EKİM 2000 / CİLT: 9 / SAYI: 4

ISSN - 1300-624X

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Dünya Matematik Yılı olan 2000 yılının 10. ayına girerken dergimizin 4. sayısıyla sizlerle yeniden buluşmaktan mutluyuz. Üçüncü sayımızda duyurduğumuz gibi, V. Antalya Matematik Olimpiyadı 2. Aşama Sınavının sorularının yanıtlarını bu sayımızda yayınlıyoruz.

Bu sayımızda, Sinan Sertöz 'ün Antalya Cebir Günleri 'nin ardından yazdığı ve "Bilim ve Teknik" dergisinde yayınlanacak olan yazısını, Sevda Sezer 'in "Doğrusal Kodlar", Metehan Aydın 'ın "Euclides 'in 'Elementler' 'i" ve A. Nabi Duman 'in "Eşitsizlikler Yardımıyla Denklem Çözümü" başlıklı yazılarını zevkle okuyacağınızı umuyoruz.

Dergimizin değişmez parçası "Problemler ve Çözümleri" kısmında yine ilginç alıştırma ve yarışma problemleri bulacaksınız. Yarışma problemlerine çözüm gönderenlerin sayısı artmaya devam ediyor; ancak 2001 yılında **Matematik Dünyası** 'nın yayınını üstlenecek bir ekip henüz ortaya çıkmadı.

2000 Dünya Matematik Yılı 'nın son sayısında yeniden buluşmak ve o zamana kadar **Matematik Dünyası** 'nı 2001 yılında yayınlamayı üstlenecek bir ekibin ortaya çıkması dileğiyle tümünüze Antalya 'dan selam ve sevgiler...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : H. İbrahim Karakaş, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Fikri Gökdal

DİZGİ : Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2000) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 3.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.500.0

BEŞİNCİ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI İKİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev-Fikri Gökdal

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadının ikinci seçme sınavı 19 Mayıs 2000 Cuma günü saat 10:00 ' da Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi A anfisinde yapıldı.

Bilindiği gibi, Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadının Birinci Seçme Sınavı 8 Nisan 2000 Cumartesi günü yapılmış ve olimpiyada ülkemizin çeşitli yörelerinden binin üzerinde lise öğrencisi katılmıştı. Lise I ve Lise II-III gruplarına 20 'şer soruluk testler olarak uygulanan birinci seçme sınavı (bu sınavın soruları ve cevap anahtarları bundan önceki sayımız olan Cilt 9, Sayı 2 'de verilmişti; çözümleri de Cilt 9, Sayı 3 'te verilmişti) değerlendirildi ve Lise I grubundan 16, Lise II-III grubundan 19 öğrenci ikinci seçme sınavına çağrıldı.

İkinci sınavda, her iki gruba 5 'er sorudan oluşan klasik tip sınavlar verildi ve sınav süresi olarak 3 saat süre tanındı.

Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavının sorularını ve çözümlerini aşağıda sunuyoruz. Bazı sorular için jürinin önerdiği çözümlerle birlikte yarışmacıların değişik çözümlerini de sunuyoruz.

Her zaman olduğu gibi, sevgili okurlarımızın burada sunulan çözümlere bakmadan önce kendi çözümlerini üretmelerini salık veriyoruz. Kolay gelsin.

Lise I Grubu Soru ve Çözümleri:

Soru 1. p ve q tek asal sayılar ve p ile q arasında başka asal sayı yoksa, $p+q$ sayısının, her biri 1 'den büyük en az üç tane doğal sayının çarpımı olarak yazılabileceğini gösteriniz. (Çarpanların farklı olmaları gerekmez.)

Çözüm. p ve q tek olduğundan, $p+q$ çifttir ve $\frac{p+q}{2}$ sayısı p ile q arasında bir sayıdır. p ile q arasında başka asal sayı bulunmadığından, $\frac{p+q}{2}$ asal değildir; yani, 1 'den büyük iki tane doğal sayının çarpımıdır. Dolayısıyla, $p+q$ sayısı, 1 'den büyük üç tane doğal sayının çarpımıdır.

Soru 2. Sıfırdan farklı x, y, z sayıları

$$x^2 - y^2 = yz \quad \text{ve} \quad y^2 - z^2 = zx$$

eşitliklerini sağlıyor. $x^2 - z^2 = xy$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen iki denklem taraf tarafa toplanınca

$$x^2 - z^2 = (x+y)z$$

elde edilir. Bu nedenle, iddianın ispatı için

$$(x+y)z = xy$$

olduğunu göstermek yeter. Eğer birinci denklem x ile ikinci denklem $(-y)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$x^3 - xy^2 - y^3 - yz^2 = 0,$$

$$z^2 = \frac{y^3 + xy^2 - x^3}{y}$$

elde edilir. Diğer yandan, birinci denklemden

$$z = \frac{x^2 - y^2}{y},$$

$$z^2 = \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{y^2}$$

elde edilir. z^2 için elde edilen iki ifade eşitlenirse,

$$y^4 + xy^3 - x^3y = x^4 - 2x^2y^2 + y^4,$$

$$y^3 - x^2y = x^3 - 2xy^2,$$

$$x^2y - y^3 + x^3 - xy^2 = xy^2,$$

$$\frac{(x^2-y^2)y}{y} + \frac{x(x^2-y^2)}{y} = xy,$$

$$yz + xz = xy \ , \quad (x+y)z = xy$$

elde edilir. Bu, istenileni ispatlar.

Soru 3. Her biri 100 'den küçük olan 10 farklı pozitif tamsayının oluşturduğu her kümenin boş olmayan ve ayrık öyle iki altkümesi vardır ki, bu altkümelerden birindeki sayıların toplamı diğerindeki sayıların toplamına eşittir; ispat ediniz.

Çözüm. Her biri 100 'den küçük olan 10 farklı pozitif tamsayının oluşturduğu bir küme K olsun. K 'nın boş olmayan altkümelerinin sayısı $2^{10}-1 = 1023$ 'tür. Ayrıca, K 'nın boş olmayan her bir altkümesi A içindeki sayıların toplamı en az 1, en çok

$$91 + 92 + \ldots + 99 + 100 = 955\ ,$$

$$90 + 91 + \ldots + 98 + 99 = 945$$

'tir. O halde, K 'nın boş olmayan en az iki farklı altkümesi A ve B için A 'daki sayıların toplamı ile B 'deki sayıların toplamı birbirine eşittir. Şimdi, $S = A \setminus (A \cap B)$ ve $T = B \setminus (A \cap B)$ tanımlayalım. Bu takdirde, S kümesi boş olamaz, çünkü, aksi halde, $A \subseteq B$ ve dolayısıyla $A = B$ olurdu. Benzer şekilde, T de boş olamaz. Tanımdan dolayı S ve T ayrık olup, S 'deki sayıların toplamı, T 'deki sayıların toplamına eşittir.

Soru 4. Düzlem üzerinde, hepsi bir doğru üzerinde bulunmayan 2000 tane nokta işaretlenmiş ve bu noktaların herbirinin yanına o noktanın *yükü* diyeceğimiz bir reel sayı yazılmıştır. Üzerinde en az iki işaretlenmiş nokta bulunduran her doğrunun tüm işaretlenmiş noktalarının yükleri toplamı sıfır olduğuna göre, her noktanın yükünün sıfır olduğunu kanıtlayınız.

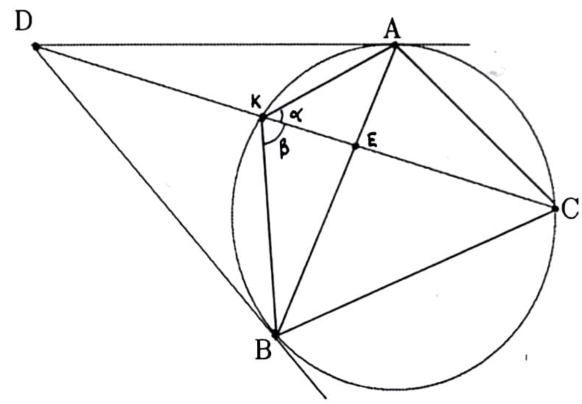
Çözüm. Bir işaretlenmiş nokta n ile, n 'nin yükü y_n ile; n 'den geçen ve üzerinde en az iki işaretlenmiş nokta bulunduran doğruların sayısı da s_n ile gösterilsin. Tüm işaretlenmiş noktalar bir doğru üzerinde bulunmadığından, $s_n > 1$ olacaktır. n 'den geçen doğrular üzerinde bulunan tüm işaretlenmiş noktaların yükleri toplamına y diyelim. s_n tane doğrunun her biri üzerindeki işaretlenmiş noktaların yükleri toplamı sıfır olduğundan, s_n tane eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$y + (s_n - 1)y_n = 0 \qquad (*)$$

elde ederiz. $s_n - 1 > 0$ ve y , y_n 'lerin toplamı olduğundan, $y = 0$ olmak zorundadır ($y > 0$ veya $y < 0$ varsayımı çelişki yaratır; çünkü, y ile y_n 'lerin işaretleri farklı olmalıdır; bu ise olanaksızdır). Böylece, $S = 0$ olmalıdır. $(*)$ 'dan $y_n = 0$ olduğu görülür.

Soru 5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberine A ve B noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası $D; DC$ ile $[AB]$ 'nin kesişim noktası da E ile gösteriliyor. $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}$ olduğunu ispat ediniz.

Çözüm.



DC doğrusu ile (ABC) çemberinin kesişim noktası K olsun.

$$\overset{\triangle}{DKA} \sim \overset{\triangle}{DAC} \text{ ve } \overset{\triangle}{DKB} \sim \overset{\triangle}{DBC}$$

$$\Longrightarrow \frac{|KA|}{|AC|} = \frac{|DA|}{|DC|} \text{ ve } \frac{|KB|}{|BC|} = \frac{|DB|}{|DC|}\ .$$

$|DA| = |DB| \Longrightarrow$

$$\frac{|KA|}{|AC|} = \frac{|KB|}{|BC|}\ ,\ \frac{|KA|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|BC|} \qquad (1)$$

$$\frac{|KA|.|KE|\sin\alpha}{|KB|.|KE|\sin\beta} = \frac{|AE|}{|EB|} \qquad (2)$$

$$\frac{|AC|}{\sin\alpha} = 2R = \frac{|BC|}{\sin\beta} \Longrightarrow \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \Longrightarrow \frac{|KA|}{|KB|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EB|} \qquad (4)$$

(4) 'te (1) yazılarak:

$$\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EB|}$$

$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|AE|}{|EB|}$$

bulunur.

Lise II-III Grubu Soru ve Çözümleri:

Soru 1. Bir n doğal sayısının kendisinden küçük tüm doğal sayılara bölünmesiyle ortaya çıkan farklı kalanların toplamı $K(n)$ ile gösterilsin (Örnek: $K(9)=1+2+3+4=10$). $K(n) = n$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

Çözüm. Bu özelliğe sahip olan tek sayı yoktur. Gerçekten, $n = 2k-1, k \geq 1$, ise, bu takdirde, n yi $2k-2, 2k-1, \ldots, k+1, k$ ile bölünce, sırasıyla, $1, 2, 3, \ldots, k-1$ kalanları elde edilir. n yi k dan küçük olan sayılarla bölünce de bu kalanlardan biri elde edilir. Dolayısıyla,

$$K(2k-1) = 2k-1 \Rightarrow$$

$$1+2+3+\cdots+(k-1) = 2k-1$$

$$\Rightarrow \frac{(k-1)k}{2} = 2k-1$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 2 = 0$$

olduğu görülür. $k^2 - 5k + 2$ 'nin hiç tamsayı çözümü bulunmadığından, n tek olunca $K(n) \neq n$ 'dir.

Şimdi, $K(n) = n$ olan çift sayıları araştıralım. $n = 2k$ ise, n 'yi $2k-1, 2k-2, \ldots, k+1$ ile bölünce, sırasıyla, $1, 2, 3, \ldots, k-1$ kalanlarını elde ederiz. n 'yi $k+1$ 'den daha küçük sayılarla bölünce de, bu kalanlardan biri elde edilir.Dolayısıyla,

$$K(2k) = 2k$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+2+\cdots+ = 2k$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(k-1)k}{2} = 2k$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 5k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 5$$

($k \geq 1$ olduğundan). Demek ki, $K(n) = n$ olan tek sayı $n = 10$ 'dur.

Soru 2. İki öğrenci, tahtaya $x^2 + 19x + 91$ polinomunu yazarak şöyle bir oyun oynuyorlar: Birinci oyuncu,polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılardan birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor. Benzer şekilde ikinci oyuncu da ortaya çıkan polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılardan birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor ve oyun bu şekilde sürdürülüyor. Bir süre sonra, tahtada $x^2 + 91x + 19$ polinomu yazılmış olduğuna göre, bundan önce yazılan polinomlardan en az birinin köklerinin ikisinin de tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. $f_0(x) = x^2 + 19x + 91$ diyelim ve $k-$ıncı adımda ortaya çıkan polinomu $f_k(x)$ ile gösterelim. Her $k \geq 0$ için $f_k(-1)$ ve $f_{k+1}(-1)$ tamsayılarının farkının mutlak değeri 1 olur. Şimdi, $f_0(-1) > 0$ ve $f_n(-1) = x^2 + 91x + 19|_{x=-1} < 0$ olduğundan, en az bir k için $f_k(-1) = 0$ olacaktır. $f_k(x) = x^2 + px + q$ dersek, $x^2 + px + q = 0$ denkleminin bir kökü tam olduğundan, diğer kökü de tam olacaktır.

Çözüm 2. (M. Bumin Yenmez, Alp Şimşek, Murat Ak, Caner Pişgin, Emre Çakır, Fatih Deniz, Ali Adalı, Murat Bilge Badem) Tahtada çıkan polinomlara sırasıyla $x^2 + a_i x + b_i$ diyelim; $i = 1, 2, \cdots, n$. Birinci polinom $x^2 + 19x + 91$, n-inci polinom $x^2 + 91x + 19$ 'dur. Şimdi, $a_i - b_i$ farklarına bakalım. $a_1 - b_1 = 19 - 91 = -72; a_n - b_n = 91 - 19 = 72$ 'dir. Soruda verilene göre, bu fark her adımda ya 1 artıyor ya da 1 azalıyor. Başlangıçtaki fark -72, sonraki fark 72 olduğundan, $1 < s < n$ olan uygun bir s sayısı için $a_s - b_s = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla, s-inci polinom,

$$x^2 + (b_s + 1) + b_s = (x + b_s)(x + 1)$$

biçimindedir ve bu polinomun kökleri $-b_s$ ve -1 tamsayılarıdır.

Soru 3. $n > 3$ olmak üzere $a_1, a_2, \cdots, a_n$ reel sayıları için

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \text{ ve } a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq n^2$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayıları içinde 2 'den küçük olmayan en az bir sayı bulunduğunu ispat ediniz.

Çözüm 1. Aksini varsayalım. O zaman, her $k = 1, \cdots, n$ için $a_k < 2$ olur.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \Rightarrow a_k > n - 2(n-1) = 2 - n$$

$$\Rightarrow (a_k - 2)(a_k - (2-n)) < 0$$

$$\Rightarrow a_k^2 - (4-n)a_k < 2n - 4$$

$(1 \leq k \leq n)$. Son eşitsi

toplanınca,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + (n-4)\sum_{k=1}^{n} a_k < n(2n-4)$$

olduğu görülür. Burada $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq n^2$ ve $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} n^2 + (n-4)n &< n.2.(n-2), \\ 2n^2 - 4n &< 2n^2 - 4n \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir.

Çözüm 2. (M.Bumin Yenmez, Alp Şimşek) a_i 'lerin k tanesi pozitif veya sıfır, $n-k$ tanesi negatif olsun, $1 \leq k \leq n$. a_i 'leri

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0 > a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$$

biçiminde sıralayabiliriz.

