

Matematik

D Ü N Y A S I

Koninin Kesitleri (II)

H. Turgay Kaptanoğlu 1

e'nin Hikayesi

Nurettin Çalışkan 10

Eşegin Alemi Yok!

Sinan Sertöz 13

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ Denkleminin Özel Durumlarda Çözümlerinin Bulunuşu

Harun Karatosun 18

Eylemsizlik Momenti Kavramının Geometri ve Analiz Problemlerine Uygulanması

Mehmet Hamidoğlu Tagiyev 20

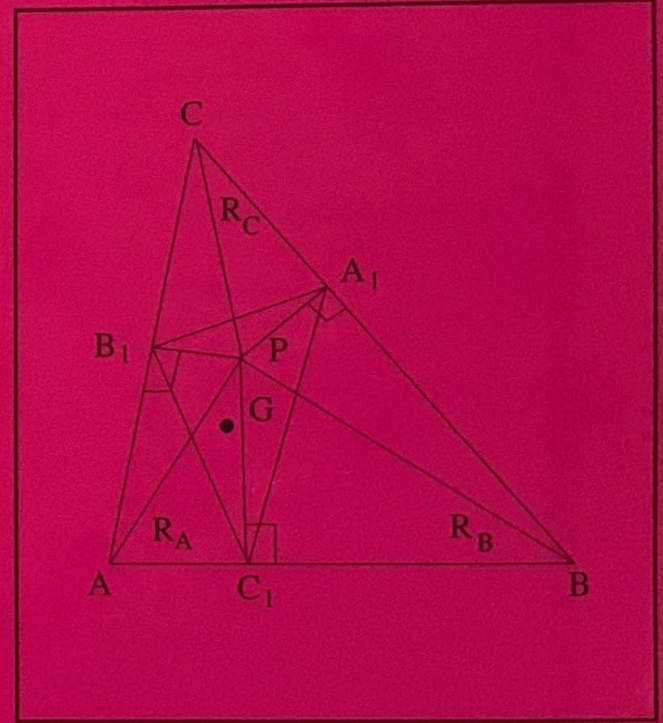
Kübik Denklemlerin Kökleri

Ahmet Dernek 26

Yarışma Problemi Y.119'un Yanıtında Düzeltme

Atasagun Baykal 27

Problemler ve Çözümleri 28



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR

ALBERT ERKİP

YAYIN KURULU

SELMA ATABEY, ALI DOĞANAKSOY,
ALPARSLAN ERTUĞ, FİKRİ GÖKDAL,
H. TURGAY KAPTANOĞLU

DİZGİ

NURAY (KIRAÇ) ÖZKAN

BASKI

ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

Matematik Dünyası, Türk Matematik

Derneği tarafından, Matematik Vakfı'nın işbirliği ve
UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386 sayılı
kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1996)

Yurtiçi yıllık 400.000.-TL., Yurtdışı yıllık 800.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 215511 No.lu hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz: 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz: 5.000.000.-TL.

ADRES

Matematik Dünyası
Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü
İnönü Bulvarı, 06561 ANKARA
Tel: 210 29 70
Fax: 210 12 82

İÇİNDEKİLER

Koninin Kesitleri (II)

H. Turgay Kaptanoğlu

1

e'nin Hikayesi

Nurettin Çalışkan

10

Eşeğin Alemi Yok!

Sinan Sertöz

13

$x^3 + A^2 + Bx + C = 0$ Denkleminin Özel Durumlarda Çözümlerinin Bulunuşu

Harun Karatosun

18

Eylemsizlik Momenti Kavramının Geometri ve Analiz Problemlerine Uygulanması

Mehmet Hamidoğlu Tagiyev

20

Kübik Denklemlerin Kökleri

Ahmet Dernek

26

Yarışma Problemi Y.119'un Yanıtında Düzeltilme

Ataşağın Baykal

27

Problemler ve Çözümleri

28

KONİNİN KESİTLERİ (II)

H. Turgay Kaptanoğlu *

Ç. Dışmerkezlilik ve Doğrultmanlar

Dışmerkezlilik kavramı, inceledimiz dört eğriyi aynı bakış açısı etrafında toplamamızı sağlayacak. Dışmerkezlilik hakkında bir fikir elde edebilmek için önce parabolün tanımını hatırlayalım: doğrultmana ve odağa eşit uzaklıktaki noktaların kümesi. Doğrultmanı D ile gösterirsek, bu $|NO| = |ND|$ demek olur; yani

$$\frac{|NO|}{|ND|} = e$$

oranı 1'e eşittir. Bu orana *dışmerkezlilik* denir. Bu kavram şimdilik sadece parabol için var. Diğer üç eğri için ya dışmerkezliliği başka türlü tanımlayıp buradan eğrilerin doğrultmanlarına geçebiliriz, ya da bu eğrilerin önce doğrultmanlarını tanımlayıp sonra dışmerkezliliklerini hesaplayabiliriz; hatta dört eğrinin hepsini en baştan yukarıdaki denklemlerle tanımlayabilirdik. Biz birinci yolu seçeceğiz.

Elips ve hiperbolün dışmerkezliliği

$$e = \frac{c}{a}$$

ile tanımlanır; yani bu eğriler için dışmerkezlilik, odaklar arası uzaklığın, tepe noktaları arasındaki uzaklığa oranıdır. c uzunluğunu a ve b cinsinden yazarsak, elipsin dışmerkezliliği

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

hiperbolün dışmerkezliliği ise

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

olur. Buradan görürüz ki elipsin dışmerkezliliği 1'den küçük, hiperbolünki 1'den büyüktür. Parabol ise 1 olan dışmerkezliliği ile elips ile hiperbol arasında bir geçiş eğrisidir.

Elips yassılaştıkça b , a 'ya oranla azalır ve dışmerkezlilik 1'e yaklaşır; elips yuvarlaklaştıkça,

b ile a birbirine yakındır ve dışmerkezlilik sıfıra yaklaşır. Yani dışmerkezlilik, en azından elipste, basıklığın bir ölçüsüdür. Çembere gelince, bu eğrinin odakları çakışan bir özel elips olduğunu belirtmiştik. Yani $c = 0$ 'dır ve a da yarıçaptır; dolayısıyla çemberin dışmerkezliliği $e = 0$ 'dır. Bu da şaşırtmamalı; bu derece simetri özellikleri gösteren bir eğrinin basık hiç bir tarafı yok tabii.

Şimdi artık elips ve hiperbol için de doğrultmanlar bulabiliriz. Bunun için parabolün dışmerkezlilik tanımından yararlanacağız. e verilen eğrinin dışmerkezliliği, O odaklarından biri ve N eğri üzerinde bir nokta ise, bu odağa karşılık gelen *doğrultman* D ,

$$\frac{|NO|}{|ND|} = e$$

eşitliğini sağlayan ve eğrinin eksenine dik olan doğrudur. Elipsin ve hiperbolün ikişer odağı ve dolayısıyla ikişer doğrultmanı vardır. Bir tek odağı ve doğrultmanı olan parabol bir bakıma yarım bir elipsten yarım bir hiperbole geçiştir.

Doğrultmanın tanımından onun bir-iki özelliğini hemen çıkartabiliriz. Önce denklemi $|NO| = e|ND|$ diye yazalım. Çember dışındaki üç egride $e > 0$ ve $|NO| > 0$ sağlanır. O zaman $|ND| > 0$ olmak zorundadır; yani eğri üzerindeki bir noktanın doğrultmana uzaklığı sıfır olamaz. Diğer bir deyişle doğrultmanlar eğriyi kesmez. Bunu parabol için tanımı gereği zaten biliyorduk. Odakları sabit kalıp dışmerkezliliği azalan elipsler düşünürsek, $|NO|$ uzunluğu bir süre sonra fazla değişmez. e 'deki azalmayı karşılamak için $|ND|$ artmak zorundadır; yani doğrultmanlar elipsten gittikçe uzaklaşır. $e = 0$ sınır haline karşılık gelen çemberi, doğrultmanları sonsuza kaçmış bir elips olarak düşünebiliriz.

Başlarda incelediğimiz birer elips ve hiperbolün doğrultmanlarını bulalım. $N(x, y)$ noktası

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

elipsinin üzerinde ve $a > b$ olsun. $O_2(c, 0)$ odağını kullanalım. Elipsin eksen $y = 0$ olduğundan, buna dik olan ve O_2 'ye karşılık gelen D_2 doğrultmanı $x = d_2$ şeklindedir. d_2 'yi bulacağız. Elimizdeki bilgileri doğrultmanın tanım denkleminde kullanırsak,

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|d_2 - x|} = \frac{c}{a}$$

eşitliğini elde ederiz. y^2 yerine elipsin denkleminde elde ettiğimiz denklği kullanalım; $b^2 = c^2 - a^2$ yazalım; sonra iki tarafın karesini alalım ve elde ettiğimiz ifadeyi d_2 için çözelim. Bir takım hesaplardan sonra

$$d_2 = 2x - \frac{a^2}{c} \quad \text{veya} \quad d_2 = \frac{a^2}{c}$$

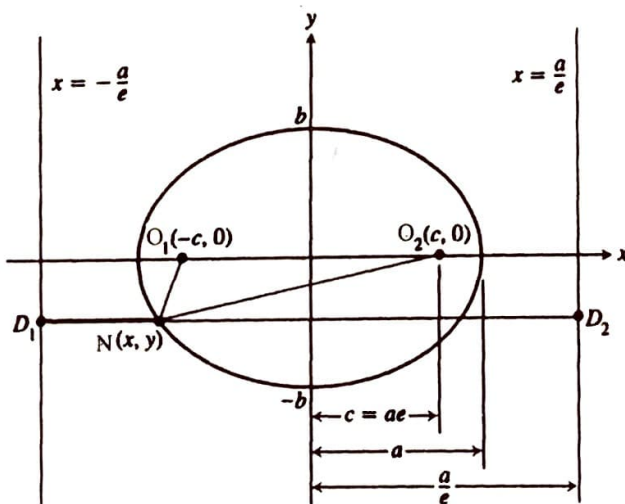
buluruz. Doğrultmanın denkleminin N 'den bağımsız olması gerektiğinden ilk çözüm gerçek bir çözüm değildir ve D_2 doğrultmanı

$$x = d_2 = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$$

doğrusu olur. $O_1(-c, 0)$ odağını kullansaydık, denklemi

$$x = d_1 = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a}{e}$$

olan D_1 doğrultmanını bulacaktık. Elipsimizde x 'in aldığı en büyük ve en küçük değer ($y = 0$ aldığımızda) $x = a$ ve $x = -a$ 'dır. $0 < e < 1$ bilgisi de bize $d_2 > a > c > 0$ ve $d_1 < -a < -c < 0$ verir. Bu ise her odak-doğrultman çiftinin merkezin aynı tarafında bulunduğunu ve elipsin de her odak-doğrultman çiftinin arasından geçtiğini söyler.



Benzer bir hesabı $N(x, y)$ noktasını içeren ve eksen $y = 0$ olan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

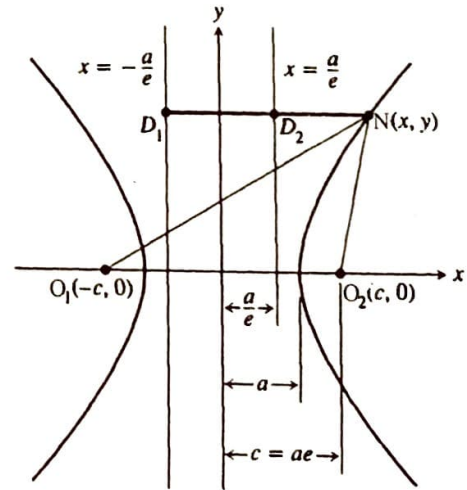
hiperbolü için de yapalım. Değişiklik olsun diye $O_1(-c, 0)$ odağını kullanalım. Doğrultmana $x = d_1$ deriz ve tanımda yerine koyarak

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{|x - d_1|} = \frac{c}{a}$$

yazarız. Yukarıda izlediğimiz yolla d_1 'i buluruz. D_1 ve D_2 doğrultmanları sırayla

$$x = d_1 = -\frac{a}{e} \quad \text{ve} \quad x = d_2 = \frac{a}{e}$$

doğruları çıkar. Denklemler elipstekilerin aynısıdır, yalnız doğrular farklıdır, çünkü şimdi $e > 1$ 'dir; o zaman $d_1 > a$ ve $d_2 > a$ gerçekleşir. Hiperbolümüzün denkleminde $y = 0$ alarak x^2 'nin aldığı en küçük değeri, dolayısıyla da x 'in sıfırdan yakın değerlerini buluruz; bunlar $x = -a$ ve $x = a$ 'dır. O zaman $-c < -a < d_1 < 0$ ve $0 < d_2 < a < c$ eşitsizlikleri geçerlidir. Elipste olduğu gibi her odak-doğrultman çifti merkezin aynı tarafındadır ve hiperbol her odak-doğrultman çiftinin arasından geçer. Farklı olan taraf, burada doğrultmanların merkeze hiperbolden daha yakın olmasıdır. Hiperbol, odaklarının merkeze kendisinden daha uzak olmasıyla zaten elipsten ayrılıyordu.



Özetle, $|NO| = e|ND|$ eşitliği çember dışındaki diğer üç eğrinin ortak denklemdir; hangisi olduğu e 'nin değerinden anlaşılır. Yalnız bu denklemi doğrudan kullanmak zor. Doğrultman ve odak verildiğinde bu denklemle başlayarak eğrinin denkleminde geçebiliriz. Bir örnekle görelim. Merkezi başnuktada, odaklarından biri $(-4, 0)$ ve buna karşılık gelen

doğrultmanı $x = -16$ olan eğrinin denklemini yazalım. Hemen $c = 4$ 'tür ve dışmerkezlilik tanımından $e = c/a = 4/a$ olur. Doğrultman eşitliğinden ise $-16 = -a/e$ buluruz. Bu iki eşitlikten e 'yi hesaplarız: $e = 1/2$. O halde eğri bir elipstir. $N(x, y)$ elipsin bir noktasıysa, $|NO| = e|ND|$ denklemi

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - (-4))^2 + (y - 0)^2} &= \frac{1}{2}|x - (-16)| \\ (x + 4)^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(x + 16)^2 \\ 4x^2 + 32x + 64 + 4y^2 &= x^2 + 32x + 256 \\ 3x^2 + 4y^2 &= 192 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} &= 1\end{aligned}$$

verir. Aslında e 'yi bulduğumuz anda a 'yı da bulabilirdik: $a = 8$. Oradan $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$ çıkardı ve elipsin denklemini hemen yazabilirdik.

D. Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatları kısaca hatırlayalım önce. Yukarıda düzlemdeki bir N noktasını göstermek için *Kartezyen koordinatlar* dediğimiz (x, y) gerçel sayı ikililerini kullandık. Bunlar noktanın sırayla y ve x eksenlerinden olan uzaklıkları. *Kutupsal koordinatlar*, düzlemdeki bir noktayı (r, θ) diye başka bir ikili sistemi ile gösterir. θ , pozitif x ekseninden, N 'yi başnoktaya birleştiren doğru parçasına kadar olan açıdır. Saat yönünün aksi yönde gidilirse θ pozitif, saat yönünde gidilirse θ negatif olur. r ise N 'nin başnoktadan uzaklığıdır; yani

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bu tanımda r pozitiftir. Ama bazan negatif r değerleri de kullanılır; o zaman başnoktadan N yerine $-N$ yönüne gideriz. Her iki durumu içeren

$$r^2 = x^2 + y^2$$

yazmak daha doğrudur. N 'den x eksenine çizilen dikmenin ayağına M der, başnokta, M ve N 'nin oluşturduğu dik üçgene bakarsak,

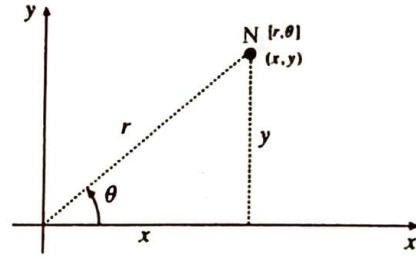
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

eşitliğini görürüz. Yukarıdaki eşitlikler, N noktasının Kartezyen koordinatlarından kutupsal koordinatlarını nasıl bulacağımızı gösterir. Aynı

üçgende gene hemen göreceğimiz

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

eşitlikleri ise N 'nin kutupsal koordinatlarından Kartezyen koordinatlarına geçmek içindir. Kartezyen koordinatların başnoktası $(0, 0)$, kutupsal koordinatlarda, θ ne olursa olsun, $r = 0$ 'a karşılık gelir. Kutupsal koordinatlarda fonksiyonları genellikle $r = f(\theta)$ şeklinde yazarız.



Şimdi çember, parabol, elips ve hiperbolün kutupsal koordinatlardaki denklemlerini bulacağız ve dördünün de bir tek denklemlerle ifade edilebileceğini göreceğiz. Dört eğriyi ayırdeden özellik dışmerkezlilik olacak. Dışmerkezliliğe daha önce özel önem vermemizin bir nedeni de buydu.

