \hat{B} = 180^\circ \text{ yazılabilir.}$$

Böylece

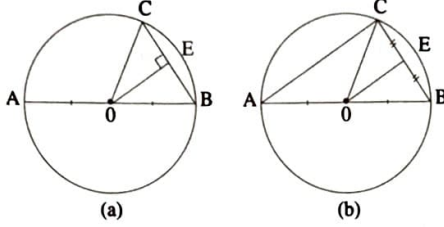
$$(\hat{A} + \hat{C}_1) + (\hat{C}_2 + \hat{B}) = 180^\circ \text{ ve } \hat{C}_1 = \hat{A} \text{ ve } \hat{C}_2 = \hat{B} \text{ olduğundan,}$$

$$2\hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ, \text{ dolayısıyla}$$

$$2(\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ \text{ ve } \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \text{ olur ve buradan da}$$

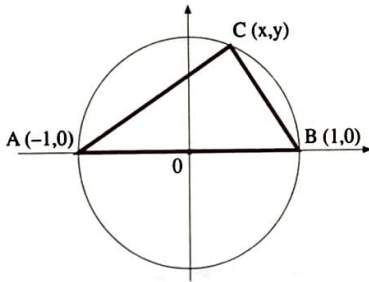
$$\hat{C} = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

Öğretmen ikizkenar üçgenlerdeki ve benzer üçgenlerdeki özellikler yardımı ile ikinci bir çözüm yolu geliştirebilir. Bunun için önce Şekil (a)'da olduğu gibi bir çemberde O merkez. AB çap ve BC üzerinde $|EB| = |EC|$ olacak şekilde bir E noktası seçilebilir.



Şekil (a)'da OCB üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan [OE] doğrusu [CB]'nin kenarortayıdır ve [CB] kenarına diktir. Şekil (b)'de OEB açısının ölçüsü 90° 'dir. C ile A'nın birleştirilmesi ile elde edilen ABC üçgeninde [OE] doğrusu [CB] ve [AB] kenarlarının orta noktalarını birleştiren bir doğru durumuna gelir. Bu durumda iki benzer üçgen elde ettik OEB üçgeni ile ACB üçgeni benzerdir. OEB açısı 90° ise ACB açısı da 90° olur.

Öğretmen üçüncü çözüm yolunu analitik geometri kavramlarını kullanarak öğrencilerine gösterebilir. Bir birim çember üzerinde $A(-1,0)$ ve $B(1,0)$ noktalarını seçebiliriz. C de bu çember üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $\hat{C}$ açısının 90° olduğunu göstereceğiz.



Birim çemberin denkleminin $x^2 + y^2 = 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca [AC]'nin eğimi

$$m_1 = \frac{y-0}{x+1} = \frac{y}{x+1}$$

ve [BC]'nin eğimi

$$m_2 = \frac{y-0}{x-1} = \frac{y}{x-1}$$

dir ve

$$m_1 m_2 = \frac{y}{x+1} \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x^2-1} \quad (1)$$

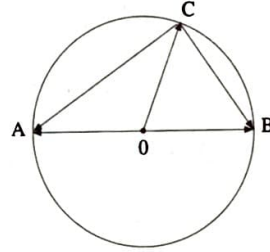
olur. Çember denkleminde $y^2 = 1 - x^2$ (1)'de yerine yazılırsa $m_1 m_2 = \frac{1-x^2}{x^2-1} = \frac{-1(x^2-1)}{x^2-1} = -1$ elde edilir. Eğimlerinin çarpımı -1 olan doğrular birbirlerine dik olduğundan $\hat{C} = 90^\circ$ olduğunu göstermiş oluruz.

Yine öğretmen dördüncü çözüm yolu olarak vektörler yardımı ile bu önermenin doğruluğunu ispat edebilir. Bunun için vektörlerin nokta çarpımları ile ilgili bir ön bilgi verilebilir.

$\vec{u} \neq 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ olmak üzere bu iki vektörün iç çarpımı

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\hat{A}) \text{ 'dır.}$$

Eğer $u \cdot v = 0$ ise $|u| |v| \cos(\hat{A}) = 0$ ve $|u|, |v| \neq 0$ olduğundan $\cos(\hat{A}) = 0$ 'dır. Buradan $\hat{A} = 90^\circ$ olur. Şimdi bu ön bilgiden aşağıdaki şekile dönelim.



$$\begin{aligned} \vec{CA} &= \vec{OA} - \vec{OC}, \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}, \\ |\vec{OA}| &= |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = r \text{ den } \vec{OA} \cdot \vec{OA} = r^2, \\ \vec{OB} \cdot \vec{OB} &= r^2, \vec{OC} \cdot \vec{OC} = r^2, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= -\vec{OC} \cdot \vec{OB}, \\ \text{ve } \vec{OB} &= -\vec{OA} \text{ dan} \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= -\vec{OC} \cdot \vec{OB} \text{ dir. Buradan} \end{aligned}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{OA} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$= \vec{OA} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OC} - \vec{OC} \cdot \vec{OB} + \vec{OC} \cdot \vec{OC}$$

$$= -r^2 + r^2 = 0 \text{ çıkar. Yani } \vec{CA} \perp \vec{CB} \text{ 'dir.}$$

Böylece $\hat{C}$ açısının dik açı olduğu gösterilmiş olur.

Teoremlerin ispatlarının veya problemlerin çözümlerinin böyle farklı çözüm yollarıyla öğrenciye sunulması, başlangıçta birbirinden farklı ve bağımsız olarak düşünülen matematiksel kavramların bir problem çözümü sırasında nasıl iç içe olabildiklerini öğrenciye göstermek bakımından önemlidir. Çünkü öğrenci artık matematiği birbirinden bağımsız ilişkiler ve kurallar yerine, onu birbirine bağlı bir ilişkiler ve kavramlar ağı gibi görmeye başlayacaktır.

Sonuç

Teknolojinin iş hayatı, devlet ve endüstri üzerine etkileri doğrudan doğruya fiziksel, sosyal

ve bilimsel hayatımızı da değiştirdi. Teknolojinin bilimsel hayatımızdaki etkileri matematiğin yeni bir yön kazanmasına neden oldu. Teknolojinin ilerlemesine paralel olarak matematiksel uygulamaların teknolojiye yeri de arttı. matematiksel uygulamaların teknolojiye artması matematiğin içeriğini ve ilgi alanını da değiştirdi.

Belki başlangıçta felsefi olarak kabul edildiğimiz "matematiğin etrafımızdaki dünyayı anlamada bize yardım eden gizemli bir potansiyel sağladığı" gerçeğini şimdi çok açık bir şekilde görüyoruz. Ama bu dramatik değişime rağmen değişmeyen birşey var ki o da okullarda okutulan geleneksel matematik konuları ve matematiğin öğretilme şekli. Matematiğin öğretilme şekli değişmeden devam ediyor. Yüzyıllar öncesinden geldiği gibi, günümüzde de çoğunlukla matematik öğrenmenin, kural ve yöntemlerin ezberlenmesinden ibaret olduğu görülüyor.

Bugün çoğu öğretmen matematikteki başarıyı formülleri, kural ve yöntemleri anında uygun bir şekilde kullanabilme olarak görmekte, formülü veya hesaplamayı doğru icra edebilmeyi yeterli bulmaktadır. Oysa öğrenciyi üretken bir şekilde donatmak, hayatında başarılı olacak şekilde eğitmek, yalnızca onun formülleri bilmesine, hesaplamaları doğru yapmasına değil, matematiksel anlayışının ve matematiksel düşüncesinin gelişmesine bağlıdır.

Bu da okul matematiğinde usüllere değil, kavram ve ilişkilere önem vermekle mümkün olur. O halde matematikte başarılı olmanın ne

anlama geldiğini, matematik öğretiminin amaç ve hedeflerini yeniden tanımlamalı ve tesbit etmeliyiz. Bu yeniden tesbit ile, yarımın okulları için matematikte arzu edilen uygun öğrenme sonuçlarının çerçevesini çizmeye çalışmalıyız. Bunu başardığımızda ancak öğrencilerimizin günlük hayattaki ihtiyaçlarını karşılamada onlara yardımcı olabileceğiz ve toplumun gelecekteki ihtiyaçlarına da cevap vermiş olacağız.

KAYNAKÇA

- [1] Baki, A.(1995) Are we educating teachers in the way we wish them to educate? 27-31 Ağustos 1995 tarihleri arasında Çeşme'de yapılan Öğretmen Eğitimi Dünya Konferansında bildiri olarak sunuldu.
- [2] Hirsch, R.(1985) The Secondary School Mathematics Curriculum. 1985 Yearbook of NCTM. Reston.
- [3] Morrow, L.(1991) Implementing the Standards. *Arithmetic Teachers*, 38, 21-25.
- [4] National Council of Teachers of Mathematics (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston.
- [5] Thomson, A.G.(1992) Teachers' beliefs and conceptions. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York.
- [6] Vygostky, L.S.(1986) *Thought and Language*, MIT, Cambridge.

EKSTREMUM DEĞERLERİ

Selma Atabey *

Bu makalenin amacı, fonksiyonun türevini kullanmadan bazı ifadelerin en küçük ve en büyük değerini bulma yollarını göstermektir.

Okuyucunun dikkatine iki çözüm yolu sunuyoruz. Bunlardan biri, bir ifadenin, $A + \lambda(\mu x - \nu y)^2$ (A, λ, μ, ν sabitler) şekline dönüştürülmesidir.

O zaman,

$$A + \lambda(\mu x + \nu y)^2 \begin{cases} \geq A & , \lambda > 0 \text{ için} \\ \leq A & , \lambda < 0 \text{ için} \end{cases}$$

dir. Burada ancak $\mu x = \nu y$ ise eşitlik vardır.

