

# Matematik

D Ü N Y A S I

## Koninin Kesitleri (I)

H. Turgay Kaptanoğlu

## Tamsayılar Kümesinde Denklemler

Nizamettin Şirinoğlu, C. Alparslan Ertuğ

## Boncuklarla Hesap Yapmak

Buket Can

## Hangi Gün Doğmuştunuz?

Bengü Yağcı, Hüseyin Altındış

## Gauss Toplamları Üzerine

Emre Alkan

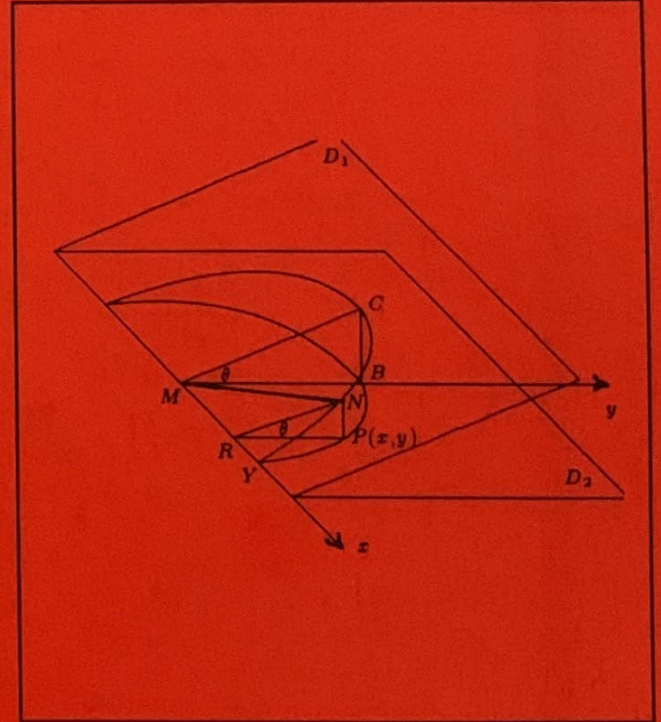
## Kuadratik Rezidüer

Aytek Erdil

## Kelebek Sorusu ve Karmaşık Sayılar

Selma Atabey

## Problemler ve Çözümleri



## MATEMATİK DÜNYASI

**SAHİBİ**  
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ  
Adına  
Başkan  
TOSUN TERZİOĞLU

**EDİTÖR**  
ALBERT ERKİP

**YAYIN KURULU**  
SELMA ATABEY, ALİ DOĞANAKSOY,  
ALPARSLAN ERTUĞ, FIKRİ GÖKDAL,  
H. TURGAY KAPTANOĞLU

**DİZGİ**  
NURAY (KIRAÇ) ÖZKAN

**BASKI**  
ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik  
Derneği tarafından, Matematik Vakfı'nın işbirliği ve  
UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.  
(Yılda 5 sayı)

**MATEMATİK DÜNYASI Cilt:** 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin  
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının  
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386 sayılı  
kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

**ABONE KOŞULLARI (1996)**  
Yurtiçi yıllık 400.000.-TL., Yurtdışı yıllık 800.000.-TL.,  
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 215511 No.lu hesaba yatırılarak,  
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

**İLAN KOŞULLARI**  
Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.  
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.  
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.  
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.  
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

**ADRES**  
Matematik Dünyası  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü  
İnönü Bulvarı, 06561 ANKARA  
Tel: 210 29 70  
Fax: 210 12 82

## İÇİNDEKİLER

### Koninin Kesitleri (I)

H. Turgay Kaptanoğlu 1

### Tamsayılar Kümesinde Denklemler

Nizamettin Şirinoğlu, C. Alparslan Ertuğ 8

### Boncuklarla Hesap Yapmak

Buket Can 14

### Hangi Gün Doğmuştunuz?

Bengü Yağcı, Hüseyin Altındış 19

### Gauss Toplamları Üzerine

Emre Alkan 21

### Kuadratik Rezidüler

Aytek Erdil 25

### Kelebek Sorusu ve Karmaşık Sayılar

Selma Atabey 27

Problemler ve Çözümleri 29

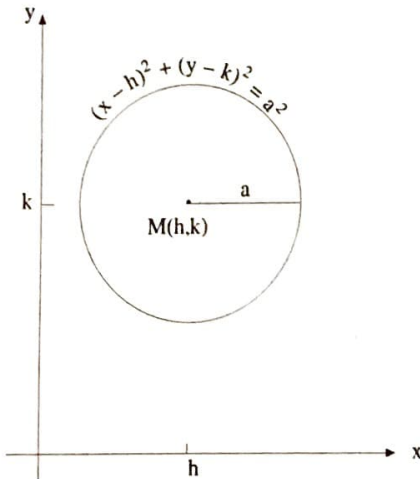
# KONİNİN KESİTLERİ (I)

H. Turgay Kaptanoğlu \*

Bu yazıda çember, elips, parabol ve hiperbolden söz edeceğiz. Bu düzlem eğrilerinin denklemlerini elde ettikten sonra birkaç değişik konuyu açacağız. Bunlar, bu eğrilerin yansıtma özelliklerinin ispatı, dört eğrinin de aynı tip denklemlerle yazılabilirliği, düzlemde döndürme, bu eğrilerin bir koninin bir düzlemle değişik açılarda kesiştirilmesiyle elde edildiği (dolayısıyla yazının başlığı), ve daha sonraki bir yazıda inceleyeceğimiz gezegenlerin yörüngelerinin elips olduğu gerçeği.

## A. Tanımlar ve Denklemler

İlk olarak *çember*, düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi olarak tanımlanır. Sabit noktaya çemberin *merkezi*, uzaklığa ise çemberin *yarıçapı* denir. Merkez  $M(h, k)$ , yarıçap  $a$  ve  $N(x, y)$  çember üzerinde bir nokta olsun.  $a$  bir uzaklığı gösterdiğinden pozitif olmak zorundadır. Düzlemde  $(u, v)$  ve  $(s, t)$  gibi iki nokta arasındaki uzaklığın  $\sqrt{(u-s)^2 + (v-t)^2}$  ile verildiğini hatırlayalım.



O zaman çemberin tanımı bize

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a$$

verir ki her iki tarafın karesini alarak buradan

çemberin denklemi olan

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

eşitliğini elde ederiz. Çoğunlukla  $h = k = 0$  alırız, çünkü bu çemberi düzlemde kaydırıp merkezini *başnokta* dediğimiz  $(0, 0)$  noktasına getirmekten başka bir şey değildir, yani çemberin hiçbir özelliğini değiştirmez. Ayrıca  $a = 1$  olduğunda elde ettiğimiz  $x^2 + y^2 = 1$  çemberine *birim çember* adı verilir.

İkinci olarak *parabol*, düzlemde sabit bir nokta ile sabit bir doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi olarak tanımlanır; noktaya parabolün *odak* noktası, doğruya ise *doğrultman*ı denir. Odak ile doğrultmanın tam arasındaki noktaya ise parabolün *tepe* noktası adı verilir. Bu nokta doğrultmana ve odağa eşit uzaklıkta olduğundan parabolün üzerindedir. Odağın ve doğrultmanın düzlemdeki ve birbirlerine göre konumlarına göre parabolün denklemi değişik biçimler alabilir. Biz bir tanesini inceleyelim. Tepe noktası  $T(h, k)$ , odak noktası  $O(h, k+p)$ , doğrultman  $y = k-p$  ve parabolün üzerindeki bir nokta da  $N(x, y)$  olsun.  $N$ 'nin doğrultmana uzaklığı  $y - k + p$ 'dir. Parabolün tanımından

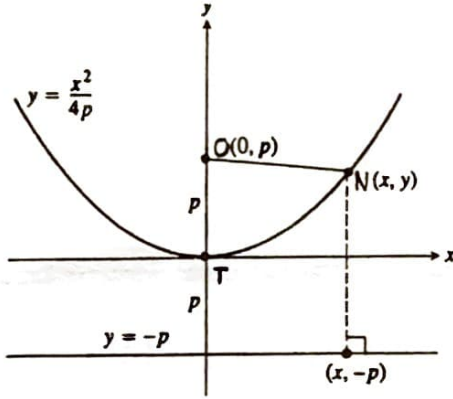
$$y - k + p = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-p)^2}$$

yazarız. Kareleyip sadeleştirerek buradan parabolün denklemi olan

$$4p(y-k) = (x-h)^2$$

eşitliğini buluruz. Çemberde olduğu gibi genellikle kaybetmeden  $h = k = 0$  alabiliriz. Burada  $p$  yönlü tepe-odak uzaklığıdır ve pozitif veya negatif olabilir. Şimdi  $x, y$  ikilisinden yalnızca biri karelenmiştir. Odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğrunun denklemi  $x = h$ 'dir. Bu doğruya parabolün *eksen*'i denir. Parabol bu eksene göre simetriktir:  $N$ 'yi bu eksende yansıttığımızda elde edeceğimiz  $(-x + 2h, y)$  noktası da parabolün denklemini sağlar. Tepe noktası haliyle eksen üzerindedir.

\* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi



Tepe noktası  $T(0,0)$  ve eksen  $x$  veya  $y$  eksenine paralel olan bütün parabolün denklemlerini verelim. Az önceki  $4py = x^2$  pozitif  $y$  yönünde açılır; odağı  $O(0,p)$  ve doğrultmanı  $y = -p$ 'dir. Odağı  $O(0,-p)$  ve doğrultmanı  $y = p$  olan  $-4py = x^2$  negatif  $y$  yönünde açılır. Odağı  $O(p,0)$  ve doğrultmanı  $x = -p$  olan  $y^2 = 4px$  ile odağı  $O(-p,0)$  ve doğrultmanı  $x = p$  olan  $y^2 = -4px$  sırayla pozitif ve negatif  $x$  yönünde açılırlar.

Şimdi  $4p(y - k) = (x - h)^2$  denkleminde biraz yakından bakalım. Bunu  $y$  için rahatlıkla çözebiliriz ve o zaman

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x + k + \frac{h^2}{4p}$$

$$= Ax^2 + Bx + C = f(x)$$

elde ederiz. Burada  $x$  herhangi bir gerçel sayı olabilir ve  $x$ 'in aldığı her değere karşılık yalnız bir  $y$  değeri vardır. Yani  $y$ ,  $x$ 'in bir *fonksiyonudur*. Sonuç olarak, eksen  $y$  eksenine paralel olan her parabol, ikinci dereceden bir polinomun grafiğidir. Tersine,  $y = Ax^2 + Bx + C$  diye ikinci dereceden genel bir polinom fonksiyonu ile işe başladığımızda, kareye tamamlayarak

$$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x\right) + C$$

$$= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}\right) + C - \frac{B^2}{4A^2}$$

$$y - C + \frac{B^2}{4A^2} = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$$

$$\frac{1}{A}\left(y - \left(C - \frac{B^2}{4A^2}\right)\right) = \left(x - \left(-\frac{B}{2A}\right)\right)^2$$

elde ederiz ki bu tepe noktası

$$(h, k) = \left(-\frac{B}{2A}, C - \frac{B^2}{4A^2}\right)$$

ve tepe-odak uzaklığı  $p = 1/4A$  olan parabolün denklemdir. Dolayısıyla ikinci dereceden bir değişkenli polinom fonksiyonlarıyla, eksenleri  $y$  eksenine paralel olan parabol arasında birebir bir eşleme vardır.  $A$ 'nın ve dolayısıyla  $p$ 'nin işareti parabolün açıldığı yönü gösterir: pozitifse yukarıya ve negatifse aşağıya.

Üçüncü eğrimiz de uzaklık kavramı yoluyla tanımlanır. *Elips*, düzlemde sabit iki noktadan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesidir. İki sabit nokta elipsin odaklarıdır. Odakların tam orta noktası elipsin merkezidir ve bir bakıma çemberin merkezi gibidir; elips de zaten çemberin biraz basık (ya da uzun) halidir. Odakları birleştiren doğru elipsin *ekseni*, eksenin elipsi kestiği iki nokta da elipsin *tepe* noktalarıdır. Bir örnek olarak eksen  $x$  eksenine paralel olan bir elipsin denklemini çıkartacağız. Merkez  $M(h, k)$ , odaklar  $O_1(h - c, k)$  ve  $O_2(h + c, k)$ , tanımdaki uzaklık  $2a$  ve elips üzerindeki bir nokta  $N(x, y)$  olsun. Elipsin tanımı

$$\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

verir. Sadeleştirmek için önce kareköklerden birini sağa geçirir, sonra kareler ve birbirini götürülen terimleri atarız; sonra kalan karekökü bir tarafta yalnız bırakır ve tekrar kareleriz. Birkaç işlemden sonra elimizde

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2 - c^2} = 1$$

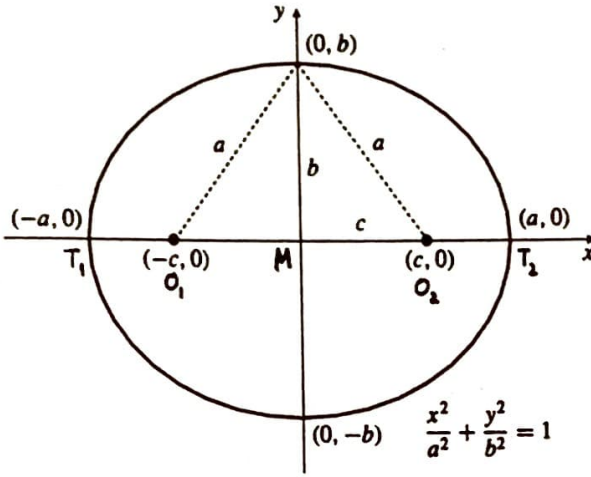
kalır.  $NO_1O_2$  üçgeninde  $|NO_1| + |NO_2| = 2a$  ve  $|O_1O_2| = 2c$ 'dir. Burada  $|\cdot|$  uzunluğu gösterir. Bir üçgende iki kenarın uzunluklarının toplamı üçüncü kenarın uzunluğundan büyük olduğundan  $a > c$ 'dir, yani  $a^2 - c^2$  pozitifdir. O zaman  $a^2 - c^2 = b^2$  yazarsak, elipsin denklemi

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

olur. Görüldüğü gibi  $b$  de  $c$  de  $a$ 'dan küçüktür. Bu elipsin eksen  $y = k$  doğrusu, tepe noktaları  $T_1(h - a, k)$  ve  $T_2(h + a, k)$ 'dir. Tabii gene  $h = k = 0$  almamızda bir sakınca yok.  $x = h$  doğrusu merkezden geçer, eksene diktir ve elipsi  $S_1(h, k - b)$  ile  $S_2(h, k + b)$  noktalarında keser. Bu noktalar ikincil tepe noktaları olarak düşünülebilir. Özetlersek,  $c$  merkez-odak

uzaklığı,  $a$  merkez-tepe uzaklığı ve  $b$  de merkez-ikincil tepe uzaklığıdır.  $[T_1T_2]$  doğru parçasına elipsin *büyük eksen*,  $[S_1S_2]$  doğru parçasına da elipsin *küçük eksen* adı verilir.

Yukarıda denklemini çıkarttığımız elipste  $h-a \leq x \leq h+a$  ve  $k-b \leq y \leq k+b$  eşitsizlikleri sağlanır, çünkü değişkenlerden birine bu sınırların dışında bir değer verdiğimizde, diğer değişkenin elipsin denklemini sağlayan hiçbir değeri bulunamaz. Sonuç olarak elips (ve özel hali çember) *sınırlı* bir eğridir.



Merkezi  $M(0,0)$  ve eksen  $x$  veya  $y$  eksenine paralel olan topu topu iki tip elips vardır. Biri az önce incelediğimiz eksen  $x$  eksenine ve odakları  $O_1(-c,0)$  ile  $O_2(c,0)$  olan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

idi. Diğeri ise eksen  $y$  eksenine ve odakları  $O_1(0,-c)$  ile  $O_2(0,c)$  olan

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

elipsi. Her ikisinde de  $a > b$  aldık. Tabii ki elipslerimiz eksenleri boyunca daha uzun.

Elipsle çemberi karşılaştırdığımızda aradaki tek farkın sabit noktaların bir veya iki tane olmasından kaynaklandığını görürüz. Elipsin iki odağını birbirine yaklaştırmak,  $c$ 'yi sıfıra göndermek demektir. O zaman da  $b$ ,  $a$ 'ya eşitlenir ve elipsin denklemi yarıçapı  $a$  olan bir çemberin denklemi olur çıkar. Bu durumda odaklarla merkez çakışır.

Gene iki sabit noktaya olan uzaklıklarla bir dördüncü eğri tanımlayabiliriz. *Hiperbol*, düzlemde sabit iki noktadan uzaklıklarının *farkı*

sabit olan noktaların kümesidir. Elipste olduğu gibi bu noktalara *odaklar*, orta noktalarına *merkez*, bunları birleştiren doğruya *eksen*, bu doğrunun hiperbolü kestiği iki noktaya *tepe* noktaları denir. Gene eksen  $x$  eksenine paralel bir hiperbolün denklemini çıkartalım. Merkez  $M(h,k)$ , odaklar  $O_1(h-c,k)$  ve  $O_2(h+c,k)$ , tanımdaki uzaklık  $2a$  ve hiperbol üzerindeki bir nokta  $N(x,y)$  ise, tanımdan

$$\frac{\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2}}{2a} = \pm 1$$

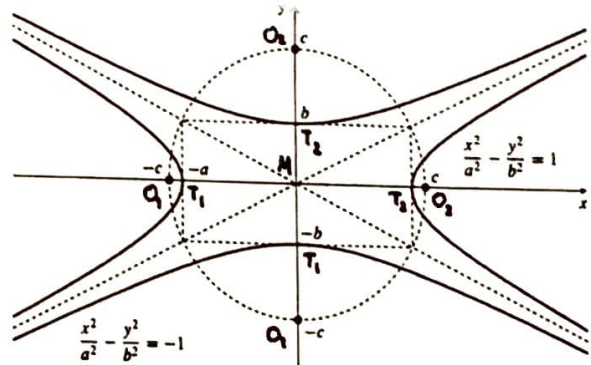
yazarız. Elipste anlatıldığı biçimde karekökleri ortadan kaldırıp sadeleştirerek

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2 - c^2} = 1$$

elde ederiz. Bu, görünüşte elipsin denkleminin aynısıdır, ama sadece görünüşte. Farkı görmek için  $NO_1O_2$  üçgeninde  $|NO_1| - |NO_2| = \pm 2a$  ve  $|O_1O_2| = 2c$  olduğuna dikkat edelim. Bir üçgende iki kenarın uzunluklarının farkı üçüncü kenarın uzunluğundan küçük olduğundan  $a < c$ 'dir, yani  $a^2 - c^2$  negatiftir. O zaman  $a^2 - c^2 = -b^2$  yazarız ve hiperbolün denklemi

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

olur. Şimdi  $a, b, c$ 'den en büyüğü  $c$ 'dir. Bu hiperbolün eksen  $y = k$ , tepe noktaları  $T_1(h-a,k)$  ve  $T_2(h+a,k)$ 'dir. Ayrıca  $c$  merkez-odak uzaklığı ve  $a$  merkez-tepe uzaklığıdır.  $b$  hakkında birazdan bir iki cümle daha edeceğiz. Hiperbolde de çoğunlukla  $h = k = 0$  alacağız.