Önce daire dışındaki üç eğriyle ilgilenelim; çemberi sonra elipsin özel hali olarak ele alacağız. Eğrimizin dışmerkezliliğine e , başnoktada yerleşmiş odaklarından birine (parabolün tek odağına) O , buna karşılık gelen doğrultmana $x = -d$ ($d > 0$) ve eğrinin üzerindeki bir noktaya $N(r, \theta)$ diyelim. O zaman $|NO| = r$ ve $|ND| = d + r \cos \theta$ olur. Bunları $|NO| = e|ND|$ denkleminde yerine koyarsak, önce $r = e(d + r \cos \theta)$ ve sonra bunu r için çözersek,

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}$$

kutupsal koordinat denklemini elde ederiz. Eğer doğrultman $x = d$, $y = -d$ veya $y = -d$ doğrularından biri olsaydı, sırayla

$$r = \frac{de}{1 + e \cos \theta},$$

$$r = \frac{de}{1 - e \sin \theta},$$

$$r = \frac{de}{1 + e \sin \theta}$$

denklemlerinden birini elde edecektik. Bütün bu denklemlerde eğrileri ayırdeden özellik dışmerkezliliğin $0 < e < 1$, $e = 1$ veya $e > 1$ olması.

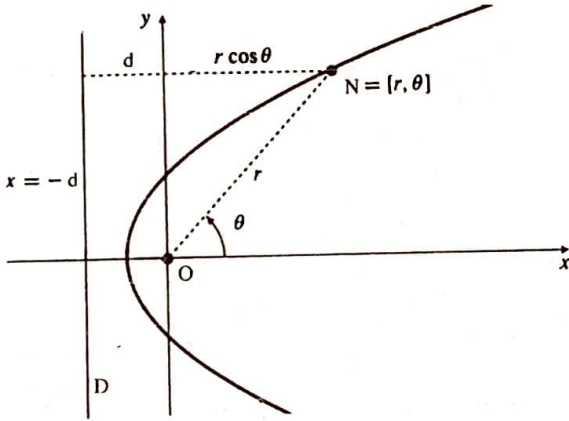
Elipste ve hiperbolde doğrultmanların ve odakların merkeze sırayla e/a ve ae uzaklıklarında olduğunu görmüştük. Şimdi merkezin değil de odağın başnoktada bulunduğunu göz önüne alırsak,

$$d = \pm \left(\frac{a}{e} - ae \right)$$

eşitliği ortaya çıkar; burada $+$ elipsi, $-$ hiperbolü verir. Bunu eğrilerin kutupsal koordinat denklemi yerine koyduğumuzda,

$$r = \pm \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

elde ederiz. $+$ işaretiyle $e = 0$ özel hali bize $r = a$ verir ki bu başnoktadan sabit a uzaklığında olmak demektir; yani başnokta merkezli ve a yarıçaplı çemberden başka bir şey değildir.



Çıkarttığımız denklemlerden, elips ve çemberi parabol ve hiperbolden ayıran bir sonuca varabiliriz. $e = 0$ iken r sabit olduğundan açıkça çember sınırlıdır. Elipste $0 < e < 1$ sağlanır ve paydadaki $1 - e \cos \theta$ (veya diğerleri) hep sıfırdan uzak durur. Dolayısıyla r sınırsız büyüyemez; yani elips de sınırlıdır. Parabol için denklem

$$r = \frac{d}{1 - \cos \theta}$$

şeklinde. θ sıfıra yaklaştıkça, $1 - \cos \theta$ da sıfıra yaklaşır ve r sınırsız büyür. $\theta = 0$ ise pozitif x eksenine karşılık gelir ve bu aynı zamanda parabolün de ekseninin bir kısmıdır. Hiperbolde $e > 1$ 'dir ve $\cos \theta = 1/e = a/c$ eşitliğini sağlayan

$$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) = \pm \cos^{-1} \left(\frac{a}{c} \right)$$

açılarına yaklaştıkça r gene sınırsız büyür. Bu açılar bize bir şey hatırlatmalı. Önce bir kenarı a , hipotenüsü c ve aralarındaki açı θ olan bir dik

üçgen düşünelim; üçüncü kenar $\sqrt{a^2 - c^2} = \pm b$ ve

$$\tan \theta = \pm \frac{b}{a}$$

olur. $\tan \theta$ 'nin aynı zamanda başnoktadan geçen bir doğrunun eğimi olabileceğini hatırlarsak, tekrar hiperbolün asimptotlarını bulmuş oluruz. Hiperbolün asimptotlarına yaklaşması ile merkezinden sınırsız uzaklaşması birlikte meydana gelmektedir.

İncelediğimiz eğri denkleminde doğrultman(lar) dikeydi; bu ve bir odağın başnoktada olması bilgisi eğrinin ekseninin x eksenine çakıştığı sonucunu doğurur. Tepe noktaları da eksen üzerindedir. Kutupsal koordinatlarda pozitif ve negatif x eksen $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ eşitlikleriyle verilir. Eğri denkleminde bu θ değerlerini kullanarak, tepe noktalarını

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r &= \frac{de}{1 - e} \\ \theta = \pi, \quad r &= \frac{de}{1 + e} \end{aligned}$$

olarak buluruz. Parabolde yalnız ikincisi geçerlidir. Çemberde ise zaten eksen, doğrultman veya tepe noktaları tanımlamamıştık. Aslında çemberin her noktası tepe noktası olarak da görülebilir.

E. İkinci Dereceden Eğriler ve Düzlemde Döndürme

Kartezyen koordinatlara geri dönüp, iki değişkenli genel ikinci dereceden denklem dediğimiz

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklindeki denklemlerin düzlemdeki grafiklerini inceleyeceğiz. Karşımıza hep tanıdık eğriler çıkacak. A, B, C 'nin en az birinin sıfırdan farklı olduğunu kabul edeceğiz; aksi halde hem denklem ikinci dereceden olmaz, hem de grafik yalnızca bir doğrudan ibaret olurdu. Bu denklemde ikinci dereceden kasıt x 'in ve y 'nin derecelerinin toplamıdır.

Şimdiye kadar incelediğimiz dört eğri bu tip bir denklemle ifade ediliyor dikkat edilirse. Şimdilik $B = 0$ alalım. Çemberin denklemi $A = C$ veriyor hep. Parabolün denklemi ya $A = 0$ ya da $C = 0$ ve de $D \neq 0$ veya $E \neq 0$ demek oluyor. Elipsin denklemi $A \neq C$ ve A

ile C 'nin işaretlerinin farklı olmasını gerektiriyor. Merkezi olan üç eğride merkezin başnoktada olması $D = E = 0$ olmasını, başka bir noktada olması $D \neq 0$ ve/veya $E \neq 0$ olmasını sağlıyor.

Diğer özel durumlara da kısaca değinelim. $A = 1$ ve diğer katsayılar sıfırsa, $x^2 = 0$ yani $x = 0$ doğrusunu elde ederiz. $A = C = 0$, $B = D = 1$ ve $E = F = -1$ halinde elde ettiğimiz $xy + x - y - 1 = 0$ denklemini çarpanlara ayırırsak $(x - 1)(y + 1) = 0$ buluruz ki bunun grafiği kesişen $x = 1$ ve $y = -1$ doğrularıdır. $B = C = E = 0$, $A = 1$, $D = -3$ ve $F = 2$ durumunda çıkan $x^2 - 3x + 2 = 0$ denklemi de çarpanlara ayrılır; çıkan $(x - 1)(x - 2) = 0$ 'ın grafiği paralel $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularıdır. $B = D = E = F = 0$ ve $A = C = 1$ ise, denklem $x^2 + y^2 = 0$ 'dır ve grafiği tek bir noktadır: $(0, 0)$. Denklemi sağlayan hiç bir nokta olmayabilir de; örneğin $A = F = 1$ ve diğer katsayılar sıfır iken bulduğumuz $x^2 + 1 = 0$ denklemi.

Şimdi en önemli soruna gelelim. $B \neq 0$ ise (ve grafik az önceki kesişen iki doğru özel hali değilse) ne yapacağız ve grafik ne çıkacak? Cevap basit. Gene özel hallerden birini ya da çember dışındaki üç eğriden birini elde ederiz, yalnız eğrilerin ekseni hep incelediklerimizin aksine x ya da y eksenine paralel olmaz. Tersine, ekseni x ya da y eksenine paralel olmayan elips, parabol ve hiperbol, ya da ikisi birden eksenlere paralel olmayan kesişen doğrular, $B \neq 0$ olan bir denklemle ifade edilirler. Küçük bir örnek verelim. Odakları $O_1(-2, 2)$ ile $O_2(2, 2)$ ve a uzunluğu 2 olan hiperbolün denklemini yazalım. Merkez tabii ki başnoktadır. (x, y) hiperbol üzerinde bir nokta ise, tanımdan

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}}{2} = \pm 1$$

yazarız. Bunu iki kere kareleyerek sadeleştirirsek, denkleminiz

$$xy = 2$$

haline gelir. Bu denklemi $y = 2/x$ şeklinde yazıp limit alarak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$$

buluruz. Bunlar bize hiperbolün asimptotlarının x ekseni ($y = 0$ doğrusu) ve y ekseni ($x = 0$ doğrusu) olduğunu söyler. Hiperbolün ekseni, odakları birleştiren doğru, yani $y = x$

doğrusudur; bu doğru x ekseni ile $\pi/4$ radyanlık bir açı yapar. Ayrıca $a = 2$, $c = 2\sqrt{2}$ ve $b = 2$ 'dir. Bu örnek aynı zamanda bazı hiperbollerin bir fonksiyonun grafiği alabileceğini de gösteriyor.

Amacımız verilen bir ikinci derece denkleminde xy terimini ortadan kaldırıp, denklemin ne tür bir eğri verdiğini anlayabilmek. Bunun için xy koordinat sistemini $M(0, 0)$ etrafında döndürmemiz gerekecek. Dönme açısının pozitif (saat yönünün aksı) yönde α olduğunu kabul edelim ve yeni koordinatlara X ve Y diyelim. α 'yı dar açı almak yeter; daha büyük açılar negatif yönde dar açı almaktan farksızdır. O zaman düzlemdeki bir N noktasının iki çeşit Kartezyen koordinatı olur: $N(x, y)$ ve $N(X, Y)$. $[MN]$ 'nin X ekseniyle yaptığı açısı θ , N 'nin x ve X eksenleri üzerindeki izdüşümlerine sırayla I_1 ve I_2 diyelim. MNI_1 ve MNI_2 üçgenlerinde biraz trigonometri yaparsak,

$$\begin{aligned} x &= |MI_1| = |MN| \cos(\theta + \alpha) \\ &= |MN| \cos \theta \cos \alpha - |MN| \sin \theta \sin \alpha \\ y &= |I_1N| = |MN| \sin(\theta + \alpha) \\ &= |MN| \sin \theta \cos \alpha + |MN| \cos \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

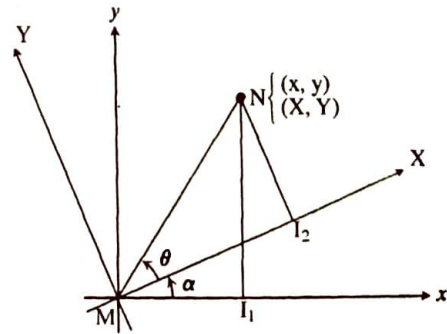
elde ederiz.

$$\begin{aligned} |MN| \cos \theta &= |MI_2| = X \\ |MN| \sin \theta &= |I_2N| = Y \end{aligned}$$

olduğuna dikkat ederek, yukarıdaki denklemler

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{aligned}$$

haline gelir. Bunlar XY ve xy koordinatları arasındaki ilişkidir. Döndürmeden sonra yalnız başnoktanın koordinatları değişmez.



Şimdi genel ikinci derece denkleminde x ve y yerine yukarıdaki ifadeleri kullanarak

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

buluruz. Yeni katsayılarla eskileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ B' &= B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha, \\ C' &= A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \\ D' &= D \cos \alpha + E \sin \alpha, \\ E' &= -D \sin \alpha + E \cos \alpha, \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Eğer başladığımız x ve y cinsinden denklemde $B \neq 0$ terimi varsa, sonraki X ve Y cinsinden denklemde biz $B' = 0$ olsun istiyoruz. Bunun için α dar açısını

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \quad \text{veya} \quad \tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

olacak şekilde seçmeliyiz.

Bundan sonra kareye tamamlayarak D' ve E' terimlerini de yok edebiliriz. Hem A' hem C' sıfırdan farklıysa,

$$\begin{aligned} A'X^2 + D'X + C'Y^2 + E'Y &= -F', \\ A' \left(X^2 + \frac{D'}{A'}X + \frac{D'^2}{4A'^2} \right) + \\ C' \left(Y^2 + \frac{E'}{C'}Y + \frac{E'^2}{4C'^2} \right) &= \frac{D'^2}{4A'} + \frac{E'^2}{4C'} - F', \\ A'(X - h)^2 + C'(Y - k)^2 &= F'' \end{aligned}$$

buluruz. Burada

$$h = -\frac{D'}{2A'} \quad \text{ve} \quad k = -\frac{E'}{2C'}$$

demektir. $A' = 0$ veya $C' = 0$ ise sadece bir değişkende kareye tamamlarız. Sonunda elde ettiğimiz denklem yazının başından beri incelediğimiz dört eğriden birinin denklemi oldu. Hangisi olduğunu katsayılarından rahatlıkla tanırız. Sonuç olarak, iki değişkenli ikinci dereceden bir denklemin grafiği, ya bu yazının konusu olan dört eğriden biri, ya da özel durumlardan biridir.

Birkaç örnek yapalım.

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2\sqrt{2}(x - y) = 2$$

denkleminde $A = 1$, $B = 4$, $C = 1$, $D = -2\sqrt{2}$, $E = 2\sqrt{2}$ ve $F = -2$ 'dir.

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 1}{4} = 0$$

formülünden

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

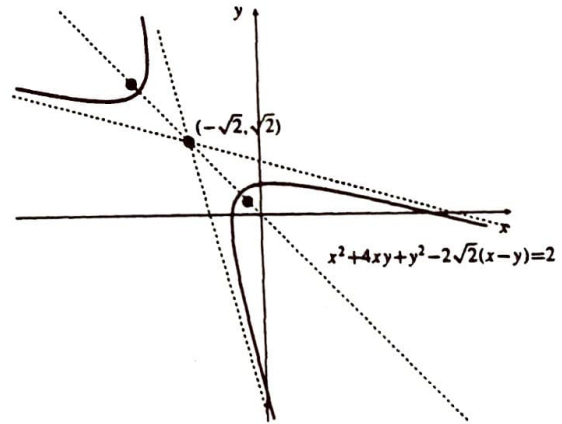
buluruz. (Aslında $2\alpha = -\pi/2$ ve $\alpha = -\pi/4$ de seçebiliriz.) O zaman $A' = 3$, $B' = 0$, $C' = -1$, $D' = 0$, $E' = 4$ ve $F' = -2$ olur ve denkleminiz XY koordinatlarında önce

$$3X^2 - Y^2 + 4Y - 2 = 0,$$

Y 'de kareye tamamladıktan sonra da

$$\frac{(Y - 2)^2}{2} - \frac{X^2}{2/3} = 1$$

haline gelir. Artık grafiğin, XY koordinatlarında merkezi $(0, 2)$ 'de, tepe noktaları $(0, 2 \pm \sqrt{2})$ 'de, odakları $(0, 2 \pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3})$ 'te, asimptotları $\sqrt{3}X \pm (Y - 2) = 0$ doğruları olan ve $\pm Y$ yönünde, yani xy düzleminde sağ aşağıya ve sol yukarıya açılan bir hiperbol olduğu açıktır. xy koordinatlarında ise, örneğin, tepe noktası $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 'dedir; diğer bilgilerin de x, y değerleri x, y ve X, Y arasındaki dönüşümlerden hesaplanabilir. Dikkat edilirse x ve y içeren denklemde hem x^2 'nin hem de y^2 'nin işaretleri aynıydı.



$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y = 0$$

denkleminde α 'yı

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

olacak şekilde seçmemiz gerekir, ama α buradan π 'nin bir rasyonel katı çıkmaz. Gene de

$$\sec 2\alpha = \sqrt{1 + \tan^2 2\alpha} = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

yazıp

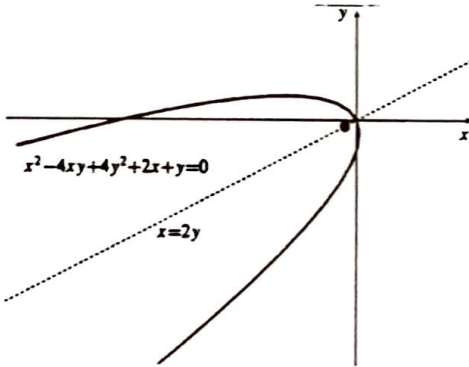
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

değerlerini bulabiliriz. (Karekök alırken hep pozitif kökü kullandık, çünkü en baştan beri α 'yı pozitif alıyoruz.) O zaman $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 5$, $D' = \sqrt{5}$, $E' = 0$ ve $F' = 0$ olur ve XY koordinatlarında denklem

$$\sqrt{5}X + 5Y^2 = 0 \quad \text{veya} \quad X = -\sqrt{5}Y^2$$

şekline girer. Bu ise XY koordinatlarında tepe noktası başnoktada, odağı $(-1/4\sqrt{5}, 0)$ 'da ve doğrultmanı $X = 1/4\sqrt{5}$ olan ve negatif X yönünde, yani xy düzleminde sol aşağıya doğru açılan bir paraboldür. xy koordinatlarında, örneğin, eksen $x = 2y$ doğrusudur. Halbuki xy koordinatlarındaki denklemden tepe noktasını bulmak şöyle dursun, grafiğin parabol olduğunu tahmin etmek bile güçtü.



