

ŞUBAT 2001 CİLT 10 SAYI:1 ISSN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Öklid Düzleminde Geçen Bir Yaşam: FİKRİ GÖKDAL
Yahya Gökmen Boyar

Karmaşık Sayılarda İki Tam Kare Teoremi
Oktay Pashaev - Engin Büyükaşık

Bir Genişleme Teoremi (1)
Nurettin Ergun

Galileo Galilei'nin İlginç Bir Dizisi
Ogün Doğu

Zayıf Asal Sayı Teoremi ve Bazı Sonuçları
Emre Alkan

Öklid Algoritmasının Bir Uygulaması
İsmail Aslan

Moskova Matematik Bayramı
Lüdmila Kadets

Problemler/Çözümleri



GÖZLEM DERSANESİ

yarınlar için!

- ÜNİVERSİTE HAZIRLIK
- FEN ve ANADOLU LİSELERİNE HAZIRLIK
- İLKÖĞRETİM 7.SINIF, LİSE 1 , LİSE 2
YETİŞTİRME KURSLARI

MATEMATİK
ÖZGÜR KAFALAR İSTER
Prof. Dr. Ahmet İNAM

900 Sokak, (Telefon Başmüdürlüğü Karşısı - Kemeraltı Girişi)
Fevzipaşa Bul. No:25 Hisarönü / Konak - İZMİR
Tel & Fax: 0(232) 446 90 92 (pbx)

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Düşlerin milyarlarca olan insanlarla yine bir-likteyiz. Ulusal Kurtuluş Savaşımızın simgesi olan İzmir'den yayın hayatımızı inadına sürdürme kararlılığındayız. Artık geleneksel hale gelen ev sahipliği görevini bu sefer İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü üstlendi, darısı başka matematik bölümlerinin başına. Ayrıca, geçmiş sayıların yayınındaki katkılarında dolayı Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü'ne teşekkürlerimizi iletiriz.

Bu sayıda, Yahya Gökmen Boyar'ın kaleminden geçen ay yitirdiğimiz Fikri Gökdağ'ın anısına kaleme alınmış "Öklid Düzleminde Geçen Bir Yaşam" başlıklı yazısını bulabilirsiniz. Bizler de Matematik Dünyası(MD) olarak kendisini saygıyla anıyoruz. Diğer yazıları da aynı ölçüde zevkle okuyacağımızı umuyoruz.

Gelecek sayılarımızda Matematik Felsefesi, Matematik Tarihi ve Matematik Eğitimi konularını içeren özel bir sayı hazırlamayı düşünüyoruz. Bu konularda yazılarınızla MD'na destek vereceğinizden kuşumuz yok. MD ile ilgili haberlere (<http://www.tmd.org.tr>), (<http://galois.iyte.edu.tr/mdunyasi>) adreslerinden erişebilirsiniz. Okuyucularımızın her yıl sonunda MD'nın CD cildini edinmesini sağlamaya çalışacağız. Küresel ya da ulusal krizlere rağmen inadına düşünen ve üreten insanları MD'na çağırıyoruz. MD'na abone olalım ve abone bulalım ki matematiğin samanyolundan bir yıldız da sizin masanıza insin.

MATEMATİK DÜNYASI

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık

DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2001) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 8.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 6.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)Parakende satış fiyatı 2.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35435-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987510 ve 4987504; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Öklid Düzleminde Geçen Bir Yaşam: FİKRİ GÖKDAL Yahya Gökmen Boyar	2
Karmaşık Sayılar ve İki Tam Kare Teoremi Oktay Pashaev-Engin Büyükaşık	5
Bir Genişleme Teoremi (I) Nurettin Ergun	10
Galileo Galilei'nin İlginç Bir Dizisi Ogün Doğru	18
Zayıf Asal Sayı Teoremi ve Bazı Sonuçları Emre Alkan	20
Öklid Algoritmasının Bir Uygulaması İsmail Aslan	26
Moskova Matematik Bayramı Lüdmila Kadets	28
Problemler ve Çözümleri	29

ÖKLİD DÜZLEMİNDE GEÇEN BİR YAŞAM: FİKRİ GÖKDAL

Yahya Gökmen Boyar

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

İlim, ilim bilmektir,
İlim, kendün bilmektir,
Sen kendünü bilmezsin,
Ya nice okumaktır?