Hiperbolün elipsten (ve diğer iki eğriden) farklı bir yönü vardır, *asimptotları*. Bunlar hiperbolün merkezinden geçen  $\pm \frac{a}{b}$  eğimli doğrulardır. Asimptot kavramından kasıt, merkezden uzaklaştıkça hiperbolle asimptotlar arasındaki

uzaklığın azalmasıdır. Bunu göstermek için,  $x$  sınırsız büyüdükçe  $y$  doğrultusundaki uzaklığın sıfıra gittiğini göstermek yeter.  $h = k = 0$  durumunda asimptotlar  $y = \pm \frac{b}{a}x$  doğrularıdır. Hiperbolün denklemini  $y$  için çözersek,

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

buluruz. Bunun, örneğin,  $+$  işaretlerinin  $+$  işaretli asimptotla farkına  $\Delta y$  dersek,

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{b}{a} \left( \sqrt{x^2 - a^2} - x \right) \\ &= \frac{b (\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \frac{b(x^2 - a^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \end{aligned}$$

olur.  $x$ 'in işareti ne olursa olsun,  $x$  büyüdükçe bu fark sıfıra gider, yani

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Delta y = 0$$

gerçeklenir. Asimptotlar hiperbol çizimini kolaylaştırır. Yukarıda denklemini elde ettiğimiz hiperbolü çizmek için, merkezden sağa ve sola  $a$  kadar, yukarı ve aşağı  $b$  kadar gidip, burardan geçen ve kenarları eksenlere paralel olan bir dikdörtgene  $(h - a, k)$  ve  $(h + a, k)$  noktalarında teğet olan ve asimptotlara gittikçe yaklaşan iki eğri çizersek, hiperbolümüz ortaya çıkar.

Merkezi  $M(0, 0)$  ve eksen  $x$  veya  $y$  eksenine paralel olan gene sadece iki tip hiperbol vardır. Yukarıda baktığımız, eksen  $x$  eksen ve odakları  $O_1(-c, 0)$  ile  $O_2(c, 0)$  olan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ile, eksen  $y$  eksen ve odakları  $O_1(0, -c)$  ile  $O_2(0, c)$  olan

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

hiperboller. İlk hiperbol pozitif ve negatif  $x$  yönünde, ikincisi pozitif ve negatif  $y$  yönünde açılır.

Elipste  $a > b$  eşitsizliğinin sağlanması gerektiği halde, hiperbolde  $a$  ve  $b$  herhangi pozitif değerleri alabilirler. Hiperbolün denkleminde eksi işaretinin yeni hiperbolün açıldığı yönü belirttiği halde,  $a$  ve  $b$ 'nin değerleri yalnız hiperbolün az veya çok açıldığını söyler, çünkü bu iki değer orani asimptotların eğimini belirler. Özel olarak,

$a = b = 1$  olarak elde ettiğimiz  $x^2 - y^2 = 1$  veya  $y^2 - x^2 = 1$  hiperbollerine *birim hiperbol* adı verilir.

Çember, elips ve hiperbolün bir ortak noktaları var: merkezleri. Üç eğrinin her biri merkezi, eksen ve merkezden eksene dik olarak geçen doğru etrafında simetriktir. Örneğin  $N(x, y)$  noktası yukarıda denklemini elde ettiğimiz hiperbol üzerinde bir nokta ise,  $N$ 'nin merkeze göre simetriği olan  $(-x + 2h, -y + 2k)$  noktası da bu hiperbolün denklemini sağlar. Diğer simetri özelliklerini okuyucu kolayca gösterebilir.

## B. Elipsin Alanı

İncelediğimiz dört eğri arasında yalnız çember ve elips sınırlı eğrilerdir. Ayrıca her iki eğri de kapalı eğridir; yani çevreledikleri bir alan vardır. Bunun sonucu olarak, ikisi de birer fonksiyonun grafiği olamazlar.

Çemberin çevrelediği bölgeye *daire* diyoruz; dairenin alanının  $A = \pi a^2$  olduğunu da biliyoruz, ama nasıl? Bu soruya cevap vermek için önce  $\pi$  sayısının tanımını hatırlamamız gerekiyor.  $\pi$ , bir çemberde çevrenin çapa olan oranıdır ve çemberden çembere değişmez. Buradan dairenin alan formülünü elde etmek için dairenin içine, köşeleri çemberin üstünde olan eşkenar çokgenler yerleştiririz. Bir çokgenin kenar sayısına  $n$ , çevresine  $C_n$ , alanına  $A_n$ , ardışık iki köşesine  $D$  ve  $F$ ,  $[DF]$ 'nin orta noktasına  $E$  ve çemberin merkezine de  $M$  diyelim. Açıkça  $C_n = n[DF]$ 'dir.  $MDF$  üçgeni ikizkenardır ve  $[ME]$  ile  $[DF]$  birbirine diktir. O zaman

$$A_n = n \frac{1}{2} [DF][ME] = \frac{n}{2} \frac{C_n}{n} [ME] = \frac{C_n}{2} [ME]$$

yazabiliriz.  $n$  arttıkça,  $C_n$  değeri  $2\pi a$ 'ya,  $[ME]$  uzunluğu  $a$ 'ya ve  $A_n$  de dairenin alanına yaklaşır. Dolayısıyla

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\pi a}{2} a = \pi a^2$$

olur.

Elipsin çevrelediği bölgenin özel bir adı yok. Elipsin alanının formülünü dairenin alan formülünden çıkartacağız. Bunun için önce uzayda bir düzlemde yer alan bir çemberin, bu düzlemle açı yapan başka bir düzleme dik izdüşümünün bir elips olduğunu göreceğiz [4].

$M$  merkezli ve  $a$  yarıçaplı çemberimiz,  $D_2$  düzlemiyle  $\theta$  açısı yapan  $D_1$  düzlemi üzerinde bulunsun ve iki düzlem çemberin  $[MY]$

yarıçapı boyunca kesişsin.  $D_2$  üzerine koordinat koyalım. Başnokta  $M$ 'de ve pozitif  $x$  eksenini  $[MY]$  boyunca olsun. Çemberin  $[MY]$ 'ye dik çapının çember üzerindeki bir ucu  $C$  ve çember üzerindeki herhangi bir nokta  $N$  olsun. Bu iki noktanın  $D_2$  üzerindeki izdüşümlerine sırayla  $B$  ve  $P$  diyelim.  $[NP]$ 'yi içeren ve  $MCB$  üçgeninin düzlemine paralel bir düzlem  $[MY]$ 'yi  $R$ 'de kessin. O zaman  $MCB$  ve  $RNP$  üçgenlerinin karşılıklı kenarları birbirlerine paraleldir ve dolayısıyla bu iki üçgen benzer üçgenlerdir. Ayrıca  $BMC$  ve  $PRN$  açıların her biri  $\theta$ 'ya eşit olur.  $|MB| = b$  dersek,

$$\cos \theta = \frac{|PR|}{|NR|} = \frac{|BM|}{|CM|} = \frac{b}{a}$$

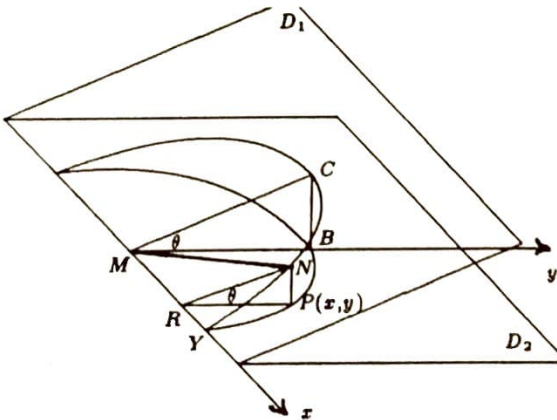
sağlanır.  $P$  noktasının koordinatlarına  $(x, y)$  dersek, bu  $|PR| = y$  ve  $|MR| = x$  demektir.  $|MN| = a$  olduğundan (çünkü  $[MN]$  yarıçaptır),  $MNR$  üçgeninde  $|NR| = \sqrt{a^2 - x^2}$  buluruz. Buradan

$$y = |PR| = |NR| \cos \theta = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

elde ederiz. Her iki tarafı karelediğimizde biraz işlemden sonra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemini çıkar ki bu  $P$  noktasının bir elips üzerinde bulunduğunu söyler.



$D_1$  üzerindeki bir şeklin alanı  $A$  ise bu şeklin  $D_2$ 'ye dik izdüşümünün alanı  $A \cos \theta$  ile verilir. Bunu ispatlamak hiç de zor değildir [2]. Önce bu iddiayı  $D_1$  üzerindeki bir üçgen için gerçekleriz yukarıdaki gibi kesiştirmeler kullanılarak. Diğer çokgenler zaten sonlu sayıda üçgenlere ayrılabilir. Eğrilerle sınırlanmış düzlem

şekillerinin alanı ise içlerine yerleştirilen sonlu sayıda dikdörtgenin alanının toplamının bir cins limiti olarak tanımlanır. Bu limit altında  $A \cos \theta$  ifadesi gene geçerlidir. Bütün bunların ışığı altında elipsin alanını

$$\pi a^2 \cos \theta = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab$$

olarak buluruz. Yani elipsin alanı, büyük ve küçük eksenlerinin yarı uzunluklarının çarpımının  $\pi$  katıdır. Dairenin alan formülüne ne kadar benziyor, değil mi?

Bu hesabı integral olarak da yapabiliriz diyenler çıkacak, ama ne gerek var? Hem burada elipsin ve çemberin birbirlerinin izdüşümü olabildiğini de gördük.

### C. Yansıtma Özellikleri

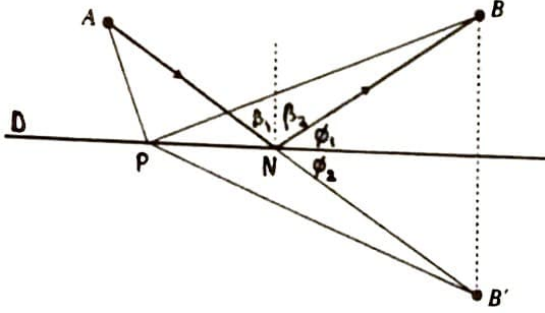
Şimdi elimizdeki dört eğriyi birer ayna gibi düşünüp, belirli yönlerde gelen ışınların bu aynalarda yansdıktan sonra ne yönde gideceklerini bulacağız.

İlk olarak yansımanın ne demek olduğunu anlamaya çalışalım. Bir ışık ışını düzlemde bir doğru boyunca yol alır, çünkü fizik kanunları onun yolunu en kısa zamanda tamamlamasını gerektirir. Bir doğru şeklindeki aynaya onunla  $\alpha$  açısı yaparak gelen bir ışık ışını, bu aynadan yansdıktan sonra diğer tarafta gene onunla  $\alpha$  açısı yaparak yoluna devam eder. Işının aynaya düştüğü noktada doğruya bir dikme çizerek, gelen ve yansıyan ışınların bu dikmeyle yaptıkları açılar ( $\beta_1$  ve  $\beta_2$ ) eşittir diğer bir deyişle. Bu açıların eşit olması iddiası ile ışının en kısa zamanı ve dolayısıyla en kısa yolu tutması iddiası birbirine denktir. Bunu görelim şimdi [1].

Aynamız  $D$  doğrusu olsun ve ışın  $ANB$  yolunu izlesin. Önce  $\beta_1 = \beta_2$  kabul edelim.  $P$  ayna üzerinde başka bir nokta olsun. Aynanın diğer tarafında  $B'$  noktasını,  $D$  doğrusu  $[BB']$  doğru parçasının orta dikmesi olacak şekilde seçelim. O zaman  $D$ ,  $BNB'$  açısının da açıortayıdır, yani  $\phi_1 = \phi_2$  olur. Buradan  $\beta_1$  ve  $\phi_2$  açılarınin tümle açıları olduğu ve dolayısıyla  $A, N, B'$  noktalarının aynı doğru üzerinde oldukları ortaya çıkar. Üçgenin bir kenarının uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamını aşamayacağından,

$$\begin{aligned} |AN| + |NB| &= |AN| + |NB'| = |AB'| \\ &\leq |AP| + |PB'| = |AP| + |PB| \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani ışın  $N$  noktasından yansımakla, diğer bir noktadan yansındığında gideceği yoldan daha kısa bir yol gitmiştir.

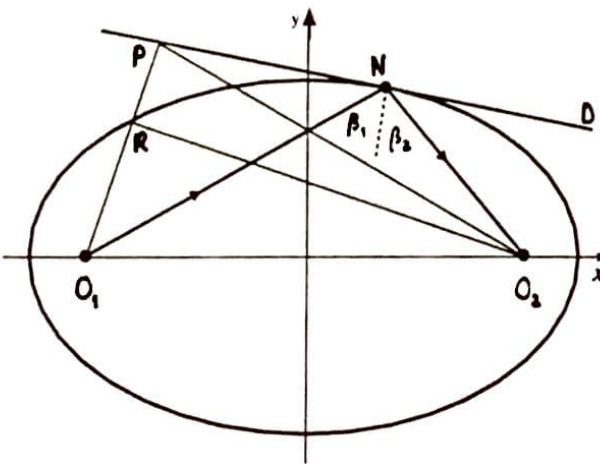


Tersine,  $\beta_1 \neq \beta_2$  ise,  $B'$  noktasını yukarıdaki gibi bulsak,  $A, N, B'$  aynı doğru üzerinde olmazdı ve  $[AB']$  doğru parçası  $D$ 'yi  $N$ 'de değil de diyelim  $P$ 'de keserdi. O zaman da

$$\begin{aligned} |AN| + |NB| &= |AN| + |NB'| \geq |AB'| \\ &= |AP| + |PB'| = |AP| + |PB| \end{aligned}$$

olurdu ve ışın  $P$ 'den geçmekle daha kısa bir yol tutmuş olurdu.

Düz bir aynadan yansımanın kurallarını bulduk. Peki ya eğri bir aynadan ışınlar nasıl yansır? Gene düz ayna kurallarıyla! Işının aynaya değdiği noktada eğriye bir teğet çizeriz ve eğriye göre yansımayı bu teğete göre yansıma olarak tanımlarız. Şimdi hemen bu tanımlı eğrilerimize uygulayalım.



Elipsin bir odağından gelen bir ışın, elipse çarptıktan sonra diğer odağa doğru yansır.  $O_1$  odağından gelen ışının elipse çarptığı nokta  $N$  ve bu noktadaki teğet  $D$  doğrusu olsun.  $D$  üzerindeki herhangi bir noktaya  $P$  ve  $[O_1P]$

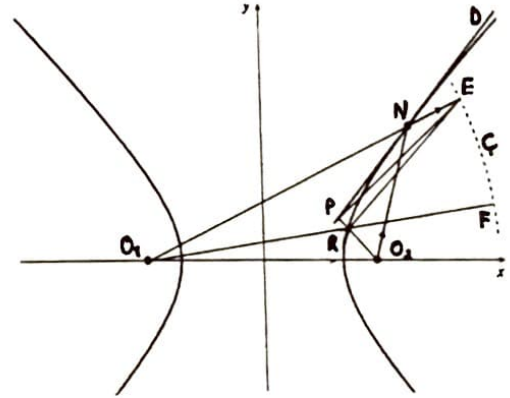
doğru parçasının elipsi kestiği noktaya  $R$  diyelim. O zaman elipsin tanımından ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |O_1N| + |NO_2| &= |O_1R| + |RO_2| \\ &\leq |O_1R| + |RP| + |PO_2| \\ &= |O_1P| + |PO_2| \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani  $D$  üzerindeki noktalar arasında  $N$  noktası  $|O_1P| + |PO_2|$  yolunu en küçük yapan noktadır. Genel yansıma kuralından  $[O_1N]$  ve  $[NO_2]$  doğru parçaları  $N$ 'de  $D$ 'ye çizilen dikme ile eşit açı yaparlar. Böylece elipteki özel yansıma kuralını göstermiş olduk.

Işın elipsin dışından odaklardan biri yönünde gelseydi, elipse çarptıktan sonra diğer odaktan kaçacak şekilde yansır. Bunun ispatını okuyucuya bırakıyoruz.

Özel olarak çemberde merkezden gelen bir ışın ya da çember dışından merkez doğrultusunda ilerleyen bir ışın, çember tarafından geldiği yoldan geri dönecek biçimde yansılır, çünkü çemberde odaklar merkezde çakışmıştır.



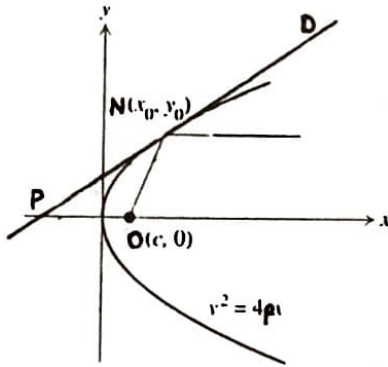
Hiperbolün bir odağından gelen bir ışın, hiperbolde yansdıktan sonra diğer odaktan geliyormuşçasına yoluna devam eder.  $O_2$  odağından çıkan ışının hiperbole çarptığı nokta  $N$  ve bu radaki teğet  $D$  olsun. Merkezi  $O_1$  ve yarıçapı büyük bir  $\mathcal{C}$  çemberi çizelim ki  $[O_1N]$  doğru parçasının uzantısı  $\mathcal{C}$ 'yi  $E$ 'de kessin.  $P$ ,  $D$  üzerinde herhangi bir nokta olsun.  $[PO_2]$ , hiperbolü  $R$ 'da keser ve bu nokta  $P$  ile  $O_1$  arasındadır.  $[O_1R]$ 'nin uzantısı da  $\mathcal{C}$ 'yi  $F$ 'de kessin.  $R$  yarıçap üzerinde bulunduğundan,  $F$ 'ye  $\mathcal{C}$ 'deki diğer herhangi bir noktadan daha yakındır, yani  $|RF| \leq |RE|$  sağlanır. Gene hiperbolün tanımından ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |O_2N| + |NE| &= |O_2N| + |O_1E| - |O_1N| \\ &= |O_1E| - (|O_1N| - |O_2N|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |O_1F| - (|O_1R| - |O_2R|) \\
 &= |O_2R| + |O_1F| - |O_1R| \\
 &= |O_2R| + |RF| \leq |O_2R| + |RE| \\
 &\leq |O_2R| + |RR| + |PE| \\
 &= |O_2P| + |PE|
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani  $D$ 'deki noktalar arasında  $N$  noktası  $O_2$ 'ye ve  $E$ 'ye olan uzunlukların toplamını en küçük yapar. Dolayısıyla  $N$ 'de hiperbole çizilen dikme ile  $[O_2N]$  ve  $[NE]$ 'nin yaptığı açılar birbirine eşittir. Bu da hiperboldeki özel yansıma kuralının ispatını bitirir.