Şimdi genel ikinci dereceden denklemin katsayılarına biraz daha yakından göz atacağız ve döndürme altında değişmeyen bazı büyüklükler bulacağız. Bu sayede verilen bir denklemin grafiğinin hangi eğri olduğunu, döndürülmüş koordinatlardaki denklemini bulma hesabını yapmadan belirleyebileceğiz. Gene çemberi elipsin bir özel durumu olarak alacağız; diğer özel durumlar da zaten diğer iki eğrinin bazı büyüklüklerinin sıfıra gitmesine ya da sınırsız büyümesine karşılık gelir.

$B = 0$ iken değişik tipte eğrilerin farklı karakterde A ve C değerleri verdiğini görmüştük. Tersine $B \neq 0$ olarak başlarsak, eksenleri döndürdükten sonra eğrimizi tanımanın yolu A' ve C' değerlerine bakmaktır. Biraz değişik biçimde özetlersek, grafik, $A'C' = 0$ ise parabol, $A'C' > 0$ ise elips, $A'C' < 0$ ise hiperboldür. Hesabı biraz uzun tutsa da eksenleri döndürme

altında $B^2 - 4AC$ ifadesinin değişmezliğini kolayca görürüz; yani $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$ olur. Biz döndürme açımızı genellikle $B' = 0$ olacak şekilde seçiyoruz. O zaman $B^2 - 4AC = -4A'C'$ olur. Az önceki $A'C'$ 'nin işaretiyle sınıflama yöntemimizi son eşitliğin sol tarafına uygularsak, ikinci dereceden bir denklemin grafiğinin,

(a) $B^2 - 4AC = 0$ ise bir parabol,

(b) $B^2 - 4AC < 0$ ise bir elips,

(c) $B^2 - 4AC > 0$ ise bir hiperbol

olduğu ortaya çıkar. Daha az önemli iki değişmez ifade daha vardır, $A + C$ ile $D^2 + E^2$; yani $A + C = A' + C'$ ile $D^2 + E^2 = D'^2 + E'^2$ sağlanır.

Örneğin

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y - 7 = 0$$

denkleminin grafiği bir elipstir, çünkü

$$B^2 - 4AC = (-3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Uygun açıyı bulup eksenleri döndürerek grafiğini çizmeyi okuyuculara bırakıyoruz.

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 11x - 2y + 12 = 0$$

denkleminin grafiği bir hiperboldür, çünkü

$$B^2 - 4AC = (3)^2 - (4)(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0.$$

Acaba? Biraz denemeden sonra verilen denklemin

$$(2x - y - 3)(x + 2y - 4) = 0$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilirdiğini görürüz. Doğayısıyla grafik $y = 2x - 3$ ve $y = -x/2 + 2$ kesişen doğrularıdır. Bu doğruları, asimptotlarına indirgemiş bir hiperbol gibi düşünebiliriz. $B^2 - 4AC$ ifadesini kullanırken bunun gibi özel durumları göz ardı etmemeliyiz. Benzer biçimde

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$$

denklemini, xy terimi eksik, $B^2 - 4AC = -4 < 0$ ve $A = C = 1$ olduğu için bir çember verir gibi görünse de,

$$(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

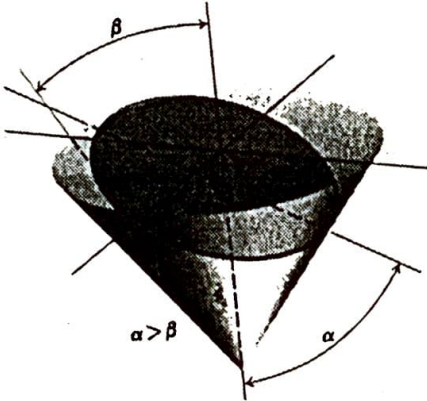
şeklinde yazılabildiğinden sadece $(-3, -4)$ noktası tarafından sağlanır; yani grafiği bir tek noktadan ibarettir; diğer bir bakış açısıyla yarıçapı sıfıra inmiş bir çemberdir.

F. Koninin Kesitleri

Geometrik açıdan en ilginç kısma geldik. Yazının başlığı da burada anlam kazanacak. Başlangıçta eğrilerimizi uzaklık formülünü kullanarak cebirsel olarak tanımladık. Daha sonra odak-doğrultman denklemini sağlayan geometrik eğrilerin cebirsel olarak tanımladığımız eğrilerle aynı şeyler olduklarına gösterdik. Şimdi geometrik yönde bir adım daha atıp bir koninin bir düzlemle kesitinin odak-doğrultman denklemini sağladığını göstereceğiz.

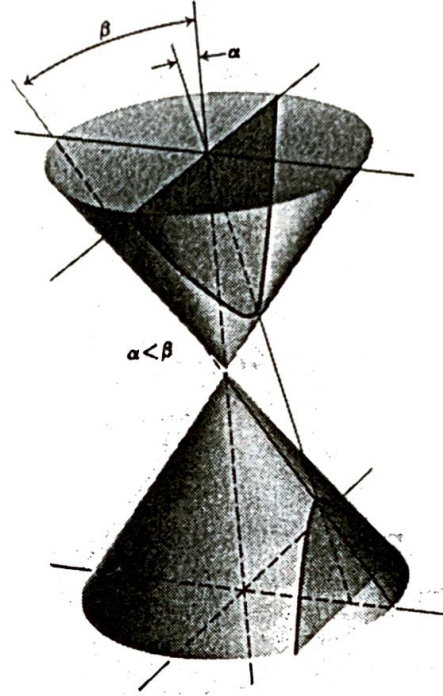
Çember için bir odak-doğrultman denkleminiz yok, çünkü çemberin doğrultmanı yok. Gene de eğer bir koniyi eksenine dik bir düzlemle tepe noktası dışında bir yerden kesersek bu düzlemde bir çember elde edeceğimiz kesin.

Diğer eğrilere geçmeden önce koni tanımına da açıklık getirelim. *Koni*, bir düzlemdeki bir eğriyle bu düzlem dışındaki bir noktayı birleştiren doğruların kümesi diye tanımlanır. Bildiğimiz dik koniyi elde etmek için eğriyi çember olarak ve noktayı da tam çemberin merkezinin üzerinde seçmemiz gerekir. Gene de daha fazlasını elde ederiz. Her şeyden önce koni, noktanın ve düzlemin öte tarafında da devam eder, yani uç uca dokunan iki parçadan meydana gelir. Ayrıca doğrular (doğru parçaları değil) kullandığımıza göre sınırsızdır; tabanı yoktur. Seçtiğimiz nokta koninin *tepesi* adını alır.

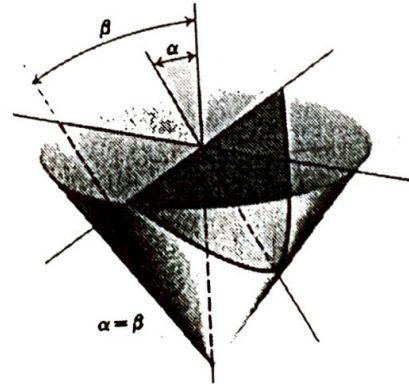


Dik koninin eksenini ile yan yüzü arasındaki dar açığı β ile göstereceğiz. Kesit düzleminin koninin eksenini ile yaptığı dar açığı da α diyelim. O zaman kesit

- (a) $\alpha = 90^\circ$ ise bir çember,
- (b) $\beta < \alpha < 90^\circ$ ise bir elips,
- (c) $\alpha = \beta$ ise bir parabol,
- (ç) $0 \leq \alpha < \beta$ ise bir hiperbol



olur. Kesit düzlemi koninin tepesinden geçtiğinde, iki değişkenli genel ikinci dereceden denklemlerde olduğu gibi, bu dört eğri yerine daha basit şekiller çıkar: Çember ve elips yerine bir nokta, parabol yerine bir doğru, hiperbol yerine kesişen iki doğru. Çember hakkında söylenecek yeni bir söz yok. Az sonra anlatacağımız $\beta < \alpha < 90^\circ$ olduğunu kabul ediyor [1]. Fakat yöntem kalan iki durumda da aynen geçerli; sadece bazı noktaların yeri değişiyor. Bu durumları incelemeyi okuyuculara bırakıyoruz. İlk üç durumda düzlemin koninin yalnız bir parçasını, son durumda ise iki parçasını birden kestiğine dikkat edelim. Dört eğriden yalnız hiperbolün iki parçalı olmasıyla bu çok güzel uyuyor.



Koninin iç tarafına, koniye bir çember boyunca ve kesit düzlemine bir noktada teğet olan bir küre yerleştirilim. Aslında bu tip iki küre var; biri kesit düzlemiyle koninin tepesi arasında, diğeri kesit düzleminin öbür tarafında ama gene de koninin aynı parçasına dokunan. (Kürenin koniye bir çember boyunca değmesini istediğimizden, $\alpha = \beta$ iken yalnız bir küre vardır, $0 \leq \alpha < \beta$ iken ise iki kürenin her biri koninin birer parçasına dokunur.) Teğet çemberlerinden herhangi birine $\checkmark$, kürenin düzleme teğet olduğu noktaya O , $\checkmark$ 'nin düzleminin kesit düzlemini kestiğı doğruya D diyelim. ($\checkmark$ 'nin düzlemi koninin eksenine diktir; o yüzden $\alpha = 90^\circ$ ise D oluşmaz.) Koninin kesiti olan eğrinin bir odağının O ve buna karşılık gelen doğrultmanın D olduğunu göstereceğiz.

Kesit eğrisi üzerindeki bir nokta N olsun. N 'den $\checkmark$ 'nin düzlemine indirilen (koninin eksenine paralel) dikmenin ayağına P diyelim. N 'yi koninin tepesine birleştiren (koni üzerindeki) doğrunun $\checkmark$ 'yi kestiğı noktaya R diyelim.

N 'den D 'ye çizilen dikmenin ayağına da S diyelim. O zaman $[NR]$ ve $[NO]$ doğru parçaları, dışındaki aynı noktadan küreye çizilen teğetlerdir ve dolayısıyla uzunlukları aynıdır: $|NR| = |NO|$. NPR dik üçgeninden $|NP| = |NR| \cos \beta$, NPS dik üçgeninden de $|NP| = |NS| \cos \alpha$ yazabiliriz. $|NS|$ ise N 'nin D 'ye olan uzaklığıdır. $|NP|$ 'leri birbirine eşitleyerek

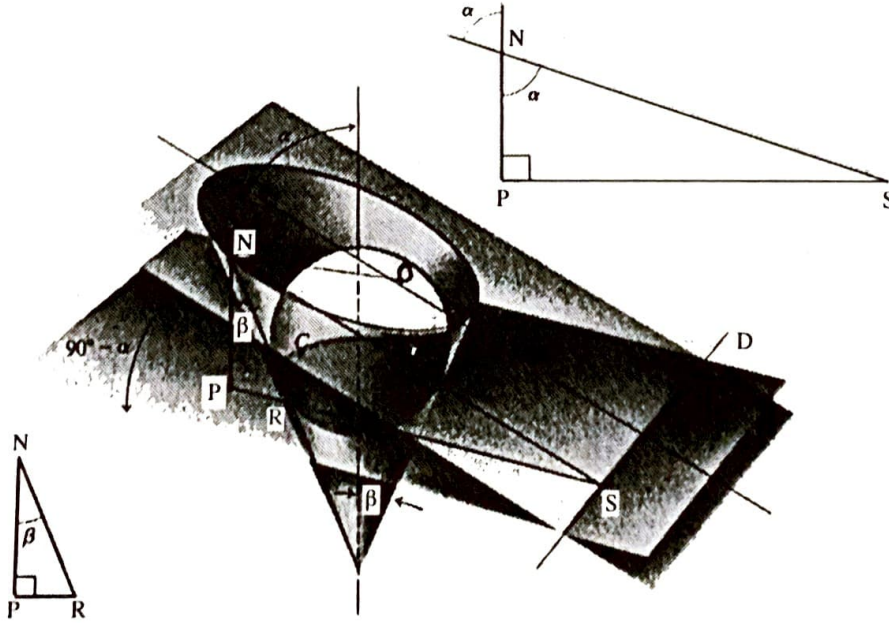
$$|NR| \cos \beta = |NS| \cos \alpha$$

$$|NO| \cos \beta = |ND| \cos \alpha$$

$$|NO| = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} |ND|$$

$$|NO| = e |ND|$$

buluruz. Başta $\beta < \alpha < 90^\circ$ kabul ettiğimizden, $0 < \cos \alpha < \cos \beta$ ve böylece $0 < e < 1$ sağlanır. Dolayısıyla kesit eğrisi, O odaklı ve D doğrultmanlı bir elipstir. $\alpha = \beta$ olsaydı $e = 1$, $0 \leq \alpha < \beta$ olsaydı $e > 1$ çıkacaktı ve eğriler sırayla parabol ve hiperbol olacaktı.



Bu yazıda anlatılan konuların pek çoğu Antalya'nın çok yakınındaki Perge'de doğmuş olan Apolonyus (İ.Ö. 262-190) tarafından geliştirilmiştir. Apolonyus gençliğinde o zamanların en büyük bilim merkezi olan İskenderiye'ye gitmiş ve orada kalmıştır. Yazdığı eserlerden en önemlisi olan *Koninin Kesitleri*, bu konudaki o zamana dek bilinen ve kendisinin bulduğu sonuçları içerir. Türkiye'deki en iyi korunmuş

birkaç antik şehirden biri olan Perge'yi ziyaret etmek için bir neden daha işte.

KAYNAKÇA

- [1] G. B. Thomas & R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 1. cilt, 8. baskı, Literatür, İstanbul, 1994.

e'NİN HİKAYESİ

Nurettin Çalışkan *

Eskiler için matematik geometri idi, bu yüzden sayılar geometrik varlıklar olarak görülüyordu. Bugün bile, π sayısını çemberlerle olan ilişkisi dışında düşünmek çok zordur. Bugünkü matematiğin ise daha çözümleneci ve "doğaya" uygunluğu bekleniyor. Bu anlamda, e sayısı geometrik "varlıkların" uzunluğu, alanı ya da hacmi olarak düşünülemez. Bu sayı daha çok transandantal bir sayı, doğal logaritmanın tabanı olarak bilinir. Katsayıları gerçel sayılar olan doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de eksponansiyel (üssel) fonksiyonlar karşımıza çıkar.

Euler'in 1730 yılında eksponansiyel fonksiyonu kullanıldığı biliniyor. Diferansiyel hesap üzerine yazdığı elyazmalarında transandantal fonksiyonlardan bahsediyor ve bu fonksiyonları logaritmik ve eksponansiyel olarak ikiye ayırıyordu. Notlarında $dy = aydx$ diferansiyel denkleminin çözümünün $y = e^{ax}$ şeklinde olduğunu belirtiyordu.

1748 yılında yayımlanan "Introductio Analysin Infinitorum" adlı kitabında Euler e sayısını

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots}}}}}}$$

şeklinde ifade ediyordu. Aynı kitapta, sürekli bölümlerle ifade ettiği e sayısı için

$$\begin{aligned} e &= < 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots > \\ &= < 2, \overline{1, 2n, 1} >_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

gösterimini kullandı.

Bu yazıda önce $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ limitini inceleyeceğiz. Yardımcı teoremler kullanarak bu limitin varlığını kanıtladıktan sonra

da $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ olarak tanımlanan fonksiyonu kullanarak e sayısının yaklaşık değerini bulmaya çalışacağız.

Bu ilk bölümde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin 1) Sınırlı 2) Monoton (artan yada azalan) olduğunu göstereceğiz.

YARDIMCI TEOREM 1: Her n pozitif tam sayısı için

$$(1) \quad 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

dir.

Kanıt: $k \leq n$ olmak üzere bütün pozitif k sayıları için

$$(2) \quad 1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

eşitsizliğinin doğruluğu gösterildiğinde $k = n$ durumunda (1) nolu eşitsizlik elde edilir.

(2) nolu eşitsizliği kanıtlamak için tümevarım yöntemini kullanacağız.

$k = 1$ için

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

olacağından (2) eşitsizliği doğrudur.

Herhangi bir $k < n$ pozitif tam sayısı için (2) eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $k + 1$ sayısı için (2) eşitsizliğini göstermeye çalışacağız.

k için kabul ettiğimiz eşitsizliği kullandığımızda

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

* Doğu Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

$$> 1 + \frac{k+1}{n}$$

Böylece (2) nolu eşitsizliğin sol tarafını kanıtlamış olduk. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &< \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2+k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{(k+1)n - k^2}{n^3} \\ &< 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

olacağından, (2) eşitsizliğinin sağ tarafı doğrulanır.

YARDIMCI TEOREM 2: Her $n \geq 2$ tam sayısı için

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliği doğrudur.