Şimdi, soruda verilen önermenin yanlış olduğunu varsayalım. Yani, $a_1 < 2$ olsun. Bu durumda,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq n - (a_{k+1} + \cdots + a_n)$$

$$\Rightarrow 2k > a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq n - (a_{k+1} + \cdots + a_n)$$

$$\Rightarrow (2k-n) > -(a_{k+1} + \cdots + a_n) > 0$$

$$\Rightarrow$$

$$(2k-n)^2 > (a_{k+1} + \cdots + a_n)^2 \geq a_{k+1}^2 + \cdots + a_n^2.$$

Diğer yandan,

$$a_k \leq \cdots \leq a_1 < 2 \Rightarrow a_1^2 + \cdots + a_k^2 < 4k \quad (*)$$

'dır. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$$n^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 < (2k-n)^2 + 4k$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 4k^2 - 4kn + 4k > 0 &\Rightarrow 4k(k-n+1) > 0 \\ &\Rightarrow k - n > -1 \\ &\Rightarrow k - n > 0 \\ &\Rightarrow k = n, \end{aligned}$$

yani, a_i' lerin hepsinin pozitif olduğu görülür. $(*)$ eşitsizliği ve hipotezden,

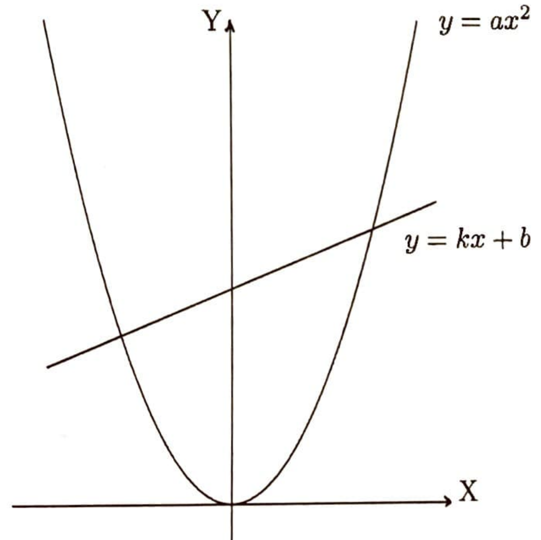
$$n^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 < 4n \Rightarrow 4 > n$$

çelişkisi ortaya çıkar.

Soru 4. Bir mühendis, her biri düzlemde uygun bir parabolün iç bölgesini aydınlatabilen sonlu sayıda fener ile tüm düzlemi aydınlatabileceğini söyleyince, matematikçi olan arkadaşı bunun mümkün olmadığını kanıtlıyor. Bunu siz de kanıtlayınız.

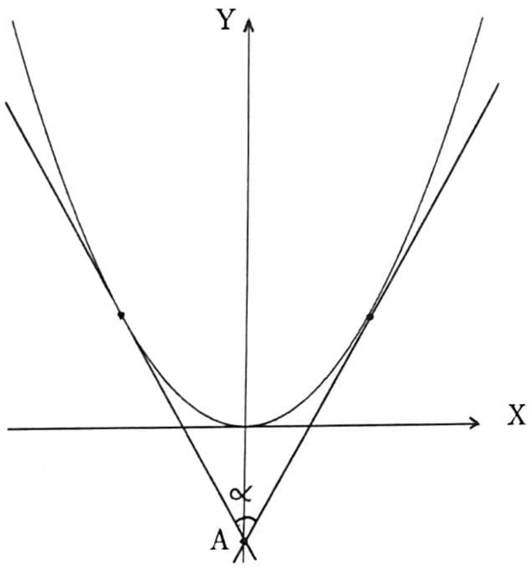
Çözüm 1. Düzlemde bir parabol alalım ve koordinat sistemini öyle seçelim ki, bu sistemde parabolün denklemi $y = ax^2$, $(a > 0)$ olsun. Parabolün iç bölgesindeki (x, y) noktaları (sınırdaki noktalar dahil) için $y \geq ax^2$ sağlanacaktır.

Şimdi, y-eksenine paralel olmayan herhangi bir $y = kx + b$ doğrusunu alalım. Bu doğrunun en fazla sonlu bir kısmının "aydınlanabileceğini" görelim. Aydınlanmış noktaların birinci koordinatı olan x için $kx + b \geq ax^2$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Buradan, $ax^2 - kx + b \leq 0$ olduğu görülür. Eğer $P(x) = ax^2 - kx + b$ $(a > 0)$ polinomunun diskriminantı $D = k^2 - 4ab$ negatif ise, doğru, parabolü hiç kesmiyor;$D \geq 0$ ise; doğru, parabolü $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gibi $D = 0$ durumunda çakışan, iki noktada keser ve doğrunun aydınlanan kısmı bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. $D = 0$ durumunda doğrunun bir tek noktası aydınlanmıştır. Böylece, parabolün simetri eksenine paralel olmayan her doğrunun en fazla sonlu bir parçası aydınlanabilir.



Şimdi, sonlu sayıda fener, dolayısıyla, onların aydınlattığı sonlu sayıda parabol, düzlemde nasıl yerleştirilmiş olursa olsun, bu parabollerin hiç birinin simetri eksenine paralel olmayan bir doğrunun tamamı aydınlanamaz. Bu nedenle, düzlemin tamamı aydınlanamaz.

Çözüm 2. (Sabri Yılmaz)

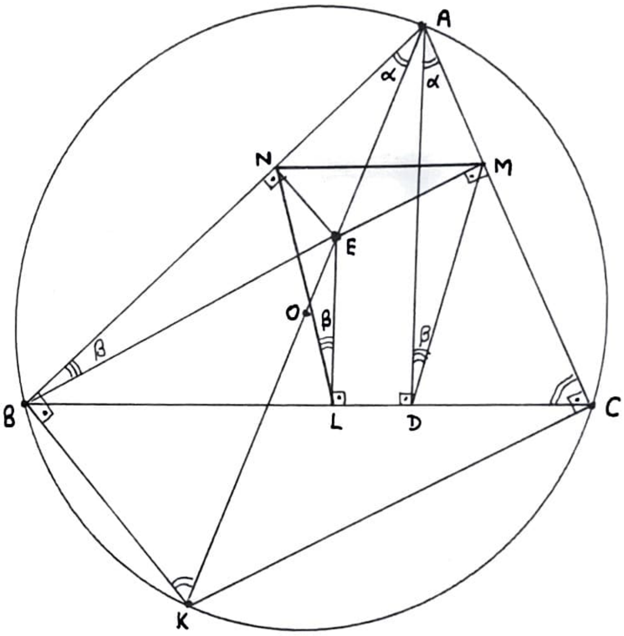


Bir parabolün iç bölgesini istediğimiz kadar küçük bir açının iç bölgesi içine alabiliriz. Çünkü, düzlemde koordinat sistemini, şekilde görüldüğü gibi, parabolün tepe noktası orijin ve simetri ekseni y-ekseni olacak şekilde seçersek; parabol üzerinde y-eksenine göre simetrik olan iki noktadan teğetler çizersek, bu teğetler y-ekseni üzerinde bir A noktasında kesişirler. Böylece oluşan açının iç bölgesi, parabolün iç bölgesini içerir. Teğetleri uygun yerden çizerek, oluşan α açısını istediğimiz kadar küçültebileceğimiz açıktır.

Parabollerin sayısı n olsun ve her bir parabolü köşesi A_i, $1 \leq i \leq n$ de olan ve $\frac{2\pi}{n}$ 'den küçük olan α_i açısının içine alalım. Eğer düzlem bu şekilde $\frac{2\pi}{n}$ 'den küçük n tane açı tarafından örtülebilseydi, köşeleri çakışan n tane $\frac{2\pi}{n}$ 'den küçük açı tarafından da örtülebilmesi gerekirdi. Fakat bu mümkün değildir; çünkü, sözü edilen ortak köşeyi merkez kabul eden bir çember çizilirse, çemberin bu açılarla örtülemeyeceği görülür.

Soru 5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; $[OA]$ üzerinde alınan bir E $(A \neq E \neq O)$ noktasından $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla N, L, M; ABC üçgeninin A 'dan geçen yüksekliğinin $[BC]$ kenarını kestiği nokta D ile gösterilmek üzere; N, L, D, M noktalarının bir çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Çözüm.



Çapı gördükleri için $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^o$ daire ve buradan,

$$MN /\!/ BC \qquad (1)$$

'dir. $\overset{\triangle}{ABK} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ $(\widehat{AKB} = \widehat{ACD})$ olduğundan,

$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|KA|}{|CA|} = \frac{|KB|}{|CD|} \qquad (2)$$

$\overset{\triangle}{ANE} \sim \overset{\triangle}{ABK}$ 'dan

$$\frac{|NA|}{|BA|} = \frac{|EA|}{|KA|}$$

ve (1) 'den,

$$\frac{|EA|}{|KA|} = \frac{|MA|}{|CA|} \qquad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) 'ten

$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|EA|}{|MA|};$$

böylece,

$$\frac{|BA|}{|EA|} = \frac{|DA|}{|MA|}$$

olduğu görülür. $\overset{\triangle}{ABK} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ 'den, $\widehat{BAE} = \widehat{DAM}$ 'dir. O halde, $\overset{\triangle}{BAE} \sim \overset{\triangle}{DAM}$ 'dir (KAK). Buradan $\widehat{ABE} = \widehat{ADM}$ ve $NBLE$ 'nin çembersellīğinden, $\widehat{ABE} = \widehat{NLE}$ bulunur. Dolayısıyla, $\widehat{NLD} = \widehat{MDL}$ olur; yani, $MNLD$ dörtgeni bir ikizkenar yamuktur ve bu nedenle M, N, L, D noktaları aynı çember üzerindedir.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Aşağıda çeşitli matematikçilerin özdeyişlerini ya da matematikçi olmayan kişilerin matematik konusundaki özdeyişlerini bulacaksınız. Internet'ten derlenen bu özlü sözleri beğeneceğinizi umuyoruz.

□ **Henkin, Leon:** "Matematik konusunda sınıfta yaptığımız en büyük yanlış anlamalardan biri, öğretmenin tartışılan herhangi bir problemin çözümünü hep biliyor görünmesidir. Öğrenciler, sanki, bir yerlerde tüm ilginç soruların doğru yanıtlarını barındıran bir kitabın varolduğunu ve öğretmenlerin bunları bildikleri gibi bir düşünceye kapılırlar. Ayrıca bu kitaba sahip olunursa her şeyin çözümleneceğini sanırlar. Matematiğin gerçek doğasına ne kadar da aykırı bir durum!"

□ **Hermite, Charles (1822-1901):** "Abel, matematikçilere, onları 500 yıl meşgul edecek kadar iş bırakmıştır."

□ **Hermite, Charles (1822-1901):** "Bizler matematikte usta değil hizmetçiyiz."

□ **Hilbert, David (1862-1943):** *(Mezar taşının üstündeki yazı)*: "Wir müssen wissen. Wir werden wissen. (Bilmek zorundayız. Bileceğiz.)"

□ **Hilbert, David (1862-1943):** "Matematik, kağıt üzerinde belirli kurallar içinde anlamsız işaretlerle oynanan bir oyundur."

□ **Hilbert, David (1862-1943):** "Matematik hiç bir ırk ya da sınır tanımaz. Matematik için kültürel dünyamız biricik ülkemizdir."

□ **Hilbert, David (1862-1943):** "Sonsuz! Bunun dışında hiç bir soru insan ruhunu böylesine derinden etkilememiştir."

□ **Jacobi, Carl:** "Her zaman genelleştirmeliyiz."

□ **Jacobi, Carl:** *(Descartes 'in küllerinin Fransa'ya geri dönmesi konusunda)*: "Genellikle büyük insanların küllerine sahip olmak, onların kendilerine sahip olmaktan daha kolaydır."

□ **Kant, Emmanuel (1724-1804):** "Matematik bilimi, salt akıl yürütmenin, deneyimin yardımı olmaksızın, başarılı bir biçimde sınırlarını nasıl genişlettiğinin en parlak örneğini oluşturmaktadır."

□ **Kepler, Johannes (1571-1630):** "Maddenin olduğu her yerde geometri de vardır."

□ **Kline, Morris:** "Bir kanıt, bize kuşkularımızı nerede yoğunlaştırmamız gerektiğini gösterir."

□ **Kline, Morris:** "Mantık, güven içinde yanlış yapma sanatıdır."

□ **de Laplace, Pierre-Simon (1749-1827):** "Bildiklerimiz çok fazla değildir. Bilmediklerimiz ise sınırsızdır."

□ **de Laplace, Pierre-Simon (1749-1827):** "Euler 'i okuyunuz. O her şeyde ustamızdır."

□ **Leibniz, Gottfried Whilhem (1646-1716):** "Temiz olan, pis kokmayan ve şakadan anlayan bilge bir kişi bulmak çok güçtür."

□ **Lobatchevsky, Nikolai:** "Ne kadar soyut olursa olsun, matematiğin dalları arasında, bir gün gerçek dünyanın olaylarına uygulanamayacak olanı hiç yoktur."

□ **Luther, Martin (1483-1546):** "Tıp insanları hasta eder, matematik üzgün, teoloji de kuşkucu."

□ **Mann, Thomas (1875-11955):** "Büyük bir gerçek, tersi de büyük olan bir gerçektir."

□ **Mathesis, Adrian:** "Yeni teoreminiz çok büyük bir basitlikle ifade edilebiliyorsa, bu durumda patolojik bir aykırı durum sözkonusudur."

□ **Mathesis, Adrian:** "Tüm büyük teoremler gece yarısından sonra keşfedilmiştir."

DOĞRUSAL KODLAR

Sevda Sezer
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Sonlu cisimlerin[1] önemli ve ilginç uygulama alanlarından biri de cebirsel kodlama teorisidir. Haberleşmede meydana gelen bazı problemleri çözmek için ortaya çıkan ve yaklaşık 50 yıllık bir geçmişi olan bu teoride, kısa geçmişine rağmen, önemli gelişmeler kaydedilmiştir.

Bu yazıda, *Kodlama Teori*'sinin tarihsel gelişiminden çok, konu hakkında bilgisi olmayan matematikseverlere, kodlama yönteminin önemi, tanımı ve özellikleri hakkında temel bilgiler verilecektir.

İki kişinin, iki ülkenin veya kısacası iki tarafın "doğru bir şekilde" haberleşmek istediğini düşünelim (burada haberleşmenin gizli olması gerekmiyor). "Doğru bir şekilde" ifadesini kullandım; çünkü, insan hatasından veya parazitten (aşırı ısı, radyasyon v.b.) dolayı bazen bir tarafın mesajı karşı tarafa hatalı bir şekilde ulaşabiliyor. İşte *Kodlama Teorisi* de, haberleşmenin doğru bir şekilde yapılmasını amaçlayan, eğer haberleşmede hata oluşmuşsa bu hatanın nerede olabileceğini inceleyen ve bundan daha da önemlisi hatalı olarak ulaşan mesajdan doğru mesajı elde etmek için çeşitli yöntemler geliştiren bir teoridir.

Günlük yaşantımızda, gerek telefon gerekse karşılıklı konuşmalarımızda, önemli bir mesajı (örneğin; adımızı, soyadımızı v.b bilgiyi) karşımızdaki kişiye ilettiğimizde "Lütfen kodlar mısınız ?" sorusuyla hemen hemen hepimiz karşılaşmışızdır. Bu durumda genelde izlenilen yol, "karşı tarafa mesajla birlikte bazı ek bilgilerin iletilmesiyle mesajın doğru anlaşılmasını sağlamak" 'tan ibarettir. Örneğin, telefonla önemli bir rezervasyon yaptığımı düşünelim. İlgili kişi benden adımı kodlamamı istediğinde, eğer ben adımı harf-harf S-E-V-D-A olarak kodlarsam (söylersem), adım SELDA, SEYDA, ŞEYDA v.b. biçimde yanlış (hatalı) anlaşılabilir. Oysa, ben adımı

Samsun 'un S 'si, Edirne 'nin E 'si, Van 'ın V 'si, Denizli 'nin D 'si, Antalya 'nın A 'sı

olarak kodlarsam, adımın (mesajımın) doğru anlaşılma olasılığını oldukça arttırmış olurum.

Kodlama Teorisinin önemini şu örnekle daha iyi anlayabiliriz: Diyelim ki, Dünya'dan Mars'a bir uzay aracı gönderiyoruz ve bu aracın bize göndereceği görüntülere göre, aracın Mars'a inip inmeyeceğine karar vereceğiz. Eğer görüntüler iyi olursa aracın Mars'a iniş yapabileceğini, aksi durumda da yörüngede kalması gerektiğini, sırasıyla, 1 ve 0 mesajları (işaretleri) ile ona ileteceğiz. Eğer, uzay aracından gelen görüntüler, aracın Mars'a güvenli bir şekilde iniş yapamayacağını gösterir ve biz buna rağmen yanlışlıkla 0 yerine 1 mesajını gönderirsek ya da 0 mesajı bazı parazitlenmelerden dolayı 1 olarak araca ulaşırsa gerisini siz düşünün artık... Gitti canım keten helva...