Işın eğer hiperbolün iki dalı arasındaki bölgeden odaklardan birine doğru geliyorsa, hiperbolde yansıdıktan sonra diğer odak doğrultusunda yol alır. Bunun da ispatını okuyuculara bırakıyoruz.



Parabolün odağından gelen bir ışın parabolde yansıdıktan sonra parabolün eksenine paralel bir yol izler. Bunu göstermek için biraz değişik bir yöntem kullanacağız [3]. Yukarıdaki yöntemle göstermeyi okuyuculara bırakıyoruz. Elipsin ve hiperbolün de yansıma kuralını şimdi vereceğimiz yöntemle elde etmek mümkün, ancak hesaplar çok karışıyor. İlgilenen okuyucular deneyebilirler. Bu yöntemde koordinat ve türev kullanacağız. Parabolümüzün denklemi  $4px = y^2$  olsun. Bunun odağı  $O(p, 0)$  ve tepesi  $T(0, 0)$ 'dır. Odaktan çıkan bir ışın parabole  $N(x_0, y_0)$  noktasında ulaşsın.  $x_0 \neq 0$  ve  $y_0 > 0$  haline bakalım sadece.  $N$  noktası yakınındaki tüm noktalarda parabolün denklemini  $y = \sqrt{4px}$  olarak yazabiliriz.  $N$ 'deki teğet  $D$ 'nin denklemini yazalım şimdi de.  $D$ 'nin eğimi  $y$ 'nin türevinin  $x = x_0$ 'daki değeridir, yani eğim

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{4p}{2\sqrt{4px}} \right|_{x=x_0} = \sqrt{\frac{p}{x_0}}$$

değeridir.  $D$ 'nin denklemi de

$$y - \sqrt{4px_0} = \sqrt{\frac{p}{x_0}}(x - x_0)$$

olur.  $D$ 'nin  $x$  eksenini kestiği  $P$  noktasını bulmak için bu denklemde  $y = 0$  koyar ve  $x = -x_0$  buluruz. O zaman

$$\begin{aligned}
 |ON| &= \sqrt{(p - x_0)^2 + y_0^2} \\
 &= \sqrt{p^2 - 2px_0 + x_0^2 + 4px_0} = \sqrt{(p + x_0)^2} \\
 &= |p + x_0| = p + x_0 = |OP|
 \end{aligned}$$

çıkar. Sonuç olarak  $ONP$  üçgeni ikizkenardır, yani  $NPO$  ve  $PNO$  açıları eşittir. Öte yandan,  $NR$  doğrusunu parabolün eksenine paralel olarak çizersek, yöndeş açılar olduklarından  $NPO$  ve  $SNR$  açıları da eşittir. Dolayısıyla  $\beta_1 = \beta_2$  elde ederiz ve parabolün yansıma özelliği ispatlanmış olur.

Bu ispat aynı zamanda parabolün odağı tarafından ve eksenine paralel olarak gelen bir ışının parabolce odağına doğru yansıtılacağını da söyler. Parabolün diğer tarafından gelen ışınlar ise odağa doğru geliyorsa eksene paralel olarak, eksene paralel olarak geliyorsa odaktan kaçacak şekilde yansıtılırlar parabol tarafından. Bunların da ispatını okuyucuya bırakıyoruz.

Eğrilerimizin bu yansıma özellikleri uygulamada çok işe yarar. Büyük teleskoplarda mercekler yerine ışınları daha geniş bir alandan toplayan ve kesitleri bizim eğrilerden birkaçı olan aynalar kullanılır. Özellikle uzaydan gelen ışınlar uzaklıkları nedeniyle birbirlerine paralel gibidirler, bunlar bir noktaya toplamak için parabol biçiminde aynalar yararlıdır. Örneğin uydu antenlerinin çanağı parabolün eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeydir, odağında ise yayınları alan asıl aletler bulunur. Çok uzaktaki sesler de gene parabolik mikrofonlarla kaydedilebilir. Tavanı ya da duvarları elips şeklinde olan bir odada odaklarda duran iki kişi ortam gürültülü olsa da birbirlerinin fısıltısını rahatlıkla duyabilirler.

Devamı var!

## KAYNAKÇA

- [1] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*, 3. baskı, Addison-Wesley, Don Mills, 1995.
- [2] T. Çizenel, *Geometri: Lise 2 Fen Kolu*, 17. basım, Nurgök, İstanbul, 1974.
- [3] R. Ellis & D. Gulick, *Calculus with Analytic Geometry*, 5. baskı, Harcourt Brace, Fort Worth, 1994.
- [4] T. Tanın, *Geometri Dersleri: Lise III Fen Kolu*, 19. basım, İnkilâp ve Aka, İstanbul, 1975.

# TAMSAYILAR KÜMESİNDE DENKLEMLER

Nizamettin Şirinoğlu \* C.Alparslan Ertuğ †

Bu yazımızda, tamsayılar kümesinde denklem çözümü ele alınmıştır. Temel amacımız, ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrencilere yardımcı olmaktır.

Dergimizin daha önceki sayılarında Diofant denklemleri hakkında çeşitli yazılar çıkmış olması nedeniyle, bu tip denklemler yazımızın kapsamı dışında tutulmuştur [1], [2], [3].

## 1. KURAMSAL ÖZET:

Aşağıda, çözülecek olan örneklerin daha kolay kavranmasını sağlamak için bazı hatırlatmalar yapılmıştır. Daha geniş bilgi için okuyucularımıza [4] ve [5] nolu kaynaklara başvurmalarını öneririz.

$a$  ve  $b$  tamsayılar olmak üzere  $a = bc$  eşitliğini sağlayan bir  $c$  tamsayısı varsa  $a$ ,  $b$  ile bölünür denir ve  $a|b$  ile gösterilir. Burada  $a$  bölünen,  $b$  bölen ve  $c$  ise bölüm olarak adlandırılır.

Bu tanım esas alınarak aşağıdaki özellikler kolayca elde edilebilir:

- (i)  $a|b$ ,  $b|c$  ise  $a|c$ .
- (ii)  $a|c$ ,  $b|c$  ise  $(a+b)|c$  ve  $(a-b)|c$ .
- (iii)  $a|c$  veya  $b|c$  ise  $a.b|c$ .
- (iv)  $a|b$  ve  $a \neq 0$  ise  $|a| \geq |b|$ .
- (v)  $a|b$  ve  $|a| < |b|$  ise  $a = 0$ 'dır.

Eğer  $a$  ve  $b$  tamsayıları aynı bir  $d$  tamsayısına bölünürse,  $d$  ye bu sayıların ortak böleni;  $a$  ve  $b$  sayılarını bölen en büyük sayıya ise ortak bölenlerin en büyüğü (OBEB) denir ve  $(a, b)$  ile gösterilir.

(vi)  $(a, b) = (|a|, |b|)$

(vii) Eğer  $b|a$  ( $b \neq 0$ ) ise,  $a$  ve  $b$  sayılarının OBEB'i  $(a, b) = |b|$ 'dir ( $a, b) = 1$  ise,  $a$  ve  $b$  sayıları aralarında asaldır denir.

(viii)  $a$  ve  $b$  tamsayılarının çarpımı  $c$  sayısına bölünürse ve  $(a, c) = 1$  ise,  $b|c$ .

$p > 1$  doğal sayısının  $p$  ve 1'den farklı böleni yoksa,  $p$  sayısına asal sayı denir. Eğer  $p = p_1 \cdot p_2$  biçiminde ve  $p_1, p_2$  birden farklı doğal sayılar ise,  $p$ 'ye bileşik sayı denir. 1, ne asal ne

bileşik sayı kabul edilir.

Şimdi de asal sayılara ait bazı özellikleri sıralayalım:

(ix) Eğer  $p$  asal sayısı  $a > 1$  doğal sayısına bölünüyorsa,  $a = p$  olmalıdır.

(x) Her bir  $a$  tamsayısı ya  $p$  asal sayısına bölünür yada  $p$  ile aralarında asaldırlar.

(xi) Eğer iki tamsayının çarpımı  $p$  asal sayısına bölünürse, çarpanlardan en az biri  $p$ 'ye bölünür.

(xii)  $a$  tamsayısının bire eşit olamayan en küçük böleni asal sayıdır.

(xiii) Bir karmaşık  $a$  doğal sayısının en küçük böleni,  $\sqrt{a}$ 'dan büyük değildir.

Eğer  $a > 1$  doğal sayısının asal bölenleri  $\sqrt{a}$ 'dan büyük ise, (xiii) yardımıyla,  $a$  sayısının asal olduğunu söyleyebiliriz. Bu sonuç, bir  $a$  sayısının asal olduğunu göstermek için kullanılır.

(xiv) Aritmetiğin Temel Teoremi: Her doğal  $a > 1$  sayısı, asal sayıların çarpımı şeklinde tek olarak gösterilebilir, (burada çarpanların sırası önemli değildir).

(xv) Asal sayılar kümesi sonsuzdur (Öklit).

(xvi)  $p > 1$  doğal sayısının asal olması için gerek ve yeter koşul  $p|(p-1)! + 1$  olmasıdır (Wilson).

(xvii) Eğer  $(a, p) = 1$  ise,  $p|a^{p-1} - 1$  (Fermat).

$a$  ve  $b$  tamsayıları  $m \geq 1$  doğal sayısına bölündüklerinde aynı  $n$  kalanını veriyorlarsa,  $a$  ve  $b$  sayıları  $m$  modülüne göre denktir denir ve  $a \equiv b \pmod{m}$  biçiminde gösterilir.

(xviii) Eğer  $a \equiv b \pmod{m}$  ise;

1.  $a = b + mt$  ( $t$  tamsayı)

2.  $m|a - b$  olur.

(xix)  $a \equiv c \pmod{m}$ ,  $b \equiv c \pmod{m}$  ise  $a \equiv b \pmod{m}$ 'dir.

(xx)  $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ ,  $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$ ,  $\dots$ ,  $a_n \equiv b_n \pmod{m}$  ise,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{m}$ 'dir.

\* Yıldız Teknik Üniversitesi Öğretim Üyesi

† Makina Yüksek Mühendisi.

(xxi)  $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{m}$  ise,  $a_1 a_2 \dots a_n \equiv b_1 b_2 \dots b_n \pmod{m}$ 'dir.

(xxii)  $a \equiv b \pmod{m}$  ise  $a^n \equiv b^n \pmod{m}, n \in \mathbb{N}$ .

(xxiii)  $a \equiv b \pmod{m}$  ise  $ka \equiv kb \pmod{m}, k \in \mathbb{Z}$ .

(xxiv) Eğer  $a \equiv b \pmod{m}, a = a_1 d, b = b_1 d, (m, d) = 1$  ise,  $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ .

(xxv)  $a \equiv b \pmod{m}$  ise her  $k$  tamsayısı için  $ak \equiv bk \pmod{mk}$ .

## 2. ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER [6] - [8]:

**Örnek 1:**  $x^3 - y^3 = xy + 61$  denklemini doğal sayılar kümesinde çözünüz.

$x = 0$  ya da  $y = 0$  için denklemin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur. Denklemin sağ tarafı sıfırdan farklı her  $x, y \in \mathbb{N}$  için  $\geq 62$  olduğundan,  $x > y$  yani  $x \geq y + 1$  olur.  $x = d + y, d \geq 1$  alırsak,

$$(d + y)^3 - y^3 = y(d + y) + 1$$

olur. Buradan da,

$$(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 = 61 \quad (1)$$

elde edilir.

$(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y \geq 0$  olduğundan,  $d^3 \leq 61$  veya  $d < 4$  olur. Yani  $d, 1, 2$  yada  $3$ 'tür.  $d = 1$  olduğundan, (1)'den;

$$2y^2 + 2y - 60 = 0$$

bulunur; buradan da,  $y_1 = 5$  ve  $y_2 = -6$  elde edilir.  $y \in \mathbb{N}$  olduğundan,  $y = 5$  ve  $x = y + d = 5 + 1 = 6$  olur.  $d = 2$  halinde ise, (1)'den,

$$5y^2 + 10y - 53 = 0$$

bulunur; buradan da  $y_{1,2} = (-5 \mp \sqrt{290})/5$  elde edilir.  $y \in \mathbb{N}$  olması gerektiğinden bu kökler uygun değildir.  $d = 3$  olması halinde de köklerin doğal sayı olmadıkları kolayca görülebilir.

O halde denklemin doğal sayılarda yalnız  $(x; y) = (6; 5)$  olan bir çözümü vardır.

**Örnek 2:**  $13(x + y) = xy$  denklemini tamsayılar kümesinde çözünüz.

Denklemini;  $13x + 13y - xy = 0$  şeklinde yazıp aşağıdaki gibi düzenlersek,

$$xy - 13y - 13x + 169 - 169 = 0$$

$$y(x - 13) - 13(x - 13) = 169$$

$$(x - 13)(y - 13) = 13^2$$

bulunur.  $(x - 13)$  ve  $(y - 13)$  tamsayılarının çarpımı aşağıdaki altı halde  $169$ 'a eşit olur:

$$x - 13 = 13, \quad y - 13 = 13$$

$$x - 13 = -13, \quad y - 13 = -13$$

$$x - 13 = 1, \quad y - 13 = 169$$

$$x - 13 = -1, \quad y - 13 = -169$$

$$x - 13 = 169, \quad y - 13 = 1$$

$$x - 13 = -169, \quad y - 13 = -1$$

Buradan da aşağıdaki altı çözüm elde edilir:

$$(x_1 = 26, y_1 = 182), (x_2 = 0, y_2 = 0)$$

$$(x_3 = 14, y_3 = 182), (x_4 = 12, y_4 = 156)$$

$$(x_5 = 182, y_5 = 14), (x_6 = 156, y_6 = 12)$$

**Örnek 3:**  $5^{2x} - 3 \cdot 2^{2y} + 5^x 2^y - 1 - y^{y-1} - 2 \cdot 5^x + 1 = 0$  denklemini tam sayılar kümesinde çözünüz.

Denklemini aşağıdaki gibi yeniden yazalım:

$$(5^x - 1)^2 + 2^{y-1}(5^x - 1) - 3 \cdot 2^{2y} = 0$$

$5^x - 1 = u$  dönüşümünü yaparsak,

$$u^2 - 2^{y-1}u - 3 \cdot 2^{2y} = 0$$

bulunur. Buradan da;

$$u_{1,2} = \frac{-2^{y-1} \mp 7 \cdot 2^{y-1}}{2}$$

$$u_1 = 3 \cdot 2^{y-1} \quad u_2 = -2^{y+1}$$

elde edilir.

**1. Durum:**  $5^x - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$

$x < 0$  tamsayısı için denklemin sol tarafı negatif, sağ tarafı ise pozitifdir. Yani, tam sayılar kümesinde  $x < 0$  için çözüm yoktur.  $x = 0, x = 1$  ve  $x = 3$  olduğunda da çözüm olmadığı kolayca gösterilebilir.

$x = 2$  için;  $24 = 3 \cdot 2^{y-1}$  veya  $2^3 = 2^{y-1}, y = 4$  elde edilir.

Böylece bir çözüm,  $(2; 4)$  bulunmuş olur.  $x$ 'in üçten büyük olması halinde ise,

$$5^x - 1 = (5 - 1)(5^{x-1} + 5^{x-2} + \dots + 5^2 + 5 + 1)$$

eşitliğinden,

$$4(5^{x-1} + 5^{x-2} + \dots + 5^2 + 5 + 1) = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$5^{x-1} + 5^{x-2} + \dots + 5^2 + 5 + 1 = 3 \cdot 2^{y-3} \quad (3)$$

bulunur. Açık ki,  $y \leq 3$  sayısı çözüm olamaz. Çünkü (3) denklemin sağ tarafı üç yada kesirli olur.

$y \geq 5$  halinde ise, eşitliğin sol tarafının ikiye bölünmesi için  $x$  sayısı çift olmalıdır.  $x = 2k$  olsun (2) denklemden;

$$5^{2k} - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$$

elde edilir. Buradan,

$$(5^2 - 1)(5^{2k-2} + 5^{2k-4} + \dots + 5^2 + 1) = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$5^{2k-2} + 5^{2k-4} + \dots + 5^2 + 1 = 2^{y-4}$$

bulunur.

$k$  sayısı da çift olmalıdır:  $k = 2n$ . Dolayısıyla  $x = 4n$  olur.  $x$ 'in bu değeri için, (2) denklemi;

$$5^{4n} - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$(5^4 - 1)(5^{4n-4} + 5^{4n-8} + \dots + 5^4 + 1) = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$13(625^{n-1} + 625^{n-2} + \dots + 625 + 1) = 2^{y-5}$$

şekline gelir. Bu denklemin sağ tarafı  $y \geq 5$  için 13'le bölünemez. Bu yüzden,  $x > 3$  için tam sayılar kümesinde çözüm yoktur.

**2. Durum:**  $5^x - 1 = -2^{y+1}$

$x \geq 0$  olduğunda denklemin sol tarafı sıfırdan büyük veya eşit, sağ tarafı ise negatif olduğundan tamsayılar kümesinde çözüm yoktur.  $x < 0$  ise denklemi;

$$\frac{1}{5^{-x}} + \frac{1}{2^{-y-1}} = 1$$

şeklinde yazmak olasıdır.  $(-x) > 0$  olduğunda ise,  $y$ 'nin hiçbir değeri için denklemin sol tarafı 1'e eşit olamaz.

Buradan denklemin tam sayılar kümesinde, yalnızca,  $(x, y) = (2, 4)$  çözümünün bulunduğu sonucuna varırız.

**Örnek 4:** Her bir  $p > 5$  asal sayısı için  $x^4 + 4^x = p$  denkleminin tamsayılar kümesinde kökü olmadığını gösteriniz.