YUNUS EMRE

ÖNSÖZ: SONSÖZ SONRASI

Yıl 1999, üniversiteye yeni bir hoca gelmiş, "Belitsel Geometri" dersine girecekmiş. Uzaktan gördüm esmer, uzun boylu, oldukça zayıf, sanırım 55-60 yaşlarında, disiplinli birine benziyor, yürüyüşünden belli dimdik. Gri bir pantolonu var, lisede giydiklerimize benziyor. Derslerine girmeye başladım, tahminim doğruymuş disiplinli, ayrıca tahtayla tebeşiri kalem kağıt gibi kullanıyor, ziyan etmeden. Yazısının güzelliği okumaya heveslendiriyor insanı, çizimleri şaşırtıcı derecede düzgün, çember çizerken pergel, doğru çizerken cetvel oluyor sanki, sanırım bu hoca dersi önemsiyor. Zamanla bir çok özelliğini daha öğreniyorum, mesela esinti onu rahatsız ediyor, derse girer girmez önce kapı pencere kapatılıyor, bir de dersin takip edilmesi onun için önemli, devamsızlık, bize verilmiş bir hakkı kullanmamak anlamına geliyor. Zaman geçiyor, pek gülümsediğini görmüyorum ya bir sıkıntısı var ya da gülecek bir şey yok. Arada bir dersin sonlarında rahatlatan bir söz söyleyip, tebessüm ediyor, içim gülüyor. Adı kalmış insanlardan sözederken de bedeni heyecanla geriliyor. Dikkat çekilmesi gereken felsefi cümlelerde küçük gözleri, kocamanlığıyla beni şaşırtıyor. Öğretiyor, öğreniyorum.

Odasının kapısı açık, giren tanrı misafiri, inceliği ruhundaki tebessüm, masasında sıcak çay ya da kahve dumanı sigarasının dumanını kovalamakta, gözler bizim bilmediğimiz bir dünyada geçmiş sorgulamakta, belki de iki boyutlu bir dünyada üçüncü boyutu aramakta, müzik ise klasikliğiyle tüm olanlara eşlik etmekte.

Bir yakınlık seziyorum, olgunluk kokusu alıyorum, kendi olan biriyle karşı karşıyayım, saygım sevgi destekli ve artıyor, artıyor... Zor bir dönemin zorlu şartlarına katlanılmış, yılmamış, unvan değil öz hedef alınmış. Şaşkınlım, küçülüyorum.

Ölümü dünyada hakikat gördüm.

AŞIK VEYSEL

VE BİR GÜN ...

Gün kış günü, hava ilkbahar özentisi. Belki erken yatılmış gün öncesi kimbilir belki de doyasıya yaşanmış gecesi. Ne olursa olsun gün hep bir doğuşa gebe, yeni bir uyanışa. İki göz kapağının eş zamanlı hareketi ve bir beklentiyle açıldı güne göz. Her yeni başlangıç gibi biraz da şaşkın. Yatak, yastık, yorgan her zamanki ayrılışı yaşad bedenden, ayaklar yere dik günün ilk adımı diğerine öncü, alınan yol prensip gereği alışılmış.

Yıllar çalışmayla özdeş, tatil ezberlenmemiş bir kelime, haftanın sonundaki iki günden ilki ama yine de görev yerinde hazır beklenilmekte. Orası kutsal, dört duvar.

Seven sayısı tanıştığı insan sayısı ama yalnızlık esaslı bir eğitmen sona hazırlık için. Bir beklenti var ve herhangi bir evren an' ı; durdu evren durdu, boyutlar an 'ın içindeki saygı duruşu; bitti.