İkinci yolda ise, yardımcı açılar seçerek verilen ifade sinüs veya kosinüse bağlı fonksiyon olarak elde edilir. Daha sonra bu fonksiyonların sınırları bulunur.

Φ , belli sayıda değişken içeren bir ifade olsun. Bu değişkenlerin bazı değerleri için de Φ nin değeri M olsun. Değişkenlerin tanım kümesinden aldıkları değerlerin her biri için $\Phi \geq M$ ($\Phi \leq M$) ise M ye Φ nin en küçük (en büyük) değeri denir ve $M = \Phi$ en küçük (ϕ en büyük) şeklinde gösterilir. En büyük ya da en küçük değerlere

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi Öğretmeni

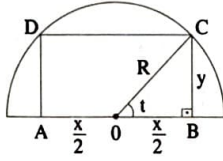
genel olarak ekstremum değeri adı verilir.

İlk önce bir sorunun çözümünü her iki yolla da göstereceğiz. Daha sonra başka sorular inceleyeceğiz ve bu sorularda uygun olan yolu uygulayacağız.

Soru 1:

Yarıçapı R olan bir yarıçemberin içine çizilen ve bir kenarı çap üzerinde olan, diğer iki köşesi de yarı çemberin üzerinde olan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın kenarlarını bulunuz.

Çözüm:



Şekil-1

Dikdörtgenin kenarları $|AB| = x > 0$ ve $|BC| = y > 0$ olsun. (Şekil.1). Bunun alanı $S = x \cdot y$ dir.

I. yol:

OBC üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = R^2$ olur.

$v^2 + v^2 = (u - v)^2 + 2uv$ özdeşliğinden yararlanarak,

$(\frac{x}{2} - y)^2 + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot y = R^2$ bulunur. xy yerine S alırsak,

$$S = R^2 - (\frac{x}{2} - y)^2 \text{ bulunur.}$$

$(\frac{x}{2} - y)^2 \geq 0$ olduğundan, x ve y değişkenlerinin her bir değeri için $S \leq R^2$ dir. Bu da S (en büyük) $= R^2$ olduğunu gösterir. Bunun dışında, S (en büyük) değerinin $\frac{x}{2} = y$ için elde edildiği açıktır.

Aranan $x > 0$ ve $y > 0$ değerleri için

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= y \\ (\frac{x}{2})^2 + y^2 &= R^2 \end{aligned} \right\}$$

denklemleri elde edilir. Bunun çözümü de $x = \sqrt{2}R$, $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ dir.

II. yol:

$t \in (0, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere, t yardımcı açısını seçersek, OBC dik üçgeninden

$$\left. \begin{aligned} x &= 2R \cos t \\ y &= R \sin t \end{aligned} \right\}$$

denklemlerinden

$$S = 2R \cos t \cdot R \sin t = R^2 \sin 2t$$

bulunur.

$2t \in (0, \pi)$ olduğundan, $\sin 2t \leq 1$ dir. Dolayısıyla $S \leq R^2$ dir. S nin en büyük değeri $\sin 2t = 1$, yani $2t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$ için elde edilir. ve bu değer S (en büyük) $= R^2$ için

$$x = 2R \cos \frac{\pi}{4}, \quad y = R \sin \frac{\pi}{4}, \quad \text{yani}$$

$$x = \sqrt{2}R, \quad y = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ olduğu açıktır.}$$

Soru 2:

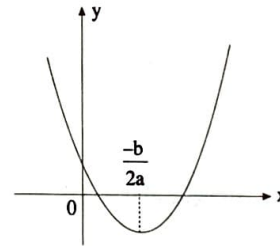
$f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) ikinci derece üçterimlisinin ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm:

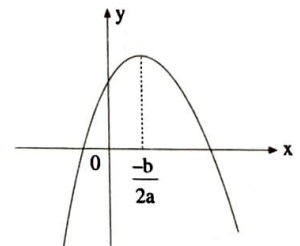
$f(x)$ i aşağıdaki şekilde düzenleyelim:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a[x^2 + 2x \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}] \\ &= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \end{aligned}$$

$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ olduğundan dolayı ekstremum $x = -\frac{b}{2a}$ için vardır. Dolayısıyla, $a > 0$ ise $f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a} = f$ (en küçük) (Şekil -3) dir.



(Şekil-2)



(Şekil-3)

Ayrıca, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin $D = b^2 - 4ac$ diskriminantının işaretine göre $y = f(x)$ in grafiği için aşağıdakiler geçerlidir:

- 1) $D > 0$ ise a -eksenini keser,
- 2) $D = 0$ ise e -eksenine teğettir,
- 3) $D < 0$ ise e -ile ortak noktası yoktur.

Bu yapılan yorumlar bize şunu söylüyor:

Üçterimlilerin veya üçterimliye dönüştürülebilen ifadelerin ekstremum değerleri ile ilgili her bir soru bu yol ile çözülebilir.

Şimdi ise bunun bir uygulamasını görelim:

Soru 3:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerinin kareleri toplamı, bunların aritmetik ortalamasının k katına eşittir.

$$\begin{aligned} S &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots \\ &\quad + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

toplamının en küçük değerini bulunuz.

Çözüm:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = k \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

olduğu verilmiş.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2S$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de S yi tamkareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{k}{2n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k}{2n} \right)^2 - \left(\frac{k}{2n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{k}{2n} \right)^2 - \frac{k^2}{4n^2} \right] \\ &\geq -\frac{k^2}{8n^2} \end{aligned}$$

Böylece $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{k}{2n}$ için S (en küçük) $= -\frac{k^2}{8n^2}$ elde edilir.

Soru 4:

Köşegen uzunluğu d olan dikdörtgenin S alanının değer kümesini bulunuz. Bu dikdörtgenin çevresi en büyük iken S yi bulunuz.

Çözüm:

Dikdörtgenin kenarlarına x ve y diyelim. Bunun alanı $S = xy$ dir. $x^2 + y^2 = d^2$ eşitliğinden $d^2 = (x - y)^2 + 2xy = (x - y)^2 + 2S$ bulunur. Buradan da,

$$S = \frac{1}{2} [d^2 - (x - y)^2] \leq \frac{d^2}{2}$$

bulunur. Eşitlik $x = y$ için olacağından S nin değer kümesi $(0, \frac{d^2}{2}]$ aralığıdır.

Dikdörtgenin çevresi

$$C = 2(x + y) = 2\sqrt{(x + y)^2} \text{ dir.}$$

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) \text{ özdeşliğinden}$$

$$(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x - y)^2 \text{ bulunur.}$$

O zaman,

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{2(x^2 + y^2) - (x - y)^2} = 2\sqrt{2d^2 - (x - y)^2} \\ &\leq 2\sqrt{2}d \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla

C (en büyük) $= 2\sqrt{2}d$ dir ve $x = y$ için elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} x &= y \\ x^2 + y^2 &= d^2 \end{aligned} \right\}$$

denklemlerinden

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} = y \text{ bulunur. Bu durumda}$$

$$S = \frac{d^2}{2} \text{ bulunur.}$$

Soru 5:

ABC üçgeninde $|CB| = a, |CA| = b$ ve $\hat{C} = \gamma$ olsun. AC ve BC kenarları üzerinde sırayla öyle M ve N noktaları bulunuz ki MN doğru parçası ABC üçgenini iki bölgeye ayırdığında bu bölgelerin alanlarının oranı $m : n$ şeklinde olsun (C köşesinden başlayarak) ve MN doğru parçasının uzunluğu en küçük olsun.

Çözüm:



(Şekil-4)

$|CN| = x$ ve $|CM| = y$ den M ve N noktaları belirlenir. S ilgili bölgenin alanını göstermek üzere,

$$S_{MNC} = S_{ABNM} = m : n \text{ ve}$$

$$S_{ABC} = S_{MNC} + S_{ABNM} \text{ den}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = 1 + \frac{S_{ABNM}}{S_{MNC}} = 1 + \frac{n}{m}, \text{ yani}$$

$$S_{MNC} = \frac{m}{m+n} \cdot S_{ABC} \text{ bulunur.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \text{ ve } S_{MNC} = \frac{1}{2}xy \sin \gamma$$

olduğundan

$$\frac{1}{2}xy \sin \gamma = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma, \text{ ya da}$$

$$xy = \frac{m}{m+n} \cdot ab \text{ bulunur.}$$

MNC üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |MN| &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma} = \\ &= \sqrt{(x-y)^2 + 2xy - 2xy \cos \gamma} \\ &= \sqrt{(x-y)^2 + 2(1 - \cos \gamma) \frac{m}{m+n} \cdot ab} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{m}{m+n} ab \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} \\ &= |MN|(\text{en küçük}) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

(Burada $(x-y)^2 \geq 0$ ve $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ olduğu göz önüne alındı). $|MN|$ nin en küçük değeri $x = y$ için elde edilir.

$$\begin{aligned} x &= y \\ xy &= \frac{m}{m+n} \cdot ab \end{aligned}$$

denklem sistemini çözerek, en küçük değer için

$$x = \sqrt{\frac{l}{m+n} \cdot ab} = y$$

bulunur.

Soru 6:

Bir üçgenin bir açısı γ ve bu açının karşı kenarı c olsun. Bu üçgenin çevresi en büyük iken diğer iki kenarını bulunuz.