$x$  tamsayısı sıfırdan küçük ise,  $f(x) = x^4 + 4^x$  tamsayı değildir. Eğer her hangi bir  $x \geq 0$  tamsayısı için  $f(x) = x^4 + 4^x$  tam sayı ise, bu sayının  $\geq 5$  veya bileşik sayı olduğunu gösterelim.  $x = 0$  ve  $x = 1$  için,  $f(0) = 1 < 5$ ,  $f(1) = 5$  olur.

$$\begin{aligned} x &= 2k (k \in \mathbb{N}) \text{ ise,} \\ f(x) &= 2^4 k^4 + 4^{2k} = 2^k (k^4 + 4^{2(k-1)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2k + 1 (k \in \mathbb{N}) \text{ olduğunda ise,} \\ f(x) &= x^4 + 4 \cdot 4^{2k} = [x^4 + 4x^2(2k)^2 + 4(2k)^4] \\ &\quad - 4x^2(2k)^2 \\ &= [x^2 + 2 \cdot (2k)^2]^2 - (2x \cdot 26k)^2 \\ &= [x^2 + 2x \cdot 2k + 2(2k)^2][x^2 - 2x \cdot 2k + 2(2k)^2] \\ &= [(x + 2k)^2 + 2^{2k}][x - 2)^2 + 2^{2k}] \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 5:** Doğal sayılar kümesinde,  $x^x + y^y = 2x + y$  denklemini çözünüz.

Denklemi,

$$x^x - 2x + y^y - y = 0$$

şeklinde yazalım ve düzenleyim:

$$x(x^{x-1} - 2) + y(y^{y-1} - 1) = 0$$

Eğer,  $x > 2$  ise  $x - 1 > 1$ ;  $x > 2$ ;  $x^{x-1} > 2^{x-1} > 2^1 = 2$  veya  $x(x^{x-1} - 2) > 0$  olur.

$y > 1$  ise  $y - 1 > 0$ ,  $y^{y-1} > 1^{y-1} = 1$  veya  $y(y^{y-1} - 1) > 0$  olur.

Buradan  $x > 2$ ,  $y > 1$  olduğunda sol tarafın sıfırdan büyük olduğu görülür.

$x = 1$ ,  $x = 2$  ve  $y = 1$  hallerinde ise, yalnız  $x = 2$ ,  $y = 1$ 'in çözüm olduğu kolayca görülür.

**Örnek 6:**  $x^2 + x + 1 = r \cdot y$  denkleminin  $(x, y)$  tamsayılar kümesinde sonsuz sayıda asal  $r$  sayıları için çözümünün varlığını gösteriniz.

Tersini, yani verilen denklemin sonlu sayıda  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sayıları için tamsayılar kümesinde çözümleri olduğunu kabul edelim.  $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$  olsun.  $p^2 + p + 1$  sayısı  $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'lerin hiçbirine bölünemez. Bundan dolayı  $p^2 + p + 1$  bileşik sayısı  $p_1, p_2, \dots, p_n$  den farklı olan asal  $d$  bölenine sahiptir. O halde,  $(p, \frac{p^2+p+1}{d})$  tamsayı çifti  $x^2 + x + 1 = dy$  denklemini sağlar. Böylece bir çelişki ile karşılaşırız. Buradan, denklemin tamsayılar kümesinde sonsuz asal sayısı için çözümünün olduğunu söyleyebiliriz.

**Örnek 7:**  $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$  denklemini sağlayan tüm tamsayı çiftlerini bulunuz.

Denklemin iki tarafını 4'le çarpıp 1 ekleyelim ve düzenleyelim:

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 &= (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1 \\ (2x + 1)^2 &= (2y^2 + y)^2 + 2(2y^2 + y) - (y^2 - 2y) \end{aligned}$$

olur. Bu ise,  $x$ 'in hiç bir tam değeri için mümkün değildir. Geriye yalnızca  $y = -1, y = 0, y = 1$  ve  $y = 2$  halleri kalır. bu değerler için aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$y = -1$$

$$x^2 + x = 0; x = 0, x = -1; \text{ kökler}$$

$$(0, -1), (-1, -1).$$

$$y = 0$$

$$x^2 + x = 0; x = 0, x = -1; \text{ kökler}$$

$$(0, 0), (-1, 0).$$

$$y = 1$$

$$x^2 + x = 4, x^2 + x - 4 = 0; x_{1,2}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{17}}{2}, \text{ kökler tam sayı değil.}$$

$$y = 2$$

$$x^2 + x - 30 = 0; x = -6, x = 5; \text{ kökler}$$

$$(-6, 2), (5, 2)$$

**Örnek 8: Hiçbir  $n > 2$  için,**

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n$$

**denkleminin doğal sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösteriniz.**

$x = 0$  sayısının bu denklemi sağlamadığı kolayca görülür.  $n > 2$  için bu denklemi sağlayan  $x \in \mathbb{N}$  sayısının bulunduğunu varsayalım.  $y = x + 1$  olsun. Bu durumda  $y \leq 2$  olur ve denklem

$$(y-1)^n + y^n = (y+1)^n \quad (4)$$

haline dönüşür. Buradan da,

$$(y+1)^n \equiv (\text{mod } y)$$

$$y^n \equiv 0 (\text{mod } y)$$

$$(y-1)^n \equiv (-1)^n (\text{mod } y) \text{ olduğundan,}$$

$$0 \equiv (y+1)^n - y^n - (y-1)^n$$

$$\equiv 1 - (-1)^n (\text{mod } y)$$

elde ederiz.

Eğer  $n$  tek ise,  $0 \equiv 2 (\text{mod } y)$  veya  $0 \equiv -2 (\text{mod } y)$  olur. Yani, 2 sayısı  $y$ 'ye bölünür.  $y \geq 2$  olması gerektiğinden  $y = 2$  olmalıdır. Bu halde ise,

$$0 \equiv 3^n - 2^n - 1 > 0$$

olur. Bu olanaksızdır.  $n$  çift ise,

$$(y \mp 1)^n = y^n \mp n \cdots y^{n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$y^2 \mp ny + 1$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} y^2 \mp ny + 1 (\text{mod } y^3)$$

$$0 \equiv (y+1)^n - y^n - (y-1)^n = 2ny (\text{mod } y^3)$$

olur. O halde  $2ny$  sayısı  $y^3$  ile bölünebilmelidir.  $y$  sayısı  $y^3$  ile bölünmediğinden  $2n$  sayısı  $y^2$  ile bölünmelidir. Buradan  $2n \geq y^2$  bulunur.

(4) denkleminin her iki tarafı  $y^n$  ile bölünürse,

$$(1 + \frac{1}{y})^n = 1 + (1 - \frac{1}{y})^2 < 2$$

elde edilir. Öte yandan,

$$(1 + \frac{1}{y})^2 = 1 + \frac{n}{y} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{y^2} + \cdots + \frac{1}{y^n}$$

$$> 1 + \frac{n}{y}$$

$$= 1 + \frac{2n}{2y} \geq 1 + \frac{y^2}{2y} = 1 + \frac{y}{2} \geq 2$$

olur. Bu ise çelişkiye yolaçar. Böylece verilen denklemin çözümünün olmadığı kanıtlanmış olmaktadır.

**Örnek 9:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} = y - 1$  denkleminin  $x \in \mathbb{N}$  ve  $x \geq 2$  olduğunda tam sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösteriniz.**

Her  $x \in \mathbb{N}$  için,  $2^n \leq x < 2^{n+1}$  koşulunu sağlayan bir  $n \in \mathbb{N}$  sayısı vardır.  $x$ 'ten büyük olmayan bütün tek sayıların çarpımını  $A$  ile gösterelim. Denklemin her iki tarafını  $2^{n-1}A$  ile çarpalım ve her bir  $m \in \mathbb{N}$  sayısını,

$$m = 2^p \cdot q (p \in \mathbb{Z}^+, q \text{ tek sayıdır.})$$

ile gösterelim.  $m \leq x$  ise  $q \leq x$ 'dir. Bu halde  $m \neq 2^n$  ise  $p < n$  olur. Eğer  $p > n$  olsaydı,

$$m = 2^p \cdot q \geq 2^{n+1} > x;$$

olurdu.  $p = n$  durumunda ise  $q \neq 1$  olduğu için,

$$m = 2^p \cdot q \geq 2^n \cdot 3 > 2^{n+1} > x$$

olurdu.

$a_m = \frac{1}{m} \cdot 2^{n-1} \cdot A$  sayısı  $2^n$ 'den farklı her  $m = 2, 3, \dots, x$  için tam sayıdır.

$a_{2n} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} \cdot A = \frac{A}{2}$  sayısı ise tamsayı olmadığından,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}\right)2^{n-1} \cdot A = (y-1)2^{n-1}A$$

denkleminin sol tarafı tamsayı değildir; sağ tarafı ise tamsayıdır. Bu yüzden, denklemin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

**Örnek 10:** Eğer  $x, y, z \in \mathbb{N}$  sayıları  $x^n + y^n = z^n$  denklemini sağlıyorsa,  $\min(x, y) \geq n$  olduğunu gösteriniz.

$x \leq y$  olduğunu kabul edelim.

$z^n = x^n + y^n > y^n$  eşitsizliğinden,  $z > y$ 'dir. Buradan,  $y \in \mathbb{N}$  olduğundan  $z \geq y+1$  olur.

$z^n \geq (y+1)^n = y^n + C_n^1 y^{n-1} + \dots + 1 \geq y^n + n y^{n-1}$  eşitsizliğinden,

$$x^n + y^n \geq y^n + n y^{n-1}$$

$$1^n \geq n \cdot y^{n-1} \geq n \cdot x^{n-1}$$

bulunur. Buradan da,

$x \geq n$  elde edilir.  $y \geq x$  olduğundan,  $\min(x, y) \geq n$  bulunur.

**Örnek 11:**  $x, y, z$  ve  $n$  pozitif tam sayılar ve  $n \geq z$  ise,  $x^n + y^n = z^n$  eşitliğinin sağlanamayacağını gösteriniz. (Fermat Teoreminin basit bir biçimi).

$n \geq z$  olmak üzere  $x^n + y^n = z^n$  eşitliğini sağlayan  $x, y, z, n$  doğal sayılarının bulunduğunu varsayalım.

$x < z, y < z$  ve  $x \neq y$  olduğunu görmek güç değildir; simetri dolayısıyla  $x < y$  kabul edebiliriz.

O halde,

$$\begin{aligned} z^n - y^n &= (z-y)(z^{n-1} + yz^{n-2} + \dots + y^{n-1}) \\ &\geq 1 \cdot n x^{n-1} > x^n \end{aligned}$$

olacaktır. Bu ise,  $x^n + y^n = z^n$  varsayımımızla çelişmektedir. Bu çelişki, problemde verilen önermenin doğrulanması demektir. [9].

**Örnek 12:**  $y$  sayısının birler basamağındaki rakamlarının 2, 4, 7 ve 9 olması durumunda,

$$1 + 2 + \dots + x = y$$

denkleminin  $x$  doğal sayıları için çözümünün olmadığı gösteriniz.

$x \in \mathbb{N}$  olduğundan,

$$1 + 2 + \dots + z = \frac{x(x+1)}{2}$$

olur. Eğer;

$$m = 10 \cdot k + p \quad n = 10 \cdot r + q \text{ ise,}$$

$$\begin{aligned} mn &= (10k + p)(10r + q) = 10(10kr + kq + pr) \\ &\quad + pq \end{aligned}$$

olur. Yani  $mn$  çarpımının birler basamağındaki son rakamı  $pq$ , çarpımının birler basamağındaki son rakama eşittir.

$x$  sayısının birler basamağındaki rakamlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ise,  $x + 1$  sayısının birler basamağındaki rakamlar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 olur. Buradan  $x(x + 1)$  sayısının birler basamağındaki rakamları 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0'dır.

Eğer,  $y = [x(x + 1)/2]$  sayısının birler basamağındaki rakamları 2, 4, 7, 9 olsaydı,

$$2 \left[ \frac{x(x+1)}{2} \right] = x(x+1)$$

sayısının birler basamağındaki rakamları 4, 8, 4, 8 olurdu. Bu ise olanaksızdır.

$$\text{Örnek 13: } 2x^2 + 2 = 3y^2 + y \quad (5)$$

denkleminin tam sayılarda kökü varsa,

$$x - y = p^2,$$

$$2x + 2y + 1 = q^2$$

$$3x + 3y + 1 = r^2$$

$p, q$  ve  $r$  tamsayı olmak üzere şeklinde olduğunu gösteriniz.

Eğer  $x = 0$  ise  $y(3y + 1) = 1$ 'dir.  $y$  tam sayı olduğundan  $y = 0$  olmalıdır.

Bu durumda,

$$x - y = 0^2, 2x + 2y + 1 = 1^2, 3x + 3y + 1 = 1^2$$

olur.  $x \neq 0$  ise  $y \neq 0$  ve  $x \neq y$ 'dir (eğer  $y = 0$  olsaydı,  $2x^2 + x = 3x^2 + x$  veya  $x = 0$  olurdu.)

$d$  ile  $x$  ve  $y$  sayılarının en büyük ortak bölenini gösterelim, yani;

$$x = x_1 d, y = y_1 d \quad (6)$$

şeklinde.  $x_1$  ve  $y_1$  tamsayılarının ortak böleni yoktur ve  $x_1 \neq y_1$  dir. Buradan,

$$y_1 = x_1 + n, n \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

olur. Burada  $n$  sıfırdan farklı ve  $x_1$  ile ortak böleni olmayan tam sayıdır. (6) ifadesini (5)'de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} 2x_1^2d^2 + x_1d &= 3y_1^2d^2 + y_1d \\ 2x_1^2d + x_1 &= 3y_1^2d + y_1 \end{aligned}$$

olur. Burada (7)'yi yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} 2x_1^2d + x_1 &= 3d(x_1 + n)^2 + x_1n \\ dx_1^2 + 6dx_1n + 3dn^2 + n &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

elde edilir.

Bu eşitliğin ilk üç terimi  $d$  ile bölünür. Bundan dolayı  $n$  sayısı da  $d$  ile bölünür. Son üç terim  $n$ 'ye bölündüğünden  $dx_1^2$  sayısı da  $n$  ile bölünür.  $x_1$  ve  $n$  sayılarının ortak böleni olmadığından  $d$  sayısı  $n$  ile bölünür. Böylece  $n = d$  veya  $n = -d$  olmalıdır.  $n = d$  durumunda (8)'den;

$$x_1^2 + 6x_1n + 3n^2 + 1 = 0$$

elde ederiz. Bu ise olanaksızdır. Çünkü,  $x_1^2 + 1$  sayısı 3 ile bölünemez. Bunu göstermek için  $x_1 = 3k, 3k + 1, 3k + 2$  yazmak yeterlidir.

$n = -d$  olduğunda ise  $y_1 = x_1 - d$  ve (6)'dan,

$$\begin{aligned} y &= y_1d = x_1d - d^2 = x - d^2 \\ x - y &= d^2 \end{aligned} \quad (9)$$

olur. (5)'ten aynı zamanda,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2y^2 + x - y &= y^2 \\ (x - y)(2x + 2y + 1) &= y^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. (6) ve (9)'u yukarıda yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} d^2(2x + 2y + 1) &= y_1^2d^2 \\ 2x + 2y + 1 &= d_1^2 \end{aligned}$$

buluruz.

Diğer taraftan (5) denkleminin yardımı ile,

$$\begin{aligned} (3x + 3y + 1)(x - y) &= 3x^2 + 3xy + x - 3xy - 3y^2 - y \\ &= 3x^2 + x - (2x^2 + x) = x^2 \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$(x - y) = d^2, \quad x^2 = x_1^2d^2 \quad \text{olduğundan,}$$

$$3x + 3y + 1 = x_1^2$$

olur.

### 3. ALIŞTIRMA SORULARI:

**Soru 1:**  $n$  ve  $p$  pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$x + py = n, \quad x + y = p^2$$

denkleminin,  $(x, y, z)$  pozitif tamsayılarından oluşan bir çözümünün bulunması için gerek ve yeter koşulu bulunuz (1905/1).

**Soru 2:** Eğer  $n, x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$  denkleminin  $(x, y)$  tamsayı çözümleri olmasını sağlayan bir pozitif tamsayı ise, en az üç tane böyle çözüm bulunacağını kanıtlayınız.  $n = 2891$  olduğunda bu denklemin tam sayı çözümlerinin bulunmadığını gösteriniz (1982 / 4).

**Soru 3:** Aşağıdaki denklemlerin tamsayı çözümlerini bulunuz.

$$a) 1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

$$b) 1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^z$$

**Soru 4:** Aşağıdaki denklemin tamsayılar kümesinde çözümünü bulunuz:

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv$$

**Soru 5:** Öyle dört tane tamsayı bulunuz ki, her birinin karesi ile kalan üç sayının toplamı bir tamkare olsun.

### KAYNAKÇA

- [1] Selma Atabey, 1.Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemleri Matematik Dünyası, C.5, Sayı 1, 17-18, (1995).
- [2] Selma Atabey,  $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$  şeklindeki Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, C.5, Sayı 2, 19-20, (1995).
- [3] Selma Atabey, İki Üslü Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, c.5, Sayı 4, 23-24, (1995).
- [4] A. O. Gelfond, Denklemlerin Tamsayılarla Çözülmesi, Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı: 8, İstanbul, (1962).
- [5] Don Redmond, Number Theory, Marcel Decker Ing., New York, (1996).
- [6] Ulusal Matematik Olimpiyatları, (Rusça), Moskova, Nowka 1987.
- [7] J.Browkin, S.Straszewicz, Polonya Matematik Olimpiyatları, Varşove, 1975.
- [8] N.B. Vasilyev, A.A. Egorov, Uluslararası Matematik Olimpiyat Problemleri, (Rusça), Moskova, Nauka 1988.
- [9] Hugo Steinhaus, One Hundred Problems in Elementary Mathematics, Dover Publications Inc., New York.

# BONCUKLARLA HESAP YAPMAK

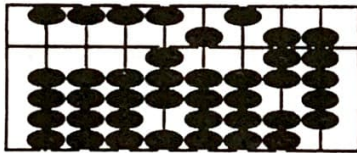
Buket CAN \*

Modern hayatın karmaşasına isyan etmenin (en azından benim için) keyifli bir yanı vardır. "Sadelik, sadelik, sadelik!" diye bağırıyordu Henry David Thoreau.. Abaküs şimdiki halinden daha sade olamazdı; yine de işlevini, elektrik devreleri, vakum tüpleri, transistörler, hatta küçük bir kaldırma veya dişli bile kullanmadan, büyük bir etkinlikle yerine getirir... Duvarı, dev bir bilgisayarın yanında içinde bir abaküs bulunan bir camikan görünür. Üzerinde "ACİL DURUM HALİNDE CAMI KIRINIZ!" yazmaktadır. Ben, Eski Romalıların bile yapabildikleri kadar basit olan bu el bilgisayarına kullanılmaktan gariplik bir keyif duyuyorum.

Martin Gardner

Abaküs, dünyanın en eski hesap makinesi olarak kabul edilebilir. Tahminlere göre, yazının bulunmasından bile daha önceki tarihlerden beri kullanılmaktadır. Eski Roma döneminde iyice yaygınlaşmış, on sekizinci yüzyılda Arap rakamlarının getirdiği aritmetiğe tamamen yenik düşünceye kadar Ortaçağ Avrupası günlük yaşamının önemli bir parçası olmuş, daha sonraları da Uzak Doğu'da kullanılmaya devam etmiştir.