Uğurladık, gökyüzünün gözleri bulutlar ağlaştılar bu mütevazi gidişe. Bize dertleşmek kaldı, kalanları paylaşmak ve büyümek değerlerini.

ARDINDAN SÖYLENENLER ...

Klasik geometrinin büyük üstadı, yaşamı Öklid düzleminde geçmiş büyük insan **FİKRİ GÖKDAL HOCAM** 'a sonsuz sevgilerimle... (İlham Aliyev)

Sizinle birlikte çok şey paylaştık bu kısacık dönemde. Matematiğin yanında dostluğun, sevginin ne demek olduğunu öğrendik. Sizin için tek bir şey söyleyeceğiz ve bu her şeye yetecek...

HOCAM, SİZ MÜTHİŞ BİR İNSANDINIZ... (Matematik Bölümü 1. sınıf öğrencileri)

Hayatımda tanıdığım en dürüst, en kibar ve en saygıdeğer hocaydınız, kişiydiniz. (Nesrin Tutaş)

HOCAM, 10 dakika geç gelirim demiştiniz, bir ömür değil. (960304019)

Ellerim titriyor. Kanıyorum. Yüreğim, beynim paramparça. Nietzsche 'nin bir sözü var: "*Biz varken ölüm yok, ölüm varken biz yokuz*" diyor ünlü filozof.

Siz hep varsınız **HOCAM. (Sezen İşcan)**

Her geçen gün ciddiyetten uzaklaşan günümüz akademik yaşamında, yaptığınız her işi nasıl da ciddiye alırdınız, sevgili hocam... (Mutlu Güloğlu)

Estetik ve düzenin hep bir arada bulunduğu çalışmalarınızı hiç unutmayacağız. (Ayhan Dil)

Hayatı boyunca ilkeli davranmayı kendine bir yaşam biçimi yapmış hocamız, her zaman bizi iyiye, güzele ve salt doğruya yöneltmeye uğraştı. Odasına gidip soru sorduğumuzda işin inceliklerini her zaman anlatır, yüzeysel olmaktan kaçınırdı. İyi bir matematikçiye meseleleri derinlemesine sorgulayan matematikçi olarak tarif ederdi. Matematiği ve onu anlatmasını çok severdi, zaten bir cumartesi günü odasında öğrencilere matematik anlatırken vefat etti: Su testisi su yolunda kırıldı... (Ramazan Tınaztepe)

Matematiğin kutsallığını ve felsefesini bize öğrettiğiniz için çok teşekkürler... Umarım orada Gauss ve Euler ile matematik toplantıları yaparsınız. (Yıldız Gündoğan)

Yaşadığınız gibi gittiniz **HOCAM! (Uğur Güray)**

Çınarlar yatakta değil, ayakta ölür. Hocam sizi hiç bir zaman unutmayacağız. (Uğur Özcan)

Durun hocam, nereye gidiyorsunuz? Sizden öğreneceğimiz daha çok şey var... Birlikte geçireceğimiz matematik sohbetleri var, daha matematik olimpiyatları yapacağız; siz sorular hazırlıyordunuz ya...

"Dur! Nereye gidiyorsun?" Bunu siz söylediniz hocam... Sizi unutmayacağız. Hep kalbimizde olacaksınız. (Simten Uyhan)

Dersleriniz hep sabah 8:40'ta olurdu ve ben uyumayı çok seven bir insanım. Bu sabah sizin için son kez yine 8:40'ta okulda idim. Sizi amma çok seviyordum hocam! (Şerife Es)

Pergel ve cetvel kullanarak çizilemeyenlere inat, ne güzel çizerdin tahtaya bir tebeşir ile çemberi... Sevgi ve saygılarımla... (Ayşe Uyar)

Bu hayat oyununu mutlak dürüstlükle oynayan nadir insanlardan biriydi Fikri Hocam. (Melih Eryiğit)

Bölümümüze ve tek tek her birimize kazandırdığınız tüm güzellikler için teşekkürlerimi sunuyorum. Güle güle... (Doğan Çoker)

SONSÖZ

Yolların kesiştiği yerde bir yolcu tanıdım
şekli insan,
ruhuna gelince inceliği bedeninden ince.
Yolcu kesişimde noktaladı yolu, bir diğerine başlasın diye.
Biz ki yolu bitmeyenler cebimize koyduk yolcudan kalanları,
içimizde bir acı, tarif etmek tanımsız
bir de tebessüm takılmış yüzümüze,
yola devam...