Çözüm:

Bu üçgenin diğer iki açısı α ve β ve bunların karşı kenarları da sırayla a ve b olsun. O zaman üçgenin çevresi $\zeta = a + b + c$ dir Sinüs teoreminden,

$$a = \lambda \sin \alpha, \quad b = \lambda \sin \beta, \quad c = \lambda \sin \gamma$$

bulunur. (Burada $a = 2R \sin \alpha$ ise üçgenin çevrel çemberinin yarıçapıdır.) Üçüncü eşitlikten,

$$\lambda = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ bulunur. Dolayısıyla, } a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha, \quad b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \text{ ve } \zeta = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta) + c \text{ dir.}$$

$F = \sin \alpha + \sin \beta$ ifadesinin değeri en büyük olduğundan ζ en büyük değere ulaşır.

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\pi - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

dir.

$2 \cos \frac{\gamma}{2} > 0$ ve $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$ den $F(\text{en büyük}) = 2 \cos \frac{\gamma}{2}$ bulunur.

O zaman,

$$\begin{aligned} \zeta(\text{en büyük}) &= \frac{c}{\sin \gamma} \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2} + c \\ &= c \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}}\right) \text{ dir} \end{aligned}$$

ve $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$, yani $\frac{\alpha - \beta}{2} = 0$ ya da $\alpha = \beta$ için elde edilir.

Böylece $\alpha = \beta$, yeni üçgen ikizkenar iken çevresi en büyüktür. Bu üçgen için,

$$a = \frac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = b$$

bulunur.

Soru 7:

$f(x) = \tan x + \cot x$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ fonksiyonunun en büyük değerini ve bu değeri aldığı noktayı bulunuz.

Çözüm:

I. yol: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ise $\tan x < 0$ ve $\cot x < 0$ olur. O zaman $f(x) < 0$ dir.

Dolayısıyla $f(x) = \tan x + \cot x = -|\tan x + \cot x|$

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{(\tan x + \cot x)^2} \\ &= -\sqrt{(\tan x - \cot x)^2 + 4 \tan x \cot x} \\ &= -\sqrt{(\tan x - \cot x)^2 + 4} \leq -2 = f(\text{en büyük}) \end{aligned}$$

olur. Eşitlik $\tan x = \cot x$, yani $\tan^2 x = 1$ veya $\tan x = -1$; $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ için elde edilir. Buradan,

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ bulunur.}$$

II. yol:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{2}{\sin 2x} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$2x \in (\pi, 2\pi)$ den $-1 \leq \sin 2x < 0$ ve $f(x) = \frac{2}{\sin 2x} \leq \frac{2}{-1} = -2 = f(\text{en büyük})$ bulunur.

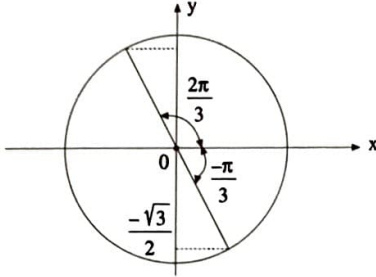
Bu değer $\sin 2x = -1$; $2x \in (\pi, 2\pi)$ için elde edilir. Bu da

$$2x = \frac{3\pi}{2}, \text{ yani } x = \frac{3\pi}{4} \text{ olduğunu gösterir.}$$

Soru 8:

$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$; $x \in [0, \pi]$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm:



(Şekil-5)

Daha genel olarak, $f(x) = a \sin x + b \cos x$; (a, b ve her ikisi de birden sıfıra eşit olmayan) fonksiyonunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonunu sabitler $\sqrt{a^2 + b^2}$ ile çarpıp, bölelim:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

olur.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{ve}$$

$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ve $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olacak biçimde α açısı vardır. Gerçekten,
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$ dir.

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) \\ = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \alpha) \quad \text{dir.}$$

Dolayısıyla $f(x)$ in ekstremum değerlerini bulmak, $\sin(x + \alpha)$ fonksiyonunu sınırlama sorusuna dönüşüyor.

Şimdi ise Soru 8'in çözümüne geçelim:

$$a = 1, b = -\sqrt{3} \quad \text{durumu}$$

Dolayısıyla

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$$

$$= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{dir.}$$

$x \in [0, \pi]$ den $x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3} \right]$ ve $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$ bulunur.

Dolayısıyla, $-\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2$ dir.

Böylece, f (en büyük) = 2 dir. ve bu değer $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$, yani $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \frac{5\pi}{6}$ için elde edilir; f (en küçük) = $-\sqrt{3}$ ve bu değer $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, yani $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ ya da $x = 0$ için elde edilir.

Soru 9:

$f(x) = \frac{1}{\cos^8 x} + \frac{1}{\sin^8 x}$ fonksiyonunun en küçük değerini ve bu değeri aldığı noktayı bulunuz.

Çözüm:

$$x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k = x, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

olduğu açıktır. $u^2 + u^2 = (u+v)^2 - 2uv$ özdeşliğini iki defa uygularsak,

$$f(x) = \frac{\sin^8 x + \cos^8 x}{\sin^8 x \cos^8 x} = \frac{(\sin^4 x)^2 + (\cos^4 x)^2}{\sin^8 x \cos^8 x} \\ = \frac{(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cdot \cos^4 x}{\sin^8 x \cos^8 x} \\ = \frac{[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x]^2 - 2 \sin^4 x \cdot \cos^4 x}{\sin^8 x \cos^8 x} \\ = 2^8 \cdot \frac{[1 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cdot \cos x)]^2 - \frac{1}{8}(2 \sin x \cdot \cos x)^4}{(2 \sin x \cos x)^8} \\ = 2^8 \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x}{\sin^8 2x} \\ \geq 2^8 \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \cdot 1)^2 - \frac{1}{8} \cdot 1}{1} = 32$$

bulunur. (Eşitsizlik kesrin payını küçültürken ve paydasını büyültürken elde edilmiştir.)

Dolayısıyla f (en küçük) = 32 dir. Bu değer $\sin^2 2x = 1$, yani $\sin 2x = \mp 1$ için elde edilir.

Bu denklemin çözümleri:

$$2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{veya} \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad \text{noktalarını verir.}$$

Aşağıdaki soruların çözümlerini de okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz:

Soru 10:

Bir kenarı a ve çevresi $2p$ olan üçgenlerden hangisinin alanı en büyüktür ve bu değer a nın hangi değeri için elde edilir.

Soru 11:

Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamı k ve bu kenarlar arasındaki açı γ ise, bu üçgenin çevresi en küçük iken kenarlarının uzunlukları nedir?

Soru 12:

Bir üçgenin bir açısı γ ve bu açıdan çıkan yükseklik h olsun. Bu üçgenin alanı en küçük iken, kenarları nedir?

Soru 13:

$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini ve ekstremum noktalarını bulunuz.

PİSAGOR ÜÇLÜLERİ

Şafak Alpay *

Aralarında $x^2 + y^2 = z^2$ ilişkisi olan (x, y, z) üçlülerine pisagor üçlülere deniyor [1]. Bir dik üçgenin dik kenarları ile hipotenüsünün böylesi bir üçlü oluşturduğuna dikkat edersek pisagor üçlüsü isminin nereden kaynaklandığına anlarız. Hem Diophantus'un Arithmetica, hem de Öklid'in Elemanlar adlı yapıtlarında pisagor üçlülere üretmek için yöntem verilir. Keyfi seçilen s ve t tamsayıları ile $x = 2st$, $y = s^2 - t^2$, $z = s^2 + t^2$ biçiminde tanımlanan (x, y, z) bir pisagor üçlüsüdür. Pekiyi, acaba tüm pisagor üçlülere bu biçimde betimlenebilir mi? Bu soruyu olumlu olarak yanıtlayan ve Fibonacci olarak bilinen Piza'lı Leonardo (1175-1250) dur [2].

(x, y, z) bir pisagor üçlüsü ise her k doğal sayısı için (kx, ky, kz) de bir pisagor üçlüsüdür. $(3, 4, 5)$ pisagor üçlüsünden $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$ gibi üçlülerin yanısıra sayılabilir sonsuzlukta pisagor üçlüsü elde edebiliriz. Pisagor üçlülerinin tümünü bilmek başka pisagor üçlülerinin katları olarak elde edilemeyenleri bulmak demektir.

Tanım: Ortak bölenleri olmayan x, y, z tamsayılarından oluşan (x, y, z) pisagor üçlüsüne temel (öz) pisagor üçlüsü denir.

Örneğin $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$ temel pisagor üçlülere iken $(10, 24, 26)$ değildir. Temel pisagor üçlülere tanımı böylesi üçlülere oluşturan sayıların ortak bölenleri olmadığını söylüyor. Buradan Aritmetiğin Temel Teoremi ve Öklid önermesi ile x, y, z sayılarından herhangi ikisinin de ortak bölenleri olmadığını (yani, aralarında asal olduklarını) gösterebiliriz [3].

Temel pisagor üçlülerinin kanıtını [3] te bulabileceğiniz dikkate değer bir özelliği vardır.

Önerme: Temel pisagor üçlüsü (x, y, z) de x, y sayılarından biri tek, diğeri çift sayıdır.

Bu önermeden (x, y, z) temel pisagor üçlüsündeki sayıların hepsinin asal olamayacağını elde ederiz. (Nasıl?). Ancak z ve x veya y den birinin asal olduğu temel pisagor üçlülere vardır. $(3, 4, 5)$, $(11, 60, 61)$ ve $(19, 180, 181)$

böylesi üçlülerdir. Böyle temel pisagor üçlülerinin sayılabilir sonsuzlukta olup olmadıklarını bilmiyoruz. Temel pisagor üçlüsü (x, y, z) de x ve y sayılarından sadece biri çift sayı olabilir. Bundan böyle temel pisagor üçlüsü (x, y, z) de x in çift, y nin tek olduğunu varsayacağız. Bu durumda z de tek olmalıdır. Tersisi durum x ve z 'nin en büyük ortak böleninin $(x, z) \geq 2$ gerektirir ki, bu bir çelişkidir.