KANIT: Binom açılımı kullanarak

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &\frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

olduğundan bu iki açılımın terimlerini karşılaştırdığımızda

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ olarak tanımlanan dizi, Yardımcı Teorem 1'den dolayı sınırlı, Yardımcı Teorem 2'den dolayı artandır. Sınırlı ve monoton dizilerin yakınsaklarını kullanarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

limitinin değerinin var olduğunu ve bu limit değerinin (2,3) aralığında olduğunu söyleyebiliriz.

Yazımızın bu kısmında e sayısının yaklaşık değerini bulmaya çalışacağız.

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad 0 < x < \infty$$

fonksiyonu tanımlıyalım. Bu fonksiyon $x > 0$ için artan ve sürekli bir fonksiyondur, dolayısıyla tersi vardır ve sürekli. n pozitif tam sayısı için

$$F(x^n) = \int_1^{x^n} \frac{dt}{t}$$

integralinde $t = s^n$ dönüşümü kullanıldığında F fonksiyonunun

$$F(x^n) = nF(x)$$

eşitliğini sağladığı görülür.

$$F(e) = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1$$

eşitliği kullanılarak e sayısının yaklaşık değeri hesaplanabilir.

n pozitif tam sayısı için $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ve $z_n = F(y_n)$ alalım.

$z_n = F(y_n) = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t}$ olur.

$F(x)$ fonksiyonu x 'e göre artan bir fonksiyon olduğu için

$$n \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \left(\frac{1}{n} \right) < z_n < n \left(\frac{1}{n} \right)$$

yada

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < z_n < 1$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliği kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $y_n = (1 + \frac{1}{n})$ 'in limitinin e 'ye eşit olduğu ortaya çıkar.

k pozitif tam sayı olmak üzere, $a = e^{\frac{1}{k}}$ tanımlıyalım.

$$\frac{1}{k} = \int_1^a \frac{dt}{t}$$

integralinde, $t = \frac{1+s}{1-s}$ dönüşümü yapıldığında, $b = \frac{a-1}{a+1}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{k} = 2 \int_0^b \frac{ds}{1-s^2}$$

elde edilir.

$a > 1$ olduğundan, b sayısının $0 < b < 1$ özelliğini sağladığı görülecektir. $\frac{1}{1-s^2}$ fonksiyonunun $|s| < 1$ için yakınsak olan kuvvet serisini yazarak integralini aldığımızda

$$\frac{1}{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n+1}}{2n+1}$$

olur.

Bu eşitliğin ilk 3 terimini kullanarak

$$f(t) = -\frac{1}{2k} + t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$$

fonksiyonunu tanımlıyalım. Bu fonksiyonun pozitif kökü b sayısı için yaklaşık değeri verecektir.

İlk yaklaşım değeri için $b_0 = \frac{1}{2k}$ alalım. Newton yöntemini kullanarak f fonksiyonunun kökü için ikinci yaklaşım değerini bulabiliriz. Böylece,

$$b_1 = \frac{1}{2k} - \frac{f(\frac{1}{2k})}{f'(\frac{1}{2k})}$$

$$= \frac{1}{2k} - \frac{(1/2k)^3/3 + (1/2k)^5/5}{1 + (1/2k)^2 + (1/2k)^4}$$

yada,

$$b_1 = \frac{120k^4 + 20k^2 + 6}{240k^5 + 60k^3 + 15k}$$

olarak hesaplanabilir.

$$a = \frac{1+b}{1-b}$$

eşitliğinde b_1 değerini yerine koyduğumuzda,

$$a^k = \left(\frac{240k^5 + 120k^4 + 60k^3 + 20k^2 + 15k + 6}{240k^5 - 120k^4 + 60k^3 - 20k^2 + 15k - 6} \right)^k$$

olacaktır. k için değerler verildiğinde a^k sayısının e 'ye yaklaştığı görülür.

$$k = 1, a^1 = 2.72781065$$

$$k = 2, a^2 = 2.71844588$$

$$k = 3, a^3 = 2.72299812$$

$$k = 4, a^4 = 2.71828445$$

$$k = 5, a^5 = 2.71828256$$

$$k = 6, a^6 = 2.718282065$$

$$k = 7, a^7 = 2.71828191$$

$$k = 8, a^8 = 2.71828186$$

e sayısının ilk 500 rakamı aşağıdaki gibidir;

2, 7182818284 5904523536 0287471352
6624977572 4709369995 9574966967 6277240766
3035354759 4571382178 5251664274 2746639193
2003059921 8174135966 2904357290 0334295260
5956307381 3232862794 3490763233 8298807531
9525101901 1573834187 9307021540 8914993488
4167509244 7614606680 8226480016 8477411853
7423454424 3710753907 7744992069 5517027618
3860626133 1384583000 7520449338 2656029760
6737113200 7093287091 2744374704 7230696977
2093101416 9283681902 5515108657 4637721112
5238978442 5056953696 7707854499 6996794686
4454905987 9316368892 3009879312

EŞEKLİĞİN ALEMİ YOK!

Sinan Sertöz *

Anılar

Matematikte “eşek problemi” denince Pisagor’un dik üçgen teoremi akla gelir. Çocukluğumda okuduğum Hayat Ansiklopedisi bu yakıştırmayı dik üçgen teoreminin çözümünü veren çizimin, biraz da hayal gücüyle, kulaklarını dikmiş bir eşek başına benzetilmesine bağlıyordu. Yirmi yıl kadar sonra bu konuyu Gebze’de Cahit Arf’a açtığımda ondan başka bir açıklama daha öğrendim. Güya dik üçgen teoremini kanıtlamaya çalışıp da beceremeyenler bunu yeteneksizliklerine vereceklerine teoremin anlamsızlığından ve kanıt etmeye değmezliğinden dem vurup ‘eşeklik’ ederlermiş. Ve bundan dolayı bu teorem “eşek meselesi” olarak bilinirmiş...

Kimileri rahatlıkla eşeklik edip davranışlarını muhteşem bir teoreme takma ad yapmaktan çekinmezken Darüşşafaka yıllarımızın müzik öğretmeni sevgili Tahir Sevenay bize Camille Saint-Saëns’in Hayvanlar Karnavalı adlı eserini açıklarken sıra eşeklere gelince Saint-Saëns’in kibarlığına direnmez, kendisi de “uzun kulaklı şahsiyet” tamlamasını kullanırdı. Bu inceliğin içindeki muzip neşeyi anlayamaz, kıs kıs güler, alay ederdik. Yıllar sonra bu eşekliğimizin farkına vardığımızda kendimizi affettirmek için telaşlı hayallerimizde sık sık Tahir Beyden af diledik, ellerinden öper olduk. Ama nafile. Yapılan yaramazlıklar anılarda kalıcı...

Yakın Zaman

Türk matematik literatüründe bir başka “eşek meselesi” daha vardır ki hikayesi anlatmaya değer. Yıllar önce Türk Matematikçilerinin ilk internet tartışma ortamı olarak Mustafa Akgül tarafından **turkmath** listesi kuruldu. Daha bu liste ne işe yarar, nasıl kullanılır diye düşünmeye vakit kalmadan Ali Nesin “Nedir bu ‘h’ harfinin anlamı ‘turkmat’ kelimesinin yanında?” diyerek ilk tartışmayı başlattı. Bu ‘h’ harfi kimilerinin gururuna bir ‘diken’ gibi batarken kimileri de böyle bir ‘dikenden’ gocunamayacak kadar duygusuz olmakla suçlandı.

Tartışma azmış yürümüş, karşılıklı eşeklikler ilerde bağışlanması zor düzeylere tırmanırken İngiltere’den Haluk, soyadını unutma eşekliğini gösterdiğim için beni bağışlasın, bu listenin amacını bize hatırlatmak için bir “eşek problemi” ortaya attı. O kızgınlıkla bu probleme saldırdık. Bu kez çözemeyenler sesini çıkarmadı da çözenler ‘eşeklik’ etti(k). Güya bu problem çok basitmiş de böyle yüksek seviyeli bir listede bu problemin ne işi varmış. Breh breh! Sanki o ‘h’ harfinden dikenler yaratıp birbirine saldıranlar bizler değiliz.

Öte yandan Haluk, bizi bu seviyesi hiç birimize yakışmayan tartışmadan çekip çıkarsın diye, problemin başına bir de ödül koymuştu: Çözene İskender döner... Fakat çözenlerin sayısı onun bütçesini tehdit eder düzeye çıkmaya başlayınca ödül süresinin dolduğunu ilan etmek zorunda kalmıştı. Ben de çözenler arasındaydım. Hâlâ bir yabancı bana selam verdiğinde Haluk İngiltere’den döndü, beni buldu ve İskender yemeğe götürecek diye düşünürüm. Sen hem çocuğun soyadını bile hatırlama, hem de İskender dönerini bekle. Bende de az eşeklik değil...

Soru

Haluk’un problemindeki eşek bir tarlanın kenarına bir iple bağlanır ve otlamaya bırakılır. Matematik problemlerinin köylülere gerçek hayattaki köylülere benzemeyeceğinden bu problemdeki köylünün de

* Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

tarlası hem daire şeklindedir hem de tamamen çim ekilidir. Bir matematik problemine konu olmak için bu kadar 'tuhaf'lık' elbet yetmez. Bu köylünün bir de garip sorunu vardır. Tarlanın kenarına bağladığı eşeğin ipini ne kadar uzun tutmalıdır ki eşeği tarladaki çimlerin en fazla yarısını yiyebilsin. Ne diyelim, Allah başka dert vermesin...

Sorudan Modele

Bir 'gerçek hayat' problemini çözmek için önce onu modellemek gerekir. Modellemek demek problemi matematik tekniklerinin uygulanabileceği bir biçime sokmak demektir. Bu arada matematiğin anlayacağı ama çözemeyeceği biçimlerden de uzak durmakta yarar vardır. Elbette asıl göz önünde tutulması gereken konu, eğer matematik teknikleri, olur ya, bu problemi çözerse, bu teknik çözümü ilk baştaki problemdeki soruyla ilgilendirebilecek konumdan uzaklaşmamaktır.

Bu problemi modellemeye önce eşekten başlamakta yarar var. Ne de olsa tüm sorun onun başının altından çıkıyor... Örneğin ipin uzunluğuna eşeğin başının uzunluğunu katmaya kalsak, hatta eşek zorlayınca ipin ve boynunun doğal esnekliklerinden dolayı mesafenin biraz uzayabileceğini göz önüne alsak içinden çıkılmaz bir problemle karşılaşırız. Bizim İskender de hayal olur. Öyleyse eşeğin boynunu ve probleme zaten etki etmeyecek diğer boyutlarını ihmal edelim: *eşek olsun bir nokta*.

İpin esnekliğinin katkısının çok küçük olacağını kabul edip ipi de esnemez kısaltmaz kabul edelim: *ip olsun bir doğru parçası*.

Zaten tarlayı bize daire biçiminde diye tanıttılar. Hiçbir gerçek tarlanın tam daire olamayacağını, sınırlarındaki pütürlerin, belirsizliklerin denklemini yazmanın dile getirip başımıza iş almayalım. *Tarla olsun bir daire*.

Eşek tarlanın kenarına bağlanmıştı. Muhtemelen sağlam bir kazık çakıp eşeği buraya bağlamıştır köylü. Eşek çekiştirdikçe bu kazık yerinden oynar ama bunun da etkisi az olacağından kazığı da *dairenin çevresi üzerinde bir nokta* olarak düşünelim.

Çimlere karşılık da dairenin alanını düşünelim. Eşek ipinin uzandığı her yerdeki çimleri yiyeceğine göre bunu da şöyle tercüme edelim: *bir dairenin çevresi üzerinde alınan bir noktayı merkez olarak kabul eden bir başka daire var*.

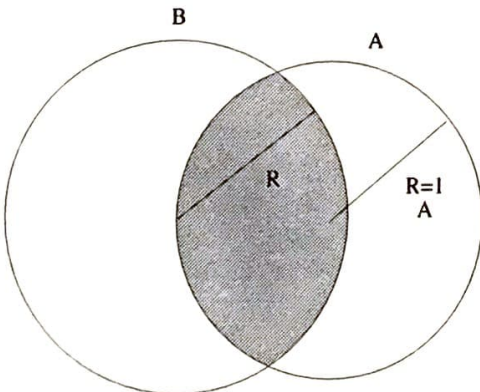
Eşeğin çimlerin yarısını yeme koşulunu da *iki dairenin ortak alanı birinci dairenin alanının yarısı* olmalı diye çevirelim.

Modele Yaklaştıkça

Şimdi ortada iki daire ve iki yarı çap var. Bunlara A ve B daireleri diyelim. Köylünün tarlası olarak düşüneceğimiz daire A dairesi, eşeğin gezip dolaşabileceği bölgeyi gösteren daire de B dairesi olsun. Birinci dairenin yarıçapı R_A ikincisinin yarıçapı da R olarak gösterilsin.

Verilen her R_A gerçel sayısı için sağlayan bir R gerçel sayısı arıyoruz. R_A sayısı elbette kullandığımız uzunluk birimine göre değişen bir sayı olacak. Ama birim değişse bile uzunluk değişmeyeceğinden hesaplarda gereksiz 'hamallık' yapmamak için yeni bir uzunluk birimi icat edelim ve buna göre $R_A = 1$ birim olsun.

Problem, verilen şartları sağlayan, bir R sayısı bulmaya dönüştü. (bkz Şekil 1.)



Şekil 1

R ne olmalı ki taralı olan $\frac{\pi}{2}$ olsun? Yada R ne olmalı ki A dairesinin taranmamış bölgesinin alanı $\frac{\pi}{2}$ olsun? (!)

Biraz Matematik

Bu aşamada da o ‘verilen koşulların’ formüle edilmesiyle ilgilenelim. Yarıçapı bir birim olan bir çemberin üzerinde bir nokta alıyoruz. Bu noktayı merkez olarak kabul eden R yarıçaplı bir çember çiziyoruz. İki çemberin ortak bölgesinin alanının $\pi/2$, yani yarıçapı bir birim olan dairenin alanının yarısı, olması için R sayısının kaç olması gerektiğini araştırıyoruz.

Elimizdeki denklemin bir tarafında $\pi/2$ öbür tarafında da tarif ettiğimiz şekilde kesişen iki dairenin ortak alanı var. Demek ki elle tutulur gözle görülür bir denklem kurabilmek için şimdi yapılacak şey böyle bir kesişimin alanını yazmak.

Bir süre otları ve eşekleri unutup yüksek matematik, yani tek değişkenli türevlenebilir fonksiyonlar matematiği, yapacağız. Burada adı geçen tek değişken elbette eşeğin ipinin uzunluğu olarak düşündüğümüz R sayısı. Fonksiyon da iki dairenin ortak alanı. Elbette R değişirse bu alan değişecek.

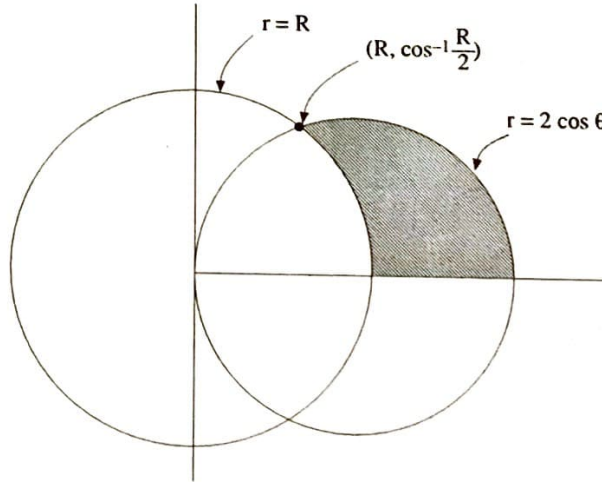
Elimizde tek değişkenli bir fonksiyon olduğu kesin. Kesin olmayansa bu fonksiyonun türevlenebilir olması. Aslında bu noktada bunu bilmiyoruz. Ama tecrübeler, Eflatuncu doğa anlayışı, açık ya da gizli inançlar, bugüne kadar karşımıza çıkan ve doğal problemleri modelleyen fonksiyonların hemen hemen hepsinde olduğu gibi bu fonksiyonun da türevlenebilir olacağı umudunu bize veriyor. Biz bu umuda kanıp bazı şeyleri kontrol etmememiz yapmayacağız. Ama bu umut olmasa, bu problemde kuracağımız fonksiyonun içinden çıkılması mümkün olmayan, daha önceki tecrübelerimizle anlayamayacağımız bir fonksiyon olacağı korkusu üzerimize sinse, bu problemi çözmeye yeltenmeyiz bile. İskender döneri de Haluk başkalarına ısmarlarken biz ‘burnumuzu çekeriz’ (anneanemin bir lafıdır!).

Her çözölen problem onun büyüklüğüne ve bilinmezliğine aldırmadan pervasızca onunla uğraşanlar tarafından çözülmüştür. Bizim de uğraştığımız zaten alt tarafı bir “eşek meselesi”.

Artık model olarak çizdiğimiz şekle bakıp denkleminizi kurmaya başlayabiliriz.