MATEMATİKSEVERLER İÇİN KİTAPLAR...

SÜRREEL SAYILAR

Yazan: D.E.Knuth, Çeviren: Mehmet Budak, Nar Yayınları, 1995

Bu kitap, popüler bilim kitapları söz konusu olduğunda akla ilk gelen örneklerden biri değil. Bir bilimsel alanın güncel tartışmalarını, tarihini veya öncü kişiliklerini ele almıyor. Ancak, özgül bir alt-alanın hatta bir konunun daha geniş ve derin bilgisini veriyor. *Sürreel Sayılar*, bilimle profesyonel olarak değil, ancak aktif olarak ilgilenmek isteyen okura uygun bir çalışma. O nedenle okurdan biraz zaman ve emek istiyor. Zaten kitabın bilgisini ve özümsemenin ve tadına varmanın da bir başka yolu yok.

MATEMATİKÇİ GAZETE OKUYOR

Yazan: J.A.Paulos, Çeviren: Celal Kapkın, Evrim Yayınevi, 1999

John Allen Paulos, *Innumeracy*'yi best seler yapan aynı, bildik, dostça, nükteli ve zeki yaklaşımla, her gün okuduğumuz makalelerin birçoğunda matematiğin ve sayıların nasıl bir anahtar öge olduğunu göstererek günlük gazete sayfaları arasında dolaşıyor. Senato'dan, SAT'lara, sekse, suça, ünlülere ve mezheplere, matematikle hiç ilgisi yokmuş gibi görünen öyküleri alıyor ve matematik bilgisinden yoksun olmanın onları kavramamıza nasıl engel olabildiğini gösteriyor.

MATEMATİKLE BAŞARIYI YAKALAMAK

Yazan: G.Shaffner, Çeviren: Melih Üzmez, Gün Yayıncılık, 2000

Bu kitapta matematiğin yardımıyla, hayatın gerçeklerinin anlaşılmasını sağlamak hedef alınmıştır. Bilgisayar sanayinde yirmi yıl çalışmış ve bu sürenin son yıllarında üç büyük uluslararası bilgisayar firmalarında CEO ve COO (genel müdür ve üst düzey yönetici) olarak görev yapmış, matematiği çok seven üç çocuğun babası olan George Schaffner, kitabında gerçek hayat hikayelerinden örnekler, bilinen kelime ve sayıları kullanmak, olayları basit ve kısa tutmak ve denklemleri içlerindeki bilinmeyenle çözmek gibi konular üzerinde duruyor.

KARMAŞIK SAYILAR VE İKİ TAMKARE TEOREMİ

Oktay K. Pashaev-Engin Büyükaşık
İYTE, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

1. Giriş

Babilli matematikçiler günümüzde Pisagor bağıntısı olarak bilinen

$$x^2 + y^2 = z^2$$

eşitliği ve bunu sağlayan (x, y, z) tamsayı üçlülerini merak etmiş ve bunun üzerinde çalışmışlardır. Bu bağıntıyı sağlayan x, y, z tamsayıları Pisagor üçlülerini olarak adlandırılır.

Hellenistik dönemden beri ilkel Pisagor üçlülerinin (1 dışında ortak çarpanı olmayan) şu yolla elde edilebileceği biliniyordu; p ve q aralarında asal ve ikisi birden tek olmamak üzere $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$. Bu durumda a, b, c 'nin bir Pisagor üçlüsü, yani $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu görmek kolaydır. Bunun yanında, iki tamkare toplamının, başka bir iki tamkare toplamı ile çarpımının yine iki tamkare toplamına eşit olduğu yaklaşık 4000 yıl önce Babilliler tarafından biliniyordu.