Teorem: Temel pisagor üçlüsü (x, y, z) , aralarında asal s ve t ($s > t > 0$) sayıları için

$$x = 2st, \quad y = s^2 - t^2, \quad z = s^2 + t^2$$

ile betimlenir. s ve t den biri tek, diğeri çift sayılardır.

Kanıt: İlk iş (x, y, z) gibi keyfi bir temel pisagor üçlüsünün, bulunabilecek s ve t için yukarıdaki gibi olduğudur. y in çift, y ve z 'nin her ikisinin de tek olduğunu varsaydığımızdan $z + y$ ve $z - y$ sayıları çifttirler. Bu nedenle, u ve v doğal sayıları için $z + y = 2u$ ve $z - y = 2v$ alacağız. Şimdi $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

biçiminde yazıp, 4 ile bölerek

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z+y}{2}\right)\left(\frac{z-y}{2}\right) = uv$$

buluruz. $(u, v) = d$ deyip, $d > 1$ varsayalım. $d|(u - v), d|(u + v)$, başka bir deyişle, $d|y, d|z$ olacağından, bu varsayalım bizi $(y, z) \neq 1$ aykırılığına götürür. Yani $(u, v) = 1$ olmalıdır. Aralarında asal olan iki sayının çarpımı bir kareye eşitse kendileri de kare olmalıdırlar (!). Bu gerçeği u, v çiftine uyguluyarak u ve v 'nin her ikisinin de kare olmasını buluruz. $u = s^2$, $v = t^2$ diyelim ve bunları yerlerine koyalım.

$$\begin{aligned} z &= u + v = s^2 + t^2 \\ y &= u - v = s^2 - t^2 \\ x &= 4uv = 4s^2t^2 \quad \text{veya} \quad x = 2st \end{aligned}$$

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

buluruz. s ve t nin ortak bölenleri y ve z y yi de böleceklerinden $(y, z) = 1$ gerçeği $(s, t) = 1$ gerektirir. s ve t sayılarının her ikisinin de çift veya tek olması y ve z yi çift yapacaklarından s ve t sayılarının biri çift, diğeri tek olmalıdır.

Kanıtta geri kalan tek şey koşulları sağlayan (x, y) üçlüsünün pisagor üçlüsü olduğudur. Bunu kendiniz yapabileceğiniz gibi, [3] te de bulabilirsiniz. Aşağıdaki önermenin kanıtı da [3] de bulunabilir.

Önerme: (x, y, z) temel pisagor üçlüsünde x veya y , 3 ile bölünebilir.

Matematik yarışmaları yüzyıllar boyunca yaygın bir eğlence türü ve yarışmacılar içinse ek-mek kapısı olmuştur. Fibonacci'nin böylesi bir yarışmada çözdüğü soru onun pisagor üçlülere hakkında bilgi sahibi olduğunu gösteriyor.

Soru: $x^2 + 5$ ve $x^2 - 5$ sayılarının rasyonel sayıların kareleri olduğu bir x sayısı var mıdır?

Yanıt: Çözüm, rasyonel sayılar kümesinde arandığından x , $a = x^2 + 5$ ve $b = x^2 - 5$ sayılarını paydaları aynı olan

$$x = \frac{x_1}{d}, \quad a = \frac{a_1}{d}, \quad b = \frac{b_1}{d}$$

olarak alalım. Bu değerleri yerine koyarsak

$$(1) x_1^2 + 5d^2 = a_1^2 \quad (2) x_1^2 - 5d^2 = b_1^2$$

buluruz. (1) - (2) ifadesini hesaplırsak

$$10d^2 = a_1^2 - b_1^2 = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1)$$

buluruz. Sol taraf çift olduğundan, a_1 ve b_1 sayılarının her ikisi de ya tek, ya da çifttirler. Dolayısı ile $a_1 - b_1$ çift bir sayıdır. Şimdi $a_1 - b_1 = 2k$ diyelim. Buradan

$$a_1 + b_1 = \frac{5d^2}{k}$$

elde ederiz. a_1 ve b_1 için çözersek

$$a_1 = \frac{5d^2}{2k} + k, \quad b_1 = \frac{5d^2}{2k} - k$$

bulur. (1) ve (2) de yerine koyarsak

$$x_1^2 + 5d^2 = \left(\frac{5d^2}{2k} + k\right)^2 = \left(\frac{5d^2}{2k}\right)^2 + 5d^2 + k^2$$

$$x_1 - 5d^2 = \left(\frac{5d^2}{2k} - k\right)^2 = \left(\frac{5d^2}{2k}\right)^2 - 5d^2 + k$$

Son eşitlikleri toplayarak

$$k + \left(\frac{5d^2}{2k}\right)^2 = x_1^2$$

bulunur. Bu eşitlik $(k, \frac{5d^2}{2k}, x_1)$ üçlüsünü pisagor üçlüsü olduğunu söyler. Dolayısı ile temel bir pisagor üçlüsü $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ ve bir t tamsayısı için

$$k = (2mn)t, \quad \frac{5d^2}{2k} = (m^2 - n^2)t, \quad x_1 = (m^2 + n^2)t$$

sağlanmalıdır. İlk iki eşitliği çarpıp, k sayısını yok edersek $5d^2 = 4mn(m^2 - n^2)t^2$ buluruz. Şimdi aramamız gereken hangi m ve n tamsayıları için sağ tarafın bir karenin 5 katının olduğudur. İşe, $m = 5$ alıp, başlırsak

$$d^2 = 4n(5^2 - n^2)t^2$$

buluruz. Sağ tarafın kare olması için $n = 4$ alalım. Bundan

$$d^2 = 4 \cdot 4(5^2 - 4^2)t^2 = 16 \cdot 9t^2 = (12t)^2$$

bulunur. m ve n 'nin bu değerleri

$$x_1 = (m^2 + n^2)t = (5^2 + 4^2)t = 41t$$

veya

$$x = \frac{x_1}{d} = \frac{41t}{12t} = \frac{41}{12}$$

verir.

KAYNAKÇA

- [1] Alev TOPUZOĞLU, Pisagor Teoremi: Ya Öncesi? *Matematik Dünyası* Cilt1, Sayı2
- [2] Şafak ALPAY, Karanlık Çağın Aydınlığı: Fibonacci. *Bilim ve Ütopya*, Ocak 1995
- [3] Şafak ALPAY, Pisagor üçlülere. *Bilim ve Ütopya*, Ağustos 1996

HARFLERLE SAYI YAZILIŞI, ÇÖZÜM

R. İlknur Koçak *

Sayfa 4 teki yazının devamıdır.

Harflerin değerlerini tahmin ederek şu şekilde 29'a kadar ulaşabildim:

$$\begin{array}{lll} b = -3 & k = -8 & d = 8 \\ i = 5 & ü = 2 & ö = -6 \\ r = -1 & ç = 1 & t = 3 \\ u = -34 & n = -15 & m = 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e = 10 & l = -7 & s = -17 \\ ş = -2 & ı = 6 & z = 18 \\ a = 4 & y = -16 & o = 25 \end{array}$$

Fakat sistemli bir şekilde tam bir çözümü nasıl sağlayabiliriz. İlk olarak, ulaşabileceğimiz en büyük sayı kaç olabilir? Bu soru üzerinde biraz düşününce 199 sayısının elbette bir üst sınır olabileceğini bulabiliriz. 200 sayısını elde etmek imkansızdır; çünkü bu sayının harf değerleri toplamı 102'dir. Örneğin: $i = -3$ $ü = 30$

$$k = 8 \quad z = 20 \quad y = 50 \text{ olsun.}$$

$$\text{O zaman: } i + k + i = -3 + 8 - 3 = 2$$

$$y + ü + z = 50 + 30 + 20 = 100$$

$$i + k + i + y + ü + z = -3 + 8 - 3 + 50 + 30 + 20 = 102$$

199 sayısına ulaşabilmemiz için gereken farklı denklemlere bakmamız gerekir. Denklemler şöyle gösterilmiştir:

1. $b + i + r = 1$
2. $2i + k = 2$
3. $ü + ç = 3$
4. $d + ö + r + t = 4$
5. $b + e + ş = 5$
6. $a + l + t + ı = 6$
7. $y + e + d + i = 7$

8. $s + e + k + i + z = 8$
9. $d + o + k + u + z = 9$
10. $o + n = 10$
11. $y + 2i + r + m = 20$
12. $o + t + u + z = 30$
13. $2k + ı + r = 40$
14. $e + 2l + i = 50$
15. $a + l + t + m + ı + ş = 60$
16. $y + e + t + m + i + ş = 70$
17. $2s + 2e + k + n = 80$
18. $d + o + k + s + a + n = 90$
19. $y + ü + z = 100$

Elimizde 19 farklı denklem vardır. Bu denklemlere matematikte "Lineer Diyofantin Sistemi" denir. Bu gibi sistemlerin çözüm kümesinde sadece ve sadece tam sayılar istenir. 11, 94, 187, ... gibi sayılar yukarıdaki listede yer almadı; çünkü bu sayılar yeni bağımsız denklemler oluşturmuyor. Bunlar mevcut denklemlerin toplanmasıyla elde edilir. Örneğin, 11 sayısı 2 denklemin, **on** ve **bir**, toplamıdır: $o + n + b + i + r = 11$. Yine aynı şekilde örneğin 187 sayısı 3 denklemin, **yüz**, **seksen** ve **yedi** toplamıdır.