Peki bu veya benzeri istenmeyen durumlarla karşılaşmamak için ne yapılabilir? Gerek bizden gerekse dış etkenlerden kaynaklanan hatalar sıfıra indirgenemeyeceğinden dolayı, demek ki mesaj alış-verişlerinde az da olsa hatalı mesajlarla karşılaşılacaktır. Bu noktadan hareketle kodlama ile ilgili çalışmalarda "hatalı mesajdan doğru mesajı elde edebilme olasılığını arttıran kodlama yöntemlerini bulup, geliştirme" konusu büyük önem kazanmaktadır.

Demek ki, bir mesajın karşı tarafa hatalı gitme olasılığı var. Bu durum üzerinde biraz olasılık hesapları yapmaya ne dersiniz? Belki bu arada "Neden kodlama yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır?" sorusuna da bir cevap bulmuş oluruz. Bunun için önce bir mesajı (herhangi bir kodlama yöntem uygulamadan) karşı tarafa gönderelim ve mesajın doğru elde edilebilme olasılığını hesaplayalım. Daha sonra da mesajı bazı ek bilgilerle birlikte (yani, uygun bir kodlama yöntemi uygulayarak)

[1] Sonlu cisim kavramını bilmeyen okurlar, sonlu cisim olarak $\mathbf{Z_2} = \{0,1\}$ 'i alıp işlemlerini (mod 2) 'ye göre yapabilirler.

karşı tarafa gönderelim ve bu durumda da mesajın doğru elde edilebilme olasılığını hesaplayalım. Sonuçta da bu iki olasılığı karşılaştıralım. Yine yukarıdaki örneği ele alalım ve $\{ 0, 1 \}$ 'den oluşan mesaj birimlerimizden herhangi birisinin karşı tarafa "doğru" gitme olasılığı 0.99; "yanlış" gitme olasılığı da 0.01 olsun. 500 birimlik bir mesajı karşı tarafa direkt (herhangi bir yöntem uygulamadan) gönderdiğimizi düşünelim (mesaj iletiminde, her birimin doğru veya yanlış da olsa karşı tarafa ulaştığı ve herhangi bir birimde meydana gelen bir hatanın diğer birimleri etkilemediği kabul edilmektedir). Bu durumda, 500 birimlik bir mesajın doğru elde edilebilme olasılığı, her birimin "doğru" gitme olasılığının çarpımına eşittir, yani $(0.99)^{500} \cong 0.0066$ 'dır. Görüldüğü gibi bu olasılık hiç de içaçıcı değil; siz de, mesajların doğru ulaşma olasılığı bu kadar düşük olan bir yöntemi kullanmak istemezsiniz, değil mi?

"Acaba mesajımızın doğru elde edilebilme olasılığını biraz daha arttıracak yöntemler geliştiremez miyiz?" sorusunun cevabı, daha fazla işlem yaparak ve daha fazla zaman harcayarak, "EVET" tir (yani, zaman ve işlem yükünün artmasıyla sözü edilen olasılığın artması doğru orantılıdır). Bu olasılığı arttırıcı yöntemlerden birisi de *n-li tekrar yöntemidir.* n-li tekrar yönteminde, n bir tek tamsayı olmak üzere, mesajdaki her bir birimin n defa yanyana (örneğin; 0110 yerine $\underbrace{0...0}_{n\ tane}\ \underbrace{1...1}_{n\ tane}\ \underbrace{1...1}_{n\ tane}\ \underbrace{0...0}_{n\ tane}$) yazılarak karşı tarafa gönderilir. Karşı taraf da elde ettiği mesajı, sırasıyla n-li bloklara ayırır, her blokta hangi sayı en fazla tekrarlanmışsa, n-li bloğa o sayıyı karşılık getirerek orjinal mesajı elde etmeye çalışır (mesajın ulaşımında, hata sayısı arttıkça olayın meydana gelme olasılığı azalacağından, kodlama yöntemlerinde az hatalı durumlar ele alınır).

Biz örneğimize kaldığımız yerden devam edelim ve 500 birimlik mesajımızı 3-lü tekrar yöntemi ile karşı tarafa gönderelim. Yani, 0 yerine 000 , 1 yerine de 111 yazarak 500 birimlik mesajı 1500 birimlik mesaj olarak karşı tarafa gönderelim. Burada dikkat edilecek nokta 000, 100, 010, 001 üçlü bloklarının her birine 0 'ın (benzer şekilde; 111, 110, 101, 011 üçlü bloklarının herbirine 1 'in) karşılık gelmesidir. Bu nedenle, bir birimin (0 veya 1 'in) doğru elde edilebilme olasılığı, bu üçlülerin meydana gelme olasılıklarının toplamına eşittir. Bu olasılık da,

$$(0.99)^3 + (0.99)^2.(0.11) + (0.99)^2.(0.11) + (0.99)^2.(0.11) \cong 0.9997$$

'dir. Dolayısıyla, 3-lü tekrar yöntemiyle 500 birimlik bir mesajın doğru elde edilebilme olasılığı, $(0.9997)^{500} \cong 0.86$ olur (tekrar sayısı arttıkça bu olasılığın artacağı açıktır). Kodlama yöntemlerine neden ihtiyaç duyulduğu veya öneminin ne olduğunu sadece 0.0066 ve 0.86 olasılıklarını karşılaştırarak da anlayabiliriz.

Aşağıdaki şema ile, Kodlama Teorisinde bir mesajın karşı tarafa gönderilip çözülünceye kadar hangi aşamalardan geçtiği açıklanmaktadır:

$$\text{Mesaj} \xrightarrow{\textit{kodlayıcı}} \text{Kodlanmış Mesaj} \xrightarrow{\textit{ulaştırıcı}} \text{Ulaşan Mesaj} \xrightarrow{\textit{kod çözücü}} \text{Çözülmüş Mesaj}$$

$$\text{Örneğin, } 0 \xrightarrow{\textit{3-lü tekrar yöntemi}} 000 \xrightarrow{\textit{2. girdide hata oluşsun}} 010 \xrightarrow{\textit{en fazla tekrar yöntemi}} 0\ .$$

Aşağıda kodlama yöntemi, kod ve kodlanmış mesajların matematiksel tanımına yer verilmiştir:

Tanım 1 : $\mathbb{F}$ sonlu bir cisim ve $\mathcal{M}$ tüm mesajlarımızdan oluşan küme olsun. $\mathcal{M}$ 'nin $k-$boyutlu bir $\mathbb{F}$-vektör uzayı olduğunu kabul edelim. $\mathcal{M}$ 'yi

$$\mathbb{F}^n := \{ (a_1, ..., a_n) \ : \ a_i \in \mathbb{F} \ , i = 1, ..., n \}$$

'nin $k-$boyutlu bir C altvektör uzayına dönüştüren bir $\mathbb{F}$-doğrusal dönüşüme *kodlama yöntemi,* C 'ye bir $[n, k]$ *doğrusal kod,* C 'nin elemanlarına da *kodlanmış kelimeler (mesajlar)* denir. Ayrıca, eğer $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ $(= \{0, 1\})$ ise C 'ye *binary (ikili birime dayanan) kod* denir (bu tür kodlar en çok kullanılan kodlardır).

$\mathcal{C}$ $k-$boyutlu bir $\mathbb{F}$-vektör uzayı olduğu için, $\mathcal{C}$ 'nin eleman sayısının $|\mathcal{C}\,| = |\mathbb{F}|^k$ olacağı açıktır.

Bundan sonra $\mathbb{F}$ bir sonlu cisim, $\mathcal{C}$ de $[n, k]$ kod olarak düşünülecektir.

Örnek 1 : $\mathbb{F} = \mathbf{Z_2}$,

$$\mathcal{M} = \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}$$

ve

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{F}^7 \;,\; f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_3 + a_4, a_2 + a_3 + a_4)$$

olmak üzere aşağıdaki tablo elde edilir:

$\mathcal{M}$	f	$\mathcal{C}$
0000	$\longrightarrow$	0000000
0001	$\longrightarrow$	0001011
0010	$\longrightarrow$	0010111
0100	$\longrightarrow$	0100101
1000	$\longrightarrow$	1000110
1100	$\longrightarrow$	1100011
1010	$\longrightarrow$	1010001
1001	$\longrightarrow$	1001101
0110	$\longrightarrow$	0110010
0101	$\longrightarrow$	0101110
0011	$\longrightarrow$	0011100
1110	$\longrightarrow$	1110100
1101	$\longrightarrow$	1101100
1011	$\longrightarrow$	1011010
0111	$\longrightarrow$	0111001
1111	$\longrightarrow$	1111111

Bu şekilde oluşturulan $\mathcal{C}$ bir $[7,4]$ koddur, bu kod *Hamming [7 , 4] kodu* olarak adlandırılır.

Yandaki örnekte eğer bir kodlanmış kelime karşı tarafa 0111111 olarak ulaşırsa, bu kelime $\mathcal{C}$ 'nin elemanı olmadığı için bir yerlerde hata oluştuğu anlaşılır ve yapılan incelemelerde bunun 1111111 olarak gelmesi gerektiği sonucuna varılır. Çünkü; bu durumda sadece bir hata (ilk girdide) meydana gelmiştir, diğer durumlarda ise en az iki hatanın (yapılmış olması gerekir (daha önce de açıklandığı gibi, az sayıda hata yapma olasılığı çok sayıda hata yapma olasılığından fazla olduğu için, mesaj alış-verişlerinde olasılığı fazla olan durum incelenir, diğer durum gözardı edilir.) Görüldüğü gibi, bazı kodlama yöntemlerinde, kodlanmış bir mesaj hatalı olarak ulaşsa bile bunun düzeltilebilme imkanı bulunabilmektedir.

Kodlama Teorisinde aşağıdaki kavramlar büyük ö em taşımaktadır:

Tanım 2 : $\mathbb{F}$ bir cisim, $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{F}^n$ için

$$d(a, b) := |\{i \;:\; a_i \neq b_i \;, i = 1, ..., n\}| \;\;,\;\; w(a) := |\{i \;:\; a_i \neq 0\}|$$

olmak üzere, $d(a, b)$ 'ye a ve b 'nin *Hamming*[2] *uzaklığı*, $w(a)$ 'ya da a 'nın *Hamming ağırlığı* denir. Ayrıca, $\mathcal{C}$ bir kod olmak üzere

$$d(\mathcal{C}) := min\{\, d(a, b) \;:\; a, b \in \mathcal{C} \;, a \neq b \,\} = min\{w(c) \;:\; c \in \mathcal{C} \;, c \neq (0, ..., 0)\,\}$$

olarak tanımlanan $d(\mathcal{C})$ sayısına $\mathcal{C}$ *'nin minimum uzaklığı (veya ağırlığı)* denir.

Örnek 2 : Hamming $[7,4]$ kodunda, $a = (0001011)$, $b = (0111001)$, $u = (1111111)$, $v = (0000000)$ olsun. Bu durumda, $d(a, a) = 0$, $d(a, b) = 3$, $d(a, u) = 4$, $d(a, v) = 3$, $d(b, u) = 3$, $d(u, v) = 7$, $w(a) = 3$, $w(b) = 4$, $w(u) = 7$, $w(v) = 0$ ve $d(\mathcal{C}\,) = min\{3, 4, 7\} = 3$ tür.

Şimdi de Hamming uzaklığı ve Hamming ağırlığı ile ilgili bazı özellikleri inceleyelim:

[2]Richard W. Hamming (1915-1998), 1942 'de İllinois Üniversitesi Matematik Bölümünde doktorasını yaptı. 1950 yılında yayınlanan hata-arama ve hata-düzeltme kodları ile ilgili makalesi bilgi teknolojisinde bir dönüm noktası olmuştur. Gerek bilgisayar gerekse haberleşme alanında, 75 'e yakın makalesi, yarım düzineden fazla da kitabı bulunmaktadır.

Özellikler : $\mathcal{C}$ bir [n,k] kod; d , w daha önce tanımlandığı gibi (sırasıyla, Hamming uzaklığı ve Hamming ağırlığı) ve $u = (u_1, ..., u_n)$, $v = (v_1, ..., v_n)$, $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbb{F}^n$ olsun. Bu durumda,

(1) $d(u,v) = d(v,u) = w(v-u) = w(u-v)$,

(2) $d(u,v) \leq d(u,s) + d(v,s)$

'dir.

İspat (1) :

$$\begin{aligned} d(u,v) &= |\{i \ : \ u_i \neq v_i\}| \\ &= |\{i \ : \ v_i \neq u_i\}| \quad , \quad (= d(v,u)) \\ &= |\{i \ : \ v_i - u_i \neq 0\}| \quad , \quad (= w(v-u)) \\ &= |\{i \ : \ u_i - v_i \neq 0\}| \quad , \quad (= w(u-v)) \end{aligned}$$

'dir.

(2) : Sözkonusu eşitsizliği karşılıklı girdileri inceleyerek ispatlayabiliriz. Eğer uygun bir $j \in \{1, ..., n\}$ için $u_j \neq v_j$ ise (aksi durumda eşitsizliğin sağlanacağı açıktır) hem $u_j = s_j$ hem de $v_j = s_j$ olamaz. Çünkü, bu durumda $u_j = s_j = v_j$ olmalıdır ki, bu başlangıçtaki koşulumuz olan $u_j \neq v_j$ ile çelişir. Ayrıca, diğer durumlar için eşitsizlik sağlanacağından dolayı, $d(u,v) \leq d(u,s) + d(v,s)$ olmalıdır.

Aşağıdaki teorem sayesinde, bir kodun düzeltilebilme (hatalı ulaşan mesajdan doğru mesajı elde etme) kapasitesini belirleyebiliriz:

Teorem 2 : $\mathcal{C}$ bir kod olmak üzere, eğer sıfırdan farklı her $c \in \mathcal{C}$ için $w(c) \geq 2.t + 1$ olacak biçimde bir $t \in \mathbb{N}$ varsa, $\mathcal{C}$ 'nin herhangi bir elemanında meydana gelen t veya t 'den daha az hata düzeltilebilir (yani, doğru) mesaj elde edilebilir. (Buradaki t sayısına $\mathcal{C}$ 'nin *düzeltilebilme kapasitesi* denir).

İspat : Eğer, $v \in \mathbb{F}^n$ ve $d(v,c) \leq t$ olacak biçimde bir $c \in \mathcal{C}$ varsa c 'nin tek türlü belirli (yani, $c' \in \mathcal{C} \setminus \{c\}$ için $d(v,c') > t$) olduğunu göstermek ispat için yeterlidir (Neden?). $v \in \mathbb{F}^n$, t veya t 'den daha az hatayla elimize ulaşsın. Bu durumda, öyle bir $c \in \mathcal{C}$ vardır ki, $d(v,c) \leq t$ olur. Diğer yandan, $c' \in \mathcal{C} \setminus \{c\}$ için $c - c' \neq 0$ olacağından

$$2t + 1 \leq w(c - c') = d(c,c') \leq d(v,c) + d(v,c') \leq t + d(v,c') \Longrightarrow d(v,c') > t$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da, bize v 'nin c olarak düzeltilmesi gerektiği sonucunu verir. □

Teorem 2 'yi Hamming [7,4] koduna uygulamak istersek; sıfırdan farklı her c $\in \mathcal{C}$ için $w(c) \geq 2.1+1 = 3$ olduğundan, teorem gereği, kodlanmış mesajların ulaşımında meydana gelen 1 hata düzeltilebilir, yani $\mathcal{C}$ 'nin düzeltilebilme kapasitesi 1 'dir. Örneğin, $v = 1001011$ alınıp ($v \notin \mathcal{C}$ olduğuna dikkat edelim), her $c \in \mathcal{C}$ için $d(v,c)$ 'ler hesaplandığında, $c = (0001011)$ için $d(v,c) = 1$ ve her $c' \in \mathcal{C} \setminus \{c\}$ için de $d(v,c) > 1$ olduğundan, v 'nin c olarak düzeltilmesi gerektiği sonucuna varılır.

Dikkat edecek olursak, Hamming [7,4] 'deki kodlanmış mesajların ilk 4 girdisi asıl mesajdan oluşmakta, diğer 3 girdisi ise fazladan bilgi içermektedir. Bu özelliği sağlayan dönüşümleri (dolayısıyla, kodları) inceleyelim:

Tanım 3 : $\mathcal{C}$ bir $[n,k]$ kod olmak üzere, satırları $\mathcal{C}$ 'nin taban elemanlarından oluşan $k \times n$ matrise $\mathcal{C}$ 'nin bir *üreteç matrisi* denir ve $\mathcal{G}$ ile gösterilir.