Bir Denkleme Doğru

Dairelerin kesiştiği yerin alanı birim dairenin alanının yarısı olacaksa, birim dairenin içinde kalan kesişme dışı alan da birim dairenin alanının yarısına eşit olacaktır. Ayrıca dairelerimizin merkezlerini birleştiren çizginin altında ve üstünde kalan şeklin birbirinin tıpatıp aynısı olacağını da gözleyelim.



Şekil 2

Şimdi Şekil 2'ye bakarsak problemi şu şekilde formüle edebiliriz: Öyle bir R sayısı bulalım ki şekildeki taralı alan $\pi/4$ olsun. Burada polar koordinatlar kullandığınıza dikkat edin; merkezi $(1,0)$ olan birim çemberin denklemi polar koordinatlarda $r = 2 \cos \theta$ olarak verilir. Merkezi orijinde olan ve yarıçapı R olan çemberin denklemi de $r = R$ 'dir. Bu iki çember polar koordinatlarda $r = R$ ve $\theta = \pm \cos^{-1} \frac{R}{2}$ noktalarında kesişirler.

Taralı bölgenin alanını $A(R)$ ile gösterelim.

Hesap Lütfen!

Şimdi integral hesaplarına başlayabiliriz.

$$A(R) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

olsun istiyoruz. Önce $A(R)$ 'yi hesaplayalım:

$$A(R) = \int_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1} \frac{R}{2}} \int_{r=R}^{r=2 \cos \theta} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1} \frac{R}{2}} \left(2 \cos^2 \theta - \frac{R^2}{2} \right) d\theta = \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta - \frac{R^2}{2} \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1} \frac{R}{2}}.$$

Burada bir kenarı R ve hipotenüsü 2 olan bir dik üçgen kullanarak $\sin(2 \cos^{-1} \frac{R}{2})$ için $\frac{R\sqrt{4-R^2}}{2}$ değerini bulup yerine koyarak

$$A(R) = \frac{1}{2} \frac{R\sqrt{4-R^2}}{2} + \left(1 - \frac{R^2}{2} \right) \cos^{-1} \frac{R}{2} \quad (2)$$

buluruz ve bunu (1) ile kıyaslarsak

$$\frac{R\sqrt{4-R^2}}{4} + \frac{1}{2} (2 - R^2) \cos^{-1} \frac{R}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

denklemini sağlayan R sayısını aradığımız sonucuna varırız.

Tek değişkenli fonksiyonlar teorisi, ve özellikle integral teknikleri, kullanarak uzun bir hikayeyi tek bir denklemin çözümüne indirgedik. Bize (3) nolu denklemi veren Şekil 2'ye tekrar bakarsak problemin bir anlamı olabilmesi için R uzunluğunun 0 ile 2 arasında olması gerektiğini buluruz.

Yine Şekil 2'ye, ya da (3) nolu denkleme, bakarak R arttıkça $A(R)$ 'nin, yani taralı alanın azalacağını görürüz. Demek ki $[0, 2]$ aralığında (3) denkleminin bir tek çözümü var. $A(R)$ fonksiyonunun bu aralıkta türevlenebilir olması köklerinin nerelerde bulunacağı konusundaki beklentilerimizin doğru olmasını sağlıyor.

Çözüm Ararken

Var olduğunu ve tek olduğunu anladığımız çözümü şimdi arayabiliriz. Önce $\cos^{-1}$ fonksiyonunun kolay hesaplanabildiği değerleri deneyelim;

$$A(1) = 0.95661... > \frac{\pi}{4}, \quad A(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

Böylece aradığımız R değeri için

$$1 < R < \sqrt{2}$$

sınırlamasını bulduk. Bu eşitsizlik bize $(2 - R^2)$ 'nin sıfırdan farklı olduğunu söylediğine göre (3) denkleminin her iki tarafını $(2 - R^2)$ 'ye bölüp $\cos^{-1} \frac{R}{2}$ ifadesini denklemin bir tarafında yalnız bırakmaya çalışırsak

$$\cos^{-1} \frac{R}{2} = \frac{\pi - R\sqrt{4-R^2}}{2(2-R^2)} \quad (4)$$

eşitliğini buluruz. Bu denklemin sağ tarafının $\pi/2$ 'den küçük olduğu koşulunun da koymamız gerekecek. Aksi takdirde bulacağımız çözümler cebirsel modelimizin çözümü olacak ama geometrik problemimizle ilgili olmayacaklar. Okuyucu

$$\frac{\pi - R\sqrt{4 - R^2}}{2(2 - R^2)} < \pi/2$$

eşitsizliğini kendisi çözüp

$$R < 1.27489...$$

olması gerektiğini kolayca görebilir.

Şimdi (4) denkleminde her iki tarafın cosinüsünü alıp problemi bir kök bulma problemine indirgeyebiliriz; R sayısını (1, 1.27489) aralığında seçmek koşuluyla

$$F(R) = R - 2 \cos \left(\frac{\pi - R\sqrt{4 - R^2}}{2(2 - R^2)} \right)$$

fonksiyonunun köklerini bulmak istiyoruz.

Mertlik Bozuluyor

Buraya kadar romantizmin rüzgarında geldik ama artık tüfeği icat edip mertliği bozmanın zamanı geldi. *Mathematica* programına aşağıdaki komutları verirsek

```
f:=R-2*Cos[(Pi-R*(4-R^2)^(1/2))/(2*(2-R^2))]  
n:=55  
N[FindRoot[f == 0, {R, 1, 1.27489}, AccuracyGoal -> n,  
WorkingPrecision -> n], n]
```

bize derhal

```
{R -> 1.158728473018121517828233509933509149688292266492096512}
```

sonucunu verir. Bu sayı noktadan sonra 53 basamağa kadar doğrudur. (Son basamak, yani 54. basamak, 2 değil 1 olmalı...)

Çözümü tam olarak değil ama noktadan sonra elli üç basamaklık bir hassaslıkta bulduk. π sayısının kırk basamaklık açılımı ile evrenin bilinen çevresinin uzunluğunu bir protonun çapından daha küçük bir hassaslıkta hesaplayabileceğinizi düşünürseniz bulduğumuz bu sayıyı 'yaklaşık' diye küçümsemezsiniz!

Ayrılırken

Buraya kadar işler yolunda gitti ve bir sayı bulduk. Ama bu sayının π sayısının rasyonel bir katı olması, e sayısı ile doğrudan bir ilişkisinin görülmeşi romantik matematikçileri biraz hayal kırıklığına uğrattı. Bu kadar çalış çabala, sonunda karşına çıka çıka hiç bir şablona sokamayacağın bir sayı çıksın. Hiç değilse bu sayı altın oranla bir şekilde ilgili olsaydı! Her halde bu sevimsiz durumu, problemin adındaki 'eşek' kelimesinin nereden geldiği konusunda alternatif bir açıklama olarak akılda tutmakta yarar var...

Bu yazının içinde "eşek" kelimesinin, değişik çekimleriyle birlikte, kaç kez geçtiğini bulmayı ve bunun Bernoulli sayılarıyla bir ilgisi olup olmadığını araştırmayı da doğal olarak okuyucuya bırakıyorum. Ben şimdi, evvelki cümlede sözünü ettiğim, "Bernoulli Sayıları" yazımı hazırlamaya gidiyorum...

Açıklama: Bu yazıda adı geçen tüm kişi ve kuruluşlar hayal ürünü olup hiç bir gerçek kişi ya da kuruluşu temsil etmezler. Haluk! Bu seni bağlamaz. Dönerleri unutmadık...

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ DENKLEMİNİN ÖZEL DURUMLARDA ÇÖZÜMLERİNİN BULUNUŞU

Harun Karatosun *

A. Üçüncü dereceden bir bilinmeyenli $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denkleminin simetrik iki kökünün ($x_1 = -x_2$) olması için gerek ve yeter koşul $AB = C$ olmasıdır.

Kanıt: Gerek Koşul $x_1 = -x_2$ ise $AB = C$ olur.

$$\begin{aligned} x^3 + Ax^2 + Bx + C &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \\ x_1 &= -x_2 \text{ ise } x^3 - (-x_2 + x_2 + x_3)x^2 + (-x_2^2 - x_2x_3 + x_2x_3)x + x_2^2x_3 = 0 \\ & \quad x^3 - x_3x^2 - x_2^2x + x_2^2x_3 = 0 \end{aligned}$$

Buradan $A = -x_3, B = -x_2^2, C = x_2^2x_3$, yani $AB = C$ olduğunu elde ederiz.

Kanıt: Yeter Koşul. $AB = C$ ise $x_1 = -x_2$ olur.

$AB = C$ ise (I) denklemi $x^3 + Ax^2 + Bx + AB = 0$ olur.

$$x_1 = -\sqrt{-B} \text{ için, } (-\sqrt{-B})^3 + A(-\sqrt{-B})^2 + B(-\sqrt{-B}) + AB = 0$$

$$x_2 = \sqrt{-B} \text{ için, } (\sqrt{-B})^3 + A(\sqrt{-B})^2 + B\sqrt{-B} + AB = 0$$

$$x_3 = -A \text{ için, } -A^3 + A^3 - AB + AB = 0 \text{ olur.}$$

$$x_1 = -\sqrt{-B} \text{ ve } x_2 = \sqrt{-B} \text{ olduğundan } x_1 = -x_2 \text{ bulunur.}$$

Sonuç. $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denkleminde $AB = C$ olması için gerek ve yeter koşul $x_{1,2} = \pm\sqrt{-B}$, $x_3 = -A$ dır. Denklem $(x + A)(x^2 + B) = 0$ şeklinde yazılır.

Örnek. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$ denkleminde $AB = C$ yani $-6 = -6$ dır. Denklem kökleri $x_1 = -A = -2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ olur.

Örnek. $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$ denkleminde $AB - C = -20 + 20 = 0$. $x_1 = 5$, $x_2 = -2i$ ve $x_3 = 2i$ dir.

B. $AB \neq C$ durumunda $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denklemini $k \neq 0$ olmak üzere

$$\underbrace{x^3Ax^2 - (k - B)x - A(k - B)}_I + \underbrace{kx + C + A(k - B)}_{II} = 0 \text{ şeklinde yazalım. I ile gösterdiğimiz}$$

kısım için $A'B' = -A(k - B) = C'$ koşulu sağlanır. O halde I'in kökleri $x = -A$ ve $x = \pm\sqrt{k - B}$ olacaktır. II'nin kökü ise $x = -A + \frac{AB - C}{K}$ dir. I ve II'nin kökleri çakışır ise bu aynı zamanda denklemin de kökü olacaktır. $x_1 = -A$ ise $\frac{AB - C}{k} = 0$ ve $AB - C = 0$ olur. Bu denklemin simetrik iki kökü olmasını gerektirir. Bu durum A'da incelendi.

O halde $x_1 = -A + \frac{AB - C}{k} = \pm\sqrt{k - B}$ durumunda $k - B = x_1^2$ olur. Gerçek kök durumunda $k - B = x_1^2 > 0$ olduğundan $k > B$ olmalıdır.

* Öğ. Kd. Yzb., Kuleli Askeri Lisesi, Matematik Öğretmeni

O halde (I) denkleminde $AB - C$ nin bölenleri (k sayıları) içinden B den büyük olanlardan $k - B = x_1^2$ koşulunu sağlayan arayalım. k ve x_1 sayıları için $x_1^2 = k - B$ yi (I) denkleminde yazarsak

$$x_1(k - B) + A(k - B) + Bx_1 + C = kx_1 + Ak + C - AB$$

$k(x_1 + A) + C - AB = 0$ şartını sağlayanlar (I) denkleminin kökü olur.

Örnek. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ denkleminde $AB - C = 4 - (-6) = 10$, $AB - C = 10$ 'un bölenlerinden, $B = 1$ den büyükler $k = 2, 5, 10$ sayılarıdır.

$k = 2$ ise, $k - B = 1^2 \Rightarrow x_1 = \pm 1$ olacağından $k(x_1 + A) + C - AB = 2, (\pm 1 + 4) - 10 = 0$ $x_1 = 1$ olduğunu verir.

$k = 5$ ise, $k - B = 5 - 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow x_2 = \pm 2$ olacağından $5(\pm 2 + 4) - 10 = 0$ için $x_2 = -2$ bulunur.

$k = 10$ ise, $k - B = 10 - 1 = 9 = 3^2 \Rightarrow x_3 = \pm 3$ olacağından $10(\pm 3 + 4) - 10 = 0$ için $x_3 = -3$

O halde $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin kökleri 1, -2 ve -3 tür.

C) $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denkleminin iki katlı kökü x_3 ve diğer kökü x_1 varsayalım.

$$(x - x_3)^2(x - x_1) = x^3 + (-2x_3 - x_1)x^2 + (x_3^2 + 2x_3x_1)x - x_1x_3^2 = 0$$

olur.

$A^2 - 3B = (x_3 - x_1)^2$ ve $x_3 - x_1 = \pm\sqrt{A^2 - 3B}$ olur.

$x_1 + 2x_3 = -A$, $x_3 - x_1 = \pm\sqrt{A^2 - 3B}$ eşitlikleri toplanarak $x_3 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}$ bulunur.

$x_1 = -A - 2\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)$ olur.

$$-C = x_1x_3^2 = \left[-A - 2\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)\right]\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)^2$$

yazarsak

$$-C = -A\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)^2$$

bulunur. $-C = -Ax_3 - 2x_3x_3^2$ yani $-2x_3^3 - Ax_3^2 + C = 0$ olur. O halde katlı kök x_3 , $2x^3 + Ax^2 - C = 0$ denkleminin köküdür. $2 \cdot (x^3 + Ax^2 + Bx + C) = 0$, $2x^3 + Ax^2 - C = 0$ denklemleri birbirlerinden çıkarılarak bulunan

$$Ax^2 + 2Bx + 3C = 0 \quad (II)$$

denkleminin bir kökü x_3 dır.

Benzer şekilde $3 \cdot (x^3 + Ax^2 + Bx + C) = 0$ ve $Ax^2 + 2Bx + 3C = 0$ denklemleri birbirlerinden çıkarılarak bulunan

$$3x^2 + 2Ax + B = 0 \quad (III)$$

denkleminin de bir kökü x_3 dır.

Görüldüğü gibi x_3 , II ve III denklemlerinin ortak bir köküdür. Bu kök $3 \cdot (Ax^2 + 2Bx + 3C) = 0$ ve $A \cdot (3x^2 + 2Ax + B) = 0$ denklemleri birbirlerinden çıkarılarak bulunan $(6B - 2A^2)x + 9C - BA = 0$ denkleminin de kökü olacağından $x_3 = \frac{BA - 9C}{6B - 2A^2}$ bulunur. $6B - 2A^2 \neq 0$ ve $A \neq 0$ olduğunda

$x_1 = \frac{-8AB + 18C + 2A^3}{6B - 2A^2}$ bulunur.

$$B = x_3^2 + 2x_3x_1 = x_3(x_3 + 2x_1) \text{ den}$$

$$B = \left(\frac{AB - 9C}{6B - 2A^2}\right)\left(\frac{AB - 9C}{6B - 2A^2} + \frac{-16AB + 36C + 4A^3}{6B - 2A^2}\right)$$

yazarak, $6B - 2A^2 \neq 0$ olmak üzere

$$4B^3 - A^2B^2 - 18ABC + 27C^2 + 4A^3C = 0$$

bulunur. O halde bu koşulu sağlayan (I) denkleminin iki kökü birbirine eşittir.

Örnek. $x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = 0$ denklemini düşünelim.

$$4 \cdot 21^3 - 8^2 \cdot 21^2 - 18 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 18 + 27 \cdot 18^2 + 4 \cdot 8^3 \cdot 18 = 37044 - 28224 - 3024 \cdot 18 + 8748 + 36864 = 0$$

koşulu sağladığından

$$x_3 = x_2 = \frac{BA - 9C}{6B - 2A^2} = \frac{21 \cdot 8 - 9 \cdot 18}{6 \cdot 21 - 2 \cdot 64} = \frac{168 - 162}{126 - 128} = \frac{6}{-2} = -3$$

buluruz. Buradan

$$x_1 = \frac{-8AB + 18C + 2A^3}{6B - 2A^2} = \frac{-8 \cdot 8 \cdot 21 + 18 \cdot 18 + 2 \cdot 8^3}{6 \cdot 21 - 2 \cdot 64} = -2$$

bulunur.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ KAVRAMININ GEOMETRİ VE ANALİZ PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Mehmet Hamidoğlu Tagiyev *

1. GİRİŞ

Matematik Dünyası'nın 1994 yılı 5 inci sayısında Geometri problemlerinin çözümünde kullanılan özel bir metodla tanıştık, [1]. Mekaniğin ağırlık merkezi kavramı ile bağlı olan ve M.Ö 3.yüzyılda Arşimet tarafından verilen bu metodun problem çözümünde kolaylıklar sağladığını o yazımızda gördük. Arşimetten çok daha sonra XVIII yüzyılda yaşamış büyük matematikçi L.Euler cisimlerin dönel hareketlerini araştırırken eylemsizlik momenti adlı bir kavram ortaya koymuş ve bu kavram sonraları yalnız mekanikte değil matematiğin de bir çok alanında faydalı olmuştur. Bu yazımızda eylemsizlik momentinin geometri ve analiz problemlerinin çözümünde nasıl kullanıldığını inceleyeceğiz. Önce maddesel noktalar sisteminin ağırlık merkezi ve onun özelliklerini kısaca hatırlayalım. Okuyucularımız ayrıntılı bilgileri yukarıda adı geçen makalemizden elde edebilir. Kütlesi m olan maddesel A noktasını mA ile gösterirsek $(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$ gibi maddesel noktalar sisteminin ağırlık merkezi

$$m_1G\vec{A}_1 + \dots + m_nG\vec{A}_n = \vec{0} \quad (1)$$

bağlantısını sağlayan bir G noktasına deriz. Herhangi bir O noktası için $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$ olmak şartıyla

$$(m_1O\vec{A}_1 + \dots + m_nO\vec{A}_n) : (m_1 + \dots + m_n) = O\vec{G} \text{ olur.}$$

Örneğin bir ABC üçgenin kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ ise ve A, B, C , köşeleri sırası ile a, b, c , kütleleri ile techiz edilmişse, bu üçgenin ağırlık merkezi içteğet çemberinin merkezi olur.