Şimdi 199 sayısına ulaşabilmemiz için gereken değişken sayısına bakalım:

$$a, b, ç, d, e, ı, i, k, l, m, n, \\ o, ö, r, s, ş, t, u, ü, y, z$$

harflerinin sayısı 21'dir. Elimizde 19 denklemin ve 21 değişkenin olması nedeniyle her 19 değişkeni diğer 2 değişken cinsinden bulabiliriz. Ben **e** ve **ç** değişkenlerini parametre değişkenleri olarak seçtim. 19 denklemin bu 2 parametre değişkeni cinsinden yazılışı aşağıdaki gibidir.

* Özel İzmir Amerikan Lisesi, 2. Sınıf Öğrencisi

1. $b + i + r = 1$
2. $2i + k = 2$
3. $\ddot{u} = 3 - \varsigma$
4. $d + \ddot{o} + r + t = 4$
5. $b + \varsigma = 5 - e$
6. $a + l + t + i = 6$
7. $y + d + i = 7 - e$
8. $s + k + i + z = 8 - e$
9. $d + o + k + u + z = 9$
10. $o + n = 10$
11. $y + 2i + r + m = 20$
12. $o + t + u + z = 30$
13. $2k + i + r = 40$
14. $2l + i = 50 - e$
15. $a + l + t + m + i + \varsigma = 60$
17. $y + t + m + i + \varsigma = 70 - e$
18. $s + k + n = 80 - 2e$
19. $d + o + k + s + a + n = 90$

19 denklemi ve 19 değişkeni, 2 değişkeni parametre olan, bu sistemi çözüm kümesinde sadece tam sayıların bulunacağını ümit ederek matris teknikleriyle çözdüm. A , katsayıların 19×19 kare matrisi olsun; B , 19 değişkenin 19×1 sütun matrisi olsun; ve C , parametrik ifadelerin 19×1 sütun matrisi olsun. O zaman yukarıda gösterilen denklem sistemi $AB = C$ şeklinde yazılabilir. Eğer A matrisinin tersi olan A^{-1} matrisi varsa matris denkleminin her iki tarafını soldan A^{-1} ile çarpabiliriz. $A^{-1}AB = A^{-1}C$ ve $B = A^{-1}C$. Böylece 19 değişkenin sütun matrisi buluruz.

Bu sistemin oluşturduğu 19×19 kare matrisi tersine çevirebilmek için Lotus 1-2-3 adlı bilgisayar programından yararlandım. Bu matris işlemlerinin hepsi tamamlandıktan sonra sistemimiz şöyle çözümlenir:

$$\begin{aligned} b &= -307.5 - \varsigma - 1.5 e \\ r &= 301.5 + \varsigma + 1.5 e \\ \ddot{u} &= 30 - \varsigma \\ i &= 7 \\ d &= 37 \\ \ddot{o} &= -380.5 - \varsigma - 1.5 e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 46 \\ k &= -12 \\ \varsigma &= 312.5 + \varsigma + 0.5 e \\ a &= 176 + \varsigma + 2e \\ l &= 21.5 - 0.5 e \\ i &= -237.5 - \varsigma - 1.5 e \\ y &= -37 - e \\ s &= -121 - \varsigma - 2 e \\ z &= 134 - 2 \varsigma + e \\ o &= -324 - 2 \varsigma - 2 e \\ u &= 174 + \varsigma + e \\ n &= 334 + 2 \varsigma + 2 e \\ m &= -258.5 - \varsigma - 0.5 e \end{aligned}$$

Bu sonuçlar gösteriyor ki e değişkeni tek bir tamsayı ve ς değişkeni herhangi bir tamsayı olduğu sürece bu 19 değişkenin aldığı tamsayı değerleri buluruz:

$$\begin{array}{lll} b = -309 & k = -12 & z = 135 \\ r = 303 & \varsigma = 313 & o = -326 \\ \ddot{u} = 3 & a = 178 & u = 175 \\ i = 7 & l = 21 & n = 336 \\ d = 37 & i = -239 & m = -259 \\ \ddot{o} = -382 & y = -38 & e = 1 \\ t = 46 & s = -123 & \varsigma = 0 \end{array}$$

ς değişkenini başka bir tamsayı ve e değişkenini başka bir tek tamsayı seçerek yeni bir çözüm kümesi elde edebiliriz. Ve ilginç olan nokta şu ki, her bir çözüm kümesinde i , d , t , k değişkenleri sabit değerlere sahip olurlar. Alfabedeki her harfin tam sayı değerlerini tahmin etmeye çalışan bir insanın sabit değerlere sahip olan bu değişkenleri doğru olarak tahmin etmesi gerekir. Aksi takdirde hiçbir zaman 21 değişkenin değerini bulamayabilir.

Şimdi size henüz incelemediğim başka bir soru. Sıfırdan 199'a kadar sayma sayıların yazılışını sağlayabilir misiniz?

Türkçenin bu oyundaki zenginliğini anladım. Oyunun fikri alınan Ian Stewart'ın makalesinde, yazar tam sayıların İngilizcedeki yazılışında 12 sayısının en küçük üst sınır olduğunu kanıtlamış. Yazar ayrıca Fransızcada sadece 0 dan 13 e kadar ve Almancada sadece 1 den 29 a kadar sayıların yazılabileceğini kanıtlamış. Ben bu oyunda Türkçede 1 den 199 a kadar sonsuz çözüm kümelerinin olduğunu gösterdim.

GRAFİKLERİ TASARLANAMIYAN SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Nurettin Ergun *

Gerçek değişkenli ve gerçek değerli sürekli bir fonksiyonun grafiğinin hiç kesiklilik göstermeden, hiç sıçrama ve atlama yapmadan kısacası elin hiç kaldırılmadan çizilmesi gerektiğini hepimiz biliriz. Peki ama böyle bir sürekli fonksiyonun, tanımlandığı aralığın **herhangi bir alt aralığında** ne sabit kalan, ne monoton artan ne de monoton azalan bir grafiğe sahip olması olası mıdır?

Bu nitelikteki bir fonksiyonun grafiğini korkunç ve sonsuz sıklıkta, düşünsel olarak tasarlanamaz, başka bir deyimle akıl erdirilemez bir biçimde titreşimler ya da salınımlar yapması gerektiğini düşünebiliriz. Ama grafiğin, sonsuz küçük uzunluktaki bir alt aralıkta bile, kesiklilik göstermeden, sıçrama ve atlamalar yapmadan inip çıkması ya da sabit bir değerde gitmesi nasıl gerçekleşecektir? Çünkü grafiğin **herhangi bir alt aralıkta** azalması ya da artması ya da sabitlenmesi istenmemektedir! O halde böyle bir grafiğe sahip sürekli bir gerçek değerli fonksiyonun var olamayacağı yargısına varabilirsiniz. Oysa var oldukları bu yazıda örneklerle gösterilecek olan böylesi fonksiyonlarla, onyedinci yüzyıl ortasından beri büyük matematikçilerin çoğunu uğraştıran aşağıdaki şu olağanüstü ilginç sorunun çözümü sıkı biçimde ilişkilidir:

Soru: Tanımlandığı aralıktaki tüm noktalarda sürekli olan oysa bu aralığın hiç bir noktasında türetilmeyen (türevi olmayan) gerçek değerli bir fonksiyon var mıdır?

Hiçbir noktada türetilmeyen sürekli gerçek değerli bir fonksiyonun, uzunluğu ne denli küçük olursa olsun bir alt aralıkta bile) monoton artması ya da monoton azalması ya da sabit olması söz konusu olamayacaktır. Çünkü, bir aralıkta sabit olan (sabit bir c değerinde giden) bir fonksiyon bu aralığın her noktasında türetilbilirdir ve türev değeri sıfırdır. Ayrıca bu yüzyılın başında kanıtlanan ilginç sonuçlardan birisine göre, gerçek değerli bir fonksiyon, mono-

ton olduğu bir aralıkta (tüm noktalarında sürekli olmasa bile) bu aralıktaki pek çok noktada türetilbilirdir.

Sürekli olduğu aralığın **pek çok noktasında** türetilmeyen gerçek değerli bazı fonksiyon örneklerini sanırım çoğumuz biliriz. Bunlara tipik bir örnek

$$g(x) = \min\{x - [x], [x] + 1 - x\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$= \begin{cases} x - k & ; \quad x \in [k, k + \frac{1}{2}] \\ k + 1 - x & ; \quad x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1] \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

fonksiyonudur. Burada $[x] = \max((-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$, her zaman olduğu gibi x gerçek sayısının tam değerini göstermektedir. Testere dişlisi gibi bir grafiğe sahip olduğu için g fonksiyonuna kimileri testere fonksiyonu adını verir. Kolayca gözlenebileceği gibi g fonksiyonu sınırlıdır, çünkü her x gerçek sayısı için $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ gerçekleşir. $g(x)$ gerçek sayısı aslında x ile ona en yakın tam sayı arasındaki uzaklık değeridir. Tüm gerçek sayılarda sürekli olan bu fonksiyon ($|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$ gerçekleşir) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ rasyonel sayılarında türetilmez, çünkü kolayca gözlenebileceği gibi, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(k + \frac{1}{2} + h) - g(k + \frac{1}{2})}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(k + \frac{1}{2} + h) - g(k + \frac{1}{2})}{h} = 1$$

gerçeklenmektedir. Burada yeri gelmişken, herhangi bir x gerçek sayısı için, ona en yakın tam sayıyı k_x ile gösterirsek, bir $-\frac{1}{2} \leq \beta_x \leq \frac{1}{2}$ sayesinde $x = k_x + \beta_x$ yazılışının geçerli olduğunu gözlöyünüz. Evet, şimdi sorumuza geri dönelim. Tanımlı ve sürekli olduğu aralığın hiç bir noktasında türetilmeyen gerçek değerli bir fonksiyon var mıdır?