Bu eski makinesiyle işlem yapma tekniği, günümüz aritmetiğinden çok farklı değil. Her iki yöntemin birbirlerine göre üstün tarafları var. Sayı boncukları, Arap rakamlarından daha somut cisimler olduklarından yapılan işlemler daha anlaşılır ve dört işlemi gerçekleştirmek için aritmetiğe dair çok az bir bilgi düzeyi yeterli oluyor. Buna rağmen Arap rakamları daha pratik ve daha hızlı; tecrübeli bir abaküs kullanıcısı oldukça hızlı işlem yapabiliyor, ama bu düzeye erişmek, yıllar süren yoğun bir eğitimi gerektiriyor.



Cennet taşları

Dünya taşları

Japon abaküsü "soroban" da '35079' sayısının gösterilişi

Abaküs deyince akla her sırasında onar boncuk bulunan çerçeveli sayma boncukları geliyor. Bu, abaküsün daha çok Rusya'da kullanılan çeşidi. Çin, Japonya, Eski Roma ve Ortaçağ Avrupası'nda kullanılan abaküslerde onluk tabanın yanında bir de beşlik alt-taban bulunuyor. Çin abaküsü "suanpan" da her sırada, beşer sayı değerinde iki "cennet", birer sayı değerinde beş "dünya" boncuğu var. Japon "soroban" ı da ona çok benziyor, her sırada bir cennet, dört de dünya boncuğu var. Boncuklar, dikey çubuklar üzerine dizili. Cennet ve dünya boncukları, birbirlerinden yatay bir çubukla ayrılıyor. Abaküsün 'sıfır'lanmış hali, bu yatay çubuğun üstünde yeralan cennet boncuklarının yukarı, çubuğun altındaki dünya boncuklarının da aşağı çekilmiş olması. En sağdaki dikey çubuk birler basamağını temsil ediyor, sola doğru gittikçe basamak değeri artıyor. 'Bir' rakamını göstermek için dünya boncuklarından biri yukarı çekiliyor. 'Beş' rakamı için cennet boncukları kullanılıyor, bu boncuklardan biri aşağıya indiriliyor. Eski Roma ve Ortaçağ Avrupası'nda boncuklar yerine, düz bir yüzeye çizilen paralel çizgilerin üstünde, önceleri "calculus" denilen çakıl taşları, sonraları "jetton" denilen madeni pullar kullanılmış. Abaküsün sıfır durumu, üzerinde hiç taş bulunmaması. 'Bir' yazmak için birler hanesine, 'elli' yazmak için ara basamak olarak kullanılan elli hanesine bir taş koymak gerekiyor.

Abaküste toplama ve çıkartma yapmanın doğal yöntemi basamak değerlerini gözönünde bulundurarak boncukların yerlerini değiştirmek. Bu işlemler, Arap rakamlarından farklı olarak soldan sağa

\* ODTÜ Matematik Bölümü Öğrencisi

doğru yürütüldüğü ve her bir sayıyı tek tek kaydetme zorunluluğu olmadığı için sözkonusu işlemlerde abaküs kullanıyor olmak daha pratik. Ama daha ila düzeydeki işlemler için, kullanıcının zihinsel katılımı gerekiyor; abaküs, çarpma, bölme yada karekök alma işlemlerini doğrudan yapamıyor, yalnızca ara aşamalarda kullanıcıya yardım ediyor.

|                          |                        |                      |                    |             |
|--------------------------|------------------------|----------------------|--------------------|-------------|
| <br>4 5 3 8<br>+ 1 9 2 2 | <br>5 5 3 8<br>+ 9 2 2 | <br>6 4 3 8<br>+ 2 2 | <br>6 4 5 8<br>+ 2 | <br>6 4 6 0 |
| <br>7 3 0 6<br>- 2 7 8 3 | <br>5 3 0 6<br>- 7 8 3 | <br>4 6 0 6<br>- 8 3 | <br>4 5 2 6<br>- 3 | <br>4 5 2 3 |

#### Japon abaküsü "soroban" da toplama ve çıkarma

Kullanıcı çarpım tablosunu ezbere biliyorsa, abaküsle çarpma yapmak kağıt kalem tekniğinden çok farklı değil; rakamlar birbiriyle çarpılıp abaküste çarpım sonuçları toplanıyor, işlem bittiğinde sonuç doğrudan okunuyor.

|         |   |      |   |      |   |       |   |       |   |        |        |
|---------|---|------|---|------|---|-------|---|-------|---|--------|--------|
| 96x347= |   |      |   |      |   |       |   |       |   |        |        |
| 6x7     | + | 90x7 | + | 6x40 | + | 90x40 | + | 6x300 | + | 90x300 | =      |
| 42      | + | 630  | + | 240  | + | 3600  | + | 1800  | + | 27000  | =33312 |

|     |       |       |         |         |           |
|-----|-------|-------|---------|---------|-----------|
|     |       |       |         |         |           |
| 4 2 | 6 7 2 | 9 1 2 | 4 5 1 2 | 6 3 1 2 | 3 3 3 1 2 |

#### Soroban'da çarpma

Günümüzde, çarpım tablosu hemen herkese tarafından ezbere bilinir. Ama Eski Roma ve Ortaçağ Avrupası'nda durum böyle değildi. Çarpma yapmak için genellikle detaylı tablolar ve bir takım pratik yöntemler kullanılırdı. Bu yöntemlerden biri Ortaçağ Avrupasında oldukça yaygın olarak kullanılan "ikiye çarpma ve ikiye bölme metodu"ydü. İki sayıyı birbiriyle çarpmak için sayılar yanyana yazılır, biri sürekli ikiyle çarpılırken, diğeri sonuçta "1" buluncaya kadar ikiye bölünürdü. Bölme işleminde kesirler dikkate alınmazdı. Çarpım sonucu, bölünen sayılardan tek olanların karşılığındaki çarpımlar toplanarak elde edilirdi. Örneğin 85 ve 127 sayılarının çarpımını için:

| $\div 2$        | $\times 2$ |                                                   |
|-----------------|------------|---------------------------------------------------|
| 85 $\checkmark$ | 127        |                                                   |
| 42 $\times$     | 254        |                                                   |
| 21 $\checkmark$ | 508        |                                                   |
| 10 $\times$     | 1016       | $85 \times 127 = 127 + 508 + 2032 + 8128 = 10795$ |
| 5 $\checkmark$  | 2032       |                                                   |
| 2 $\times$      | 4064       |                                                   |
| 1 $\checkmark$  | 8128       |                                                   |
|                 |            | 10795                                             |

Bu yöntem, aslında ikilik tabanın uygulamalarından biri. 85 sayısı onluk tabandan ikilik tabana çevriliyor. 127 sayısı da 85 yerine bu sayının ikilik tabandaki karşılığıyla çarpılıyor:

$$85 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^6$$

$$85 \times 127 = (2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6) \times 127 = 127 + 508 + 2032 + 8128 = 10795$$

Çarpmada olduğu gibi, bölme işlemi de kağıt yöntemine benziyor. Örneğin 2164'ü 57'ye bölmek için, sayılar abaküse yerleştiriliyor,  $216 \div 57 = 3$  olduğundan 216'dan önce  $50 \times 3$ , sonra da  $7 \times 3$  çıkarılıp, işleme bu şekilde devam ediliyor. Bölmenin sonucu, ayrıca abaküsün başka bir yerine kaydediliyor.

|         |         |         |         |         |     |
|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| 2164 57 | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ |
| -15 37  | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ |
| 664     | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ |
| -21     | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ |
| 454     |         |         |         |         |     |
| -35     | 2 1 6 4 | 6 6 4   | 4 5 4   | 1 0 4   | 5 5 |
| 104     | -1 5    | -2 1    | -3 5    | -4 9    |     |
| -49     |         |         |         |         |     |
| 55      |         |         |         |         |     |

Bu yöntem, kağıt kalemle uygulandığında uzun görünmesine rağmen abaküs kullanıldığında oldukça pratik. Japon abaküsünde kullanılan teknik, temelde bu yöntemi esas almasına rağmen oldukça detaylı ve bir bölme tablosunu ezberlemeyi gerektiriyor. Daha eski zamanlarda ise bölmenin sürekli olarak bölünenden çıkarıldığı bölmenin çarpımlarına ayrılarak işlemin sürdürüldüğü yöntemlerin kullanıldığı biliniyor.

Abaküsle dört temel işlem yapılabildiğine göre, bunlar kullanılarak daha karmaşık işlemler de çözülebilir. Örneğin, iki sayının en büyük ortak böleni bulunabilir. Eski Çin matematikçisi Chang Tsang (i.Ö. 250 - 152) "Matematik Sanatının Dokuz Bölümü" adlı kitabında, bunun için bizim Euclid Algoritması olarak bildiğimiz yöntemi kullanıyor.

$M$  ve  $N$  gibi iki sayının ( $M < N$ ) en büyük bölenini bulmak için:

$$N = M \times b_2 + k_1 \quad M > k_1 \geq 0$$

$$M = k_1 \times b_2 + k_2 \quad k_1 > k_2 \geq 0$$

$$k_1 = k_2 \times b_3 + k_3 \quad k_2 > k_3 \geq 0 \quad \text{algoritması takip edildiğinde 0'a eşit olmayan son kalan}$$

...

$$k_{n-1} = k_n \times b_{n+1} + 0 \quad k_n > 0$$

$k_n$ ,  $M$  ve  $N$ 'in en büyük ortak bölenidir.

Chang Tsang, abaküste küçük sayıyı büyük mümkün olduğu kadar çok çıkararak işleme başlıyor ve her bir basamakta bunu devam ettiriyor.

Sayıların köklerinin bulunması problemi uzun süre matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Eski Çin matematiği de bu konuya ilgisiz kalmaz.

Bir sayının karekökünü bulmak için, sayının kaç basamaklı olduğuna bakmak gerekir. Basamaklar tek sayıda ise işleme en soldaki ilk basamaktan, değilse yine en soldaki ilk iki basamaktan başlanır. Diyelim ki 59049'un karekökünü bulmak istiyoruz. İlk aşamada, karesi 59049'un ilk basamağından küçük ya da ona eşit olan bir sayı bulmamız gerekiyor.

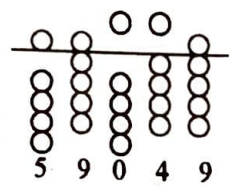
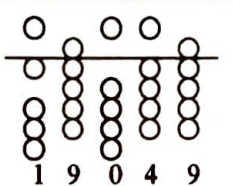
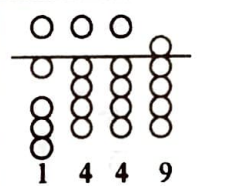
$$b^2 \leq 5 \Rightarrow (b \times 10^2)^2 \leq 59049 \Rightarrow b = 2$$

Bu aşamada 200'ün karesinin 59049'dan küçük olduğunu bulduk. Bir sonraki aşamada 200'den büyük, 59049'un karekökünden küçük ya da ona eşit bir sayı bulmamız gerekiyor.

$$[(10b + c) \times 10]^2 \leq 59049 \Rightarrow (100b^2 + 20bc + c^2) \times 100 \leq 59049 \Rightarrow (40 + c) \times c \times 100 \leq 59049 - 40000 = 19049 \Rightarrow 44 \times 4 \times 100 = 17600 \leq 19049 \Rightarrow c = 4$$

Aynı işlem, sonuç bulununcaya kadar tekrar edilir;

$$[10(10b + c) + d]^2 \leq 59049 \Rightarrow 100 \times 24^2 + 20 \times 24 \times d + d^2 \leq 59049 \Rightarrow (480 + d) \times d \leq 1449 \Rightarrow 483 \times 3 = 1449 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow 10(10b + c) + d = 243 \Rightarrow 243^2 = 59049$$

|                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>I) <math>(b \times 10^2)^2 \leq 59049</math><br/><math>b=2 \quad 59049 - 40000 = 19049</math></p> |  <p>II) <math>(40+c) \times c \times 100 \leq 19049</math><br/><math>c=4 \quad 19049 - 24 \times 4 \times 100 = 1449</math></p> |  <p>III) <math>(480+d) \times d \leq 1449</math><br/><math>d=3 \quad 1449 - 483 \times 3 = 0</math></p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

59049 sayısı tam kare olduğu için karekökünü bulabildik. Diyelim ki 27'nin karekökünün yaklaşık değerini bulmak istiyoruz. Chang Tsang'ın yöntemine göre:

$$b^2 \leq 27 \Rightarrow b = 5$$

Bulmak istediğimiz sayı 5'ten büyük. O halde:

$$(5 + a) \times (5 + a) = 27 \Rightarrow 25 + 10a + a^2 = 27 \Rightarrow 10a + a^2 = 2 \Rightarrow (10 + a) \times a = 2 \Rightarrow a = 2/(10 + a)$$

$$a \approx a_1 = 2/10 = 0.2 \Rightarrow \sqrt{27} \approx 5.2$$

$$a \approx a_2 = 2/(10 + a_1) = 2/10.2 = 0.196078 \Rightarrow \sqrt{27} \approx 5.196078$$

Bu işleme devam edilirse istenen değere daha çok yaklaşılr.

Karekök bulma yöntemi sayıların daha yüksek dereceden köklerini bulmada da kullanılabilir.

Örneğin:

$$2 = (1 + a)(1 + a)(1 + a) \Rightarrow 1 + 3a + 3a^2 + a^3 = 2 \Rightarrow a(3 + 3a + a^2) = 1 \Rightarrow a_1 = 1/3a_2 = 1/(3 + 3a_1 + a_1^2) \dots$$

Chang Tsang'ın kitabında örneklediği bir başka konu, üç bilinmeyenli denklem çözümleriydi:

"3 demet büyük tohum, 2 demet normal tohum, 1 demet küçük tohum 30 *tou* eder.

2 demet büyük tohum, 3 demet normal tohum, 1 demet küçük tohum 34 *tou* eder.

1 demet büyük tohum, 2 demet normal tohum, 3 demet küçük tohum 26 *tou* eder.

Büyük, normal ve küçük tohumlar kaç *tou* ederler?"

Büyük tohuma "b", normal tohuma "n", küçük tohuma da "k" dersek, bu soru aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$3b + 2n + k = 39$$

$$2b + 3n + k = 34$$

$$b + 2n + 3k = 26$$

Bu denklemin abaküsteki çözümü bildiğimiz matris yöntemine benzemektedir; önce denklemler abaküye yerleştirilir;





Buradan  $N$ 'nin  $N = 100C + Y$  şeklinde ifade edilebileceğini söyleyebiliriz.

$d_N; N$  yılında 1 Mart'ın hangi güne geldiğini gösterebilir.

Hesaplamalarımıza 1600 yılı ile başlayalım ve verilen herhangi bir yılın 1 Mart gününü bulmaya çalışalım.  $N$  yılı 1 Mart ile  $N-1$  yılı  $365 \equiv 1 \pmod{7}$  olduğundan  $d_N \equiv d_{N-1} + 1 \pmod{7}$  olur. Eğer  $N$  artık yıl ise fazladan 1 gün eklenmesi gerekeceğinden  $d_N \equiv d_{N-1} + 2 \pmod{7}$  olur.

$d_{1600}$ 'den  $d_N$ 'yi bulmak için ilk olarak 1600 ile  $N$  arasında kaç tane artık yıl olduğunu hesaplamalıyız.  $N$  dahil 1600 hariç olmak üzere bu aradaki yılların sayısı  $X$  olsun. İyi bilinen bir gerçek artık yılların 4 ile kalansız olarak bölünebildiğidir. Bununla birlikte 100 ile bölünen 1700, 1800, 1900 ve 2100 gibi yıllar artık yıllar değildir. Dolayısıyla sadece 400 ile bölünebilen yüzyılların artık yıl olduğu sonucuna varırız. Şimdi  $X$ 'i hesaplamak için şöyle bir yol takip edelim.

1600 ile  $N$  arasında 4 ile bölünebilen  $[(N - 1600)/4]$  yıl vardır.

1600 ile  $N$  arasında 100 ile bölünebilen  $[(N - 1600)/100]$  yıl vardır.

1600 ile  $N$  arasında 400 ile bölünebilen  $[(N - 1600)/400]$  yıl vardır.

(Burada  $[a]$  gösterimi  $a \in R$ 'nin tam kısmıdır.)

O zaman  $X$  için

$$X = [(N - 1600)/4] - [(N - 1600)/100] + [(N - 1600)/400]$$

eşitliği yazılabilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$X = [N/4] - [N/100] + [N/400] - 388$$

bulunur.  $N = 100C + Y$  ve  $Y/100 < 1$ ,  $[(C/4) + (Y/400)] = [C/4]$

olduğu dikkate alınırsa  $X$  için

$$X = 25C + [Y/4] - C + [C/4] - 388$$

$$X \equiv 3C + [C/4] + [Y/4] - 3 \pmod{7}$$

bulunur. Buna göre  $d_N$  için

$$d_N \equiv d_{1600} + 100C + Y - 1600 + 3C + [C/4] + [Y/4] - 3 \pmod{7}$$

$$d_N \equiv d_{1600} - 2C + Y + [C/4] + [Y/4] \pmod{7} \quad (*)$$

elde edilir.

1 Mart 1600 yılının haftasının günü ile herhangi bir yılın 1 Mart'ın haftasının gününe denk gelen bir formülümüz var. 1 Mart 1982 Pazartesi tarihi için 1600 yılının 1 Mart'ının haftasının gününü bulacağız.

$N = 1982$   $k = 1$   $C = 19$   $Y = 82$  ve  $d_{1982} = 1$  olup  $(*)$  ifadesinden

$$\begin{aligned} d_{1982} &\equiv d_{1600} - 38 + 82 + [19/4] \\ &\quad + [82/4] \pmod{7} \\ 1 &\equiv d_{1600} - 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

O halde  $d_{1600} = 3$  olmalıdır. Öyleyse 1 Mart 1600 tarihi çarşamba gününe gelir.  $(*)$  ifadesinde  $d_{1600} = 3$  yazılırsa

$$d_{1600} = 3 - 2C + Y + [C/4] + [Y/4] \pmod{7}$$

elde edilir. Bu formül bize herhangi bir  $N$  yılının 1 Mart'ının hangi güne denk geldiğini verir.

Örneğin; 1 Mart 1996 tarihini alalım,  
 $k = 1$   $m = 1$   $C = 19$   $Y = 96$

$$\begin{aligned} d_{1996} &\equiv 3 - 38 + 96 + [19/4] + [96/4] \\ &\equiv 3 - 38 + 96 + 4 + 24 \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Cuma = 5 olduğundan 1 Mart 1996 - Cuma günüdür.