Örneğin: $2 = 1^2 + 1^2$, $34 = 3^2 + 5^2$

$$68 = 2 \cdot 34 = (1^2 + 1^2)(3^2 + 5^2) = 2^2 + 8^2$$

Fibonacci, "Tamkareler Kitabı" adlı eserinde, Diophantus özdeşliği olarak bilinen bu özdeşlikten söz eder.

Bu özdeşlik başka bir ünlü problemde önemli rol oynar. Bu problem, büyük olasılıkla Pisagor üçlülerinin yukarıdaki gösteriminden etkilenilerek oluşturulmuş olan "Herhangi bir pozitif tamsayının iki tamkare toplamı şeklinde yazılıp yazılamıyacağı" problemidir. Bu problem, geçmişteki bütün ünlü matematikçilerin dikkatini çekmiştir. P. Fermat 1659'da yazdığı bir yazısında, $p = 4n + 1$ şeklindeki her asal sayının iki tamkare toplamı şeklinde olduğunu ispatladığını açıklamıştır. Ancak Fermat'ın bu ispatına ilişkin herhangi bir kayıt bulunamamıştır. Yaklaşık 100 yıl sonra kayda geçen ilk ispatlar 1749'da Euler'e, 1775'de Lagrange, 1776'da Laplace aittir. Gauss'da iki tamkare yazılımının tek olması gerektiğini göstermiştir. Bu problemin en basit ispatı D. Zagier'e aittir ve bu ispatı " $p \equiv 1 \pmod{4}$ şeklindeki her asal sayının iki tamkare toplamına eşit olduğunu bir satırlık ispatı" adlı makalesinde tanıtmıştır. Gerçekten de ispat tek satır içerir. Bu ispat aslında Liouville tarafından yapılan bir ispattan etkilenen Heath-Brown'ın ispatının basitleştirilmesidir.

İkinci bölümdeki iki tamkare teoreminin ifadesini vermeden önce birinci bölümde karmaşık sayılar ile iki tamkare özdeşliğinin geometrik yorumunu ele alacağız.

Hamilton tarafından gözlemlendiği gibi karmaşık sayılar; vektörel toplam ve vektörel çarpım yardımıyla R^2 olarak düşünülebilir. Bu yaklaşım "quaternionlar ve dört tamkare" ve "oktanionlar ve sekiz tamkare" özdeşliklerine açılımı elverişli kıldığı için uygundur.

Ünlü dört tamkare özdeşliği ve quaternionlar konusu bir sonraki yazımızda ele alınacaktır.

2. Karmaşık Sayılar

Pisagor teoremine göre; dik kenar uzunlukları x, y ve hipotenüsünün uzunluğu r olan bir dik üçgende

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

eşitliği vardır. Şimdi $R \times R \equiv R^2$ düzlemini ele alalım. Bu düzlemdeki her $P(x, y)$ noktası için (1) eşitliğindeki r gerçel sayısı, P noktasının orijine $O(0,0)$ olan uzaklığını gösterir. Her $P(x, y)$ noktası $z = x + iy$ ($i^2 = -1$) ile eşleştirilirse bu işlemin sonunda $C = \{z = x + iy | x \in R, y \in R\}$ kümesi elde edilir. Elde ettiğimiz C kümesine karmaşık sayılar kümesi denir. z_1, z_2 iki karmaşık sayı olmak üzere; bu iki sayının toplamı(farkı):

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Bu ise koordinatları (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olan iki vektörün toplamı(farkı)dır. Aynı şekilde z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının çarpımı