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Lütfen dikkat: Bu nitelikte bir fonksiyon bulunabilirse, aynı nitelikte sonsuz çoklukta fonksiyonun varlığı kolayca gösterilebilir! Nasıl mı? Bu garip nitelikteki bir f fonksiyonu ile, derecesi ve katsayıları ne olursa olsun, herhangi bir p polinomunun toplamı olan $f + p$ gerçel değerli fonksiyonu da sürekli olmasına karşın, sözü edilen aralıkta hiç bir noktada türetilemez; neden? Uzatmadan söyleyelim: Bu nitelikte fonksiyonlar **vardır!** Bu yanıtı iki biçimde verebilirsiniz. Ya Çek matematikçi Bolzano ve usta Alman matematikçileri Riemann ve Weierstrass'ın ondokuzuncu yüzyılın ortalarında yaptığı gibi bu nitelikteki bazı somut fonksiyon örnekleri vererek ya da Polonyalı usta matematikçi Stefan Banach'ın 1920 yılında yaptığı gibi, bu nitelikte fonksiyonların var olduklarını bir varlık teoremi ile kanıtlayarak. Banach'ın dahiyane kanıtlamasını burada vermek doğrusu pek olanaklı değildir, ciddi düzeyde topoloji bilgisi gereklidir. Biz bu yazıda yalnızca tarihi bazı örnekleri incelemek istiyoruz. Öncelikle Weierstrass'ın 1875 yılında verdiği şu örneklerle bakalım:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(N^k \pi x) \quad (0 < a < 1)$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 \pi x)}{k^2}$$

Bu fonksiyonlar $\mathbb{R}$ kümesinde yani $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve süreklidirler, oysa hiçbir gerçel sayıda türetilemezler. Böyle fonksiyonlara, matematikte, her yerde sürekli hiç bir yerde türetilemiyen fonksiyon denir. f fonksiyonunun tanımında kullanılan a pozitif sayısı ile

$$\frac{1}{a} + \frac{3\pi}{2a} < N$$

koşulunu gerçekleyen ve tek bir doğal sayı olan N sabittir. h fonksiyonunun istenilen nitelikte olduğunu, çok uğraşmasına karşın Weierstrass kanıtlayamamış, onun bu özelliklerini usta İngiliz matematikçi Hardy 1916 yılında kanıtlamıştır. Hardy üstelik $1 \leq aN$ gerçekleştiğinde bile f fonksiyonunun istenilen nitelikte olduğunu göstermiştir. İlgilenenler onun [1] makalesine başvurabilirler. Biz bu yazımızda önce yukardaki f fonksiyonunu ardından da daha kolay bir başka örneği inceleyeceğiz. Açıkça söylemekte yarar vardır: Bu yazıda limit kavramı ciddi bir şekilde kullanılmaktadır. Kanıtlamaların güç olmadığını söyleyebiliriz. Sakın okumaktan vazgeçmeyin!

Kanıtlamalar

Önce şunları gözleyelim. Eğer f_n gerçel değerli sürekli fonksiyonları bir M sabiti için

$$\text{Her } x \in \mathbb{R} \text{ için } |f_n(x)| \leq M$$

ve a sabit gerçel sayısı da $0 < a < 1$ koşulunu gerçekliyorsay,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f_k(x)$$

şeklinde tanımlanan gerçel değerli F fonksiyonu her yerde hem sınırlıdır, çünkü $|F(x)| \leq \frac{1-a}{M}$ gerçeklenir; üstelik sürekli çünkü

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a^k |f_k(x) - f_k(x_0)|$$

nedeniyle x_0 gerçel sayısının uygun bir $(x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$ civarındaki her x için $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ gerçeklenir. Nasıl mı? Önce $0 < a^K < \frac{\epsilon(1-a)}{4(1+M)}$ koşulunu gerçekleyen, yeterince büyük K doğal sayısı belirlenirse

$$\sum_{k=K}^{\infty} a^k |f_k(x) - f_k(x_0)| \leq 2M \sum_{k=K}^{\infty} a^k = \frac{2Ma^K}{1-a} < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizlikleri her x gerçel sayısı için geçerli olur. Sonra f_k ($k = 0, \dots, K-1$) fonksiyonlarının x_0 noktasında sürekli olmaları nedeniyle $x \in (x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k)$ ise $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{2K}$ olacak biçimde pozitif δ_k sayıları belirlenir. Eğer $0 < \delta_\epsilon < \min \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{K-1}\}$ seçilirse, her $x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$ ve $0 \leq k \leq K-1$ için $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{2K}$ olur, neden? Sonuçta bu x ler için

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &\leq \sum_{k=0}^{K-1} a^k |f_k(x) - f_k(x_0)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \sum_{k=0}^{K-1} |f_k(x) - f_k(x_0)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki F fonksiyonu, herhangi bir x_0 gerçel sayısında sürekli olmaktadır.

Şimdi de şunları gözleyelim. Yukarıda verilen f fonksiyonu tüm yukarıda anlatılanlar nedeniyle her yerde sürekli ve üstelik sınırlı bir gerçel

değerli fonksiyondur, neden? Bundan sonrasında x gelişigüzel ele alınan ama sabit tutulan bir gerçel sayıyı gösterecektir. Dikkat edilirse

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = S_n(h) + R_n(h) \quad (1)$$

olup, burada

$$S_n(h) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{\cos(N^k \pi(x+h)) - \cos(N^k \pi x)}{h},$$

$$R_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{\cos(N^k \pi(x+h)) - \cos(N^k \pi x)}{h}$$

yazılmıştır. Bir kez daha anımsatalım: Pozitif h lerle oynayacağız, x gerçel sayısı artık sabit tutulmuştur.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(N^k \pi(x+h)) - \cos(N^k \pi x)}{h} \\ = -N^k \pi \sin(N^k \pi(x+h'_k)) \end{aligned}$$

gerçekleşecek biçimde bir $0 < h'_k < h$ var olduğunu Ortalama Değer Teoreminden biliyoruz. O halde $0 < h$ ne olursa olsun

$$\begin{aligned} |S_n(h)| &\leq \pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (aN)^k |\sin(N^k \pi(x+h'_k))| \\ &\leq \pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (aN)^k = \frac{\pi((aN)^n - 1)}{aN - 1} \\ &< \frac{\pi(aN)^n}{aN - 1} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Her k doğal sayısı için.

$$N^k x = \alpha_k + \beta_k, \alpha_k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta_k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

gerçeklendiğini daha önce gözlemiştik. $h_k = \frac{1}{N^k}(1 - \beta_k)$ için $\frac{1}{2N^k} \leq h_k \leq \frac{3}{2N^k}$ ve dolayısı ile

$$\frac{2N^k}{3} \leq \frac{1}{h_k} \leq 2N^k \quad (*)$$

geçerlidir. Şimdi amacımız $|R_n(h_n)| \geq \frac{2(aN)^n}{3}$ göstermek olacaktır. Tüm $k \geq n$ doğal sayıları için

$$\begin{aligned} N^k \pi(x+h_n) &= N^{k-n} \pi(N^n x + 1 - \beta_n) \\ &= N^{k-n} \pi(1 + \alpha_n) \end{aligned}$$

ve N doğal sayısı ile onun tüm doğal sayı kuvvetleri tek olduğundan, her $k \in \mathbb{Z}$ için $\cos k\pi = (-1)^k$ bağıntısı yardımı ile

$$\begin{aligned} \cos(N^k \pi(x+h_n)) &= \cos(N^{k-n} \pi(1 + \alpha_n)) \\ &= [(-1)^{N^{k-n}}]^{(1+\alpha_n)} \\ &= (-1)^{1+\alpha_n}, \\ \cos(N^k \pi x) &= \cos(N^{k-n} \pi(\alpha_n + \beta_n)) \\ &= \cos(N^{k-n} \alpha_n \pi) \cdot \cos(N^{k-n} \beta_n \pi) \\ &= (-1)^{\alpha_n} \cdot \cos(N^{k-n} \pi \beta_n) \end{aligned}$$

ve sonuçta

$$\begin{aligned} |R_n(h_n)| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n} (1 + \cos(N^{k-n} \pi \beta_n))}{h_n} \right| \\ &= \frac{1}{h_n} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} a^k (1 + \cos(N^{k-n} \pi \beta_n)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son yakınsak serinin tüm terimleri pozitif olduklarından (neden?) bu serinin toplamı ilk teriminden büyüktür, o halde

$$|R_n(h_n)| \geq \frac{1}{h_n} a^n (1 + \cos(\pi \beta_n)) \geq \frac{a^n}{h_n} \geq \frac{2(aN)^n}{3}$$

bulunur. Dikkat $0 \leq \cos(\pi \beta_n)$ kullanıldı, çünkü $-\frac{\pi}{2} \leq \pi \beta_n \leq \frac{\pi}{2}$ geçerlidir. O halde $|a+b| \geq |a| - |b|$ nedeniyle, sözü edilen x gerçel sayısı için

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| \geq |R_n(h_n)| - |S_n(h_n)|$$

$$\begin{aligned} &> \frac{2(aN)^n}{3} - \frac{\pi(aN)^n}{aN - 1} \\ &= (aN)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{aN - 1} \right) = c(aN)^n \end{aligned}$$

bulunur. Burada c sabiti N doğal sayısının seçiminden ötürü pozitiftir ve $1 < aN$ olduğu için sonuçta, $n \rightarrow \infty$ için $h_n \rightarrow 0$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| = +\infty$$

gerçekleştiği anlaşılır. Böylelikle her yerde sürekli olan sınırlı f fonksiyonunun, gerçekten, ele alınan herhangi bir gerçel sayıda türetilbilir olmadığını anlarız. Bu yazının son kısmında benzer nitelikte olup incelenmesi biraz daha kolay bir fonksiyonu görelim. Bu yeni fonksiyon, $4 \leq N$ koşulunu

gerçekleyen sabit tutulmuş çift bir N doğal sayısı yardımıyla tanımlanan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{N-1}{N} \right)^k \cdot \varphi(N^k x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

fonksiyonu olup, burda φ fonksiyonu

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - 2k & ; \quad x \in [2k, 2k + x] \\ 2k + 2 - x & ; \quad x \in [2k + 1, 2k + 2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ve her x gerçel sayısı için $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ gerçeklediği kolaşca gözlenen bir başka testere fonksiyonudur. Dikkat edilirse φ fonksiyonu, $[-1, 1]$ aralığındaki $|x|$ fonksiyonunun, tüm gerçel sayılar kümesine 2-periyodlu olarak genişletilmişinden başka bir şey değildir. $x, y \in \mathbb{Z}$ ne olursa olsun.