Şimdide bu formülü kullanarak  $N$  yılının her ayının ilk gününü bulmaya çalışalım. Herhangi bir ayı gözönüne alalım ve bu ayın ilk gününü bulmaya çalışalım. Bu gözönüne aldığımız aydan önceki ayın 30 veya 31 çekmesine göre  $30 \equiv 2 \pmod{7}$  ve  $31 \equiv 3 \pmod{7}$  olduğundan 2 veya 3 günlük bir farkı o ayın ilk gününe eklemeliyiz. O zaman 1 yıl için aşağıdaki miktarlar karşımıza çıkar.

- 1 Mart'tan 1 Nisan'a kadar 3 gün
- 1 Nisan'dan 1 Mayıs'a kadar 2 gün
- 1 Mayıs'tan 1 Haziran'a kadar 3 gün
- 1 Haziran'dan 1 Temmuz'a kadar 2 gün
- 1 Temmuz'dan 1 Ağustos'a kadar 3 gün
- 1 Ağustos'dan 1 Eylül'e kadar 3 gün
- 1 Eylül'den 1 Ekim'e kadar 2 gün
- 1 Ekim'den 1 Kasım'a kadar 3 gün
- 1 Kasım'dan 1 Aralık'a kadar 2 gün
- 1 Aralık'tan 1 Ocak'a kadar 3 gün

1 Ocak'tan 1 Şubat'a kadar 3 gün

Toplam 29 günlük bir artış söz konusudur.

Bunun ortalaması  $\frac{29}{11} = 2,6$  gündür.

Bu artış formüle edilmeye çalışılırsa  $m$  1'den 11'e kadar değiştiğinde  $[2, 6m - 0, 2] - 2$  fonksiyonu aynı artmayı verecektir. (Bu formül Reverend Zeller tarafından deneme yanılma yolu ile bulunmuştur.) Dolayısıyla  $N$  yılının  $m$  ayının ilk günü

$$d_N + [2, 6m - 0, 2] - 2$$

ifadesinin  $(\text{mod } 7)$ 'ye göre negatif olmayan en küçük kalanı olarak ifade edilecektir.

$N$  yılının  $m$  ayının  $k$ 'inci gününe  $W$  dersek,  $W$ 'yı bulmak içinde aynı ayın ilk gününü veren formüle  $k - 1$  ekleriz. Buna göre

$$W \equiv k + [2, 6m - 0, 2] - 2C + Y + [C/4] + [Y/4] \pmod{7}$$

olarak elde edilir ki bu formül bize Gregorian takviminde herhangi bir tarihin hangi güne geldiğini verir. Örneklendirirsek;

**Örnek 1:** 11 Mart 1996

$$k = 11 \quad m = 1 \quad C = 19 \quad Y = 96$$

$$W \equiv 11 + [2, 6.1 - 0, 2] - 2.19 + 96 + [19/4] + [96/4] \pmod{7}$$

$$W \equiv 11 + [2, 4] - 38 + 96 + 4 + 24 \pmod{7}$$

$$W \equiv 1 \pmod{7}$$

O halde 11 Mart 1996 Pazartesi'dir.

**Örnek 2:** 20 Temmuz 1969 (Aya ilk insanın çıktığı gün)

$$k = 20 \quad m = 5 \quad C = 19 \quad Y = 69$$

$$W \equiv 20 + [2, 6.5 - 0, 2] - 2.19 + 69 + [19/4] + [69/4] \pmod{7}$$

$$W \equiv 20 + 12 - 38 + 69 + 4 + 17 \pmod{7}$$

$$W \equiv 84 \pmod{7}$$

$$W \equiv 0 \pmod{7}$$

Pazar günü bulunur.

#### KAYNAKÇA

1. K.Rosen; Elementary Number Theory and Its Applications Addison Wesley 1988
2. J.Uspensky and M.A.Heaslet Elementary Number Theory McGraw - Hill NewYork, 1935.

## GAUSS TOPLAMLARI ÜZERİNE

Emre Alkan \*

$S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  ifadesine  $k \geq 1$  tamsayısı için mertebesi  $k$  olan Gauss toplamı denildiğini biliyoruz.

$$S_1(n) = n(n+1)/2,$$

$$S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6,$$

$$S_3(n) = S_1^2(n), \dots$$

olduğunu hepimiz bilmekteyiz. Burada kendi başına ilginç olan soru,  $k$  sabitlendiğinde,  $S_k(n)$  ifadesini  $n$ 'in bir fonksiyonu olarak elde etmektir. İsaetli bir tahmin  $S_k(n)$ 'in  $n$ 'e göre derecesi  $k+1$  olan bir polinom olacağıdır. Fakat bu polinomun katsayılarını açık seçik bulmak olanaklı mı? Bu yazıda polinomun katsayılarının Bernoulli sayılarıyla ilgisini kurup, Gauss toplamlarının bazı özelliklerine değineceğiz.

$\frac{x}{e^x - 1}$  fonksiyonunun  $x = 0$  civarında Taylor serisine açılımına düşünelim. Pratikte bu açılımı şöyle elde ederiz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

\* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü Öğrencisi

olduğundan, bu kuvvet serisini bir polinom gibi düşünerek bir polinom bölmesi yaparız. Elde edilen açılım geleneksel olarak,

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - \dots$$

olarak yazılmakta ve  $B_k$  sayılarına Bernoulli sayıları denmektedir. Bu açılımda  $x$ 'in tek kuvvetlerin katsayısı  $x^1$  hariç sıfırdır. Bunun nedeni ise  $\frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}$  fonksiyonunun çift bir fonksiyon olmasıdır. (Aslında bazı yazarlar sıfırı da bir Bernoulli sayısı olarak kabul ederler.) Eşdeğer olarak  $\beta_0 = 1, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_{2k+1} = 0$  ve  $\beta_{2k} = (-1)^{k-1}B_k$  olmak üzere,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \frac{\beta_3}{3!}x^3 + \dots$$

yazabiliriz.  $n$  pozitif tamsayısı için  $e^{nx} - 1 = nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots$  olduğunu gözönüne olarak

$$\frac{x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1} = x(1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x})$$

ifadesine bakalım. Sonlu sayıda fonksiyon olduğundan  $1 + e^x + \dots + e^{(n-1)x}$  ifadesinin Taylor serisi herbirinin Taylor serileri toplamıdır. Böylece

$$1 + e^x + \dots + e^{(n-1)x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(n-1) \frac{x^k}{k!}$$

elde edilir. Dolayısıyla katsayılar Gauss toplamı ile ilgilidir. Kolayca görüleceği gibi  $S_k(n-1), k! \frac{x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1}$  ifadesinin Taylor açılımında  $x^{k+1}$ 'in katsayısıdır. Öte yandan

$$k! \frac{x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1} = k! \frac{x}{e^x - 1} (e^{nx} - 1) = k! (\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \dots) \cdot (nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots)$$

yazılabilir. Burada iki kuvvet serisinin çarpımı elde edilmiştir. Bu serilerin Cauchy çarpımıdır ve  $x^n$ 'in katsayısı,  $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  şeklinde verilir. Bunu pratikte şöyle değerlendirebiliriz.  $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$  ifadesinde  $x^n$  terimini elde etmek için ilk parantezden  $a_0$  ikincisinden  $b_n x^n$  veya birinciden  $a_1 x$ , ikinciden  $b_{n-1} x^{n-1} \dots$  şeklinde devam ederiz. Böylece  $x^n$ 'in katsayısı verilen şekilde olur.  $x^{k+1}$  elde etmek için ilk parantezden  $\frac{\beta_r}{r!} x^r$ , ikinci parantezden  $\frac{n^{k+1-r}}{(k+1-r)!} x^{k+1-r}$  alırız. Burada  $r = 0, 1, \dots, k$  olur ( $r = k+1$  olamaz çünkü ikinci serinin sabit terimi yoktur.) Öyleyse bu durumda da  $x^{k+1}$ 'in katsayısı,

$$k! \sum_{r=0}^k \frac{\beta_r}{r!} \frac{n^{k+1-r}}{(k+1-r)!} = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \frac{k!}{r!(k-r)!} \beta_r n^{k+1-r} = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} \beta_r n^{k+1-r}$$

$x^{k+1}$  katsayısını iki farklı şekilde elde ettik, Böylece  $S_k(n-1)$  ve hemen

$$S_k(n) = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} \beta_r (n+1)^{k+1-r}$$

elde ederiz. Hemen görüldüğü gibi bu ifade  $n$ 'ye göre derecesi  $k+1$  olan bir polinomdur. Üstelik bu polinomun katsayıları  $\beta_r$  sayılarına, yani Bernoulli sayılarına bağlıdır.

Bundan sonra  $S_k(n)$  ifadesini  $p$  asal bir sayı olmak üzere  $(\text{mod } p)$  'de inceleyeceğiz. Bunun için sadece,  $S_k(p-1) = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$  ifadesini  $(\text{mod } p)$  'de incelemek yeterlidir.  $Z_p$  çarpma işlemine göre çembersel bir gruptur. Böylece  $g$  bir ilkel kök olmak üzere,

$$S_k(p-1) \equiv 1 + g^k + g^{2k} + \dots + g^{(p-2)k} = \frac{g^{(p-1)k} - 1}{g^k - 1} \pmod{p} \quad \text{ve } g^k - 1 \equiv j \pmod{p}$$

olsun.  $p-1|k$  ise  $j \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $p-1 \nmid k$  ise  $j \not\equiv 0 \pmod{p}$  olur çünkü  $g$  bir ilkel köktür. Öte yandan  $g^{(p-1)k} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  olduğundan  $S_k(p-1)j \equiv 0 \pmod{p}$  olur.  $p-1 \nmid k$  ise  $j \not\equiv 0 \pmod{p}$  olduğundan  $S_k(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$  olmalıdır.  $p-1|k$  ise, de Fermat Teoremiyle  $S_k(p-1) \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$  olur. Sonuç olarak şunu elde etmiş olduk;

$$S_k(p-1) \equiv \begin{cases} 0, & p-1 \nmid k \\ -1, & p-1|k \end{cases} \pmod{p}$$

Böylece  $S_k(n)$  ifadesini  $\pmod{p}$ 'de elde etmek için  $1^k + 2^k + \dots + m^k$ ,  $1 \leq m < p-1$  şeklindeki bir ifadeyi  $\pmod{p}$ 'de bulmak yeterlidir. Burada  $m, n$ 'in  $p$  ile bölümünden kalandır. Şimdi şu sonucu göstereceğiz.

**Yardımcı Teorem:**  $a_1, a_2, \dots, a_j$  uygun rasyonel sayılar olmak üzere,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n), \quad k \text{ tek ise,}$$

$$S_1^k(n) = a_1 S_{k+1}(n) + a_2 S_{k+3}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n) \quad k \text{ çift ise,}$$

$$S_1^k(n) S_2(n) = a_1 S_{k+2}(n) + a_2 S_{k+4}(n) + \dots + a_j S_{2k+2}(n) \quad k+1 \text{ tek ise,}$$

$$S_1^k(n) S_2(n) = a_1 S_{k+1}(n) + a_2 S_{k+3}(n) + \dots + a_j S_{2k+2}(n) \quad k+1 \text{ çift ise,}$$

eşitlikleri geçerlidir.

**Kanıt:** Önce bazı somut örnekler ele alalım.  $k=1$  için yapacak bir şey yok  $k=2$  için  $S_1^2(n) = S_3(n)$  olduğunu biliyoruz.  $k=3$  için  $S_1^3(n) = a_1 S_3(n) + a_2 S_5(n)$  olacak şekilde  $a_1, a_2$  rasyonel sayıları bulalım. Bunun için en sağlam yol  $S_1^3(n+1) = a_1 S_3(n+1) + a_2 S_5(n+1)$  olduğunu gözönüne alarak,

$$S_1^3(n+1) - S_1^3(n) = a_1 (S_3(n+1) - S_3(n)) + a_2 (S_5(n+1) - S_5(n))$$

bir polinom özdeşliği elde etmektir. Burada  $n$  bağımsız değişken gibi düşünülmektedir. Buradan

$$\frac{1}{8}((n+2)^3(n+1)^3 - (n+1)^3n^3) = a_1(n+1)^3 + a_2(n+1)^5$$

ve kolayca  $(n+2)^3 - n^3 = 8a_1 + 8a_2(n+1)^2$  ve  $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}$  bulunur. Burada  $a_1 + a_2 = 1$  olduğuna dikkat edelim. Şimdi  $S_1^3(n) = \frac{1}{4}S_3(n) + \frac{3}{4}S_5(n)$  olduğunu tümevarımla gösterebiliriz.  $n=1$  için  $1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(a_1 + a_2 = 1 \text{ olması tümevarımın başlangıcını sağlıyor})$ . Tümevarım adımı ise sağladığımız özdeşlikten dolayı hemen yapılabilir. Okuyucu  $k=4$  için benzer bir yol izleyerek

$$S_1^4(n) = \frac{1}{4}S_5(n) + \frac{1}{2}S_7(n)$$

olduğunu bulabilir. Şimdi genel olarak,  $k$  tek ise,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n)$$

olarak ( $k$  çift durumu okuyucuya bırakılmıştır),

$$S_1^k(n+1) = a_1 S_k(n+1) + \dots + a_j S_{2k-1}(n+1)$$

ve böylece

$$S_1^k(n+1) - S_1^k(n) = a_1 (S_k(n+1) - S_k(n)) + a_2 (S_{k+2}(n+1) - S_{k+2}(n)) + \dots + a_j (S_{2k-1}(n+1) - S_{2k-1}(n)).$$

$$\frac{1}{2^k}((n+2)^k(n+1)^k - (n+1)^k n^k) = a_1(n+k)^k + a_2(n+1)^{k+2} + \dots + a_j(n+1)^{2k-1}$$

ve hemen,

$$(n+2)^k - n^k = 2^k a_1 + 2^k a_2(n+1)^2 + \dots + 2^k a_j(n+1)^{k-1}$$

Eğer bu özdeşliği sağlayan  $a_1, a_2, \dots, a_j$  rasyonel sayıları bulunabiliyorsa, her iki tarafın sabit terimleri karşılaştırılarak  $a_1 + a_2 + \dots + a_j = 1$  elde ederiz. Dolayısıyla,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n)$$

$n = 1$  için sağlanır ve tümevarımla tüm  $n$ 'ler için doğru olur. Böylece söz konusu eşitliklerin olabilmesi  $a_1, a_2, \dots, a_j$ 'nin bulduğumuz polinom özdeşliğinden belirlenebilmesine bağlıdır.  $k$  tek olduğu için,

$$\begin{aligned} 2^k a_1 + 2^k a_2 (n+1)^2 + \dots + 2^k a_j (n+1)^{k-1} &= (n+2)^k - n^k = (n+1+1)^k - (n+1-1)^k \\ &= 2 \binom{k}{k} + 2 \binom{k}{k-2} (n+1)^2 + \dots + 2 \binom{k}{3} (n+1)^{k-3} + 2 \binom{k}{1} (n+1)^{k-1} \end{aligned}$$

yazarak

$$a_1 = \frac{1}{2^{k-1}}, a_2 = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{k-2} = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{2}, \dots, a_j = \frac{k}{2^{k-1}}$$

Böylece  $a_1, a_2, \dots, a_j$  rasyonel sayılarını da belirlemiş oluyoruz. Sonuç olarak  $k$  tek iken,

$$S_1^k(n) = \frac{1}{2^{k-1}} S_k(n) + \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{2} S_{k+2}(n) + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} S_{2k-1}(n)$$

elde ederiz. Benzer şekilde  $k$  çift iken,

$$S_1^k(n) = \frac{k}{2^{k-1}} S_{k+1}(n) + \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{3} S_{k+3}(n) + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} S_{2k-1}(n)$$

olduğuda görülebilir.

Buradan şu sonuç da çıkarılabilir. Her  $k > 1$  tek sayısı için  $S_k(n)/S_1^2(n)$  ifadesi  $S_1(n)$ 'in rasyonel katsayılı bir polinomu olarak ifade edilebilir. Bunun kanıtını fazla uzatmamak amacıyla, bir özel durumda isteneni görelim. Genel halde de aynı yol izlenir.  $k = 9$  için  $S_9(n)/S_1^2(n)$  ifadesini istenen biçimde yazalım. Yazım kolaylığı için  $S_k(n) \equiv S_k$  alacağız. Elde ettiğimiz eşitliklerden,

$$S_1^5 = \frac{1}{16} S_5 + \frac{5}{8} S_7 + \frac{5}{16} S_9, \quad (1)$$

$$S_1^4 = \frac{1}{2} S_5 + \frac{1}{2} S_7, \quad (2)$$

$$S_1^3 = \frac{1}{4} S_3 + \frac{3}{4} S_5, \quad (3)$$

$$S_1^2 = S_3 \quad (4)$$

yazılabilir. (1)'den  $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - \frac{1}{5} - 2S_7$ , (2)'den  $S_7 = 2S_1^4 - S_5$  yazılıp yerine konursa  $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - 4S_1^4 + \frac{9}{5}$  (3)'den  $S_5 = \frac{4}{3} S_1^3 - \frac{1}{3} S_3$  yerine konursa ve (4) kullanılırsa,  $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - 4S_1^4 + \frac{12}{5} S_1^3 - \frac{3}{5} S_1^2$  ve eşdeğer olarak,

$$S_9/S_1^2 = \frac{16}{5} - 4S_1^2 + 4S_1^2 + \frac{12}{5} S_1 - \frac{3}{5}$$

yazılabilir.

$k + 1$  tek ise ilk kısımdaki gibi

$$(2n+3)(n+2)^{k+1} - (2n+1)n^{k+1} = 6.2^k a_1 (n+1) + 6.2^k a_2 (n+1)^3 + \dots + 6.2^k a_j (n+1)^{k+1}$$

elde ederiz. Sol taraf  $2(n+1)[(n+2)^{k+1} - n^{k+1}] + (n+2)^{k+1} + n^{k+1}$  şeklinde yazılıp  $n+1$ 'in kuvvetleri şeklinde düzenlenirse katsayılar hemen,

$$a_1 = \frac{1}{6.2^{k-1}} \left[ 2 \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} \right],$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{6 \cdot 2^{k-1}} \left[ 2 \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{3} \right], \\
a_3 &= \frac{1}{6 \cdot 2^{k-1}} \left[ 2 \binom{k+1}{4} + \binom{k+1}{5} \right] \\
a_j &= \frac{1}{6 \cdot 2^{k-1}} \left[ 2 \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{0} \right]
\end{aligned}$$

biçiminde tayin edilebilir.  $k+1$ 'in tek olma durumu da benzer biçimde ele alınabilir.

Son olarak şu sonucu göstermeyi de okuyucuya bırakıyoruz. Her  $k$  çift sayısı için  $S_k(n)/S_2(n)$  ifadesi  $S_1(n)$ 'in rasyonel katsayılı bir polinomu olarak ifade edilebilir.