$\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ 'nin bir üreteç matrisi olmak üzere $\mathcal{C} = \{ a.\mathcal{G} \ : \ a \in \mathbb{F}^k \}$ olacağı açıktır.

Örnek 3 : Mesajlarımızın kümesi $\mathcal{M} = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ olmak üzere $\mathbb{F} = \mathbf{Z_3}$

üzerinden

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ile bir [4,2] kod elde etmek istersek mesajlar ve bunlara karşılık gelen kodlanmış kelimeler tablodaki gibi olur:

$\mathcal{M}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{C}$
00	$\longrightarrow$	0000
01	$\longrightarrow$	0122
02	$\longrightarrow$	0211
10	$\longrightarrow$	1021
11	$\longrightarrow$	1110
12	$\longrightarrow$	1202
20	$\longrightarrow$	2012
21	$\longrightarrow$	2101
22	$\longrightarrow$	2220

Burada görüldüğü gibi, sıfırdan farklı her $c \in \mathcal{C}$ için $w(c) \geq 2.1+1$ olduğundan, bu kodun düzeltilebilme kapasitesi 1 'dir.

Örne 4 : Hamming [7,4] kodu için bir üreteç matris

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

'dir. Burada $\mathcal{G}$, I_4 4×4 birim matris, A da girdileri $\mathbb{F}$ 'nin elemanlarından oluşan $k \times (n-k)$ matris olmak üzere, $\mathcal{G} = [\ I_4\ A\ ]$ biçimindedir. Eğer, $\mathcal{G}$ bu örnekte olduğu gibi, $\mathcal{G} = [\ I_k\ A\ ]$ formunda ise $\mathcal{G}$ 'ye $\mathcal{C}$ 'nin *standart üreteç matrisi (veya standart kodlama matrisi)*, $\mathcal{C}$ 'ye de *sistematik kod* adı verilir. Ayrıca, sistematik bir koddaki herhangi bir elemanın (yani, bir kodlanmış kelimenin) asıl mesajdan oluşan ilk $k-$birimlik kısmı *bilgi kısmı*; geri kalan $(n-k)-$birimlik kısmı da *kontrol kısmı* olarak adlandırılır.

Her doğrusal kod bir sistematik kod olarak düşünülebileceğinden [2] ve asıl mesajları içerdiği için sistematik kodlarla çalışmak çok daha avantajlı olacağından dolayı, bu tür kodlar Kodlama Teorisinde önemli bir yer teşkil etmektedir.

Elimizde, mesajlarımızı kodlayabilecek uygun ($\mathcal{G}$ matrisi yardımıyla) bir metot olmasına karşılık maalesef, kodlanmış mesajların hatalı ulaşması durumunda, bunları her zaman için çözebilecek bir yöntem bulunmamaktadır (1 hatanın düzeltilebileceği bir yöntem hariç). $\mathcal{G}$, $[\ I_k\ A\ ]$ formunda olmak üzere,

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -A \\ \\ I_{n-k} \end{bmatrix}_{n \times (n-k)} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdots & -a_{k(n-k)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times (n-k)}$$

matrisine $\mathcal{C}$ 'nin *kontrol matrisi* denir. Eğer ulaşan kodlanmış mesajda 1 tane hata yapılmışsa, $\mathcal{H}$ matrisi yardımıyla bu hatanın hangi girdide meydana geldiği ve doğru mesajın ne olması gerektiği hemen belirlenebilir:

Diyelim ki; w mesajı elimize ulaştı,

1. Adım : $w \in C$ ise, mesajın doğru geldiğini kabul ederiz.

2. Adım : $w \notin C$ ise, $w.\mathcal{H}$ 'yi hesaplarız. Elde ettiğimiz sonuç $\mathcal{H}$ 'nin i. satırının s katına ($s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$) eşit ve $c := w - (00...0 \underbrace{s}_{i.girdi} 0...0) \in C$ ise, w 'nin i. girdisinde bir hata olduğunu anlarız. Bu nedenle w yerine c 'nin ulaşması gerektiği sonucuna varırız ($\mathcal{H}$ 'nin herhangi iki satırının doğrusal bağımsız olduğunu kabul ediyoruz). Özel olarak $\mathbb{F} = \mathbf{Z_2}$, w 'de 1 hata oluşmuş ve $w.\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ 'nin i. satırına eşitse, w 'nin i. girdisinde hata oluşmuş demektir. Eğer, i. girdi 1 ise 0 ile; 0 ise de 1 ile değiştirilmelidir.

3. Adım : Eğer 1. ve 2. adımdaki koşullar sağlanmıyorsa ulaşımda en az 2 hata yapılmış demektir. Bu durumda bu yöntemle doğru bir çözüm elde edilemeyebilir.

Örnek 5 : Örnek 4 'deki Hamming [7,4] koduna karşılık gelen kontrol matrisi

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

'dir. Elimize $w = (0000110)$ mesajı ulaştığında, $w \notin C$ olduğundan, $w.\mathcal{H}$ 'yi hesaplarsak; $w.\mathcal{H} = (110)$ 'ı elde ederiz. (110), $\mathcal{H}$ 'nin 1. satırı olduğu için s=1 ve $c = w - (s0...0) = (1000110) \in C$ olduğundan; w 'nin, (1000110) 'ın 1. girdisinde 1 hatanın oluşmasıyla elimize ulaştığı sonucuna varırız.

Kabul edelim ki, $c = (1001100)$ kodlanmış mesajı elimize $w = (1001010)$ olarak (en az iki hatayla) ulaşsın. $w \notin C$ olduğundan, $w.\mathcal{H}$ 'yi hesaplarsak $\mathcal{H}$ 'nin 3. satırını, yani (111) 'i, elde ederiz. Bu nedenle $s = 1$ olmalıdır. Fakat, diğer yandan $c = (1001010) - (0010000) = (1011010) \notin C$ olduğundan, en az iki hatanın yapılması durumunda bu yöntemle doğru bir sonuç elde edemeyeceğimizi görmüş oluruz.

Bundan sonra, "C bir $[n,k,d]$ kod" denilince, C 'nin $\mathbb{F}^n$ 'nin $k-$boyutlu bir $\mathbb{F}$-altvektör uzayı olduğu ve bu kodun minimum uzaklığının (veya ağırlığının) d olduğu anlaşılacaktır. Daha önce Teorem 1 'de bir kodun düzeltilebilme kapasitesinin w ile (dolayısıyla d ile) doğru orantılı olduğunu gördük. Şimdi de, "Acaba, bir $[n,k,d]$ kodunda d, n ve k arasında ne gibi bir ilişki var?" , "d 'nin n ve k 'ya bağlı olarak alt ve üst sınırlarını belirleyebilir miyiz?" sorularına cevap aramaya çalışalım:

Önerme 1 (Singleton Sınırı) : C bir $[n,k,d]$ kod ise, $k + d \leq n + 1$ 'dir.

İspat : $S := \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n \ : \text{ her } i \geq d \text{ için } a_i = 0 \}$ olarak tanımlanırsa; S, $\mathbb{F}^n$ 'nin $(d-1)$-boyutlu bir alt vektör uzayı olur. Ayrıca, dikkat edilecek olursa, her $a \in S$ için $w(a) \leq d-1$ ve $S \cap C = \{ (0,..,0) \}$ 'dır (Çünkü, $0 \neq b \in S \cap C \Longrightarrow \begin{cases} b \in S & \Longrightarrow & w(b) < d \\ b \in C & \Longrightarrow & w(b) \geq d \end{cases}$ çelişkisi elde edilir.) Bu nedenle,

$$k + (d-1) = boyut\ C + boyut\ S = boyut\ (C + S) + boyut\ (C \cap S) = boyut\ (C + S) \leq n \Longrightarrow k + d \leq n + 1$$

'dir. □

$k + d = n + 1$ olan $[n,k,d]$ kodları *maksimum uzaklıkla ayrılabilen kodlar* olarak adlandırılır. Kodlama Teorisindeki önemli kodlardan birisi de maksimum uzaklıkla ayrılabilen kodlardır. Çünkü, bu tür kodlar, n ve k verildiğinde d 'si (dolayısıyla, düzeltilebilme kapasitesi) en fazla olan kodlardır.

Reed Solomon[3] kodları bu tür kodlara bir örnek teşkil eder:

Reed Solomon Kodları : $|\mathbb{F}| = q$, $n = q-1$ ve $\beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 'ın bir ilkel kökü (yani, $\mathbb{F} \setminus \{0\} = \{\beta, \beta^2, ..., \beta^n = 1\} =< \beta >$) olsun. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}_k := \{ \ g \in \mathbb{F}[x] \ : \ derece \ g \leq k-1 \ \}$$

kümesi $\mathbb{F}$ 'nin k–boyutlu bir altvektör uzayıdır.

$$f : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathbb{F}^n \ , \ \ f(g) = (g(\beta), g(\beta^2), ..., g(\beta^n))$$

olarak tanımlanırsa; f , $\mathbb{F}$–doğrusal ve *çek* $f = \{0\}$ olduğundan (çünkü, *derece* $g \leq k-1$ için $\beta, ..., \beta^n$, g 'nin n farklı kökü olamaz, dolayısıyla *çek* f sıfırdan ibarettir) bire-bir bir dönüşümdür. Bu nedenle

$$\mathcal{C}_k := \{ \ (g(\beta), g(\beta^2), ..., g(\beta^n)) \ : \ g \in \mathcal{M}_k \ \} \subseteq \mathbb{F}^n$$

olarak tanımlandığında, $\mathcal{C}_k$ bir $[n,k]$ kod olur. İşte bu koda *Reed Solomon Kodu* adı verilir. Burada, $0 \neq c \in \mathcal{C}_k$ için

$$w(c) = n - |\{ \ i \ : \ g(\beta^i) = 0 \ , \ i = 1, ..., n \ \}| \geq n - derece \ g \geq n - (k-1)$$

olduğundan, $d = min\{ \ w(c) \ : \ c \in \mathcal{C}_k \ , \ c \neq 0 \ \} \geq n - (k-1)$ dir. Böylece, $d + k \geq n + 1$ ve $d + k \leq n + 1$ (Singleton Sınırı) eşitsizliklerinden $d + k = n + 1$ elde edilir ki bu, $\mathcal{C}_k$ 'nın maksimum uzaklıkla ayrılabilen bir kod olduğunu gösterir. Reed Solomon kodlarını bir örnekle pekiştirelim:

Örnek 6 : $\mathbb{F} = \mathbf{Z}_5$, $n = 4$ (ve dolayısıyla $k = 2$) alalım. $\mathbb{F} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\} =< 2 >$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= \{g \in \mathbf{Z}_5[x] : \ derece \ g \leq 1 \ \} = \{a + bx : \ a, b \in \mathbf{Z}_5\} \\
&= \{0, 1, 2, 3, 4, x, 2x, 3x, 4x, 1+x, 1+2x, 1+3x, 1+4x, 2+x, 2+2x, \\
&\quad 2+3x, 2+4x, 3+x, 3+2x, 3+3x, 3+4x, 4+x, 4+2x, 4+3x, 4+4x\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_2 &= \{(f(\beta), f(\beta^2), f(\beta^3), f(\beta^4)) \ : \ f \in \mathcal{M}_2 \ \} \\
&= \{(0,0,0,0), (1,1,1,1), (2,2,2,2), (3,3,3,3), (4,4,4,4), \\
&\quad (2,4,3,1), (4,3,1,2), (1,2,4,3), (3,1,2,4), (3,0,4,2), \\
&\quad (0,4,2,3), (2,3,0,4), (4,2,3,0), (4,1,0,3), (1,0,3,4), \\
&\quad (3,4,1,0), (0,3,4,1), (0,2,1,4), (2,1,4,0), (4,0,2,1), \\
&\quad (1,4,0,2), (1,3,2,0), (3,2,0,1), (0,1,3,2), (2,0,1,3)\}
\end{aligned}$$

olur. Burada, $d = d(\mathcal{C}) = 3$ olduğu kolayca görülebilir ($n + 1 = k + d \Longrightarrow 4 + 1 - 2 = d \Longrightarrow d = 3$). Bu nedenle, $\mathcal{C}$ 'nin düzeltilebilme kapasitesi 1 'dir.

Burada Kodlama Teorisindeki kısa gezintimize, istemeyerek de olsa, son veriyoruz. Diğer kodlama yöntemlerini incelemek için, yeni gezintilerde buluşmak dileğiyle...

KAYNAKLAR

[**1**] Gallian, J. ; Contemporary Abstract Algebra; D. C. Heath and Company, 1990.

[**2**] Lint, J. H. ; Introduction to Coding Theory; Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.

[**3**] Stichtenoth, H. ; Algebraic Function Fields and Codes; Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[3] Reed Solomon, 1998 yılında Cornell Üniversitesinde doktorasını yaptı. Kendi adıyla anılan kodlarla ilgili bir çok yayını bulunmaktadır. Halen Wisconsin Üniversitesinde Matematik Bölümünde misafir profesör olarak görev yapmaktadır.

ANTALYA CEBİR GÜNLERİ

Sinan Sertöz

Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531-ANKARA

Dünyanın değişik yerlerinden gelen elli kadar matematikçi geçenlerde Antalya 'da mütevazi bir otelin barında buluştular. Sabah saat dokuz. Antalya 'da mükemmel bir bahar sabahı başlarken matematikçiler perdeleri kapattılar ve daha önceden boşaltılıp sınıf haline getirilen barda yerlerini aldılar. Yaşlı bir matematikçi eski ama hâlâ çözülmemiş bir problemi anlatmaya başladı. Perdenin aralığından Akdeniz 'in parlak maviliğine inen Torosların silueti görünüyor. Dinleyiciler bu muhteşem görüntüye kaçamak bir bakış bile atmıyorlar. Tüm dikkatlerini bu eski problemi anlamaya vermişler. Onlar matematikçi... Neden bu mesleği seçmişler, bilinmez.

Yirminci yüzyılın başlarında yaşamış matematikçilerden Caratheodory, neden onca iş varken seçe seçe matematiği seçtiğini şu sözlerle anlatmaya çalışır: "Hayatıma anlam verecek tek şeyin hiç bir kısıtlama olmaksızın kendimi matematik çalışmaya adamak olduğu yönündeki saplantımdan kendimi kurtaramadım."

Maddi imkansızlıkları ciddiye dahi almadan, bir otelin barını sınıfa çevirme pahasına, hatta yol paralarını da kendileri vererek gelen bu matematikçileri buraya çeken ne? Dışarıdaki havuzda çığlık çığlığa eğlenen çocukların sesleri arasından tahtadaki yaşlı matematikçinin kısık sesiyle anlattığı problemi dinlemeye çalışan bu matematikçilerin ilgisini bu denli toplayan bu konu, matematik, nasıl bir şey?

Eflatun "Bir karenin köşegeninin, kenarlarla orantılanamayacağını bilmeyen kimse insan sıfatına lâyık değildir" **der.**

Dakikalar ilerledi. Artık yaşlı matematikçi problemin tanımlanmasını ve tarihçesini bitirdi. Şimdi teknik ayrıntılara girecek. Buraya kadar olan kısım matematik eğitimi almış herkesin anlayabileceği düzeydeydi. Bundan sonra dinleyenler kendi konularının sayılar teorisine olan uzaklığıyla ters orantılı olarak sırayla konuşmadan kopacaklar. Sonlarda ise yalnızca o problemle ilgili bir kaç kişi kalacak konuşmayı aktif olarak takip eden. Peki, diğerleri ne olacak?

Tecrübeli hoca derse başlamadan önce sınıfa döner ve "Eğer sınıfta uyuyan olursa beni uyandırın" **der.**

Onlar yıllardır bu çeşit konferanslarda yapmaya alıştıkları şeyi yapacaklar. Önce konuşma tamamen onların ilgi ve bilgi alanı dışına çıkıncaya kadar dinleyecekler. Sonra konuşmayı bırakıp kendi kafalarının içindeki dünyaya geçecekler ve o dakikaya kadar dinlediklerinin kendi uğraştıkları probleme nasıl uygulanacağını düşünmeye başlayacaklar. Yavaş yavaş akıllarına yeni fikirler gelecek. Önlerindeki kağıda bu fikirlerin ana hatlarını çiziktirecekler ilerde hatırlamak üzere. İlerde hatırlamak?