$$\varphi(x + 2) = \varphi(x),$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y| \quad (*)$$

gerçeklendiği kolayca gözlenecektir. Özel olarak x ve y iki ardışık tam sayı arasında yer alıyorsa $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ gerçekleşmektedir. Tüm bu nedenlerden ötürü bu yeni f fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ gerçel sayılar kümesinde sürekli ve sınırlı olur, neden? Şimdi yine x gerçel sayısını sabit alıp, önceki örnekte olduğu gibi (1) bağıntısını gözönüne alalım. Önce

$$h_n = \frac{1}{2N^n} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} + [N^n x] - N^n x\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

rasyonel sayılarını tanımlayalım; Köşeli parantez yine tam kısım değerini göstermektedir. Dikkat edilirse tanımda geçen işaret (signum) fonksiyonu nedeniyle ya

$$[N^n x] \leq N^n x < N^n(x + h_n) < [N^n x] + 1$$

ya da

$$[N^n x] \leq N^n(x + h_n) < N^n x < [N^n x] + 1$$

gerçeklenir; başka bir deyimle, ardışık iki tam sayı arasında yer alan bu gerçel sayılardaki değerleri için φ fonksiyonu

$$|\varphi(N^n(x + h_n)) - \varphi(N^n x)| = N^n |h_n|$$

gerçekler. Dikkat edilirse her $k > n$ için

$$N^k(x + h_n) = N^k x \mp \frac{1}{2} N^{k-n}$$

gerçekleşmesi, N ve $\frac{1}{2} N^{k-n}$ doğal sayılarının çift ve φ fonksiyonunun 2-periyotlu olması nedeniyle, sonuçta her $k > n$ için $\varphi(N^k(x + h_n)) = \varphi(N^k x)$ bulunur. O halde bu f fonksiyonu için, yukarıdaki gösterimle, $R_{n+1}(h_n) = 0$ ve sonuçta, yine $|a + b| \geq |a| - |b|$ eşitsizliğini aşağıdaki ilk eşitsizliğe geçerken kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right| \\ &= |S_{n+1}(h_n) + R_{n+1}(h_n)| \geq |S_{n+1}(h_n)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(\frac{N-1}{N} \right)^k \frac{\varphi(N^k(x + h_n)) - \varphi(N^k x)}{h_n} \right| \\ &\geq \left(\frac{N-1}{N} \right)^n \left| \frac{\varphi(N^n(x + h_n)) - \varphi(N^n x)}{h_n} \right| \\ &\quad - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{N-1}{N} \right)^k \frac{\varphi(N^k(x + h_n)) - \varphi(N^k x)}{h_n} \right| \\ &\geq (N-1)^n - \sum_{k=0}^{n-1} (N-1)^k \\ &= \frac{(N-1)^{n+1} - 2(N-1) + 1}{N-2} > \frac{1}{2} 3^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

bulunur, çünkü $0 \leq k \leq n-1$ için (*) nedeniyle

$$\left(\frac{N-1}{N} \right)^k \left| \frac{\varphi(N^k(x + h_n)) - \varphi(N^k x)}{h_n} \right| \leq (N-1)^k$$

geçerlidir. Demek ki $n \rightarrow \infty$ için yine

$$h_n \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \left| \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right| \rightarrow +\infty$$

olmaktadır. Kısacası bu f fonksiyonu da hiç bir x gerçel sayısında türetilemez! Evet, ne dersiniz,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((13)^k \pi x)}{2^k},$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k \varphi(4^k x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

fonksiyonlarının grafikleri acaba neye benzer?

KAYNAKÇA

- [1] G.H.Hardy, *Trans.Amer.Math.Soc.* 17(1916), 301 - 305

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A136. Bir torbada başlangıçta a tanesi kırmızı, b tanesi beyaz ve c tanesi de siyah olmak üzere toplam 20 top bulunmaktadır.

(i) Beyaz topların sayısı iki katına çıkarıldıktan sonra torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığının, başlangıçtaki torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığından $\frac{1}{25}$ daha az olduğu ve

(ii) torbadaki bütün kırmızı toplar çıkartılıp geri kalanlar arasında rastgele bir top çekildiğinde bu topun beyaz olması olasılığının, aynı çekilişin başlangıçtaki torbadan yapıldığı durumdakinden $\frac{1}{16}$ daha fazla olduğu bilinmektedir.

a, b ve c yi bulunuz. (I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından)

A137. Yalnızca 1,6 ve 9 rakamları kullanılarak yazılan pozitif tam sayıları

1, 6, 9, 11, 16, ...

diye küçükten büyüğe doğru dizelim.

a) 1996 nın bu dizinin kaçınıcı terimi olduğunu bulunuz.

b) Bu dizinin 1996 ıncı terimini bulunuz.

(I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından)

A138. $ABCDE$ düzgün beşgeninin içindeki bir F noktası için $m(\widehat{FDC}) = 66^\circ$, $m(\widehat{FBC}) = 60^\circ$ ise $\widehat{AFE}$ açısı kaç derecedir?

A139. B açısı dik açı olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I , $[AI]$ ve $[CI]$ nın $[BC]$ ve $[AB]$ nı kestiği noktalar E ve D , E ve D den iç teğet çembere çizilen teğetlerin hipotenüsü kestiği noktalar K ve L ise $\tan(\widehat{KBL})$ kaçtır?

A140. $ABCD$ konveks bir dörtgen, köşegenlerin kesişim noktası E , $\widehat{ADB} \cong \widehat{ACD}$, $\widehat{ADC} \cong \widehat{DAC}$ ve $\widehat{DBC} \cong \widehat{DCB}$ ise $\frac{EC}{EB} - \frac{EA}{ED}$ ifadesinin değeri nedir?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y136. $x^2 - 4x - 2 = 0$ denkleminin köklerinin

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) = 2 + x.$$

denklemini de sağladığını göstererek ikinci denklemin tüm köklerini bulunuz.

Y137. a, b, c gerçel sayıları için $8a + 4b + 2c = 0$ ise $ax^3 + bx^2 + c = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Y138. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{APB}) = 150^\circ$, $|AP| = 2\sqrt{3}$ cm ve $|BP| = 2$ cm olacak biçimde bir P noktası alınıyor $|PC|$ yi bulunuz. (I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından)

Y139. Herhangi bir ABC üçgeninin iç bölgesinde, $\widehat{DAB} \cong \widehat{DBC} \cong \widehat{DCA}$ olacak biçimde bir D noktasının bulunduğunu ispatlayınız. $\cot(\widehat{DAB})$ nin bu üçgenin alanı ve kenarları cinsinden değerini bulunuz.

Y140. Bir ABC üçgeninin $[AB], [BC]$ ve $[CA]$ kenarları üzerinde sırasıyla $|DB| = 2|DA|$, $|EC| = 2|EB|$, $|FA| = 2|FC|$ eşitliklerini sağlayan D, E, F noktaları alınıyor. ADF , BED , CEF üçgenlerinin çevrel çemberleri eş ise bu üçgenlerin iç teğet çemberlerinin de eş olacağını ispatlayınız.

ÇÖZÜMLER

Okuyucularımızın yolladığı çözümlerle doğru çözenlerin listesini içeren dosya bir yanlışlık sonucu odamdaki temizlik sırasında kaybolmuştur. Bu nedenle 126 - 130 ve 131 - 135 numaralı Alıştırma ve Yarışma Problemlerini çözenlerin isimlerini veremiyoruz. Okuyucularımızdan ve çözüm yollayanlardan özür dilerim.

A.Erkip

A126. $32n - 7 = m^2$ koşulunu sağlayan sonsuz sayıda (m, n) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz. (*Burhan Bursevi*)

Çözüm: $(5, 1)$ sıralı ikilisi istenen koşulu sağladığı görülür. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m = 5 + 16k$ olsun.

$$\begin{aligned} m^2 &= (5 + 16k)^2 = 25 + 160k + 256k^2 \\ &= 32(1 + 5k + 8k^2) - 7 \end{aligned}$$

olduğundan $(5 + 16k, 1 + 5k + 8k^2)$ de verilen koşulu sağlar; bu tür sonsuz çoklukta sıralı ikili vardır.

A127. Çevresi bir birim olan ikizkenar üçgenlerden alanı en büyük olanı bulunuz.

Çözüm: Üçgenin kenar uzunluklarını x, x ve $2y$ ile gösterelim. Çevre 1 birim olduğundan $x + y = \frac{1}{2}$ dir. Üçgen ikizkenar olduğundan $2y$ uzunluktaki tabana ait yükseklik $h = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(\frac{1}{2} - y)^2 - y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - y}$ ve alan $A = y\sqrt{\frac{1}{4} - y}$ dir; y değeri $(0, \frac{1}{2})$ aralığında değişir. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden

$$\frac{A^2}{4} = \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - y\right) \leq \left(\frac{\frac{y}{2} + \frac{y}{2} + (\frac{1}{4} - y)}{3}\right)^3 = \frac{1}{12^3}$$

yani $A \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}$ bulunur. Eşitlik hali $\frac{y}{2} = \frac{y}{2} = \frac{1}{4} - y$, yani $y = \frac{1}{6}$ iken vardır. Bu durumda $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ üçgenin kenarları $x, x, 2y$ ise $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ uzunluktadır.