Not: Aşağıda A maddesel noktanın m kütlesi hem pozitif, hem de negatif olmasına izin veriyoruz, yani $m \in \mathbb{R}$ kabul ediyoruz.

* Mimar Sinan Üniversitesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

2. EYLEMSİZLİK MOMENTİ. LAGRANGE - JACOBI FORMÜLÜ:

Kütleleri $m_1, \dots, m_n$ ($m_i \in \mathbb{R}$) olan $(m_1, A_1, m_2, A_2, \dots, m_n, A_n)$ maddesel noktalar sistemi göz önüne alalım, $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$ olsun A ve B noktalar arasındaki uzaklığı $|AB|$ gibi göstereceğiz.

Tanım:

$$I_p = m_1|PA_1|^2 + \dots + m_n|PA_n|^2 \quad (2)$$

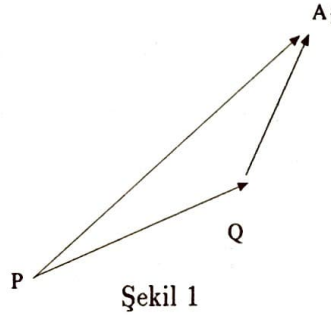
ile tanımlanan I_p sayısına $(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$ sisteminin P noktasına göre eylemsizlik momenti denir.

Örnek: Bir ABC üçgeninin A, B, C , köşelerine 1 kütle yerleştirirsek yani, $(1A, 1B, 1C)$ sistemini ele alırsak bu sistemin çevrel çemberin merkezi olan O noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_o = 1 \cdot |OA|^2 + 1 \cdot |OB|^2 + 1 \cdot |OC|^2 = 3R^2$$

olur. R çevrel çemberin yarıçapıdır.

Şimdi $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ sisteminin herhangi iki P ve Q noktalarına göre eylemsizlik momentleri arasında bir bağıntı kuralım. Tanıma göre (Şekil 1)



Şekil 1

$$\begin{aligned} I_p &= m_1|PA_1|^2 + \dots + m_n|PA_n|^2 \\ &= m_1(P\vec{A}_1 \cdot P\vec{A}_1) + \dots + m_n(P\vec{A}_n \cdot P\vec{A}_n) \\ &= m_1(P\vec{Q} + Q\vec{A}_1) \cdot (P\vec{Q} + Q\vec{A}_1) + \dots + m_n(P\vec{Q} + Q\vec{A}_n) \cdot (P\vec{Q} + Q\vec{A}_n) \\ &= m_1(P\vec{Q} \cdot P\vec{Q}) + \dots + m_n(P\vec{Q} \cdot P\vec{Q}) + 2[m_1(P\vec{Q} \cdot Q\vec{A}_1) + \dots + m_n(P\vec{Q} \cdot Q\vec{A}_n)] + \\ &\quad + m_1(Q\vec{A}_1 \cdot Q\vec{A}_1) + \dots + m_n(Q\vec{A}_n \cdot Q\vec{A}_n) \\ &= |PQ|^2(m_1 + \dots + m_n) + 2P\vec{Q}(m_1Q\vec{A}_1 + \dots + m_nQ\vec{A}_n) + \dots + m_1|QA_1|^2 + \dots + m_n|QA_n|^2 \\ &= I_Q + m|PQ|^2 + 2P\vec{Q} \cdot (m_1Q\vec{A}_1 + \dots + m_nQ\vec{A}_n) \end{aligned}$$

eğer Q noktası $(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olursa $m_1Q\vec{A}_1 + \dots + m_nQ\vec{A}_n = 0$ olur ve (3) ten

$$I_P = I_Q + m|PQ|^2 \quad (4)$$

formülünü elde ederiz. Bu formül büyük Fransız matematikçi Lagrange tarafından bulunmuştur ve Lagrange formülü diye adlandırılır. (Lagrange, Euler ve aşağıda adını anacağımız Jacobi aynı zamanda büyük mekanikçilerdir. XVII ve XIX yüzyıllar büyük matematikçilerin hem de büyük mekanikçiler olduğu yüzyıllardır. XX yüzyıl bu özelliği kayıp etmiş veya etmektedir).

Ağırlık merkezi G sistemin önemli bir noktası olduğu için sistemin bu noktaya göre eylemsizlik momenti için basit bir formül vardır. Bu formül Lagrange, Jacobi, Poisson gibi matematikçiler (mekanikçiler!) tarafından bağımsız olarak verilmiştir. Geleneksel olarak bu formül Jacobi formülü diye adlandırılır.

Teorem (Jacobi formülü): $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$ olmak üzere $(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olan G noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_G = \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j |A_i A_j|^2 \quad (5)$$

İspat: Teoremin ispatını $n = 3$ hali için yapalım. Herhangi n için benzer ispat geçerlidir.

$(m_1 A_1, m_2 A_2, m_3 A_3)$ sisteminin ağırlık merkezi G olsun önce A_1 noktasına göre $(m_2 A_2, m_3 A_3)$ sisteminin eylemsizlik momentini hesaplayalım. $m = m_1 + m_2 + m_3$

$$I_{A_1} = I_G + m|A_1 G|^2 \quad (\text{Lagrange formülüne göre})$$

$$I_{A_1} = m_2|A_1 A_2|^2 + m_3|A_1 A_3|^2 \quad (\text{Tanıma göre})$$

böylece $m_2|A_1 A_2|^2 + m_3|A_1 A_3|^2 = I_G + m|A_1 G|^2$ olur. Her tarafı m_1 ile çarparsak

$$m_1 m_2|A_1 A_2|^2 + m_1 m_3|A_1 A_3|^2 = m_1 I_G + m m_1|A_1 G|^2$$

benzer olarak

$$m_2 m_1|A_2 A_1|^2 + m_2 m_3|A_2 A_3|^2 = m_2 I_G + m m_2|A_1 G|^2$$

$$m_3 m_1|A_3 A_1|^2 + m_3 m_2|A_3 A_2|^2 = m_3 I_G + m m_3|A_1 G|^2$$

bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak, ve $|A_i A_j| = |A_j A_i|$ olduğunu gözönüne alırsak

$$2m_1 m_2|A_1 A_2|^2 + 2m_1 m_3|A_1 A_3|^2 + 2m_2 m_3|A_2 A_3|^2 =$$

$$= m I_G + m(m_1|A_1 G|^2 + m_2|A_2 G|^2 + m_3|A_3 G|^2) \quad \text{veya}$$

$$2\left(\sum_{i < j} m_i m_j |A_i A_j|^2\right) = 2m I_G,$$

$$I_G = \frac{1}{m} \left(\sum_{i < j} m_i m_j |A_i A_j|^2\right) \quad \text{olur}$$

3. LAGRANGE JACOBI FORMÜLÜNÜN UYGULAMALARI:

Şimdi de (4) ve (5) formüllerinin geometri problemlerine uygulamalarını gösterelim. Aşağıda ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ ile göstereceğiz.

Problem 1: ABC üçgeninin $[AD]$ açıortay, $|BD| = c_1, |DC| = b_1[AG]$ kenarortay ise

a) $|AD|^2 = bc - b_1 c_1$, olduğunu gösteriniz (Şekil 2).

b) $|AG|^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, olduğunu gösteriniz (Şekil 3).

Çözüm a) B ve C noktalarına sırası ile b ve c kütlelerini yerleştirerek (Şekil 2) (bB, cC) sistemini kuralım. Açıortay $[BC]$ yi yankenarlar oranında böldüğü için $bc_1 = cb_1$, yani D noktası (bB, cC) sisteminin ağırlık merkezi olur. (bB, cC) sisteminin A ya göre eylemsizlik momenti tanıma göre

$$I_A = bc^2 + cb^2 = bc(b + c),$$

D noktasına göre eylemsizlik momenti ise Jacobi formülüne göre

$$I_D = \frac{1}{b+c} (bc|BC|^2) = \frac{a^2 bc}{b+c}$$

Lagrange (4) formülüne göre

$$I_A = I_D + (b+c)|AD|^2 \quad \text{veya}$$

$bc_1 = cb_1$ eşitliğinden $b = \lambda b_1$, ve $c = \lambda c_1$ şeklindedir.

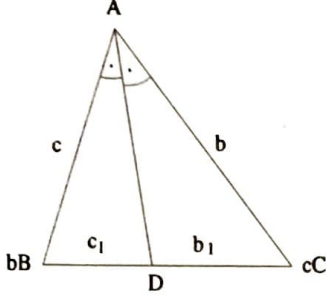
$$|AD|^2 = \frac{I_A - I_D}{b+c} = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc - \frac{\lambda^2 b_1 c_1 a^2}{\lambda^2 (b_1 + c_1)^2} = bc - \frac{\lambda^2 b_1 c_1 a^2}{\lambda^2 a^2} = bc - b_1 c_1 \quad \text{bulunur.}$$

b) B ve C noktalarına 1 kütlesi yerleştiriliyor. $(1B, 1C)$ sistemini ele alalım o zaman G noktası bu sistemin ağırlık merkezi olacaktır. Tanıma ve Jacobi formülüne göre

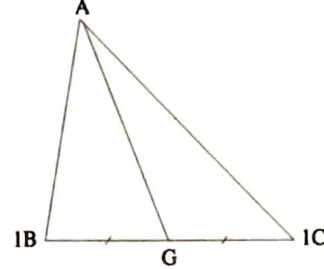
$$I_A = 1 \cdot c^2 + 1 \cdot b^2 = b^2 + c^2$$

$$I_G = \frac{1}{1+1} (1 \cdot 1 |BC|^2) = \frac{a^2}{2}$$

Lagrange formülüne göre



Şekil 2



Şekil 3

$$I_A = I_G + (1+1)|AD|^2 \text{ bağıntısından } |AG|^2 = \frac{I_A - I_G}{2} = bc - \frac{b^2c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \text{ bulunur.}$$

Problem 2: P noktası ABC üçgeninin içinde herhangi bir nokta, G kenarortayların kesişme noktası, $|AP| = d_1, |BP| = d_2, |CP| = d_3$ ise

$$|PG|^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm: A, B, C köşelerine 1 kütlelerini yerleştirirsek $(1A, 1B, 1C)$ sisteminin ağırlık merkezi G noktası olacaktır.

$$I_P = 1 \cdot |AP|^2 + 1 \cdot |BP|^2 + 1 \cdot |CP|^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

$$I_G = \frac{1}{3}(1 \cdot 1 \cdot |AB|^2 + 1 \cdot 1 \cdot |BC|^2 + 1 \cdot 1 \cdot |AC|^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$I_P = I_G + 3 \cdot |AG|^2 \Rightarrow |PG|^2 = \frac{I_P - I_G}{3} = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \quad (*)$$

Sonuç 1: $|PG|^2 \geq 0$ olduğu için $(*)$ den $a_1^2 + b_2^2 + c_3^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 2: (Avusturya Ulusal Matematik Olimpiyatı 1971) G noktası ABC üçgeninin kenarortaylarının kesişme noktası ise

$$3(|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2) = |AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu olimpiyat probleminin çözümü $(*)$ formülünden hemen çıkar. Gerçekten P noktası G ağırlık merkez ile çakışıyorsa yani $P = G$ olursa $|PG| = 0$ ve $3(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = a^2 + b^2 + c^2$ olur.

Problem 3: (Euler formülü) ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi O_1 , yarıçapı r , çevrelçemberinin merkezi O_2 , yarıçapı R ise $|O_1O_2|^2 = R(R - 2r)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Üçgenin A, B, C köşelerine sırası ile a, b, c kütlesi yerleştirirsek içteğet çemberinin O_1 merkezi (aA, bB, cC) sisteminin ağırlık merkezi olur.

$$I_{O_1} = \frac{1}{a+b+c}(ab|AB|^2 + bc|BC|^2 + ac|AC|^2) = \frac{abc^2 + bca^2 + acb^2}{a+b+c} = abc$$

(aA, bB, cC) sisteminin O_2 noktasına göre eylemsizlik momenti, tanıma göre

$$I_{O_2} = a|OA|^2 + b|OB|^2 + c|OC|^2 = (a+b+c)R^2$$

$$I_{O_2} = I_{O_1} + (a+b+c)|O_1O_2|^2 \Rightarrow |O_1O_2|^2 = \frac{I_{O_2} - I_{O_1}}{a+b+c} = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

buluruz ABC üçgeninin $A(ABC)$ alanı için $A(ABC) = \frac{abc}{4R}$, $A(ABC) = \frac{a+b+c}{2}r$ formüllerinden $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ buluruz. ()

Yukarda yerine yazarsak $|O_1O_2|^2 = R^2 - 2R.r = R(R - 2r)$ buluruz.

Sonuç: (Matematik Dünyası) ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R , içteğet çemberinin yarıçapı r ise $R \geq 2r$ olduğunu gösteriniz.

Gerçekten, Euler formülünde $|O_1O_2|^2 \geq 0$ olduğu için $R - 2r \geq 0$ olmaktadır.

Problem 4: (Apollonius çemberi) $k > 1$ sabit bir sayı A ve B düzlem üzerinde iki nokta ise $\frac{|PA|}{|PB|} = k$ şartını sağlayan P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: Eğer P noktası $\frac{|PA|}{|PB|} = k$ bağıntısını sağlarsa, $|PA|^2 - k^2|PB|^2 = 0$ olur ve tersine eğer $(1A, -k^2B)$ sistemini ele alırsak bu sistemin P noktasına göre eylemsizlik momenti $I_P = 1 \cdot |PA|^2 - k^2|PB|^2 = 0$ olur. G noktası $(1A, -k^2B)$ sisteminin ağırlık merkezi olsun (G merkezinin niye $[AB]$ nin dışında olduğunu düşünün!) O zaman $I_G A$ ve B noktaları ile sabit bir sayı olacaktır. Lagrange formülüne göre (Şek. 4)

$$I_P = I_G + (1 - k^2)|PG|^2, \quad \text{ve} \quad I_P = 0, \quad \text{o halde} \quad |PG|^2 = \frac{I_G}{k^2 - 1}$$

Böylece, $\frac{|PA|}{|PB|} = k$ şartını sağlayan P noktaları aynı bir G noktasından $\sqrt{I_G/(k^2 - 1)}$ uzaklıkta noktalar olur, yani aranan geometrik yer bir çemberdir.

Not 1: Lagrange-Jacobi formülünde $I_P = I_G + m|PG|^2$ $m > 0$ olursa, $|PG|^2 \geq 0$ olduğu için $I_P > I_G$ eşitsizliğini buluruz.

Not 2: Eğer $(m_1A_1, \dots, m_nA_n)$ sisteminde $m_1 > 0$ olursa Lagrange formülünden $I_P > m|PG|^2$ eşitsizliğini buluruz. Aşağıda bu iki eşitsizliği Lagrange-Jacobi eşitsizliği diye adlandıracacağız.

Problem 5: P noktası ABC üçgeninin içinde herhangi bir nokta, r_a, r_b, r_c P noktasından kenarlara olan uzaklıklar, R_A, R_B, R_C üçgenin A, B, C köşelerine olan uzaklıklar ise

$$3(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) \geq (R_A \sin \hat{A})^2 + (R_B \sin \hat{B})^2 + (R_C \sin \hat{C})^2$$

olduğunu gösteriniz.

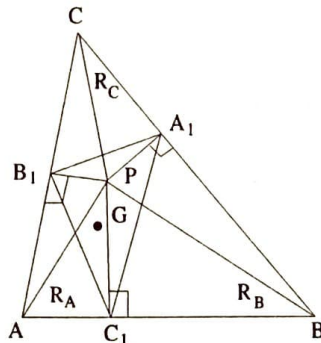
Çözüm: P noktasından BC, AC, AB , kenarlarına çizilen dikmelerin ayakları A_1, B_1, C_1 olsun ve $(1A_1, 1B_1, 1C_1)$ sistemini göz önüne alalım. O zaman $A_1B_1C_1$ üçgeninin ağırlık merkezi kenarortayların kesişme noktası olan G olacaktır. $(1A_1, 1B_1, 1C_1)$ sisteminin P ve G noktalarına göre eylemsizlik momenti

$$I_P = r_a^2 + r_b^2 + r_c^2, \quad I_G = \frac{1}{3}(|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2)$$

olacaktır. A_1CB_1P dörtgeni $\widehat{PA_1C} + \widehat{CB_1P} = 180^\circ$ olduğu için bir kirişler dörtgenidir ve bu dörtgenin çevrel çemberinin çapı $|CP|$ dir. Bu çember A_1B_1C üçgeninin de çevrel çemberi olduğundan $|A_1B_1| = |CP| \sin \hat{C}$, benzer olarak $|B_1C_1| = R_a \sin \hat{A}$, $|C_1A_1| = R_b \sin \hat{B}$, $I_P \geq I_G$ (Lagrange - Jacobi eşitsizliği) den

$$3(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) \geq (R_A \sin \hat{A})^2 + (R_B \sin \hat{B})^2 + (R_C \sin \hat{C})^2$$

bulunur.