Günümüzden yaklaşık 4000 yıl öncesine tarihlenen ve Plimpton 322 diye bilinen Mezopotamya tabletleri üzerinde, kenarları tamsayı olan ve belli bir kurala göre sıralanmış dik üçgenlerin kenar uzunlukları verilmiştir.

Tahtadaki yaşlı matematikçi konuşmasını yılların kazandırdığı rahatlıkla öyle bir ustalıkla anlatıyor ki kendi kafalarındaki matematik dünyasına gitmiş olanlar sık sık geri gelip konuşmaya katılma ihtiyacı duyuyorlar. Aynı konuyu genç bir matematikçi anlatsaydı çoktan herkes kendi dünyasına kaçmış olurdu. Zaten o genç konuşmacı da dinleyicilerden habersiz kendi probleminin labirentlerinde tek başına dolaşıyor olurdu.

Hocalık hayatının ilk dersinden alı al moru mor çıkan genç matematikçi yan sınıftan sakin ve memnun bir şekilde çıkan yaşlı matematikçiye sarılır ve " 'Öğrenciler bana matematik ne işe yarar?' diye sordular, çok zorlandım. Size sorduklarında siz ne yapıyorsunuz?" **diye sorar. Yaşlı matematikçi hiç umursamadan cevaplar:** "Bana sorduklarında ben söylüyorum."

Konuşma bitti. şimdi kahve molasındayız. Havuzun kenarındaki çardağın altındayız. Akdeniz 'in göz kamaştıran güneşi, Torosların heybeti ve açıklarda sezonun ilk turistlerini gezdiren motorların patpatları arasında mükemmel bir Antalya günü mayalanıyor. Ama bizim matematikçilerin bundan etkilendikleri söylenemez. Kulak kabarttığınız zaman Türkçe, İngilizce ve Rusça konuşmaların çoğunun az önceki konuşmada konu edilen problemle ilgili olduğunu görüyorsunuz. Kimileri bazı tekniklerin neden bu problemi çözemediğini anlamaya çalışıyor. Kimileri bir masaya oturmuşlar, önlerindeki kağıda çizdikleri bir kaç sembole derin derin ve hareketsiz bakıyorlar. Zaman zaman biri bir söz söylüyor ve o sembollere bir tane daha katıyor. Öbürü onaylıyor. Sonra tekrar uzun uzun kağıda bakıyorlar. Bazıları oturmuş harıl harıl yakaladıklarını sandıkları bir teoremi kağıda geçiriyorlar ve aynı telaşla kahvelerini içiyorlar. Herkesin elinde bir kahve. Zaten matematikçiler kahveyi teoreme çeviren makineler değil midir? Peki matematikçileri bunca teoremi bulmaya iten dürtü nedir?

Dünyanın tepsi gibi düz olduğunun okullarda okutulduğu yıllarda dünyanın eğik olması gerektiğini düşünen ve yerkürenin eğimini hesaplayan Knidos 'lu Eudoxus bir gün başını göğe kaldırıp arkadaşlarına "Şu güneşin yapısını, şeklini ve büyüklüğünü tam olarak kavrayabileceğimi bilsem yanına gidip yanmaya razı olurdum" **der.**

Öğleden sonra yine bardayız. Bu kez orta yaşlı bir matematikçi bir bölümünü çözdüğü, kalan bölümünün de nasıl çözüleceğini keşfettiği bir problemi meslektaşlarıyla paylaşıyor. Dinleyiciler Kolomb 'un gemisinden Yeni Dünyanın bilinmezliklerine bakan tayfaların heyecanıyla konuşmayı izliyorlar. Sabah konuşan yaşlı matematikçinin yıllar içinde kazandığı rahatlık henüz bu konuşmacıya ulaşmamış. Ne de olsa bu konuşmacı daha genç. Çok kısa sürede konuşmayı konunun teknik ayrıntılarına getiriyor. Artık konuşmayı yalnız o konuda kendileri de araştırma yapan matematikçiler izliyorlar. Öyle ki konuşma arasında bir soru sormak isteyen sanki diğerlerini rahatsız etmek istemezmiş gibi alçak sesle soruyor. Diğerleri kendi dünyalarında harıl harıl çalışıyorlar. Matematikçilerin böyle ayrı bir dünyaya çekilip kendi problemlerinin sırlarını çözmek için kullandıkları en uygun mekanlar bu çeşit konferanslar, fakat onlar diğer fırsatları da değerlendirirler. Örneğin hatır için katıldığı partide bir kenarda oturup somurtan matematikçi "Beni rahatsız etmeyin, meşgulüm" demektedir. Zaten yolda karşıdan karşıya geçerken hayati tehlike atlatmayan ya da duşa girip de çıkmayı unutmayan matematikçiye camiada iyi gözle bakılmaz.

Evinin bahçesindeki çimlerin üzerine sırt üstü yatmış bulutlara bakan matematikçiye oğlu pencereden seslenir "Baba, çok çalıştın, artık içeri gel."

Konuşma ilerledikçe Antalya sıcağı bara dolmaya başlıyor. Havuza atlayanların çığlıkları ve mevsimin ilk sıcaklarını karşılayan kuşların şaşkın ve tereddütlü ötüşleri bardakilerin dikkatini dağıtmaya yetmiyor. Konuşmadan kopanlar zaten kendi problemlerine yoğunlaşmış çözüm arıyorlar. Konuşmayı takip edenler ise orta yaşlı matematikçinin çizdiği şekillerin simgelediği kavramları kendi matematik gözlerinde canlandırmak üzere konuşmacı ile birlikte başka bir boyuttalar. Zaten tahtaya çizilen şekiller iki boyutlu gerçel figürler, oysa anlatılan konu karmaşık sayılarla ilgili çok boyutlu bir uzayda olan bir olay. Poincaré geometri için "Yanlış şekillerle doğru düşünebilme sanatıdır" der. Barda bu dünya ile temas halinde kalan tek kişi oturum başkanı. Onun görevi de konuşmanın zamanında bitmesini sağlamak. Bar, içindekilerle birlikte bir kara deliğin içinden bambaşka bir evrene ışınlanmış. Zamanı gelince bu barı yine bu otelin birinci katındaki köşesine geri getirme görevi oturum başkanında. Sık sık saatine bakıyor. Tüm sorumluluk onda.

Yirminci yüzyılın en yetkin matematikçilerinden Hilbert 'e eğer bin yıl sonra dünyaya geri gelebilse ilk merak edip öğrenmek isteyeceği şeyin ne olacağı sorulduğunda "Riemann hipotezi çözüldü mü diye sorarım" **demiştir.**

Konferansın son günü. Çok genç bir matematikçi üzerinde çalıştığı bir problemi anlatıyor. Bu son konuşma olmasına rağmen bar yine dolu. Genç matematikçinin konuyu çok kısa sürede teknik ayrıntılara boğacağı ve dinleyicilere kendi problemleriyle ilgilenmek için çok daha uzun bir süre vereceği tahmin edildiği için kimse bu fırsatı kaçırmak istememiş. Gerçekten genç matematikçi öyle bir coşku, heyecan ve süratle teknik labirentlere dalıyor ki onu ön sıralarda dinleyen hocası fenalık geçiriyor. Her genç matematikçinin konuşmasında olduğu gibi konuşma derhal içinden çıkılmaz hesaplara ve kendinden başka kimsenin anlamadığı ayrıntılara kayıyor. Oysa öylesine büyük bir coşku ve sevgiyle anlatıyor ki.

Bu tutkunun, bu sevginin, bu ateşin bir tarifi var mı?

Matematiği Mısırlı matematikçilerden bile daha iyi bildiğini söylemekten çekinmeyen Democritus tüm bu kibirine rağmen "Her hangi bir şeyin nedenini kavrayabilmeyi tüm Pers krallığını fethetmeye tercih ederim" **demiştir.**

Konuşmayı takip edebilenler artık konuyu bırakmışlar, genç matematikçinin makul bir açığını yakalayıp onu biraz hırpalamak istiyorlar. Bu çeşit iyi niyetli hırpalamalar matematik eğitiminin bir parçasıdır. Önde oturan hoca da böyle bir hırpalama başlarsa hangi safhada müdahele etmesi gerekeceğinin hesabını yapıyor. Ama tüm heyecanına, süratine ve tecrübesizliğine rağmen genç konuşmacı beklenen açığı vermiyor. Herkes memnun. Oturum başkanı saatine bakıyor ve barı tekrar yerkürenin Antalya civarındaki eski yerine ışınlıyor. Konuşmanın ve konferansın bittiğini ilan ediyor.

On yedinci yüzyıl İngiliz şairlerinden *Alexander Pope* bir şiirinde şöyle der:

> Öğrenmenin azı tehlikeli birşeyştir;
> Kana kana iç, ya da tadına bile bakma ilham pınarının.
> Orada sığ akıntılar başını döndürür, sarhoş eder
> ve ancak bol bol içince ayıltır yeniden.

Amerika Birleşik Devletlerinde üniversite ya da araştırma enstitülerinde çalışan matematikçilerin üye olduğu Amerikan Matematik Derneğinin üye sayısı yaklaşık 30,000 'dir. Uygulamaya yönelik ve endüstride çalışan matematikçiler de Uygulamalı ve Endüstriyel Matematik Derneği 'ne üye olurlar ve o derneğin de yaklaşık 10,000 üyesi vardır. Demek ki Amerika yaklaşık 235 milyon nüfusu içinde 40,000 kayıtlı matematikçi barındırmaktadır. Kaba bir hesapla Türkiye 'de de bu oranlar geçerli olsa, 10,000 civarında kayıtlı matematikçimizin olmasını bekleriz. Oysa bizde bu sayı 500 civarındadır.

Napolyon "Bir ülkedeki matematik biliminin gücü ile devletin gücü birbirine paraleldir' der.

Matematikçiler artık ertesi yıl yine toplanılması dilekleriyle otelden ayrılmaya başladılar. Toplantıyı ertesi yıl düzenleme görevini verdikleri matematikçiye toplantının daha iyi olması için ne yapması gerektiği konusunda fikirler veriyorlar. Verilen fikirler hep konuların seçimi, konuşmaların içerikleri ve tartışma zamanlarının ayarlanmasıyla ilgili. Kimse konferans boyunca bir türlü çalışmayan havalandırma sisteminden, çıkan yemeklerin kalitesizliğinden, en acil durumlarda göçen resepsiyon bilgisayarlarından ya da barın ders için pek de ideal bir mekan olmadığından şikayet etmiyor. Nasıl olsa seneye konuşmalar başladığında herkes o konuşmadan alacağı kadarını alıp kendi problemlerinin dünyasına çekilecek. Bu dünya ile ilgili hiç bir talepleri o yüzden olmuyor. Ama bunun bir istisnası var. Kahveler zamanında ve kıvamında hazır olmalı. Eğer kahve servisi biraz aksasaydı yıkarlardı oteli...

NOT: Bu yazı, TÜBİTAK 'ın "Bilim ve Teknik" dergisinin 392.sayısında (Temmuz/2000) 66-68.sayfalarda yayınlanmıştır.

ERDÖS 'ÜN BİR PROBLEMİ

Ogün Öge
Özel Selim Pars Lisesi, Florya/İSTANBUL

Giriş. P. Erdös, $k > 8$ ise 2^k sayısının 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamayacağını iddia etmiştir. Erdös 'ün bu problemi hala çözülememiştir [1]. Bu çalışmada Erdös 'ün iddiasının sonsuz sayıda k için doğru olduğunu gösterdik.

TEMEL SONUÇLAR:

$k > 8$ bir tamsayı olmak üzere 2^k 'nın 3 tabanına göre yazılışı:

$$2^k = a_n 3^n + a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + ... + a_j 3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 + a_0 \qquad (1)$$

olsun. Eğer bu yazılışta bir i $(0 \leq i \leq n)$ için $a_i = 2$ ise, 2^k sayısı 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz. O halde Erdös 'ün iddiası şuna denktir:

$k > 8$ olmak üzere,

$$2^k = a_n 3^n + a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + ... + a_1 3 + a_0$$

ise, a_i sayılarından en az biri 2 'dir.

Öncelikle (1) yazılışında $a_0 \neq 0$ 'dır. Çünkü $a_0 = 0$ için, $2^k = 3(a_n 3^{n-1} + ... + a_1)$ olup buradan $3|2^k$ elde edilir ki bu mümkün değildir. Şimdi (1) yazılışında bir katsayı (varsayalım ki a_j $\;j \geq 1$ katsayısı) 2 olsun. (1) 'deki eşitliği *mod* 3 için yazarsak,

$$2^k \equiv a_j 3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 3 + a_0 \equiv 2.3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 3 + a_0 \ (mod\ 3^{j+1})$$

elde edilir.

Şimdi $t = 2.3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 3 + a_0$ dersek, $2^k \equiv t \ (mod\ 3^{j+1})$ bulunur. Fakat $a_0 \geq 1$ 'den $t \geq 2.3^j + 1$ elde edilir. O halde şunu elde ederiz:

Sonuç 1: 2^k $(k > 8)$ sayısının 3 tabanındaki (1) yazılışında 3^j 'nin katsayısı 2 ise,

$$2^k \equiv t (mod\ 3^{j+1}), \quad t \geq 2.3^j + 1$$

'dir.

Şimdi $k > 8$ olmak üzere bir j $(j \geq 1)$ tamsayısı için

$$2^k \equiv t \ \ (mod\ 3^{j+1}) \qquad (2)$$

olup burada $t \geq 2.3^j + 1$ olsun. ($t < 3^{j+1}$ olduğunu kabul edebiliriz.) Kongrüans tanımından

$$2^k \equiv m.3^{j+1} + t \qquad (3)$$

elde edilir. Burada $m > 0$ 'dır. Çünkü $m < 0$ olsa, $2^k \leq -3^{j+1} + 3^{j+1} - 1 < -1$ olur ki bu mümkün değildir. $m = 0$ da olamaz, çünkü bu durumda $2^k = t < 3^{j+1} < 2^k$ çelişkisi elde edilir. $m > 0$ sayısının 3 tabanına göre yazılışı

$$m = b_r 3^r + b_{r-1}3^{r-1} + ... + b_1 3 + b_0 \qquad (0 \leq b_i \leq 2)$$

olsun. Bunu (3) 'te kullanarak,

$$2^k = b_r 3^{r+j+1} + b_{r-1} 3^{j+r} + ... + b_0 3^{j+1} + t \tag{4}$$

elde edilir. t sayısının 3 tabanındaki yazılışı

$$t = c_s 3^s + ... + c_1 3 + c_0 \quad (0 \leq c_i \leq 2) \tag{5}$$

olsun. Burada $c_s = 2$ ve $j = s$ olduğunu gösterelim. $j < s$ olamaz, çünkü $c_s \geq 1$ olduğundan $t \geq 1.3^{j+1}$ bulunur ki bu $t < 3^{j+1}$ ile çelişir. $s < j$ ise,

$$t \leq 2.3^{j-1} + 2.3^{j-2} + ... + 2.3 + 2 = 2(1 + 3 + ... + 3^{j-1}) = 2.\frac{3^j - 1}{3 - 1},$$

$t \leq 3^j - 1$ bulunur ki bu $t \geq 2.3^j + 1$ ile çelişir. $s = j$ olsun. Bu durumda $c_s = 2$ olmalıdır. Aksi takdirde, $c_s = 1$ ise,

$$t \leq 3^j + 2.3^{j-1} + 2.3^{j-2} + ... + 2.3 + 2 = 3^j + 2(1 + 3 + ... + 3^{j-1}) = 3^j + 2.\frac{3^j - 1}{3 - 1},$$

$t \leq 2.3^j - 1$ bulunur ki bu da $t \geq 2.3^j + 1$ ile çelişir. O halde (5) 'teki yazılış

$$t = 2.3^j + c_{j-1} 3^{j-1} + ... + c_1 3 + c_0$$

olup bunu (4) 'te kullanarak

$$2^k = b_r 3^{r+j+1} + ... + b_0 3^{j+1} + 2.3^j + ... + c_1 3 + c_0$$

bulunur ki bu bize 3 tabanına göre yazılışında en az bir basamağın (sondan $(j+1)$. basamağın) 2 olduğunu gösterir. Diğer yandan, $2^k \equiv 2 \ (mod\ 3)$ ise, bu bize $2^k \equiv a_n 3^n + ... + a_1 3 + 2$ olduğunu gösterir ki burada da birler basamağı 2 'dir. O halde şu teoremi elde ederiz:

Teorem 1. $k > 8$ bir tamsayı olmak üzere 2^k 'nın 3 tabanına göre yazılışında en az bir basamağın 2 olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{array}{ll} 2^k \equiv t_1 (mod\ 3) & t_1 = 2 \\ 2^k \equiv t_2 (mod\ 3^2) & t_2 \geq 2.3 + 1 \\ 2^k \equiv t_3 (mod\ 3^3) & t_3 \geq 2.3^2 + 1 \\ \vdots & \\ 2^k \equiv t_j (mod\ 3^j) & t_j \geq 2.3^{j-1} + 1 \\ \vdots & \\ 2^k \equiv t_q (mod\ 3^q) & t_q \geq 2.3^{q-1} + 1 \end{array} \tag{6}$$

kongrüanslarından en az birinin sağlanmasıdır. (Burada q tamsayısı $3^{q+1} > 2^n > 3^q$ koşulunu gerçekleyen pozitif sayıdır.)