Sonuç olarak çevresi 1 birim ikizkenar üçgenler içinde alanı en büyük olanı eşkenar üçgendir, en büyük alan değeri $\frac{1}{12\sqrt{3}}$ tür.

A128. İki merkezli bir $ABCD$ dörtgeninin alanı S , köşegen uzunlukları e, f ise

$$ef \geq 2S$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik $ABCD$ harmonik bir dörtgen ise geçerlidir. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan iki merkezli bir dörtgende alan

$$S = \sqrt{abcd}$$

dir. Söz konusu dörtgen, bir kirişler dörtgeni olup Ptolemy teoremi gereğince

$$ac + bd = ef$$

şartını sağlar. Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden

$$\frac{ac + bd}{2} \geq \sqrt{abcd}$$

ve buradan

$$ef \geq 2S$$

elde edilir. Eğer dörtgen harmonik bir dörtgen ise $ac = bd$ olacağından eşitlik geçerli olur.

A129. Her noktada türevli ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ özdeşliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun x noktasında türevi olduğundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x + y) - f(x)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) + xy}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} + x = b + x \end{aligned}$$

bulunur. (Son eşitlikten $b = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y}$ limitin varlığı görülmektedir.) Integral alarak $f(x) = c + bx + \frac{x^2}{2}$ şeklinde olduğu, verilen bağıntıda yerine koyarak da $c = 0$ ve b nin keyfi olabileceği görülür. Aranan fonksiyonlar b bir keyfi sabit olmak üzere $f(x) = bx + \frac{x^2}{2}$ şeklindedir.

A130. Herhangi bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi O , yarıçapı R , içteğet çember merkezi I ve yarıçapı r olsun. $[OI]$ 'nin ortasının kenarlara uzaklığının toplamı $\frac{1}{2}(R + 4r)$ dir. Kanıtlayınız. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm: I ve O noktalarından BC kenarına indirilen dikmelerin ayakları D ve A_1 olsun. IDA_1O bir dik yamuk olup $[OI]$ nin orta noktasından BC ye indirilen dikmenin uzunluğu bu yamuğun orta tabanının uzunluğuna eşittir. Bu uzunluğu x ile gösterelim. Diğer dikmeler de sıra ile y, z olmak üzere,

$$2x = r + |OA_1|, 2y = r + |OB_1|, 2z = r + |OC_1|$$

ve $|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| = R + r$ dir. Buradan

$$x + y + z = \frac{1}{2}(R + 4r)$$

bulunur.

Y126. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve dışbükey olsun. Eğer f 'nin aldığı değerler alttan ve üstten sınırlı ise, f 'nin sabit olduğunu gösteriniz. Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.

Çözüm: Dışbükey ve sınırlı bir fonksiyonun sabit olduğunu göstereceğiz. Bir $a < b$ ikilisi için $f(a) \neq f(b)$ olduğunu varsayalım. $h = f(b) - f(a) > 0$ ise

$$b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b - a)$$

olduğundan, dışbükeylikten $f(b) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(2b - a)$ bulunur. Terimleri yerleştirirsek bu

$$2(f(b) - f(a)) \leq f(2b - a) - f(a)$$

şeklinde yazılır. Şimdi $b_0 = b$ ve $n \geq 0$ için $b_{n+1} = 2b_n - a$ dizisini tanımlayalım. Yukarıdaki adımları b_n için tekrarlırsak her $n \geq 0$ için

$$2(f(b_n) - f(a)) \leq f(b_{n+1}) - f(a)$$

ve $h = f(b_0) - f(a)$ olduğundan, yine tümevarımla

$$2^k h \leq f(b_k) - f(a)$$

bulunur. $h > 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k = \infty$ olduğundan bu $(f(b_k))$ dizisinin sınırsız olduğunu söyler, yani f nin üstten sınırlı olmasıyla çelişir.

$h = f(b) - f(a) < 0$ ise benzer yolla $a_0 = a$, $a_{n+1} = 2a_n - b$ şeklinde tanımlanan dizi için

$$f(a_n) - f(b) \geq 2^n |h|$$

eşitsizliği yine f nin üstten sınırlı olması ile çelişir. O halde $h = 0$ ve f sabit fonksiyon olmalıdır. (Not. Problemde verilen f nin alttan sınırlı olma koşulu yanıt için gerekli değildir).

Y127. A bir açık aralık, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey ve $c \in A$ olsun. f 'nin c noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} = 0$$

olduğunu gösteriniz. Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.

Çözüm: Problemde sözü geçen ([1]. H.T.Kaptanoğlu, *Dışbükey Fonksiyonlar*, Matematik Dünyası 6, sayı 1, 11-18 (1996)) yazıdan dışbükey fonksiyonların her noktada sağdan ve soldan türevleri olduğunu biliyoruz. Yani

$$f_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{ve} \quad f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

limitleri vardır. Bu limitler $x = c \pm h$ olarak,

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{ve}$$

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c) - f(c-h)}{h}$$

olarak ifade edilebilir. Verilen koşuldun

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f(c) - f(c-h)}{h} \right) \\ &= f'_+(c) - f'_-(c) \end{aligned}$$

yani $f'_+(c) = f'_-(c)$ bulunur, ki bu da f nin c noktasında türevli olduğunu gösterir. Tersine f c de türevli ise

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f(c) - f(c-h)}{h} \right] \\ &= f'(c) - f'(c) = 0 \end{aligned}$$

sağlanır.

Y128. $a_1 = 2$ ve her tamsayı $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^2 - a_n - 1$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm: $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{a_n}$ olsun. İlk bir kaç terimi hesaplırsak, $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 7$ ve $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{5}{6}, S_3 = \frac{41}{42}$ buluruz. Her k için

$$S_k = 1 - \frac{1}{a_k(a_k - 1)} = 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

olduğunu iddia ediyoruz. $k = 1$ için bu doğrudur.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} + \frac{1}{a_{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)} \end{aligned}$$

olduğundan tümevarımla iddiamızın doğru olduğu kanıtlanır. Öte yandan (a_n) artan bir pozitif tam sayı dizisidir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ olur.

O halde

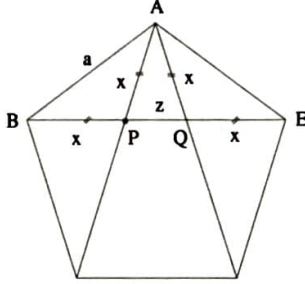
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1}\right) = 1$$

bulunur.

Y129. Dışbükey düzgün bir beşgenin alanının, köşegenlerinin oluşturduğu yıldızın ortasındaki küçük düzgün beşgenin alanına oranını hesaplayınız. (Hüseyin Demir)

Çözüm:



BAQ ve AQP üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{z}$$

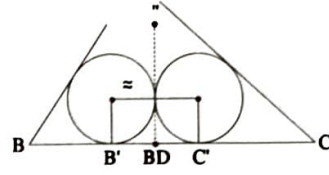
$x + z = a$ dan $z = a - x$ bulunur. $a(a - x) = x^2$ den

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{ve} \quad \frac{a}{z} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. Söz konusu küçük düzgün beşgen büyük düzgün beşgene benzer olup benzerlik oranı kenarlarının oranına eşittir. Dolayısıyla hesaplanması istenen oran $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$ dir.

Y130. Bir ABC üçgeninin içinde alınan birbirine dıştan teğet eş iki çember $[BC]$ 'ye, çemberlerden biri $[AB]$ 'ye ve öteki $[AC]$ 'ye teğet olup, ortak iç teğet $[BC]$ 'yi D 'de kesiyor. Benzer çizimler $[CA]$ ve $[AB]$ için yapılp benzer noktalar E ve F ise $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ 'nin noktadaş olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm.



$[BC]$ kenarına teğet olan çemberlerin bu kenara değdikleri noktalar B', C' be bu eş çemberlerin yarıçap uzunluğu x olsun. ABC üçgeninin iç yarıçapı r ve BC kenarına değdiği nokta M ise

$$|BM| = u - b = r \cdot \cot \frac{B}{2}, \quad \cot \frac{B}{2} = \frac{u - b}{r}$$

olur.

$$|BC| = a = 2x + x \cot \frac{B}{2} + x \cot \frac{C}{2}$$

den $x = \frac{ar}{2r + 2a}$ elde edilir. Söz konusu çemberlerin ortak teğeti BC yi D de kestiğine göre,

$$|BD| = \frac{a(r + u - b)}{2(a + r)}, \quad |DC| = \frac{a(r + u - c)}{2(r + a)}$$

ve

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{r + u - b}{r + u - c}$$

dir. Diğer kenarlar için de benzer işlemler yapılarak $\frac{|EC|}{|EA|}, \frac{|FA|}{|FB|}$ bulunur. Oranlar çarpımı 1 olur. Ceva teoreminin karşısı gereğince AD, DE, CF nin noktadaş olduğu görülür.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Prof.Dr. Albert Erkip, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Ekim 1996 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 350.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1996 yılı abone ücreti 400.000.-TL., tane satış fiyatı ise 100.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, posta çeki aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini Matematik Dünyası, (Matematik Bölümü, ODTÜ 06531 Ankara) adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.*
 - * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.*
 - * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.*
 - * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.*
 - * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.*
 - * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.*
 - * Matematik dünyasından güncel haberler.*
- Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur.*
- Yazılar*

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