Şekil 4

Problem 6: V_a, V_b, V_c sırasıyla ABC üçgeninin kenarortay uzunlukları, R ise çevrel çemberin yarıçapı ise $V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G noktası kenarortayların kesişme noktası, O çevrel çemberin merkezi olsun. $V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$ eşitsizliğini $(\frac{2}{3}V_a)^2 + (\frac{2}{3}V_b)^2 + (\frac{2}{3}V_c)^2 \leq 3 \cdot R^2$ şeklinde yazarsak ve $\frac{2}{3}V_a = |GA|$, $\frac{2}{3}V_b = |GB|$, $\frac{2}{3}V_c = |GC|$ olduğunda hatırlarsak $(1A, 1B, 1C)$ sisteminin ağırlık merkezi G ye göre eylemsizlik momentini

$I_G = |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2$ ve O noktasına göre eylemsizlik momentini $I_O = 3R^2$ olur.

$I_O \geq I_G$ (Lagrange - Jacobi eşitsizliği) eşitsizliği aranan eşitsizliğe denktir.

Problem 7: (Cauchy eşitsizliği) $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ reel sayıları için

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: Genelliği bozmadan $b_i \neq 0$ kabul edebiliriz. Reel doğru üzerinde $A_1 = \frac{a_1}{b_1}, A_2 = \frac{a_2}{b_2}, \dots, A_n = \frac{a_n}{b_n}$ sayılarının (veya geometrik dille dersek A_i noktalarının) ele alalım ve bu noktalara sırasıyla $m_1 = b_1^2, m_2 = b_2^2, \dots, m_n = b_n^2$ yüklerini yerleştirelim. $(m_1A_1, \dots, m_nA_n)$ sisteminin ağırlık merkezi reel doğru üzerinde

$$G = \frac{m_1A_1 + \dots + m_nA_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

sayısı (noktası) olacaktır. Sıfır noktasına göre eylemsizlik momentini $I_0 = m_1A_1^2 + \dots + m_nA_n^2$, dir. $I_0 \geq m|OG|^2$ eşitsizliğine göre

$$m_1A_1^2 + \dots + m_nA_n^2 \geq (m_1 + \dots + m_n) \frac{(m_1A_1 + \dots + m_nA_n)^2}{(m_1 + \dots + m_n)^2} = \frac{m_1A_1 + \dots + m_nA_n}{(m_1 + \dots + m_n)}$$

veya

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 b_1^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 b_n^2 \geq \frac{(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2}{b_1^2 + \dots + b_n^2},$$

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \text{ olur.}$$

Problemler:

Aşağıdaki problemleri önce alıştığınız yolla çözmeye çalışınız. Sonra bu yazımızda kullanılan metodlarla çözünüz. Lagrange - Jacobi formüllerinin ne kadar kolaylıklar sağladığını sizlerin takdirine bırakırız.

Problem 1: ABC üçgeninin kenarortaylarının kesişme noktası G ve çevrel çemberinin merkezi O , yarıçapı R dir. $|GO| = \frac{1}{3}R$ ise ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu gösteriniz.

Problem 2: ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I ise

$$\frac{|IA|^2}{bc} + \frac{|IB|^2}{ac} + \frac{|IC|^2}{ab} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 3: ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O , yarıçapı R , yüksekliklerinin kesişme noktası H ise $|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4: (Stewart formülü) $[AD]$ doğrusu ABC üçgenini $[BC]$ tabanını $|BD| = c_1, |DC| = b_1$ olacak şekilde iki parçaya bölmektedir.

$$|AD|^2 = \frac{b_1c^2 + c_1b^2}{a} - b_1c_1$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 5: $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif sayılar, $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ise

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \dots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6: (A.B.D. Ulusal Olimpiyadı 1977) ABC üçgeninde $p = a + b + c$ ise

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{p^2}{3}$$

olduğunu gösteriniz.

Bu makaleye biçim verilmesinde ve müzakere edilmesinde büyük yardım göstermiş olan sayın Sezai Makas'a derin minnetlerimi sunarım.

KAYNAKÇA

- 1 Tagiyev, M. *Mekanik Kavramların Geometri Problemlerine Uygulanması*. Matematik Dünyası 4. sayı 5 11 - 17 (1994).

KÜBİK DENKLEMLERİN KÖKLERİ

Ahmet Dernek *

I. $x^3 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) kübik denkleminin köklerinin incelenmesi ve bulunmasına ilişkin değişik yöntemler vardır. Bununla ilgili iki yöntem [1] ve [2] de verilmektedir. Burada, bir kesirli rasyonel fonksiyonun grafiğinin dönüm noktalarının bulunması probleminden yararlanarak, verilen kübik denklemin bir kökünün bulunmasına ilişkin değişik bir yöntemi tanıtacağız, [3].

$$f : x \rightarrow \frac{x}{(x+a)(x+b)} \quad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \neq b)$$

rasyonel fonksiyonunun grafiğinin dönüm noktaları, f nin ikinci türevinin sıfır yerleridir. İkinci türev

$$f''(x) = 2 \frac{x^3 - 3abx - ab(a+b)}{(x+a)^3(x+b)^3} \quad (1)$$

dir. Verilen ifadenin basit kesirlere ayrılışı;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(x+a)(x+b)} \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b} \right) \end{aligned}$$

ve bu gösteriliş için ikinci türevi

$$f''(x) = \frac{2}{a-b} \left(\frac{a}{(x+a)^3} - \frac{b}{(x+b)^3} \right) \quad (2)$$

olur. f'' nin sıfır yerleri (1) ve (2) ye göre,

$$x^3 - 3abx - ab(a+b) = 0 \quad (3)$$

ve

$$\frac{(x+a)^3}{(x+b)^3} = \frac{a}{b} \quad (4)$$

denklemlerinin kökleridir. Sonuç olarak (3) ve (4) denklemleri birbirine denktir.

Uygulama. $x^3 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) kübik denklemi (3) biçimine dönüştürülürse, verilen denklemin bir kökü (4) denkleminde bulunur.

Örnek. $x^3 - 96x - 576 = 0$ denkleminin bir kökünü bulalım. $p = -3ab = -96$ ve $q = -ab(a+b) = -576$ dan, $ab = 32$ ve $a+b = 18$ bulunur. Çarpımları 32 ve toplamı 18 olan gerçel sayı çifti, $a = 2$, $b = 16$ (veya $a = 16$, $b = 2$) dir. Buradan, $x^3 - 96x - 576 = 0$ denkleminin bir kökü,

$$\frac{(x+2)^3}{(x+16)^3} = \frac{1}{8}$$

* Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

yani $x = 12$ elde edilir.

II) $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin kökleri x yerine $y - \frac{b}{3}$ yazılırsa, y 'ye göre

$$y^3 + py + q = 0$$

kübik denklemi elde edilir. y ye göre olan kübik denkleminin kökleri y_k ($k = 1, 2, 3$) ise, verilen denklemin x_k kökleri, $x_k = y_k - \frac{b}{3}$ bağıntısından bulunur.

Örnek. $x^3 + 9x^2 + 3x - 117 = 0$ denkleminin bir kökünü bulalım.

$$x = y - \frac{b}{3} = y - 3 \quad \text{için} \quad y^3 - 24y - 72 = 0$$

elde edilir. $p = -3ab = -24$, $q = -ab(a + b) = -72$ den $a = 8$, $b = 1$ (veya $a = 1$, $b = 8$) ve

$$\frac{(y + 8)^3}{(y + 1)^3} = 8 \Rightarrow y = 6$$

kökü bulunur. Verilen denklemin bir kökü

$$x = y - 3 = 3 \quad \text{tür.}$$

KAYNAKÇA

- [1] Y.Avcı ve N.Ergun, Polinom kökleri için bir algoritma, Matematik Dünyası, 6. sayı 1, 19-21 (1996).
- [2] N.Çalışkan, Cebirsel Denklemlerin Kökleri, Matematik Dünyası, 4. sayı 3, 9-13 (1994).
- [3] G.Tischel und H.Uchtmann, Analysis, Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main (1973).

YARIŞMA PROBLEMİ Y.119'UN YANITINDA DÜZELTME

Atasagun Baykal

Y.119. Eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olan bir elipsin herhangi bir noktasından çizilen normalin elips içinde kalan kısmının uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

Şubat 1996 sayımızda verdiğimiz yanıtta bir hesap hatası sonucunda en küçük ve en büyük değerlerin eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olduğu çıkarılmıştı. Problem köşemizin en faal çözücülerinden Sayın Atasagun Baykal hatamızı belirleyip doğru yanıtı bize gönderdi. Kendisini kutlar ve teşekkür ederiz.

Y.119'un çözümünde elipsin büyük eksen uzunluğu $2b$, küçük ekseninki ise $2a$ olarak alınmış. Elipsin üzerindeki bir noktanın apsisi x_0 ise $x_0^2 = t$ denilerek, aranan uzunluk için

$d^2 = f(t) = \frac{4b^2(Gt+a^4)^3}{[(a^2+b^2)Gt+a^6]^2}$ fonksiyonu elde edilmiş.

Bu fonksiyonun türevi alınırken yanlışlık yapılmış.

$f'(t) = \frac{4b^2G(Gt+a^4)^2[(a^2+b^2)Gt+a^6-2a^4b^2]}{[(a^2+b^2)Gt+a^6]^3}$ olacaktır.

Böyle olunca da problemin çözümü bağlamında söylenenlerin, artık şöyle olması gerekirdi:

Ekstrem noktaları bulacağımıza göre $f'(t) = 0$ olmalı. $(a^2 + b^2)Gt + a^6 - 2a^4b^2 = 0$ veya $Gt + a^4 = 0$ dan $t_1 = \frac{a^4(2b^2-a^2)}{(a^2+b^2)G}$, $t_2 = -\frac{a^4}{G}$ $t = x_0^2$ olduğuna göre negatif olan t_2 sorumuzu yanıtlamaz. O halde $G = b^2 - a^2$ olduğunu göz önüne alırsak $t_1 = \frac{a^4(2b^2-a^2)}{b^4-a^4}$ olan noktada fonksiyonun minimumu vardır. Çünkü türevdeki birinci çarpan $(Gt + a^4)^2 > 0$, ikinci çarpan $(a^2 + b^2)Gt + a^6 - 2a^4b^2$ ise $t < t_1$ iken negatif ve $t > t_1$ iken pozitif olduğu için $f'(t)$, $t = t_1$ olan noktada negatiften pozite geçiyor. Ne var ki $|x_0| \leq a$ olduğundan

$$x_1^2 = t_1 = \frac{a^4(2b^2 - a^2)}{b^4 - a^4} \leq a^2 \quad \text{olmalıdır.}$$

$a^4(2b^2 - a^2) \leq a^2(b^4 - a^4)$, yani $b \geq \sqrt{2} \cdot a$ istenen aralıkta olmalıdır.

Demek ancak $b \geq \sqrt{2}a$ iken türev sıfır olabiliyor ve $x_1 = \sqrt{t_1}$ noktasında fonksiyon mini-

mum oluyor.

t_1 değerini kirişin uzunluğunu gösteren $d^2 = f(t)$ ifadesinde yerine koyarsak

$$\begin{aligned} d_{t_1}^2 &= \frac{4b^2 \left[(b^2 - a^2) \frac{(2b^2 - a^2)a^4}{b^4 - a^4} + a^4 \right]^3}{\left[(b^4 - a^4) \frac{(2b^2 - a^2)a^4}{b^4 - a^4} + a^6 \right]^2} \\ &= \frac{4b^2 \left[\frac{(2b^2 - a^2)a^4}{b^2 + a^2} + a^4 \right]^3}{\left[(2b^2 - a^2)a^4 + a^6 \right]^2} \\ &= \frac{4b^2 (2a^4b^2 - a^6 + a^4b^2 + a^6)^3}{(2a^4b^2 - a^6 + a^6)^2} = \frac{27a^4b^4}{(b^2 + a^2)^3} \end{aligned}$$

Bu d_{t_1} uzunluğu $2a$ dan küçüktür. $b > \sqrt{2}a$ iken $d_{b_1} < 2a$ olduğu doğrudan da kolayca gösterilebilir $b = \sqrt{2}a$ ise $d_{t_1} = 2a$ olur. Bu durumda $x_1 = a$ olmuştur.

x_1 noktasının sağında ve solunda $d^2 =$

$f(t)$ fonksiyonu yükselen olduğu için $0 \leq x \leq a$ aralığının ucundaki değerleri hesaplırsak ara değerler daha düşük olacağı için göz önüne alınmalarına gerek yoktur. Böyle yapınca $d_0 = 2b, d_a = 2a$ buluruz. $2b > 2a$ olduğuna göre

$$d_{max} = 2b, d_{min} = \frac{\sqrt{27}a^2b^2}{(b^2 + a^2)^{3/2}}.$$

$a < b < \sqrt{2}a$ ise artık $f'(t)$ 'yi sıfır yapan bir değer yoktur. Demek ki $f(t)$, ya azalmakta, yada artmaktadır. O halde $0 \leq x_0 \leq a$ ara değerler arada kalacağından göz önüne alınmalarına gerek yoktur. Hesap sonucu yukarıdaki gibi $d_0 = 2b, d_a = 2a$ bulunur. O halde $d_{max} = 2b, d_{min} = 2a$.

Görülüyorki her iki halde de $d_{max} = 2b$ iken, $b > \sqrt{2}a$ ise $d_{min} = \frac{\sqrt{27}a^2b^2}{(b^2 + a^2)^{3/2}},$

$$a < b < \sqrt{2}a \text{ ise } d_{min} = 2a$$

oluyor. Eğer $b = \sqrt{2}a$ ise iki durum çıkıyor, $d_{min} = 2a$ çıkıyor.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

A146. Bir XY doğrusu köşeleri aynı olan üç dik açının kenarlarını sırasıyla A, B, C, D, E, F noktalarında kesiyorsa

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz. (Cemil Uğurlu, 1946).

A147. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin $[BD]$ köşegenine A ve C den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F ise $|BE| = |DF|$ olduğunu ispatlayınız.

A148. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerine DBC ve EBC eşkenar üçgenleri kuruyor. $|AD|^2 + |AE|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ olduğunu ispatlayınız. (a, b, c ABC üçgeninin kenar uzunluklarıdır.)

A149. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ eğrisi bir elips ise, içindeki bölgenin alanını A, B, C cinsinden hesaplayınız. (Turgay Kaptanoğlu)

A150. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsiyle $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ hiperbolünün, eğer $A^2 \leq a^2$ ve $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$

ise (yani eşodaklı iseler) dik olarak kesiştiklerini gösterin. (Turgay Kaptanoğlu)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y146. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı çap alınarak üçgenin dışına bir yarım çember çiziliyor. Bu çember yayının orta noktası D olmak üzere D den öyle bir doğru geçiriniz ki, yarım çember ve üçgenden oluşan konveks bölge alanca eşit iki bölgeye ayrılınsın.

Y147. Dar açılı bir ABC üçgeninde yükseklik ayakları D, E, F olmak üzere DEF üçgeninin çevresi v, ABC üçgeninin çevresi $2u$ ise $u \geq v$ olduğunu ispatlayınız.

Y148. Bir çember üzerinde ardışık A, B, C, D noktaları alınarak ADC ve DCB açıların açılı ortayları çiziliyor. Bu açıortayların kesiştiği K noktasından AB na çizilen paralel, doğru $[AD]$ ve $[BC]$ kenarını sırasıyla E ve F noktalarında kesiyor. $|EF| = |ED| + |FC|$ olduğunu ispatlayınız.

Y149. $\sqrt{2}(xy + yz) \leq x^2 + y^2 + z^2$ eşitsizliğinin her x, y, z gerçel sayısı için doğru olduğunu gösteriniz.

Y150. Her n pozitif tam sayısı için $a_n = x^n + x^{-n}$ bir tam sayı ise, x reel sayısı hangi değerleri alabilir?

ÇÖZÜMLER

A136. Bir torbada başlangıçta a tanesi kırmızı, b tanesi beyaz ve c tanesi de siyah olmak üzere toplam 20 top bulunmaktadır.