Şimdi bazı k değerleri için (6) 'daki kongrüanslardan bazılarının sağlandığını göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki teoremi kullanacağız:

Teorem 2. (Euler) $(a, m) = 1$ $(a \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z}, m \geq 1)$ olmak üzere $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\ m)$ 'dir.

$m = 3^2$ için Euler Teoremini uygularsak, $\varphi(3^2) = 2.3^{2-1} = 6$ olduğundan $2^6 \equiv 1 (mod\ 3^2)$ elde edilir. Kongrüansların özelliklerinden $2^6 \equiv 1 (mod\ 3)$ olduğu da çıkar. Şimdi 2^k $(k > 8)$ sayısını 6 ile bölelim. $k = 6n + j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{array}{lll}
j=0 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n} \equiv 1\ (mod\ 3), & t_1 = 1 \neq 2; \\
j=1 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+1} \equiv 2\ (mod\ 3), & t_1 = 2; \\
j=2 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+2} \equiv 1\ (mod\ 3), & t_1 = 1 \neq 2; \\
j=3 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+3} \equiv 2\ (mod\ 3), & t_1 = 2; \\
j=4 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+4} \equiv 1\ (mod\ 3), & t_1 = 1 \neq 2; \\
j=5 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+5} \equiv 2\ (mod\ 3), & t_1 = 2
\end{array}$$

bağıntılarını elde ederiz. Yine $mod\ 3^2$ 'yi kullanarak,

$$\begin{array}{ll}
j=0 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n} \equiv 1\ (mod\ 3^2) & 1 \not\geq 2.3+1 \\
j=1 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+1} \equiv 2\ (mod\ 3^2) & 2 \not\geq 2.3+1 \\
j=2 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+2} \equiv 4\ (mod\ 3^2) & 4 \not\geq 2.3+1 \\
j=3 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+3} \equiv 8\ (mod\ 3^2) & 8 \geq 2.3+1 \\
j=4 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+4} \equiv 7\ (mod\ 3^2) & 7 \geq 2.3+1 \\
j=5 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+5} \equiv 5\ (mod\ 3^2) & 5 \not\geq 2.3+1
\end{array}$$

elde edilir. O halde Teorem 1 'den dolayı şu son cu elde ederiz:

Sonuç 2. $k > 8$ bir tamsayı olmak üzere, $k = 6n+1,\ 6n+3,\ 6n+4,\ 6n+5$ formunda ise, 2^k sayısı 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Bu formda olan pozitif sayıların sayısı sonsuz olduğundan şunu elde ederiz:

Sonuç 3. Sonsuz sayıda k için Erdös 'ün iddiası doğrudur.

Şimdi $m = 3$ için Euler Teoremini uygularsak $\varphi(3^3) = 2.3^2 = 18$ olup, $2^{18} \equiv 1(3^3)$ bulunur. Bunu kullanarak $k = 18n + j,\ j = 0, 1, 2, 3, ..., 17$ olmak üzere

$$\begin{array}{lllll}
j=0 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 1\ (3^2), & 2^k \equiv 1\ (3^3) & \\
j=1 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 2\ (3^2), & 2^k \equiv 2\ (3^3) & (*) \\
j=2 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 4\ (3^2), & 2^k \equiv 4\ (3^3) & \\
j=3 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 8\ (3^2), & 2^k \equiv 8\ (3^3). & (*) \\
j=4 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 7\ (3^2), & 2^k \equiv 16\ (3^3) & (*) \\
j=5 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 5\ (3^2), & 2^k \equiv 5\ (3^3) & (*) \\
j=6 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 1\ (3^2), & 2^k \equiv 10\ (3^3) & \\
j=7 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 2\ (3^2), & 2^k \equiv 20\ (3^3) & (*) \\
j=8 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 4\ (3^2), & 2^k \equiv 13\ (3^3) & \\
j=9 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 8\ (3^2), & 2^k \equiv 26\ (3^3) & (*) \\
j=10 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 7\ (3^2), & 2^k \equiv 25\ (3^3) & (*) \\
j=11 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 5\ (3^2), & 2^k \equiv 23\ (3^3) & (*) \\
j=12 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 1\ (3^2), & 2^k \equiv 19\ (3^3) & (*) \\
j=13 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 2\ (3^2), & 2^k \equiv 11\ (3^3) & (*) \\
j=14 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 4\ (3^2), & 2^k \equiv 22\ (3^3) & (*) \\
j=15 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 8\ (3^2), & 2^k \equiv 17\ (3^3) & (*) \\
j=16 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 7\ (3^2), & 2^k \equiv 7\ (3^3) & (*) \\
j=17 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 5\ (3^2), & 2^k \equiv 14\ (3^3) & (*)
\end{array}$$

Bu tabloda "$(*)$" ile gösterilenlerde Teorem 2 'deki kongrüanslardan en az biri sağlanır. Bunların sayısı 14 tanedir. O halde şunu elde edebiliriz:

Teorem 3. $k > 8$ ve $k = 18n + j$, $(j \neq 0, 2, 6, 8)$ için 2^k, 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Şimdi $N > 8$ bir tamsayı olsun. $k = 18n + j,\ 0 \le j \le 17$ ise, bu formda olan ve $8 < k \le N$ koşulunu gerçekleyen sayıların sayısını bulalım.

$$8 < 18n + j \le N \text{ ve } 1 \le \frac{8-j}{18} < n \le \frac{N-j}{18} < \frac{N}{18} - 1$$

olup bu formda olan sayıların sayısı en az $\frac{N}{18} - 1$ 'dir. O halde bunu kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4. $N > 8$ olmak üzere $8 < k \le N$ koşulunu gerçekleyen sayıların en az $\frac{14}{18}N - 14$ tanesi için Erdös 'ün iddiası doğrudur.

Euler formülünü 3^t $(t > 3)$ için kullanırsak Teorem 4 'teki $\frac{14}{18}$ oranının daha da büyük olacağı sezilmektedir.

Böylece bu çalışmada Erdös 'ün bu iddiasının k 'nın belirli sonsuz formlarda olması halinde doğru olduğu sonucunu elde ettik. Bu bulgu Erdös 'ün bu iddiasının doğru olduğu savını kuvvetlendirmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Richard, K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag (1994).

BİR BOYAMA PROBLEMİNDE "FERMAT SÜRPRİZİ"

p sayısı asal olmak üzere, bir daire p tane eşit dilime bölünmüştür. Verilmiş n rengi kullanarak dilimleri boyuyoruz. (Her dilim, sadece, bir renk kullanılarak boyanıyor!) Dairenin dönmesiyle çakışan durumları bir kez saymak koşuluyla, dairenin kaç farklı boyanmasını elde etmek mümkündür?

Çözüm. Her dilimi n tane rengin herhangi biri ile boyayabileceğimizden, daire için n^p tane boyama elde ederiz, ve bunlardan $n^p - n$ tanesinde en az iki renk kullanılmıştır. Dönmeler sonucu çakışan durumları bir kez saymak durumunda olduğumuzdan, en az iki rengin kullanılmış olduğu farklı boyama sayısı $\frac{n^p-n}{p}$ olacaktır. Bu sayıya, sadece bir renk kulanılarak yapılan boyama sayısını (yani n sayısını) da eklersek, $\frac{n^p-n}{p} + n$ sayısı problemde bulunması istenen sayı olur.

Bu formülden görüldüğü gibi, p 'nin asal olması halinde $n^p - n$ sayısı p 'ye tam bölünür. İşte size **Fermat 'nın "Küçük Teoremi"**!

EUCLİDES 'İN "ELEMENTLER" 'İ

Metehan Aydın
Özel Samanyolu Lisesi, ANKARA

Eski Yunanlılar için matematik öncelikle geometri demekti: Onların matematiksel düşünceye katkıları en başta geometride kendini gösterir. Euclides sistemi bunun somut bir örneğidir.

Bu noktada akla şöyle bir soru gelebilir: Yunanlıların geometride tanık olduğumuz büyük başarısı, neden sayısal ilişkileri içeren aritmetik ve cebirde kendini göstermez? Bu sorunun kesin yanıtını bilmiyoruz. Ancak, Pythgorasçıların irrasyonel sayıları tüm çabalarına karşın tamsayı olarak gösterememelerinde nedeni arayanlar vardır. Onları tedirginliğe iten bu tür bir güçlük geometride ortaya çıkmamıştır.

Yunan öncesi dönemin özelliği sınama-yanılma yöntemine dayalı ampirik bilgi düzeyinde kalmış olmasıdır. Babilliler gibi Mısırlılar da daha çok yaşamın pratik ihtiyaçlarından kaynaklanan ölçme ve hesaplama işlemlerini geliştirme ve kullanma çabası içindeydiler. Yunanlıların her iki kültür çevresinin birikimlerinden önemli ölçülerde yararlandıklarını biliyoruz. Ne var ki, onlar aldıklarıyla yetinmediler. Bir kez Yunanlıların matematikteki ilgisi, felsefede olduğu gibi, pratik olmaktan çok teorik nitelikte idi: Bilgide kesinlik arıyorlardı; açıkl mak ve anlamak başlıca kaygılarıydı. Geometriyle, işe yaradığı için değil; bilme, öğrenme ve anlama tutkularını doyurmak için uğraşıyorlardı. Onlar için geometri uzaysal ilişkilerin bilimiydi - üstelik diğer alanların elvermediği sıkı düşünme ve ispatlama yöntemini içeren bir bilim! Pythagoras ve ondan esinlenen Platon 'un gözünde geometrinin önemi entellektüel bir disiplin olmasındaydı. Soyut ve katıksız niteliğiyle matematik, özellikle ispata dayanan geometri, metafizik düşünce gibi insan kafasının, değeri kendi içinde olan bir ürünüydü.

Euclides 'in "Elementler" 'i diye bilinen ünlü yapıt (M.Ö. 300) geometride doruğa erişen Yunan matematik düşüncesini örneklemektedir. Yüzyıllar boyunca insan düşüncesinin "yetkin" bir ürünü olarak etkisini sürdüren bu yapıtta, daha önceki dönemlerin buluş ve birikimlerinin mantıksal bir düzenlemesini bulmaktayız. "Elementler", klasik ve ortaçağlarda olduğu gibi, Yeni ve Yakın Çağlarda da (XIX. yüzyılın sonlarına dek) tüm yüksek öğrenim kurumlarında rakipsiz ders kitabı olarak okutulmuştur. Daha da önemlisi, Euclides 'in geometride ortaya koyduğu aksiyomatik sistemin tüm diğer bilimler için özenilen bir model oluşturmuş olmasıdır.

Bu başarılı modelin mimarı Euclides 'in kendisine ilişkin bilgimiz yok denecek kadar azdır. Bu konuda Proclus 'tan sadece şunları öğreniyoruz:

Euclides "Elementler" adlı yapıtını, Eudoxus 'un ispatladığı teoremleri bir araya getirerek oluşturmuştur. Aslında onun başarısı yeni teoremler bulmasında değil, kendisinden önce ortaya konmuş teoremleri mantıksal ilişkileri içinde özgün bir biçimde sunmasındadır. Doğum ve ölüm yılları kesinlikle bilinmemekle birlikte, yaşamının *Ptolemy I* dönemine rastladığı söylenebilir. Bu dönemden hemen sonra yaşayan *Archimedes*, Euclides 'ten söz etmektedir. Gene, söylentiye göre, *Ptolemy I*, ünlü geometriciye zor bulduğu "Elementler" 'i okumaksızın geometriyi kestirmeden öğrenmenin yolunu sorduğunda, Euclides, geometriye giden bir **Kral Yolu** olmadığını söyler. Bunlara ve *Platon* 'un yazdıklarına bakarak, Euclides 'in Aristoteles 'ten hemen sonra, ama Eratosthenes ile Archimedes 'ten önce yaşadığı, "Elementler" 'i M.Ö. 300 sıralarında, yaşadığı İskenderiye 'de yazdığı anlaşılmaktadır. Eğitimini Atina 'da Platon 'un "Akademi" 'sinde tamamlamış olduğu sanılan Euclides, ünlü İskenderiye Üniversitesinde matematik öğretmeniydi.

"Elementler" 'e her dönemde matematik düşüncenin klasik anıtı gözüyle bakılmıştır. Doğa bilimlerinde, hatta felsefede Euclides modelinin günümüze dek süren etkisi gözönünde tutulduğunda bu ifade yerindedir. Gerçi Eclides 'ten önce de benzer kitapların yazıldığı bilinmektedir. Ama bunlardan hiç biri "Elementler" 'in etki gücünü göstermediği için zamanla hepsi unutulmuştur. Aslında özgün bir çalışma olmadığı bilinen bu yapıtın etki gücünün nereden kaynaklandığı sorulabilir. Kısaca söylemek gerekirse, "Elementler" geometriye, hiç bir düşünce alanında örneği gösterilemeyen mantıksal bir bütünlük kazandırmıştır. Euclides, daha önce değindiğimiz gibi, kendisinden önceki dönemlerde ortaya konan, değişik biçimlerde ispatları verilen önermeleri 'aksiyom - teorem' ilişkisi içinde sunmaktadır. Başka bir deyişle, öncül diye seçtiği az sayıda aksiyom, postulat ve tanımlardan, dedüktif çıkarımla, geriye kalan tüm önermelerin ispatlarını vermektedir. Aksiyomatik sistemde ispatlanan önermeler, sistemin teoremlerini oluşturur. "Elementler" 'in olağanüstü etkisi geometriyi bu biçimde sunma başarısıyla açıklanabilir.

"Elementler" 'i oluşturan 13 kitapta 465 önerme vardır. Çoğu kez sanıldığının tersine, bu önermelerin önemli bölümü doğrudan geometriye değil, sayılar teorisine ve cebirsel geometriye ilişkindir. İlk kitapta, kimi açıklamalarla birlikte, çakışma, paralel çizgiler ve doğrusal şekillere ait teoremler yer almaktadır. İkinci kitap hemen tümüyle cebirsel geometriye; üçüncü kitap daireye; dördüncü kitap düzgün çokgenler oluşturmaya ayrılmış, beşinci ve altıncı kitaplarda ise Eudoxus 'un oranlar ('proportions') teorisi, teorinin geometriye uygulanması ele alınmıştır. 102 önermeyi içine alan yedinci, sekizince ve dokuzuncu kitaplarda basit sayılar teorisine; onuncu kitapta irrasyonel (örneğin $\sqrt{2}$) sayılara yer verildiğini görmekteyiz. Geriye kalan üç kitap hacimlerle ilgilidir. Günümüzde orta dereceli okullarda okutulan ders kitaplarına, düzlem ve hacim konuları bakımından, Euclides 'in I, III, IV, VI, XI ve XII. kitaplarının birer özeti gözüyle bakılabilir.

Görüldüğü gibi ayrıca "Elementler" içerik yönünden oldukça kapsamlı bir kaynaktır.

EĞLENCELİ BİR MATEMATİK SORUSUNUN YANITI

Önceki sayımızda sorduğumuz "Eğlenceli Bir Matematik Sorusu" 'na okurlarımız **Ahmet Araç** 'tan (Denizli Erbakır Fen Lisesi, DENİZLİ) ve **Göksel Güven** 'den (Yozgat Şehitler Fen Lisesi, YOZGAT) birer yanıt geldi:

$$\frac{\text{RERERE}}{\text{RARARA}} = \frac{\text{CİM}}{\text{BOM}} = \frac{\sqrt{\text{G+S}}}{\sqrt{\text{C+İ+M}} + \sqrt{\text{B+O+M}}}$$

$$\frac{121212}{181818} = \frac{360}{540} = \frac{\sqrt{9+7}}{\sqrt{3+6+0} + \sqrt{5+4+0}}$$

NOT: G ile S 'nin değerleri yer değiştirebilirler.