## KAYNAKÇA

- [1] N.Çalışkan, Gauss Formülünün Genelleştirilmesi Matematik Dünyası Cilt: 5, Sayı: 1
- [2] T.Terzioğlu, Gauss Formülünün Genelleştirilmesi Matematik Dünyası Cilt: 2, Sayı: 3
- [3] D.Allison, Problem 10290, American Mathematical Monthly, 100, 290 (1993)
- [4] G.H.Hardy, E.M.Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 1979

## KUADRATİK REZİDÜLER

Aytek Erdil \*

Bu yazıda, Sayılar Kuramı'nın çok ünlü bir teoreminin kanıtını verceğiz. Bu teorem 1783 de Euler tarafından ifade edilmiş ve ilk kez 1796'da Gauss tarafından kanıtlanmıştır.

İlgilenenler, teoremin bazı basit uygulamalarını 96/2 Problem Semineri'nin çözümlerinden inceleyebilirler.

### Kuadratik Rezidü ve Legendre Simgesi

$a$  ve  $n$ ,  $(a, n) = 1$  ve  $n > 0$  olacak biçimde tamsayılar olsunlar  $y^2 \equiv a \pmod{n}$  denkleğinin bir çözümü varsa  $a \pmod{n}$  de kuadratik rezidüdür denir.  $P$  bir asal ve  $(a, p) = 1$  olmak üzere  $\left(\frac{a}{p}\right)$  Legendre simgesi,  $a \pmod{p}$  de bir kuadratik rezidüyse 1'e değilse -1'e eşit olarak tanımlanır.

**Lagrange Teoremi:**  $(a_0, p) = 1$   $P$  bir asal sayı olmak üzere  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$  denkleğinin,  $\pmod{p}$ 'de herhangi ikisi birbirine denk olmayan en çok  $n$  çözümü vardır.

**Kanıt:** Teoremi  $n$  üzerinde tümevarımla kanıtlayacağız.  $(a_0, p) = 1$  olduğundan  $n = 1$

için tek çözüm vardır. Şimdi teoremin  $n - 1$  dereceli polinom için doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir  $a$  tamsayısı için  $P(x) - P(a) = a_0(x^n - a^n) + a_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - a) = (x - a)Q(x)$  olacak biçimde tamsayı katsayılı, başkatsayısı  $a_0$  olan ve  $(n - 1)$ 'inci dereceden bir  $Q(x)$  polinomunun bulunduğu görülmektedir.  $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$  denkleğinin bir  $a$  çözümü varsa diğer tüm çözümler  $(x - a)Q(x) \equiv 0 \pmod{p}$  denkleğini sağlar. Tümevarım varsayımımızdan  $Q(x)$ 'in en çok  $n - 1$  çözümü vardır ve bu  $n - 1$  çözümün tümü  $a$ 'dan farklı bile olsa  $P$  sayısının asalılığı nedeniyle  $P(x)$ 'in en fazla  $n$  çözümü vardır. Bu da teoremin kanıtını tamamlar.

**Euler Ölçütü:**  $p$ , çift olmayan bir asalsa  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}$  dir.

**Kanıt:** Yazım kolaylığı sağlamak için  $r = \frac{1}{2}(p - 1)$  diyelim  $a \pmod{n}$  de bir kuadratik rezidüyse  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  olacak biçimde bir  $x$  tamsayısı vardır, ve Fermat'nın küçük teoreminden  $a^r \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  iken öte yandan  $a$  bir kuadratik rezidü, tanımdan  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$

\* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü Öğrencisi

idi. Dolayısıyla  $a$  bir kuadratik rezidü değilken  $a^r \equiv -1 \pmod{n}$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, \dots, a_r = r^2$  sayılarından herhangi ikisi  $\text{mod } p$ 'de birbirine denk değildir ( $a_i \equiv a_j$  olsaydı,  $(i-j)(i+j) \equiv 0 \pmod{p}$  veya  $p|(i-j)vp|(i+j)$  elde edilirdi ki  $i \neq j$  iken  $0 < |i-j|, |i+j| < p$  dir.) Ayrıca her  $k$  tamsayısı için  $k^2 \equiv (p-k)^2 \pmod{p}$  dir, dolayısıyla  $a_1, a_2, \dots, a_r, (mod\ n)$ 'de tüm kuadratik rezidüleri gösterir.  $y^r \equiv 1 \pmod{p}$  denkleğinin, Lagrange teoreminden, en çok  $r$  çözümü  $a$  bir kuadratik rezidü değilken  $a^r \not\equiv 1 \pmod{p}$ . Fermat'ın küçük teoreminden  $a^{2r} \equiv 1 \pmod{p}$  dir ve buradan  $(a^r - 1)(a^r + 1) \equiv 0 \pmod{p}$  ve  $a^r \equiv -1 \pmod{p}$  elde edilir. Tanım gereğİ  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$  olduğı için kanıt bu durumda da tamamlanmış olur.

**Gauss Önsavı:**  $p$  çift olmayan bir asal ve  $(a, p) = 1$  olsun.  $\frac{p-1}{2} = r$  diyelim ve  $j = 1, 2, \dots, r$  için  $a_j \equiv a \cdot j \pmod{p}$  ve  $-r < a_j \leq r$  olsun.  $n$  sayısı  $a_j < 0$  koşulunu sağlayan  $j$ 'lerin sayısını gösteriyorsa  $\left(\frac{a}{p}\right)^n = (-1)^n$  dir.

**Kanıt:**  $|a_j|$  sayıları birbirinden farklıdır. Eğer öyle olmasalardı.  $a_j = -a_k$  olacak biçimde  $j$  ve  $k$  olurdu. Buradan  $a(j+k) \equiv 0 \pmod{p}$  ve  $(a, p) = 1$  olduğundan  $p|(j+k)$  elde ederiz. Ama  $0 < j+k < p-1$  olduğundan bu olanaksızdır. Ayrıca  $1 \leq |a_j| \leq r$  olduğundan  $|a_j|$  sayılarıyla,  $1, 2, \dots, r$  sayıları arasında bire-bir bir eşleme vardır. Buradan  $a_1, a_2, \dots, a_r = (-1)^n r!$  olduğunu ve  $a_j \equiv a \cdot j \pmod{p}$  olduğundan  $a^r r! \equiv (-1)^n r! \pmod{p}$  denkleğini elde ederiz.  $(p, r!) = 1$  olduğü için  $a^r \equiv (-1)^n \pmod{p}$  dir. Euler ölçütünden  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^r \pmod{p}$  dir ve buradan da  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv (-1)^n \pmod{p}$  ve  $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n$  elde edilir. Böylece kanıt tanımlanır.

Artık başlangıçta sözünü ettiğimiz ünlü teoremi kanıtlayabiliriz.

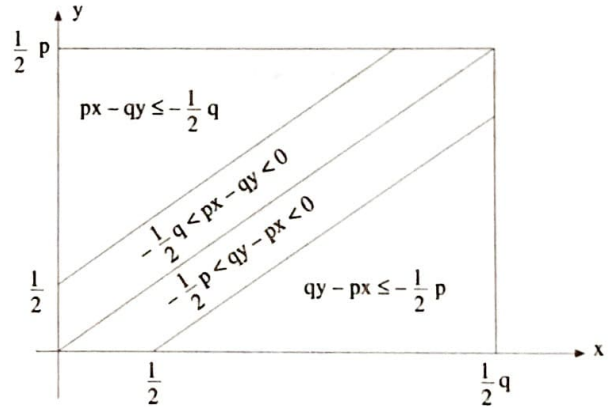
**Karesel Karşıklık Kuralı:** (Law of Quadratic Reciprocity)

$p$  ve  $q$  çift olmayan ve birbirinden farklı asallarsa

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)} \text{ dir.}$$

**Kanıt:** İlk önce,  $n, 0 < x < \frac{1}{2}q < px - qy < 0$  koşullarını sağlayan  $(x, y)$  tamsayı ikililerinin sayısını göstermek üzere, Gauss'un

önsavından  $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^n$  olduğunu gözlemleriz. Bu eşitsizliklerden  $y < (pxq) + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(p+1)$  elde ederiz. Buradan,  $y$  bir tamsayı olduğı için  $n$ 'nin,  $0 < x < \frac{1}{2}q$  ve  $0 < y < \frac{1}{2}p$  ile tanımlanan  $d$  dikdörtgenin içinde  $\frac{1}{2}q < px - qy < 0$  koşulunu sağlayan tamsayı koordinatlı noktaların sayısına eşit olduğunu gözlemleriz (Şekle bkz.) Benzer biçimde,  $m$   $D$  dikdörtgeni içinde  $-\frac{1}{2}p < qy - px < 0$  koşulunu sağlayan tamsayı koordinatlı noktaların sayısını göstermek üzere,  $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^m$  dir. Şimdi  $\frac{1}{4}(p-1)(q-1) - (n+m)$  nin çift olduğunu kanıtlamak yeterlidir.  $\frac{1}{4}(p-1)(q-1)$ ,  $D$  dikdörtgeni içindeki tamsayı koordinatlı noktaların sayısına eşittir, ve  $\frac{1}{4}(p-1)(q-1) - (n+m)$ ,  $D$  dikdörtgeni içinde  $px - qy \leq -\frac{1}{2}q$  ya da  $qy - px \leq -\frac{1}{2}p$  koşulunu sağlayan noktaların ayrıştır ve eşit sayıda tamsayı koordinatlı nokta içerirler, çünkü  $x = \frac{1}{2}(q+1) - x'$  ve  $y = \frac{1}{2}(p+1) - y'$  biçiminde bir değişken değiştirme, iki ayrık alan arasında bir, bire-bir eşleme kurar. Buradan da bu iki ayrık alanda bulunan tamsayı koordinatlı nokta sayısının çift olduğunu elde ederiz ve kanıt tamamlanır.



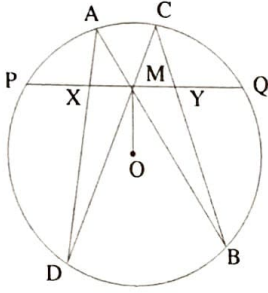
#### KAYNAKÇA

1. Baker, Alan. A concise intuduction to the theory of numbers, Birinci Baskı, Combredge University Press, New York, 1984.
2. Chandrasekharan, K. Introduction to analytic number thery, Sprigner-Verlag, Almanyay, 1968.

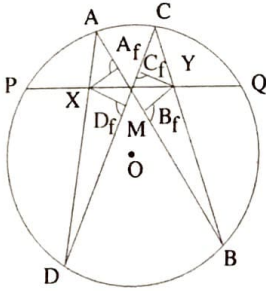
# KELEBEK SORUSU ve KARMAŞIK SAYILAR

Selma Atabey

Değerli okuyucular, eğer arkadaşlarınızı ilk başta kolay görünen fakat o kadar kolay çözülmemeyen bir soru ile zorlamak istiyorsanız onlara kelebek sorusunu sorunuz.



**Soru 1:**  $M$ , herhangi bir çemberin  $PQ$  kirişinin orta noktası olsun.  $M$  den geçen herhangi  $AB$  ve  $CD$  kirişleri çizilsin.  $AD$  ve  $BC$  kirişleri  $PQ$  doğru parçasını sırayla  $X$  ve  $Y$  noktalarında kessin.  $M$  noktasının  $XY$  doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlayınız.



**Çözüm:**  $AB$  ve  $CD$  kirişlerine  $X$  ve  $Y$  noktalarından sırayla  $XA_1$ ,  $XD_1$ ,  $YB_1$ ,  $YC_1$  diklerini inelim. (Şekil - 2) kolaylık için,  $MX = x$ ,  $MY = y$  ve  $PM = MQ = a$  diyelim.

$$\widehat{MXA_1} \sim \widehat{MYB_1}, \widehat{MXD_1} \sim \widehat{MYC_1},$$

$$\widehat{XA_1A} \sim \widehat{YC_1C}, \widehat{XD_1D} \sim \widehat{YB_1B}$$

benzer üçgenlerinden

$$\frac{x}{y} = \frac{XA_1}{YB_1} ; \frac{x}{y} = \frac{XD_1}{YC_1};$$

$$\frac{XA_1}{YC_1} = \frac{AX}{CY} ; \frac{XD_1}{YB_1} = \frac{DX}{BY}$$

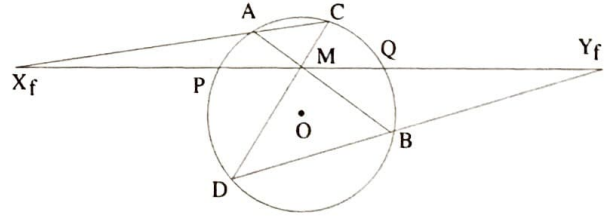
bulunur. Bu son dört eşitlikten

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{XA_1 \cdot XD_1}{YB_1 \cdot YC_1} = \frac{AX \cdot DX}{CY \cdot BY} \cdot \frac{PX \cdot QX}{PY \cdot QY}$$

$$= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da,  $x^2(a^2 - y^2) = y^2(a^2 - x^2)$  ya da  $x^2 = y^2$  yani  $x = y$  elde edilir. Böylece  $M$  noktasının  $XY$  doğru parçasının orta noktası olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi tekrar Şekil - 1'i göz önüne alalım ve  $AC$  ile  $BD$  doğrularını çizelim.  $AC$  ile  $BD$  doğruları  $PQ$  doğrusunu sırayla  $X_1$  ve  $Y_1$  noktalarında kesiyor (Şekil - 3).



$M$  noktasının  $X_1Y_1$  doğru parçasının da orta noktası olduğu görülüyor. Bunun doğruluğu da yukarıdaki kanıtın benzer yolu ile gösterilebilir.

Bu iki sorunun bağlantılı olduğu açıktır ve bunlara doğal olarak ortak çözüm aramalıyız. Böyle bir fırsat bulabiliriz. Eğer düzlemin noktalarını karmaşık sayılar ile gösterirsek, yukarıda verdiğimiz iki sorunun çözümüne geçmeden önce bir kaç ek açıklamalarda bulunacağız.

Düzlemde, düzlemin noktaları ile karmaşık sayılar arasında bire - bir eşleme yapılabilen koordinat sisteminin başlangıç noktası 0 olsun. Bu bire - bir eşlemede düzlemin  $A, B, C, \dots$  gibi noktalarının görüntüleri olan karmaşık sayıları sırayla  $a, b, c, \dots$  gibi harflerle gösterelim.)  $k$ , merkezi 0 noktası olan bir birim çember olsun. Bu birim çember üzerindeki noktalar  $z, \bar{z} =$

çember üzerindeki noktalar  $z, \bar{z} = 1$  özelliğini sağlar (Burada  $\bar{z}$  ile  $z$  karmaşık sayısının eşleniği gösterilmiştir.)  $A$  ile  $B$  noktaları  $k$  birim çemberinin iki noktası ve  $z$  de  $AB$  doğrusu üzerinde bir nokta olsun. O zaman

$$\frac{b-a}{b-z} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{z}}$$

olur. Bu son eşitlikte de  $\bar{a}$  yerine  $\frac{1}{a}$ ,  $\bar{b}$  yerine de  $\frac{1}{b}$  alırsak  $ab\bar{z} + z = a + b$  bulunur.

$C$  ile  $D$ ,  $k$  çemberinin başka iki noktası ise,  $AB$  ve  $CD$  doğrularının kesim noktası (eğer böyle bir nokta varsa) için

$$cd\bar{z} + z = c + d \text{ eşitliği de vardır.}$$

Buradan

$$z = \frac{(a+b)cd - (c+d)ab}{cd - ab}$$

bulunur. Bu formül aslında  $AB$  ve  $CD$  doğrularının kesişmeleri için gerek ve yeter şartın  $cd \neq ab$  olduğunu gösterir.

Eğer  $A$  ile  $B$  noktaları,  $k$  çemberinin bir çapının uç noktaları olmayacak biçimde  $k$  çemberinin üzerinde iki nokta ise,  $k$  çemberine  $A$  ve  $B$  noktalarında çizilen teğetler  $S$  noktasında kesişir ve bu nokta için  $s = \frac{2ab}{a+b}$  eşitliği sağlanır. Gerçekten,  $\frac{s-a}{a} = -\frac{\bar{s}-\bar{a}}{\bar{a}}$  dir. Buradan da,  $s + a^2\bar{s} = 2a$  bulunur. Benzer şekilde de  $s + b^2\bar{s} = 2b$  olduğu görülür. Dolayısıyla,  $s = \frac{2ab}{a+b}$  dir.

1. Sorunun başka bir çözümüne geçelim. Hiç bir kısıtlama yapmadan verilen çemberin birim çember ile çakıştığını ve

$$g = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$p = \cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$$

$$= -\cos \alpha + i \sin \alpha$$

olduğunu düşünebiliriz. O zaman,  $m = \frac{1}{2}(p + g) = i \sin \alpha$  dir. Dolayısıyla  $\bar{m} = -m$  dir.

$M$  noktası  $AB$  doğrusu üzerinde olduğundan,

$$ab\bar{m} + m = a + b \quad \text{ya da}$$

$$abm = m - a - b$$

dir. Benzer şekilde,

$$cdm = m - c - d \quad \text{dir.}$$

$X$  ve  $Y$  kesişim noktaları için

$$x = \frac{(p+g)ad - (a+d)pg}{ad - pg}$$

$$= \frac{2mad + a + d}{ad + 1} \quad \text{ve}$$

$$y = \frac{2mbc + b + c}{bc + 1}$$

elde edilir. O zaman,

$$(x-m) + (y-m) = \frac{mad + a + d - m}{ad + 1} + \frac{mbc + b + c - m}{bc + 1}$$

dir. Paydaları eşitlersek, elde edilen kesirin payı,

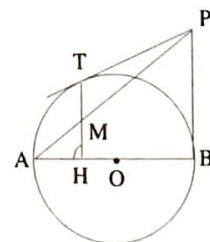
$$\begin{aligned} & (mad + a + d - m)(bc + 1) \\ & + (mbc + b + c - m)(ad + 1) \\ & = (mab)cd + abc + bcd + a + d - m + (mcd) \\ & \quad ab + abd + acd + b + c - m \\ & = (m - a - b)cd + abc + bcd + a + d - m \\ & \quad + (m - c - d)ab + abd + acd + b + c - m \\ & = (mcd + c + d - m) + (mab + a + b - m) \\ & = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece,  $(x-m) + (y-m) = 0$  olduğunu göstermiş olduk. Bu da bize  $M$  nin  $XY$  doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir.  $M$  nin  $X, Y$ , doğru parçasının da orta noktası olduğunu göstermek için aynı yorumları yaparız. Burada  $c$  yerine  $d$  ve  $d$  yerine de  $c$  alırsak. (Şekil - 3)

Makalenin geriye kalan kısmında benzer yol ile çözülebilen iki soruyu daha inceleyeceğiz ve çözümlerini vereceğiz. Okuyucuya düşen görev bu soruların çözümlerini incelemek ve karmaşık sayıları kullanmadan bu soruları çözmektir.