(i) Beyaz topların sayısı iki katına çıkarıldıktan sonra torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığının, başlangıçtaki torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığından $\frac{1}{25}$ daha az olduğu ve

(ii) torbadaki bütün kırmızı toplar çıkartılıp geri kalanlar arasında rastgele bir top çekildiğinde bu topun beyaz olması olasılığının, aynı çekilişin başlangıçtaki torbadan yapıldığı durumdakinden $\frac{1}{16}$ daha fazla olduğu bilinmektedir. a, b ve c yi bulunuz. (I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından)

Çözüm. Verilen koşullardan $\frac{a}{20+b} = \frac{a}{20} - \frac{1}{25}$ ve $\frac{b}{20-a} = \frac{b}{20} + \frac{1}{16}$ bulunur. Sadeleştirirsek $(5a - 4)b = 80$ ve $(4b + 5)a = 100$ elde ederiz. a ve b pozitif tam sayılar olduğundan çarpanları deneyerek $a = 4, b = 5$ ve dolayısıyla $c = 11$ çıkar.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Cemal Özboğa, Naim Uygun, Recep Ülgen.)

A137. Yalnızca 1,6 ve 9 rakamları kullanılarak yazılan pozitif tam sayıları

$$1, 6, 9, 11, 16, \dots$$

diye küçükten büyüğe doğru dizelim.

a) 1996 nın bu dizinin kaçınıcı terimi olduğunu bulunuz.

b) Bu dizinin 1996 ncı terimini bulunuz.

(I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından)

Çözüm. Dizide bir basamaklı terimler 1,6 ve 9 iki basamaklılar 11,16,...,99 dur. Üç basamaklılar iki basamaklıların başına sırayla 1,6 ve 9 eklenerek bulunur. Buradan 1 basamaklı 3,2 basamaklı $3^2 = 9, \dots, n$ basamaklı 3^n terim olduğu görülür. 1999 sayısı 4 basamaklı terimlerden 1 ile başlayanların sonuncusudur; O halde $3 + 9 + 27 + 27 = 66$ 'ncı terimdir. O halde 1996,65'inci terim olur. Dizide 6 veya daha az basamaklı $3 + 9 + 27 + \dots + 3^6 =$

1092 terim, 7 veya daha az basamaklı $1092 + 3^7 = 3297$ terim olduğundan 1996'ncı terim 7 basamaklıdır. $1996 - 1092 = 904, 3^6 = 729, 2 \cdot 3^6 = 1458$ olduğundan aradığımız terimin 7'inci basamağı 6'dır. $904 - 729 = 175, 3^5 = 243$ olduğundan 6'ncı basamak 1 dir; $34 = 81, 2 \cdot 3^4 = 162$ olduğundan 5'inci basamak 9 dur; $175 - 162 = 13, 3^3 = 27$, den 4'üncü basamak 1; $3^2 = 9, 2 \cdot 3^2 = 18$ den 3'üncü basamak 6, $13 - 9 = 4$ ve $2 \cdot 3$ den 2'inci basamak 6, $4 - 3 = 1$ den son basamak bulunur. Yani 1996'ncı terim 619166 dir.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Cemal Özboğa.)

A138. $ABCDE$ düzgün beşgeninin içindeki bir F noktası için $m(\widehat{FDC}) = 66^\circ$, $m(\widehat{FBC}) = 60^\circ$ ise AFE açısı kaç derecedir?

Çözüm. $ABCDE$ düzgün beşgeni çizilip içinde $m(\widehat{FDC}) = 66^\circ$ ve $m(\widehat{FBC}) = 60^\circ$ alındığında, BFD üçgeninde sinüs teoreminden, $|BD| = 2|BF|\sin 54^\circ$ bulunur. $|BD| = 2|BC|\sin 54^\circ$ olduğundan $|BF| = |BC|$ elde edilir. $|BF| = |BC|$ den $m(\widehat{BFC}) = m(\widehat{BCF}) = 60^\circ$. Buradan $m(\widehat{FCD}) = 48^\circ$ ve $m(\widehat{CFD}) = 66^\circ, m(\widehat{AFE}) = 84^\circ$ bulunur.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Kocaeli Körfe Fen Lisesi II-C Sınıfı, Cemal Özboğa.)

A139. B açısı dik açı olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I , $[AI]$ ve $[CI]$ nın $[BC]$ ve $[AB]$ nı kestiği noktalar E ve D , E ve D den iç teğet çembere çizilen teğetlerin hipotenüsü kestiği noktalar K ve L ise $\tan(\widehat{KBL})$ kaçtır?

Çözüm. Probleme uygun şekil çizildiğinde, ABE üçgeni ile AKE üçgeninin ve DBC üçgeni ile DLC üçgeninin eş oldukları görülür. Buradan $m(\widehat{KLB}) = 45^\circ$ ve $\tan(\widehat{KBL}) = 1$ elde edilir.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Cemal Özboğa.)

A140. $ABCD$ konveks bir dörtgen, köşegenlerin kesişim noktası E , $\widehat{ADB} \cong \widehat{ACD}$ $\widehat{ADC} \cong \widehat{DAC}$ ve $\widehat{DBC} \cong \widehat{DCB}$ ise $\frac{EC}{EB} - \frac{EA}{ED}$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm. $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACD}) = \alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \beta$ ise $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = \alpha + \beta$ olur. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) = 180^\circ - (\alpha + 2\beta)\alpha = m(\widehat{ACD}) = 180^\circ - 2m(\widehat{DAC}) = 2\alpha + 4\beta - 180^\circ$ ve $\alpha + 4\beta = 180^\circ, m(\widehat{DAC}) = 2\beta, m(\widehat{DBC}) = \alpha + \beta = 180^\circ - 3\beta$ bulunur.

Köşegenlerin kesiştiği nokta da E olmak üzere, EBC ve EAD üçgenlerinde sinüs teoreminden

$$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = 4 \cos^2 \beta - 1$$

$$\frac{|EA|}{|ED|} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = 2 \cos 2\beta = 4 \cos^2 \beta - 2,$$

$$\text{ve } \frac{|EC|}{|EB|} - \frac{|EA|}{|ED|} = 1 \text{ elde edilir.}$$

(Çözenler: Atasağın Baykal, Recep Ülgen.)

Y136. $x^2 - 4x - 2 = 0$ denkleminin köklerinin

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) = 2 + x.$$

denklemini de sağladığını göstererek ikinci denklemin tüm köklerini bulunuz.

Çözüm. $x^2 - 4x - 2 = 0$ ise $x^2 - 3x - 2 = x$ olur. İkinci denklemde yerine koyunca, yine $x^2 - 3x = 2 + x$ ten

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) = x^2 - 3x = x + 2$$

bulunur. Bu ise $p(x) = (x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - x - 2$ polinomunun $x^2 - 4x - 2$ ile bölündüğünü söyler. Bölmeden sonra

$$p(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^2 - 2x - 4)$$

ve kökler $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{5}$ çıkar

(Çözenler: Murat Aygen, Atasağın Baykal, Kocaeli Körfez Fen Lisesi II-C sınıfı, Naim Uygun.)

Y137. a, b, c gerçel sayıları için $8a + 4b + 2c = 0$ ise $ax^3 + bx^2 + c = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $p(x) = ax^3 + bx^2 + c$ için $p(0) = c$, $p(2) = 8a + 4b + c$ dir. $8a + 4b + 2c = 0$ ise $p(0) + p(2) = 0$ dır. Buradan $p(0) = p(2) = 0$ veya $p(0)$ ve $p(2)$ nin sıfırdan farklı ve ters işaretli olduğu çıkar. $p(x)$ sürekli olduğundan ikinci durumda $(0, 2)$ aralığında en az bir kök vardır.

(Çözenler: Murat Aygen, Atasağın Baykal, Cemal Özboğa, Recep Ülgen.)

Y138. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{APB}) = 150^\circ$, $|AP| = 2\sqrt{3}$ cm ve $|BP| = 2$ cm olacak biçimde bir P noktası alınıyor $|PC|$ yi bulunuz. (I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından)

Çözüm. ABC eşkenar üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerine dışa doğru APB üçgenine eş

AQC üçgenini kuralım. $m(\widehat{PAQ}) = 60^\circ$ ve $|AP| = |AQ|$ olduğundan APQ üçgeni de (bir kenar uzunluğu $2\sqrt{3}$ olan) eşkenar üçgen olur. $m\widehat{PQC} = 90^\circ$ elde edilir. (PQC) dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $|PC| = 4$ elde edilir.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Kocaeli Körfez Fen Lisesi II-C sınıfı, Cemal Özboğa, Naim Uygun, Recep Ülgen.)

Y139. Herhangi bir ABC üçgeninin iç bölgesinde, $\widehat{DAB} \cong \widehat{DBC} \cong \widehat{DCA}$ olacak biçimde birtek D noktasının bulunduğunu ispatlayınız. $\cot(\widehat{DAB})$ nin bu üçgenin alanı ve kenarları cinsinden değerini bulunuz.

Çözüm. $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCA}) = \alpha$ olsun. (ABD) çemberini gözönüne alalım. $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DAB})$ olduğundan BC doğrusu bu çembere teğet olur. Dolayısıyla, (ABD) , (BDC) ve (CDA) çemberleri aynı noktadan geçer.

AB doğrusuna A noktasında teğet olup C den geçen, AC doğrusuna C noktasında teğet olup B den geçen ve BC doğrusuna teğet olup A dan geçen üç çember aynı bir noktadan geçer. Bu nokta tek olup üçgenin iç bölgesinde bulunur. Bu noktanın çizimle elde edilmesi: $AE \parallel BC$ ve CE doğrusu (ABC) çemberine teğet ise $(ACE) \cong (ADC)$ olur. (CE) çemberi ile BE nin kesiştiği nokta D noktasıdır. $\widehat{ACE} = \widehat{ABC}$, $\widehat{EAC} = \widehat{BCA}$ ve $\widehat{CEA} = \widehat{CAB} = \widehat{CDA}$ olduğundan D noktası (ACE) çemberinin üzerindedir. Tanımdan $\widehat{DBC} = \widehat{DCA} = \widehat{DEA}$ olup, B, D, E noktaları doğrusaldır.

A ve E nin BC üzerindeki izdüşümü sırasıyla H ve F olsun.

$$\begin{aligned} \cot \alpha &= \frac{|BF|}{|EF|} = \frac{|BH|}{|EF|} + \frac{|HC|}{|EF|} + \frac{|CF|}{|EF|} \\ &= \cot B + \cot C + \cot A \end{aligned}$$

bulunur. Sinüs ve cosinüs teoremlerinden

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4A(ABC)}$$

bulunur.

(Çözenler: Murat Aygen, Atasağın Baykal.)

Y140. Bir ABC üçgeninin $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarları üzerinde sırasıyla $|DB| = 2|DA|$, $|EC| = 2|EB|$, $|FA| = 2|FC|$ eşitliklerini sağlayan D, E, F noktaları alınıyor. ADF , BED , CEF üçgenlerinin çevrel çemberleri eş

ise bu üçgenlerin iç teğet çemberlerinin de eş olacağını ispatlayınız.

Çözüm. ABC üçgeninin AB, BC, CE kenarları üzerinde verilere uygun olarak D, E, F noktalarını alalım. ADF, BED, CEF üçgenlerinin alanları ve $(ADF), (BED), (CEF)$ çemberlerinin yarıçapları eşit olduğundan DEF ile CAB benzer üçgenler olup alanları oranı $\frac{1}{3}$ benzerlik oranı $\frac{1}{\sqrt{3}}$ tür. Bu nedenle $a =$

$\sqrt{3}|DF|, b = \sqrt{3}|DE|, c = \sqrt{3}|EF|$ dir. ADF ve ABC üçgenlerinde A için cosinüs teoreminden $a^2 = 2b^2 - c^2$ bulunur. Benzer biçimde, $b^2 = 2c^2 - a^2, c^2 = 2a^2 - b^2$ elde edilir. Bu üç eşitlikten $a = b = c$ bulunur. Üçgenlerin eşliğinden iç yarıçaplarının eşliği elde edilir.

(Çözenler: Murat Aygen, Atasağun Baykal, Cemal Özboğa.)

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Bu sayı ile altıncı cildimizi tamamlamış oluyoruz. Bu arada Türk Matematik Derneği ile birlikte 7 ayı bulan bu gecikmeyi nasıl telafi edebileceğimizi düşündük. Kaldığımız yerden devam etmek gecikmeyi 1997 ve daha sonrasına taşımak anlamına geliyordu, bu ise abone işlerinin aksamasına, okurlarımızın haklı olarak şikayetlerine neden olacaktı. Hepimizin arzusu ise *Matematik Dünyası*'nın zamanında ve düzenli olarak çıkabilmesi. Kısa bir soluk alıp yeniden başlamak bu durumda en anlamlı çözüm olarak görünüyor.

Matematik Dünyası'na bu sayıdan sonra kısa olacağını umduğumuz bir ara veriyoruz. Amacımız, bir süre sonra daha iyi bir şekilde okurlarımıza kavuşmak. Bu süreyi kısa tutarak 1998 Ocak sayısı ile tekrar yayına başlayabilmek için çalışmalarımız sürüyor.

Okurlarımızdan ricamız bizi anlayışla karşılamaları ve şimdiden abone ücreti yatırmamaları. *Matematik Dünyası*'nın tekrar çıkışını abonelerimize bildireceğiz, basından duyurmaya çalışacağız. Bu arada yazışmalarınız için ODTÜ Matematik Bölümü adresimizle telefon ve fax numaralarımız hala geçerli. Eski sayılarımızı buradan temin edebilirsiniz.

En kısa zamanda tekrar buluşmak üzere.

DİZİN (6. CİLT)

Yazar	Yazı	Sayı	Sayfa
Alkan, E.	Gauss Toplamları Üzerine	4	21-25
Alpay, Ş.	Paralellik Aksiyomu Üzerine	1	2-6
Alpay, Ş.	Pisagor Üçlülere	3	21-23
Alpay, Ş.	Yunanistan'da Üniversite Giriş Sınavları	2	13-14
Atabey, S.	Ekstremum Değerleri	3	16-20
Atabey, S.	Vektörlere ait İki Teoremin Geometrik Uygulaması	2	15-17
Atabey, S.	Kelebek Sorusu ve Karmaşık Sayılar	4	27-29
Avcı, Y., Ergun N.	Alkan'ın Eşitsizliğine Ek	1	9
Avcı, Y., Ergun, N.	Polinom Kökleri için bir Algoritma	1	19-21
Baki, A.	Okul Matematiğinde Ne Öğretim, Nasıl Öğretelim	3	11-15
Baykal, A.	Yarışma Problemi Y119'un Yanıtında Düzeltme	5	28-29
Can, B.	Boncuklarla Hesap Yapmak	4	14-18
Çalışkan, N.	e'nin Hikayesi	5	10-12
Demirköz B.	"n" Noktada Uzaklık Toplamları ve Eğriler Ailesi	3	7-10
Dernek, A.	Kübik Denklemlerin Kökleri	5	26-27
Erdil, A.	Kuadratik Rezidüler	4	25-26
Ergun, N.	Grafikleri Tasarlanamıyan Sürekli Fonksiyonlar	3	25-28
Erkip, A.	Emre Alkan'ın Eşitsizliği Üzerine	1	10
Erkip, A.	3. Ulusal Matematik Olimpiyadı	1	24
Erkip, A.	Uluslararası Matematik Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı	2	23
Hacıyev, İ.	Dirichlet İlkesi	2	1-2
Hallet, H.D.	Neden Birçok Öğrenci Calculus Dersinde Zorlanıyor?	2	18-20
İskenderov, N.	Bir Polinomun Gerçek Olmayan Köklerinin Varlığı İçin Yeterli Şart	3	5-7
Kaptanoğlu, H.T.	Gama Fonksiyonu	2	6-13
Kaptanoğlu, H.T.	Dışbükey Fonksiyonlar	1	11-18
Kaptanoğlu, H.T.	Koninin Kesitleri (I)	4	1-7
Kaptanoğlu, H.T.	Koninin Kesitleri (II)	5	1-9
Karatosun, H.	$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ Denkleminin Özel Durumlarda Çözümlerinin Bulunuşu	5	18-20
Kayadibi, H.	Pratik ve İlginç Aritmetik İşlemler	1	21-23
Koçak, İ.R.	Harflerle Sayı Yazılışı	3	4-5,23
	ODTÜ Matematik Topluluğu	2	23
Rigby, J.	Yine Geometrik Eşitsizlikler Üzerine	1	7-9
Sertöz, S.	Eşekliğin Alemi Yok!	5	13-17
Silahtar, O.	Eşçevre Problemi	2	20-21
Şahin, G.	Antalya Matematik Olimpiyadı	2	21
Şirinoğlu, N., Ertuğ C.A.	Tamsayılar Kümesinde Denklemler	4	8-13
Şenkon, H.	Prof.Dr.Orhan Ş. İçen, Hayatı ve Eserleri	3	1-3
Tagiyev, M.H.	Eylemsizlik Momenti Kavramının Geometri ve Analiz Problemlerine Uygulanması	5	20-26
Yağcı B, Altındaş H.	Hangi Gün Doğmuşunuz?	4	19-21
Yücesan, R.	Matematikte Tamamlama	2	2-5
	Problem Seminerleri	1	25-28
	Problem Seminerleri	2	24-28

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Prof.Dr. Albert Erkip, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 30 Ağustos 1997 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
 - * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
 - * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
 - * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
 - * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
 - * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
 - * Matematik dünyasından güncel haberler.
- Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 350.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1996 yılı abone ücreti 400.000.-TL., tane satış fiyatı ise 100.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, posta çeki aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası**, (Matematik Bölümü, ODTÜ 06531 Ankara) adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