EŞİTSİZLİKLERİN YARDIMIYLA DENKLEM ÇÖZÜMÜ

Ali Nabi Duman
Özel Arı Fen Lisesi, ANKARA

Bu yazıda eşitsizliklerin yardımıyla denklem çözümleri anlatılacaktır. Sunuş kolaylığı olması için problemler dört gruba ayrılmıştır. Elbette ki bu grupların sayısı ve içlerindeki soru çeşidi artırılabilir.

(a) Sıralama Yöntemi: Bir simetrik denklem sisteminin bilinmeyenleri $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Bu sistemin çözümünü bulurken $x_n \geq x_{n-1} \geq ... \geq x_1$ kabul etmemizde bir sakınca yoktur. Bu şekilde elde edilen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ çözümünün permütasyonları tüm sıralı çözüm takımlarını verecektir. Şimdi bir kaç örnekle yöntemin kulanımını görelim:

Örnek 1: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümünün olmadığını gösteriniz. (1991 Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı)

Çözüm: Denklem sistemi simetrik olduğundan, $a \geq b \geq c \geq d > 0$ kabulü çözüm kümesini değiştirmez. Buradan $a^2 \geq b^2$, $a^2 \geq c^2$ ve $a^2 \geq d^2$ elde ederiz.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 4a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 \geq a^2b^2c^2d^2 \text{ bulunur.}$$

$a^2 > 0$ olduğundan eşitsizliğin iki tarafını a^2 'ye bölmek eşitsizliğin yönünü değiştirmez, $4 \geq b^2c^2d^2$ elde edilir.

b, c, d birer pozitif tamsayı olduğundan son eşitsizlik ancak $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$ veya $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ olduğunda mümkündür.

Eğer $(b, c, d) = (2, 1, 1)$ ise, (1) 'den $a^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 4a^2$ elde edilir. Buradan $a^2 = 2, a = \mp\sqrt{2}$ bulunur ki bu da $a \in \mathbb{N}$ ile çelişir. Eğer $(b, c, d) = (1, 1, 1)$ ise, (1) 'den $a^2 + 3 = a^2 \Rightarrow 3 = 0$ çelişkisi elde edilir. Yani $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Örnek 2: (Kanada Olimpiyadı)

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y \qquad (1)$$

$$\frac{4y^2}{1+4y^2} = z \qquad (2)$$

$$\frac{4z^2}{1+4z^2} = x \qquad (3)$$

denklem sisteminin (x, y, z) çözüm takımlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 \geq 0$ olduğundan

$$4x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x^2}{1+4x^2} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0\,.$$

Benzer şekilde $x \geq 0$, $z \geq 0$ elde edilir. Şimdi $y \geq z$ kabul edelim. $y \geq z$, (1) ve (2) 'den $\frac{4x^2}{1+4x^2} \geq \frac{4y^2}{1+4y^2}$, $1 + 4x^2 > 0$ olduğundan içler dışlar çarpımı yapmamız eşitsizliğin yönünü değiştirmez:

$$4x^2(1 + 4y^2) \geq 4y^2(1 + 4x^2)$$

$$\Rightarrow 4x^2 \geq 4y^2 \Rightarrow x^2 \geq y^2.$$

$x, y \geq 0$ olduğundan $x \geq y$ elde edilir. Dolayısıyla $x \geq y \geq z$ olur. $x \geq y$, (1) ve (3) 'ten,

$$\frac{4z^2}{1+4z^2} \geq \frac{4x^2}{1+4x^2} \Rightarrow 4z^2 \geq 4x^2 \Rightarrow z \geq x$$

bulunur.

Yani $z \geq x \geq y \geq z$ olur ki bu $x = y = z$ durumunda mümkündür. $\frac{4x^2}{1+4x^2} = x$ denklemi $x = 0$ için sağlanır. Çözümün biri $(0, 0, 0)$ olarak bulunur.

$$x > 0 \Rightarrow \frac{4x}{1+4x^2} = 1 \Rightarrow 4x = 1 + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2}.$$

Buradan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ bir başka çözüm olur.

Örnek 3:

$$x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2$$

$$x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1$$

sisteminin tüm çözümlerini bulunuz $(b \geq a > 0)$.

Çözüm: $b \geq a \Rightarrow b^2 \geq a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 0$ ve $(x+a)^2 \geq 0$ 'dır. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak,

$$x^2 + 2ax + a^2 + b^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2ax + b^2 \geq 0$$

bulunur. Dolayısıyla denklemlerin sol tarafı pozitif olduğundan sağ tarafları da pozitiftir, yani $x_i \geq 0$ olur $(i = 1, 2, ..., n)$. Eğer $x_1 = x_2$ ise, eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım.

$$x_3 - x_2 = (x_2^2 - x_1^2) + 2a(x_2 - x_1)$$

$$x_4 - x_3 = (x_3^2 - x_2^2) + 2a(x_3 - x_2)$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) + 2a(x_{n-1} - x_{n-2})$$

$$x_1 - x_n = (x_n^2 - x_{n-1}^2) + 2a(x_n - x_{n-1}) \ .$$

$x_1 = x_2$ durumunda eşitliklerden $x_1 = x_2 = ... = x_n$ bulunur. Eğer $x_2 > x_1$ ise, eşitliklerden

$$x_3 > x_2,\ x_4 > x_3,\ ...,\ x_n > x_{n-1},\ x_1 > x_n$$

bulunur.

Dolayısıyla $x_1 > x_n > x_{n-1} > ... > x_2 > x_1, x_1 > x_1$ çelişkisi elde edilir. $x_1 > x_2$ durumu da benzer şekilde yapılır.

$$x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_1 \Rightarrow x_1^2 + (2a-b)x_1 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-2a \mp \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2} \ .$$

Karekök içinin pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$(1-2a)^2 - 4b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2a-2b)(1-2a+2b) \geq 0$$

'dır. $b \geq a > 0$ olduğundan $1 - 2a + 2b > 0$ 'dır.

Eğer $1 - 2a - 2b < 0$ ise, eşitsizlik sağlanmaz. Bu durumda sistemin çözümü olmaz.

Eğer $1 - 2a - 2b \geq 0$ ise,

$$x_1 = ... = x_n = \frac{1 - 2a + \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2},$$

$$x_1 = ... = x_n = \frac{1 - 2a - \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2}$$

çözümleri bulunur.

(b) Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği Yardımıyla Denklem Çözümü

Öncelikle aritmetik ortalama, geometrik ortalama ve harmonik ortalamayı hatırlayalım $(a_i \in \mathbb{R})$:

$$\text{A.O.} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

$$\text{G.O.} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

$$\text{H.O.} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i > 0$ ise, A.O. $\geq$ G.O. $\geq$ H.O. 'dır. Eşitlik durumu ise $a_1 = a_2 = ... = a_n$ olduğunda mümkündür.

Örnek 4: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$ denkleminin doğal sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x, y, z \in \mathbb{N}$ olduğundan A.O.-G.O. eşitsizliğini

$$a_1 = \frac{x}{y},\quad a_2 = \frac{y}{z},\quad a_3 = \frac{z}{x}$$

alarak kullanalım:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3 \ .$$

Eşitlik durumu ise tüm terimlerin eşit olmasında mümkündür; $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$ olur. Buradan $x = y = z = a$ $(a \in \mathbb{N})$ olmalıdır. Çözüm kümesi (a, a, a) biçimindedir.

Örnek 5:

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}$$
$$=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2})$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz $(x,y,z>1)$.

Çözüm: Öncelikle şöyle bir düzenleme yapalım:

$$x+\tfrac{3}{x-1}=x+1-1+\tfrac{3}{x-1}=x-1+\tfrac{x+2}{x-1} \quad (1)$$

$$y+\tfrac{3}{y-1}=y-1+\tfrac{y+2}{y-1},\quad z+\tfrac{3}{z-1}=z-1+\tfrac{z+2}{z-1}.$$

(1) 'de $a_1=x-1$, $a_2=\frac{x+2}{x-1}$ için A.O.-G.O. eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{x-1+\frac{x+2}{x-1}}{2}\geq\sqrt{(x-1)\frac{(x+2)}{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow x-1+\frac{x+2}{x-1}\geq 2\sqrt{x+2}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$y-1+\frac{y+2}{y-1}\geq 2\sqrt{y+2}, z-1+\frac{z+2}{z-1}\geq 2\sqrt{z+2}$$

bulunur. Denklemimizde eşitliğin olması için bu eşitsizliklerin eşitlik olması gerekir. Eşitlik durumu da terimlerin eşit olmasıyla mümkündür.

$$x-1=\tfrac{x+2}{x-1}\Rightarrow x^2-2x+1=x+2$$

$$\Rightarrow x^2-3x-1=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\tfrac{3\mp\sqrt{13}}{2}.$$

$\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0$ olduğundan bu bir kök olamaz, çünkü $x,y,z>1$ 'dir. O halde çözüm kümesi $(\frac{3+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2})$ olur.

Örnek 6:

$$x_1+x_2+...+x_n=9$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$$

$(x_i>0, n\in\mathbb{N})$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: A.O.-H.O. eşitsizliğinden,

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{n}\geq\frac{n}{1},\Rightarrow 9\geq n^2,$$

$n>0\ \Rightarrow 3\geq n$.

(1) $n=1\Rightarrow x_1=9$ ve $\frac{1}{x_1}=1$ olmalıdır; bu ise mümkün değildir.

(2) $n=2\Rightarrow x_1+x_2=9$ ve $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 'dir. Böylece $x_1+x_2=x_1x_2\Rightarrow x_1x_2=9$ 'dur. x_1 ve x_2, t^2-9t+9 denkleminin kökleridir.

$$x_{1,2}=\frac{9\mp\sqrt{45}}{2}$$

(3) $n=3\Rightarrow x_1+x_2+x_3=9$ ve $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$ 'olur. Bu ise A.O.=H.O. demektir ki bu da terimlerin eşit olması durumunda mümkündür: $x_1=x_2=x_3=1$.

(c) Tamkısım Fonksiyonu ve Eşitsizlikler

$[\![x]\!]$, x 'ten küçük en büyük tamsayıdır. Bazı tamkısım fonksiyonlu problemler eşitsizliklerin yardımıyla çözülebilir.

Örnek 7: $x[\![x[\![x[\![x]\!]]\!]]\!]=88$ denkleminin pozitif reel sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x\geq 4\Rightarrow 4.4.4.4\leq x[\![x[\![x[\![x]\!]]\!]]\!]=88$ olur ki $256\leq 88$ mümkün degildir. Eğer $x\leq 3$ ise, $88=x[\![x[\![x[\![x]\!]]\!]]\!]\leq 3^4$ elde ederiz. $88\leq 81$ olur, çelişki çıkar.

Demek ki $3<x<4$ 'tür, $[\![x]\!]=3$ bulunur. $x[\![x[\![3x]\!]]\!]=88$ 'dir, $3<x\Rightarrow 9<3x$ olur. $3x>10$ olsaydı $88=x[\![x[\![3x]\!]]\!]>3[\![3.10]\!]=90$ olurdu. Dolayısıyla, $9<3x<10$ olur. $[\![3x]\!]=9$ elde edilir.

$x.[\![9x]\!]=88$, $9<3x\Rightarrow 27<9x<30$ olur. $[\![9x]\!]=29$ olsaydı, $30>9x\geq 29$ olması gerekirdi. Ama $9x=\frac{9.88}{29}=27,...$ 'dır.

$[\![9x]\!]=27$ olsaydı, $28>9x\geq 27$ olması gerekirdi. Ama $9x=\frac{9.88}{27}=29,...$, yani $[\![9x]\!]=$

29 olmalıdır. Buradan $x = \frac{22}{7}$ bulunur. Kontrol edildiğinde denklemin sağlandığı görülebilir.

Örnek 8:

$$y = \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

ise, $[\![y]\!]$ kaça eşittir?

Çözüm: $\sqrt{k} < \sqrt{k+1} \Rightarrow 2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}, \qquad (1)$$

$\sqrt{k} > \sqrt{k-1} \Rightarrow 2\sqrt{k} > \sqrt{k-1} + \sqrt{k}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}$$

$$= \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \,.$$

(1) ve (2) 'den

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Burada k yerine 9 'dan 10^6 'a kadar olan tamsayıları yazıp oluşan eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$\sqrt{10} - \sqrt{9} < \frac{1}{2\sqrt{9}} < \sqrt{9} - \sqrt{8}$$

$$\sqrt{11} - \sqrt{10} < \frac{1}{2\sqrt{10}} < \sqrt{10} - \sqrt{9}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{10^6+1} - \sqrt{10^6} < \frac{1}{2\sqrt{10^6}} < \sqrt{10^6} - \sqrt{10^6-1}$$

$$\sqrt{10^6+1} - 3 < \frac{1}{2} - y < \sqrt{10^6} - \sqrt{8}$$

elde edilir. Buradan $997 < \frac{1}{2}y < 997,172$ ve $1994 < y < 1994,344 \Rightarrow [\![y]\!] = 1994$ bulunur.

(d) Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinin Yardımıyla Denklem Çözümü

Cauchy-Schwartz eşitsizliği: $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ için,

$$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \leq$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$$

Eşitlik durumu $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$ olduğunda mümkündür.

Örnek 9:

$$(x + 4y + z + 5t)^2 = 43(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \quad (1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 5157 \quad (2)$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ ve $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$, $y_4 = t$ kabul edelim ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygulayalım:

$$1.x + 4.y + 1.z + 5.t \leq$$

$$\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2},$$

$$x + 4y + z + 5t \leq \sqrt{43}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2},$$

$$(x + 4y + z + 5t)^2 \leq 43(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Eşitlik durumu $\frac{1}{x} = \frac{4}{y} = \frac{1}{z} = \frac{5}{t} = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{R}$, durumunda mümkündür.

(2) 'de $x = k$, $y = 4k$, $z = k$, $t = 5k$ yazalım ($k \in \mathbb{R}$):

$$k^3 + 4^3k^3 + k^3 + 5^3k^3 = 5157 \ .$$

Buradan $k = 3$ bulunur. Çözüm kümesi ise $(3, 12, 3, 15)$ olur.

Örnek 10: x, y, z sayıları $x^2 + y^2 + z^2 = 1993$ denklemini sağlayan pozitif tamsayılar olduğunda $x + y + z$ sayısının bir tamkare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden,

$$x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{1993}, \text{ ve } x+y+z < 78 \text{ olur.}$$

Aksini varsayalım, $x+y+z$ bir tamkare olsun. O zaman $x+y+z$ 64, 49, 25, 16, 9, 36 sayılarından biri olmalıdır. Herhangi bir tamkare tek ise bunun kare kökü de bir tek tamsayıdır. Aynı şey çift sayılar için de geçerlidir. $x^2+y^2+z^2$ 'nin bir tek sayı olması için x, y ve z 'nin hepsinin tek olması veya ikisinin çift, birinin tek olmasıyla mümkündür. Bu da $x+y+z$ 'nin tek olmasını gerektirir. Dolayısıyla $x+y+z$, $64, 16$ ve 36 olamaz. $(x+y+z)^2 > x^2+y^2+z^2$ olduğu açıktır. $(x+y+z)^2 > 1993 > 625 \Rightarrow x+y+z > 25$ olduğundan, $x+y+z = 25$ ve 9 olamaz. $x+y+z = 49$ ise, $x^2+y^2 = 1993 - z^2$, $x+y = 49-z$ olmalıdır.

$$(x+y)^2 > x^2+y^2 \Rightarrow (49-z)^2 > 1993 - z^2$$

$$\Rightarrow z^2 - 49z + 204 > 0\ ,$$

$$z_{1,2} = \frac{49 \mp \sqrt{1585}}{2} \Rightarrow z > 43 \text{ olmalıdır.}$$

$z = 44 \Rightarrow x+y = 5$, $x^2+y^2 = 57$ sisteminin çözümü yoktur.

$z > 45 \Rightarrow z^2 > 1993$. Bu da $x^2+y^2+z^2 = 1993$ ile çelişir. Dolayısıyla koşulları sağlayan $x+y+z$ sayısı bir tamkare olamaz.