**Soru 2:**  $PT$  ve  $PB$  verilen bir çemberin teğetleri olsun.  $B$  noktasından geçen  $AB$  çapını çizelim ve  $AB$  ye  $TH$  dikini çizelim.  $AP$  doğrusunun  $TH$  doğru parçasının orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

**Çözüm:** Koordinat sistemini verilen çemberin birim çember ile çakışacak ve  $b = 1$  olacak biçimde seçelim.



O zaman  $a = -1$ ,  $t \neq -1$  ve  $p = \frac{2t}{t+1}$  dir. Gerçekten,

$$h = \frac{1}{2}(t + \bar{t}) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) = \frac{t^2 + 1}{2t} \text{ dir.}$$

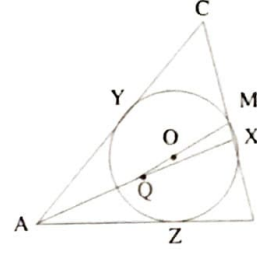
$M$  ile  $TH$  doğru parçasının orta noktasını gösterirsek,

$m = \frac{1}{2}(t + h) = \frac{3t^2 + 1}{4t}$  olur.  $A, P$  ve  $M$  noktalarının aynı doğru üzerinde olduklarını göstereceğiz. Bununla da herşeyi kanıtlamış olacağız.  $\frac{m-a}{p-a}$  oranının gerçel sayı olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat

$\frac{m-a}{p-a} = \frac{\frac{3t^2+1}{4t} + 1}{\frac{2t}{t+1} + 1} = \frac{(t+1)^2}{4t}$  oranı bir gerçel sayıdır, çünkü kendi eşleniği ile çakışır.

**Soru 3:**  $O$  merkezli bir çember  $\widehat{ABC}$  üçgenine içten teğet ve bu çember  $BC$  kenarına  $X$  noktasında teğet ve  $M$  noktası da  $BC$  kenarının orta noktası olsun.  $OM$  doğrusunun  $AX$  doğru parçasının orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

**Çözüm:**  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin birim çember ile çakışacak biçimde bir koordinat sistemi seçelim. Bu çemberin üçgenin  $BC, CA$  ve  $AB$  kenarlarına olan değme noktalarına sırayla  $X, Y$  ve  $Z$  diyelim.



O zaman,

$$a = \frac{2yz}{y+z}; b = \frac{2zx}{z+x}; c = \frac{2xy}{x+y},$$

$$m = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{xy+2yz+zx}{(x+z)(x+y)}$$

ve eğer  $Q$  noktası da  $AX$  doğru parçasının orta noktası ise

$$g = \frac{1}{2}(a+x) = \frac{xy+2yz+zx}{2(y+z)}$$

dir.  $Q$  noktasının  $OM$  doğrusu üzerinde olduğunu göstermek için  $\frac{m}{p}$  oranının gerçel sayı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{\bar{m}}{\bar{g}} = \frac{2\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}{(\bar{x}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y})} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z})}{(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(\frac{1}{x} + \frac{1}{z})}$$

$$= \frac{2x(y+z)}{(x+z)(y+z)} = \frac{m}{g}$$

dir. Bununla da kanıt tamamlanmıştır.

## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

### ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

**A141.** Bir  $ABCD$  karesinin  $A$  ve  $B$  köşeleri merkez alınarak  $|AC|$  yarıçaplı iki çember çiziliyor. Çemberlerin  $AB$  doğrusuna göre  $D$  ve  $C$  ile aynı tarafta bulunan kesişme noktası  $P$  olmak üzere,  $A$  dan  $BP$  doğrusuna  $AQ$  dikmesi çiziliyor.  $\widehat{PAC} = \widehat{QAC}$  olduğunu kanıtlayınız.

**A142.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $[BC]$  ve  $[CA]$  üzerinde sırasıyla alınan noktalar  $D, E$  ve  $DE \parallel AB$  olmak üzere  $BE$  doğrusunun  $AD$  doğrusunu kestiği nokta  $F$  ise,  $CF$  doğrusunun  $[AB]$  nin orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

**A143.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $B$  ve  $C$

açıların iç ve dış açıortayları çizilerek  $A$  noktasından bu açıortaylara dikmeler indiriliyor. Bu dört dikme ayağının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

**A144.**  $x, y, a, b > 0$  için

$$\left(\frac{ax+by}{y}\right)^2 + \left(\frac{ay+bx}{x}\right)^2 \geq 2(a+b)^2$$

eşitsizliğini gösteriniz.

**A145.**  $n$  bir pozitif tam sayı olsun.

$$n! < p < n! + n + 1$$

koşulunu sağlayan kaç tane tam sayı olabilir?

## YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y141.** Odakları  $F, F'$  olan  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  elipsinin herhangi bir teğeti  $d$  doğrusu olmak üzere  $F$  ve  $F'$  noktalarının  $d$  üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla  $S$  ve  $S'$  ise  $|FS| \cdot |F'S'| = b^2$  olduğunu kanıtlayınız.

**Y142.** Bir  $ABCD$  kirisler dörtgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir  $E$  noktasından  $BC, CD, DA, AB$  doğrularına sırasıyla  $EP, EQ, ER, ES$  dikmeleri indiriliyor

$$|EP| \cdot |ER| = |EQ| \cdot |ES|$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Y143.** Çevrel yarıçapı  $R$  olan  $A_1A_2 \dots A_n$  düzgün çokgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir  $P$  noktası için

$$\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2nR^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Y144.**  $n$  pozitif bir tamsayı,  $I$  ise uzunluğu  $\frac{1}{n}$  olan bir açık aralık olsun. Bu aralıkta  $q \in \{1, 2, \dots, n\}$  ve  $p \in \mathbb{N}$  olacak şekilde en çok kaç tane  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısı bulunabilir?

**Y145.** Çevresi 10 birimden küçük olan rastgele bir ikizkenar üçgen çiziliyor. Bu üçgenin geniş açılı olma olasılığı nedir?

## ÇÖZÜMLER

**A131.**  $a < b < c < d$  için

$$f(x) = |x - a| + 2|x - b| + 3|x - c| + 4|x - d|$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

**Çözüm.**  $y = f(x)$  grafiği köşeleri  $x = a, x = b, x = c$  ve  $x = d$  de olan kırık bir çizgidir.  $x < a$  için  $f(x) = -10x + A$  olduğundan azalandır,  $x > d$  için ise  $f(x) = 10x + B$ , yani artandır. Tüm bunlardan en küçük değerin  $f(a), f(b), f(c)$  ve  $f(d)$  değerlerinden biri olacağı görülür.  $f(a) = -9a + 2b + 3c + 4d, f(b) = -a - 6b + 3c + 4d, f(c) = -a - 2b - c + 4d$  ve  $f(d) = -a - 2b - 3c + 6d$  ve  $a < b < c < d$  olduğundan  $f(a) > f(b) > f(c)$  ve  $f(c) < f(d)$  bulunur. O halde aranan en küçük değer  $f(c)$  dir.

**A132.**  $n$  bir tamsayı olsun ve  $1 \leq i \leq n$  için  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$  aralığında  $x_i$  noktaları verilsin.

$$\left| \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\frac{i-1}{n} \leq x_i \leq \frac{i}{n}$  eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{1}{n} \{0 + 1 + \dots + (n-1)\} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{n} \{1 + 2 + \dots + n\}$$

buluruz.  $S = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$  olsun; yukarıdaki eşitsizlikten

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \leq S \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

sadeleştirirsek,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$  çıkar ki, bu istenen eşitsizliktir.

**A133.**  $y$  ekseninde sabit  $(0, k)$  noktasında dik kesişen iki doğru  $x$  eksenini  $A$  ve  $B$  noktalarında kesiyorlar.  $[AB]$  üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin geometrik yeri nedir?

**Çözüm.** Verilen  $(0, k)$  noktasında dik kesişen doğrulardan biri  $x$ -eksenini  $A(-k/m, 0)$  diğeri de  $B(mk, 0)$  noktasında kessin.  $[AB]$  üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin  $(u, v)$  noktası olduğunu kabul edelim.  $u$  ile  $v$  arasında bulunması gereken bağıntı, istenen geometrik yerin denklemidir. Gerekli işlemler sonucunda,

$$u = \frac{(m^2 - 1)}{2m}k \quad \text{ve} \quad v = \frac{\sqrt{3}(m^2 + 1)}{2m}k \quad (m \neq 0)$$

bulunur.  $m$  parametresi yok edilerek  $\frac{v^2}{3k^2} - \frac{u^2}{k^2} = \frac{1}{2}$  hiperbolü elde edilir.

**A134.** Bir  $ABC$  üçgeninin  $B$  ve  $C$  köşelerinden geçen çember,  $AB$  ve  $AC$  doğrularını  $X$  ve  $Y$  noktalarında kesiyor.  $XY$  doğrusu  $BC$  doğrusunu bir  $Z$  noktasında kesiyorsa,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{|XB||AB|}{|YC||AC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**  $A$  noktasının çembere göre kuvvetinden

$$|AB| \cdot |AX| = |AC| \cdot |AY|$$

$$\text{ya da} \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AY|}{|AX|} \quad (1)$$

bulunur.  $ABC$  üçgeninde  $ZY$  keseni için Menelaüs Teoreminden,

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1. \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) kullanılarak,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{|XB|}{|YC|} \cdot \frac{|BA|}{|AC|}$$

bulunur.

**A135.** Bir parabolün odağı  $F$ , parabol üzerindeki bir nokta  $P$ ,  $P$  noktasının parabolün eksenini üzerindeki dik izdüşümü  $Q$  ve parabolün tepe noktası  $A$  ise,  $|PQ|^2 = 4|AF||AQ|$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**  $y^2 = 4px$ , ( $p > 0$ ) parabolünün herhangi bir noktası  $P(x, 2\sqrt{px})$  dir. Bu parabolün odağı  $F(p, 0)$  olup,  $P$  noktasının  $x$ -ekseni üzerindeki dik izdüşümü  $Q(x, 0)$  noktasıdır.  $|PQ| = 2\sqrt{px}$ ,  $|AF| = p$  ve  $|AQ| = x$  olduğundan  $|PQ|^2 = 4|AF| \cdot |AQ|$  dur.

**Y131.** *MATEMATİK* sözcüğündeki harflerin tümünü kullanarak, bunların gelişigüzel dizilimleriyle elde edilen anlamlı, anlamsız tüm 9 harfli sözcüklerden kaç tanesinde iki ünsüz harf ard arda gelmez? (*Nurettin Ergun*)

**Çözüm.** 5 ünsüz, 4 ünlü olduğundan ard arda iki ünsüzün gelmediği dizilişler ünsüz, ünsüz, ünlü, ..., ünsüz şeklindedir. Bu tür dizilişleri elde etmek için 5 ünsüzü ve 4 ünlüyü ayrı ayrı sıralayıp ünlüleri sırayı bozmadan ünsüzlerin arasına koyarız.  $M, T, M, T, K$  harfleri  $\frac{5!}{2!2!}$  farklı şekilde;  $A, E, A, I$  harfleri ise  $\frac{4!}{2!}$  farklı şekilde dizilebilir. O halde aranan sayı  $\frac{5!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 360$  tır.

**Y132.** Bir havuzun çevresinde saat yönünde sırayla 0 dan 60'a kadar numaralanmış 61 tane taş var. 0. taşın üzerindeki bir kurbağa önce 1. taşa, oradan 2. taşın üstünden atlayıp 4. taşa, oradan 4 taşın birden üstünden atlayıp 9. taşa, ... şeklinde sıçrayarak havuzun çevresinde dolanıyor. Kurbağa  $k + 1$ 'inci sıçrayışta saat yönünde  $2k$  taşın üstünden atlayıp bir sonrakine sıçırıyor. Yeterince uzun bir süre sonunda kurbağanın üzerine basmadığı taş kalır mı? Kahrısa kaç tane böyle taş kalır? (*Albert Erkip*)

**Çözüm.**  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$  olduğundan, kurbağa  $k$  sıçrayışta  $k^2$  taş üzerinden atlayıp  $0 \leq x \leq 60$  ve  $x \equiv k^2 \pmod{61}$  numaralı taşın üzerine varmış olacaktır. Üzerine basılan taşlar (mod 61) de tam kare olan  $x$  sayılarına karşı gelen taşlardır. Şimdi

$0 \leq m, n \leq 60$  için  $m^2 \equiv n^2 \pmod{61}$  denklemini çözmeye çalışalım; denklemden  $61|(m - n)(m + n)$ , 61 asal olduğundan da  $m = n$  veya  $m = 61 - n$  ( $n > 0$  iken) bulunur. O halde  $1^2 \equiv 60^2$ ,  $2^2 \equiv 59^2, \dots, 29^2 \equiv 32^2$  ve  $30^2 \equiv 31^2 \pmod{61}$  dir ve tüm bu sayılar (mod 61) de birbirinden farklıdır. Buna  $0^2 = 0$ 'ı da katarsak (mod 61) de 31 tane tam kare olduğu bulunur. Üzerine basılmamış taş sayısı 30 dur.

**Y133.** Bir parabolün herhangi üç teğetinin ikişer ikişer kesişme noktaları  $X, Y, Z$  ise  $XYZ$  çemberinin bu parabolün odağından geçtiğini kanıtlayınız.

**Çözüm.** Bir parabolde, odağın teğetler üzerindeki izdüşüm noktaları, bu parabolün tepesinden geçen teğet üzerinde bulunurlar. Bu nedenle,  $F$  odağının  $XY, XZ, YZ$  teğetleri üzerindeki izdüşümleri aynı doğru üzerindedir. Bu doğru  $XYZ$  üçgeninin bir Simson doğrusu olduğundan,  $(XYZ)$  çemberi  $F$  odağından geçer.

**Y134.** Birbirinin dışında bulunan  $A$  ve  $B$  merkezli iki çemberin ortak dış teğetleri bir  $C$  noktasında kesişiyor. Ortak iç teğetlerden biri de dış teğetleri  $D$  ve  $E$  noktalarında kesişiyor.  $CDE$  çemberinin  $[AB]$ 'nin orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

**Çözüm.**  $CB$  ışını,  $DCE$  açısının açıortayı olup,  $DE$  yayının orta noktasından geçer. Bu noktaya  $F$  diyelim.  $BDA$  dik açısı  $AB$  doğru parçasını gördüğünden  $A, D, B, E$  noktaları çemberseldir. Bu çemberin  $DE$  kirişinin orta dikmesi merkezden geçer. Bu çemberin merkezi  $F$  noktasıdır. Dolayısıyla  $(CDE)$  çemberi  $AB$  doğru parçasının orta noktasından geçer.

**Y135.**  $A, B, C$  açılarının ölçüleri sırayla 1,2,4 ile orantılı olan bir  $ABC$  üçgeninin alanını çevrel çemberinin yarıçapı cinsinden hesaplayınız.

**Çözüm.**  $n$  pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdots \sin \frac{n\pi}{2n+1} \\ = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} \end{aligned} \quad (*)$$

dir. Söz konusu üçgenin açıları  $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$  olup  $a, b, c$  kenarların uzunlukları olmak üzere, alanı:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{\pi}{7} \cdot 2R \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}$$

dir. (\*) ifadesinde  $n = 3$  alındığında

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

elde edilir.  $\sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7}$  olduğundan

bulunur.

$$A = \frac{\sqrt{7}}{4} R^2$$

## MATEMATİK DÜNYASI

Öncelikle elinizdeki Matematik Dünyası Ekim 1996 sayısının 6 ay geç çıkması nedeniyle okurlarımızdan özür dilemek ve bu gecikmenin tüm sorumluluğunun bana ait olduğunu belirtmek istiyorum.

Matematik Dünyası 1991-1995 arasındaki ilk 5 yılında amaçladığı doğrultuda tutarlı bir çizgiye oturdu; her yaştan matematik meraklılarının izlediği ve aradığı bir dergi oldu. 1996 yılına başlarken geçmişteki bu başarılı çizginin süreceğini, yeni atılımlar yapmanın kolay olacağı düşüncesindeydik. Geri bakınca ilk 5 yıllık başarının ardında önce Cemal Koç'un sonra Şafak Alpay'ın editör olarak özverili çalışmalarının olduğu daha iyi anlaşılıyor.

1996 yılı Matematik Dünyası için bir takım değişikliklerle beraber bazı talihsizlikleri de beraber getirdi. İlk sıkıntımız Aralık 1995 sayımızın iyi dağıtılamamasından kaynaklandı, okurlarımızın abone işleri aksadı; sanırım sonradan eksiklikleri önemli ölçüde tamamlayabildik. Dağıtım sistemimizin ve matbaanın değişmesi ilk sayılarda bazı gecikmelere neden olduysa da bunu telafi etmeye çalıştık. Ancak Haziran 1996 ve özellikle Ekim 1996 sayılarında ciddi gecikmeler oldu. Buna kısmen şanssızlıklar, kısmen ihmallere neden oldu. Ancak son sayımızın gecikmesi tamamen kişisel bir takım sorunlarımdan kaynaklanmıştır.

Bu gecikmenin belki bir sevindirici tarafı okurlarımızdan aldığımız şikayetlerin çokluğu. Zaman zaman "bu dergi artık tekrar çıkabilir mi" şeklindeki karamsarlığımızı dağıtan, bize cesaret veren okurlarımızın bu ısrarlı arayışları oldu. Bu sayıdan yakın bir süre sonra Aralık 1996 sayısını çıkarmayı düşünüyoruz. 1997 yılına ait tasarılarımız, önümüzdeki Aralık 1996 sayısında yer alacak. Okurlarımızın 1997 aboneliği konusunda bu sayıdaki açıklamaları beklemelerini rica ediyoruz.

Son olarak Matematik Dünyası'nın bu zor günlerinde bizi yalnız bırakmayan tüm okurlarımıza, bu sayının çıkabilmesinde bana yardımcı olan tüm arkadaşları ve özellikle sevgili Şafak Alpay'a teşekkür etmek istiyorum

Albert ERKİP

**Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :**

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Prof.Dr. Albert Erkip, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 30 Haziran 1997 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

**Sayın Okurlarımız,**

**Matematik Dünyası'nın** üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 350.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

**Matematik Dünyası'nın**, 1996 yılı abone ücreti 400.000.-TL., tane satış fiyatı ise 100.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, posta çeki aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası**, (Matematik Bölümü, ODTÜ 06531 Ankara) adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

**YAZARLARA**

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- \* Konu sunuşları.
- \* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- \* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- \* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- \* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- \* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- \* Matematik dünyasından güncel haberler. Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası**  
**ODTÜ Matematik Bölümü**  
**06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