KAYNAKLAR

[1] Karakaş, H. İ., Aliyev, İ.; Sayılar Teorisinde Ilginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri; TÜBİTAK, 1996.

[2] Kedlaya K., Mathematical Contests (1997-1998), 1998.

[3] Atabey S., 1.Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemler, Matematik Dünyası, Cilt:5, Sayı:1, 17-18 (1995).

[4] Atabey S., İki Üslü Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, Cilt:5, Sayı:4, 23-24 (1995).

[5] Şirinoğlu N., Ertuğ, C. A.; Tamsayılar Kümesinde Denklemler, Matematik Dünyası, Cilt:6, Sayı:4, 8-13 (1996).

[6] Demir H.; Bazı Ortalamalar, Matematik Dünyası, Cilt:1, Sayı:1, 17-21 (1991).

[7] Çalışkan N.; Cebirsel Denklemlerin Kökleri, Matematik Dünyası, Cilt:4, Sayı:3, 9-13 (1994).

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 30 Kasım 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.216. $\cdots 12345678987654321$ biçiminde olup 1999^{2000} sayısına bölünen doğal sayı var mıdır?

A.217. $x^3-6x^2+ax+a=0$ denkleminin kökleri olan x_1, x_2 ve x_3 sayılarının

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$$

eşitliğini sağlamasını garanti eden a sayılarının hepsini bulunuz.

A.218. Toplamları 1 'e eşit olan herhangi pozitif $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2-\alpha_i} \geq \frac{n}{2n-1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

A.219. Üç boyutlu uzayı, birbiriyle kesişmeyen ve birbirine kongruent olan 1001 tane kümenin birleşimi biçiminde ifade etmek mümkün müdür?

A.220. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin BC yayı üzerinde alınmış Pnoktasından, BC, AC, AB doğrularına, sırasıyla, PK, PL, PM dikleri indirilmiştir.

$$\frac{|BC|}{|PK|} = \frac{|AC|}{|PL|} + \frac{|AB|}{|PM|}$$

eşitliğini ispatlayınız.

YARIŞMA PROPLEMLERİ

Y.216. $abc=1$ ve $a^3>36$ ise,

$$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca$$

eşitsizliğinin sağlanacağını kanıtlayınız.

Y.217. Düzlem hanelere bölünmüş ve bu hanelerden rasgele 100 tanesi işaretlenmiştir. İspat ediniz ki hiç ortak noktası olmayan en az 25 tane işaretlenmiş hane vardır.

Y.218. Her $x \in [-1,1]$ için $|P(x)| \leq 1$ koşulunu sağlayan $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d \in \mathbf{R})$ polinomlar kümesine M diyelim.Bu takdirde, öyle a sabiti vardır ki, M 'den seçilen her polinomun baş katsayısı a için $|a| \leq A$ eşitsizliği sağlanacaktır; kanıtlayınız.

Y.219. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir kare verilmiştir. Çember üzerinde alınmış herhangi bir noktadan karenin köşelerine kadar olan uzaklıkları gösteren dört sayıdan en az birinin irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

Y.220. Alanı S olan $A_1A_2A_3$ üçgeninin A_i, $(i=1,2,3)$ tepesinden çıkan yüksekliğine A_iH_i diyelim. $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun

$$S=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}|A_iA_{i+1}||A_iH_i|, \quad (A_4=A_1)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A.206. $x+y=1$ koşulunu sağlayan sayılar içinde x^3+xy+y^3 polinomuna minimum değer veren x ve y 'yi bulunuz.

Çözüm. $x+y=1$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} x^3+xy+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)+xy \\ &= x^2-xy+y^2+xy = x^2+y^2 = x^2+(1-x)^2 \\ &= 2(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. En son ifadenin minimum olması için $x=\frac{1}{2}$ olmalıdır. $x+y=1$ koşulundan da $y=\frac{1}{2}$ bulunur.

A.207. Bir n doğal sayısının tüm pozitif bölenleri sayısına s diyelim. n 'nin tüm pozitif bölenleri çarpımını n ve s cinsinden bulunuz.

Çözüm. Eğer $q_i, (i = 1, 2, ..., s)$ n 'nin bir pozitif böleni ise, $n = q_i p_i$ sağlanacak biçimde bir p_i pozitif böleni bulunacaktır. q_i 'lerin artan sırada dizildiğini, yani,

$$1 = q_1 < q_2 < ... < q_{s-1} < q_s = n$$

olduğunu varsayarsak, $n = p_1 > p_2 > ... > p_{s-1} > p_s = 1$ olur.

$\{q_1, q_2, ..., q_s\}$ ve $\{p_1, p_2, ..., p_s\}$ kümelerinin aynı kümeler olduğunu görmek zor değildir. $n = p_i q_i$ eşitliğinden

$$n^s = p_1 q_1 . p_2 q_2 ... p_s q_s = (p_1 p_2 ... p_s)(q_1 q_2 ... q_s) = (q_1 q_2 ... q_s)^2$$

elde edilir ki, buradan da $q_1 q_2 ... q_s = \sqrt{n^s}$ olur.

A.208. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbf{R}$ ve $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 0$ ise,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_j\right|$$

eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden bir $k \in \mathbf{N}$ bulunduğunu kanıtlayınız. (Samanyolu Matematik Grubu)

Çözüm. $A_0 = 0$ ve her $k = 1, ..., n$ için $A_k = a_1 + ... + a_n$ olsun. Bu durumda, her $i = 1, ..., n$ için

$a_i = A_i - A_{i-1}$ olur ve

$$\sum a_i b_i = \sum (A_i - A_{i-1}) b_i$$
$$= \sum A_i b_i - \sum A_{i-1} b_i$$
$$= \sum A_i b_i - \sum A_i b_{i+1}$$
$$= A_n b_n + \sum A_i (b_i - b_{i+1})$$

elde edilir. Eğer $maks\{A_1, A_2, ..., A_n\} = A_k$ ise,

$$|\sum a_i b_i| \leq |A_n| b_n + \sum |A_i| (b_i - b_{i+1})$$
$$\leq |A_k| b_n + |A_k| \sum (b_i - b_{i+1})$$
$$= |A_k| b_1 \leq |A_k| = |\sum a_j|$$

olur.

A.209. x_1 ve $x_2, x^2 - 6x + 1 = 0$ denklemini sağlayan sayılar olsun. Hiç bir n doğal sayısı için $x_1^n + x_2^n$ sayısının 5 ile bölünmediğini ispatlayınız. (Samanyolu Matematik Grubu)

Çözüm. Her n doğal sayısı için

$$x_1^n + x_2^n = (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2^{n-1} - x_2 x_1^{n-1}$$
$$= (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

'dir. Vieta Teoreminden, $x_1 + x_2 = 6$ ve $x_1 x_2 = 1$ olduğu görülür. O halde,

$$x_1^n + x_2^n = 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

'dir. Her $n \geq 1$ için $x_1^n + x_2^n = a_n$ olsun. Bu takdirde, her $n \geq 3$ için

$$a_n \equiv a_{n-1} - a_{n-2} \ (\ mod\ 5)$$

olur. Diğer yandan,

$$a_1 \equiv 1 (\ mod\ 5) \quad , \quad a_2 \equiv 4 (\ mod\ 5),$$
$$a_3 \equiv 2 (\ mod\ 5) \quad , \quad a_4 \equiv 4 (\ mod\ 5),$$
$$a_5 \equiv 1 (\ mod\ 5) \quad , \quad a_6 \equiv 2 (\ mod\ 5),$$
$$a_7 \equiv 1 (\ mod\ 5) \quad , \quad a_8 \equiv 4 (\ mod\ 5),$$

ve tümevarımla, her $k \geq 1$ için

$$a_k \equiv a_{k+6} (\ mod\ 5)$$

olduğu görülür. Bu, her $n \geq 1$ için $a_n \equiv 0 (\ mod\ 5)$ olduğunu gösterir.

A.210. $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin kesişim noktası E, $[BC]$ tabanı üzerinde bir nokta K ve $A\hat{K}E = D\hat{K}E$ ise, C 'nin AK doğrusuna uzaklığı $|CC'|$, B 'nin DK doğrusuna uzaklığı $|CC'|$ olmak üzere, $|BB'| = |CC'|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. E, AKD 'nin açıortayı üzerinde olduğundan, AK ve DK 'dan eşit uzaklıktadır. Bu uzaklığın, C 'nin AK 'ya uzaklığına oranı $\frac{EP}{CC'}$ ve B için de bu oran $\frac{EQ}{BB'}$ 'dür.

$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{EP}{CC'}$, $\frac{DE}{DB} = \frac{EQ}{BB'}$ ve

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow |CC'| = |BB'|.$$

Y.206. 25×25 karesinin her hanesine $+1$ veya -1 sayılarından biri yazılmıştır. i-inci satırdaki sayıların çarpımına a_i ve j-inci sütundaki sayıların çarpımına da b_j diyelim.

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{25} + b_{25} \neq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1. Kare üzerinde yazılmış bütün sayıların çarpımına A dersek , $a_1a_2...a_{25} = A = b_1b_2...b_{25}$ olur. a_i ve b_j 'ler ±1 olduğundan, $a_1 + b_1 + ... + a_{25} + b_{25} = 0$ olması için $a_1, b_1, ..., a_{25}, b_{25}$ sayılarının tam 25 tanesi $+1$ ve 25 tanesi de -1 olmalıdır. Böylece, a_i ler içinde n tane -1 varsa, b_i 'ler içinde $25-n$ tane -1 bulunmalıdır. Fakat, n ve $25-n$ sayılarının biri çift olduğunda, diğeri tek sayı olacağından, $a_1a_2...a_{25}$ ve $b_1b_2...b_{25}$ sayılarının biri negatif, diğeri de pozitif olmalıdır. Ancak, bu çarpımların ikisi de aynı bir Asayısına eşit oalcağından, bu mümkün değildir. Dolayısıyla, $a_1 + b_1 + ... + a_{25} + b_{25} = 0$ olamaz.

(**Çözenler:** *Erdem Koyuncu (Antalya), Metehan Aydın (Ankara)*).

Çözüm 2. $+1$ ve -1 'den oluşan bir dizinin terimleri çarpımı $+1$ ya da -1 'dir. Bu nedenle $a_i = \mp1$, $b_j = \mp1$ olmalıdır. $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{25} + b_{25} = 0$ diyerek aksini varsayalım.

Bu toplamın 0 olması, terimlerin 25 tane 1, 25 tane -1 içermesiyle mümkündür. (1)

Bu nedenle tüm terimlerin çarpımı -1 'dir. Fakat tüm terimlerin çarpımında karenin içindeki bir sayı iki kez geçmektedir (hem sütunda hem de satünda). Bu sayı 1 ise, $(1)^2 = 1$, -1 ise, $(-1)^2 = 1$ olur. Yani tüm terimlerin çarpımı 1 olmalıdır. Bu da (1) ile çelişir. Yani $a_1 + b_1 + ... + a_{25} + b_{25} \neq 0$ olmalıdır.

(**Çözenler:** *Ali Nabi Duman (Ankara)*).

Y.207. Herhangi 3 tanesinden bir üçgen yapılabilen 5 doğru parçası verilmiştir. Bu doğru parçalarından yapılabilen üçgenler içinde en az bir tanesinin dar açılı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Parçacıkların uzunluklarını azalmayan sırada dizelim : $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Bu parçacıklardan yapılabilen üçgenler içinde hiç dar açılı bulunmadığını varsayalım. O halde

$$c^2 \geq a^2 + b^2, d^2 \geq c^2 + b^2, e^2 \geq d^2 + c^2$$

olacaktır. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$c^2 + d^2 + e^2 \geq a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 \Rightarrow$$

$$e^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2)$$

$$\geq a^2 + b^2 + 2bc \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow e \geq a + b \text{ olur.}$$

Sonuncu eşitsizlikten ise, uzunlukları a, b, e olan parçacıklardan bir üçgen yapılamayacağı görülür. Çelişki.

(**Çözenler:** *Ali Nabi Duman (Ankara)*).

Y.208. Aşağıdaki denklemin tüm rasyonel köklerini bulunuz:

$$abx^2 + (a^2+b^2)x + 1 = 0 \quad , \quad (a, b \in \mathbf{Z})$$

Çözüm. $ab \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\Delta = (a^2 + b^2)^2 - ab$ dersek, denklemin rasyonel kökünün varlığı için $\sqrt{\Delta}$ sayısının bir tamsayı olmasının gerekli ve yeterli olduğunu söyleyebiliriz.

$a = b$ ise, $\Delta = 4a^2(a^2-1)$ sayısı, sadece, $a^2 = 1$ için tam kare olur. Böylece, bu durumda ya $a = b = 1$ ya da $a = b = -1$ olmalıdır. Her iki durumda da denklem $x^2 + 2x + 1 = 0$ denklemine dönüşür ve kökü $x = -1$ 'dir.

$a \neq b$ ise, $ab < 0$ için $(a^2+b^2)^2 < \Delta < (a^2+b^2+1)^2$, ve $ab > 0$ için $(a^2+b^2-1)^2 < \Delta < (a^2+b^2)^2$ eşitsizlikleri bu durumda Δ 'nın bir tam kare olamayacağını göstermektedir.

$ab = 0$ durumunu incelemek okuyucuya bırakılmıştır.

(**Çözenler:** *Ali Nabi Duman (Ankara), Necati Girgin (Denizli)*).

Y.209. $a^n + 2^n + 1$ sayısı $a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayısını bölecek biçimde tüm a ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm. $a = 1$ ve $a = 2$ için problemin çözümü olmayacağı kolayca görülebilir.

$a \geq 3$ olduğunu varsayalım.

$$a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$$
$$= a(a^n + 2^n + 1) + 2^{n+1} - a.2^n - a + 1$$

eşitliğini kullanarak $a^n + 2^n + 1 \mid a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ sağlanması için gerek ve yeter koşulun,

$$a^n + 2^n + 1 \mid (a-2)2^n + a - 1$$

olduğunu söyleyebiliriz. O halde

$$a^n + 2^n + 1 \leq (a-2)2^n + a - 1$$

olmalıdır. Sonuncu eşitsizliği

$$(\frac{a}{2})^n + 1 \leq (a-2) + \frac{a}{2}.\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

biçiminde yazalım.

$\frac{a}{2} \geq \frac{3}{2}$ olduğundan, $\frac{a}{2} = 1 + y$, $y \geq \frac{1}{2}$ yazabiliriz. Bernoulli eşitsizliğinden $(1+y)^n \geq 1 + ny$ olur. Bunları yukarıdaki eşitsizlikte gözönüne alırsak,

$$2 + ny \leq 2y + \frac{1}{2^{n-1}}y$$

ve böylece,

$$n \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{y} < 2 + \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow n \leq 2$$

olduğu görülür. $n = 2$ durumunda $a^2 + 5 \leq 5x - 9$ eşitsizliği elde ediliyor. Fakat bunun çözümü yoktur.

$n = 1$ halinde, $\frac{a^2+5}{a+3} = a + 3 + \frac{14}{a+3} \in \mathrm{N}$ olmalıdır ki, bu da $a + 3 = 7$ $(a = 4)$ ve $a + 3 = 14$ $(a = 11)$ durumlarında sağlanır.

Böylece, problemin koşulunu sağlayan ikililer $(a, n) = (4, 1)$, $(11, 1)$ 'dir.

(**Çözenler:** *Necati Girgin (Denizli), Ahmet Araç (Denizli), Ali Nabi Duman (Ankara)*).

Y.210. ABC dar açılı üçgeninde A, B, C 'den $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla D, E, F; yine A, B, C 'den EF, FD, DE 'ye indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla P, Q, R ile gösterilmek üzere AP, BQ, CR doğrularının aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

Çözüm. $AEF = AEP = ABC$, $APE = ADP = 90^o$ olduğundan $BAD = PAE$ bulunur. AP ile (ABC) çemberinin kesişim noktası K ile gösterildiğinde $AKC = ABC$ olur. O halde $ACK = 90^o$ ve $[AK]$, (ABC) 'nin çapıdır. Dolayısıyla AP, bu çemberin merkezinden geçer. Benzer biçimde, BQ, CR de merkezden geçer.

(**Çözenler:** *Necati Girgin (Denizli), Ali Nabi Duman (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Ahmet Anaç (Denizli), Hasan Karabıyık (İzmir)*).

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya önelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.