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (3)$$

dir. Ancak bunun (2) deki gibi vektörel bir işlemin sonucu olarak ifadesi kolay değildir. Söz konusu ifadeyi oluşturmada önce, her z karmaşık sayısına $\bar{z}$ ile gösterilen ve z 'nin eşleniği olarak adlandırılan $\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$ karmaşık sayısını karşılık getirelim. Bu işlem karmaşık sayılar kümesinde $\sigma(z) = \bar{z}$ olarak tanımlanan bir involüt (bkz. Ek) örneğidir (Gerçekten $\sigma^2 = I$ ve $\sigma^2(z) = z$). Bu involütün sabit noktaları ($\sigma(z) = z$) ise $z = \bar{z}$ koşulunu sağlayan sayılardır, yani gerçel sayılardır. Bir $x \in \mathcal{R}$ modülü ile x sayısının orjine olan uzaklığı kastedilir ve $|x|$ ile gösterilir. Bir $z = x + iy$ karmaşık sayısının modülü ise Pisagor teoremi yardımıyla;

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = r^2 \quad (4)$$

olarak tanımlanır. Bu son eşitlik aynı zamanda birbirinin eşleniği olan iki karmaşık sayının çarpımına karşılık gelir, yani

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = r^2 \quad (5)$$

İki Tamkare Özdeşliği: (Alexandria'lı Diophantus)

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \quad (6)$$

Bu özdeşliğin ispatı aşağıdaki eşitliklerden doğrudan elde edilebilir.

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 = (x_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2$$

$$(x_1 y_2 + y_1 x_2)^2 = (x_1 y_2)^2 + (y_1 x_2)^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2$$

Bu özdeşliğe göre z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için aşağıdaki formül elde edilir.

$$|z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2 \quad (7)$$

Aşağıda;

$$\sigma(z) = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (8)$$

($z.z^{-1} = 1$) ile tanımlı dönüşüm de karmaşık sayılarda bir involüt örneğidir.

Problem 1. σ nın bir involüt ve $\sigma^2 = I$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2. Bu involütün sabit noktalarını bulunuz.

Şimdi (3) formülü ve bu formülün geometrik anlamına geri dönelim. İlk olarak $u = x + iy$ için,

$$|u|^2 = \bar{u}u = 1 \quad (9)$$

koşulunu sağlayan noktalar kümesini gözönüne alalım. Bu küme yarıçapı $r = 1$ olan $x^2 + y^2 = r^2$ çemberi üzerindeki noktalara karşılık gelir. Ayrıca $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ eşitliğinden yola çıkarak bu çember üzerindeki noktalar, $0 \leq t < 2\pi$ olmak üzere,

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (10)$$

şeklinde yazılır ve buradan da

$$u = \cos t + i \sin t \quad (11)$$

elde edilir.

$u_1 = \cos t_1 + i \sin t_1$ ve $u_2 = \cos t_2 + i \sin t_2$ karmaşık sayıları birim çember üzerinde ve argümenti sırasıyla t_1, t_2 olan noktaları temsil eder. Şimdi u_1 ve u_2 birbiri ile çarpılırsa,

$$u_1 u_2 = (\cos t_1 + i \sin t_1)(\cos t_2 + i \sin t_2) =$$

$$(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + i(\cos t_1 \sin t_2 + \cos t_2 \sin t_1) = \cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2) \quad (12)$$

elde edilir ve görüldüğü gibi $u_1 \cdot u_2$ çarpımında birim çember üzerinde argümenti $t_1 + t_2$ olan bir noktadır. Böylece her $z = x + iy$ karmaşık sayısı modülü $|u| = 1$ olan bir $u \in \mathbb{C}$ için,

$$u = \frac{z}{|z|} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (11) denklemine göre

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos t, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin t$$

bulunur. Buradan da herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$z = r(\cos t + i \sin t) \quad (13)$$

elde edilir. O halde

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$, $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$ herhangi iki karmaşık sayı olmak üzere

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)] \quad (14)$$

çarpımı elde edilir. Böylece herhangi iki karmaşık sayının çarpımının geometrik anlamının; modülü $r_1 \cdot r_2$ ve argümenti $t_1 + t_2$ olan bir nokta olduğu görülür.

3. Gauss Tamsayıları

$m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $z = m + in$ karmaşık sayısını gözönüne alalım. Bu şekildeki tüm z sayılarının kümesine *karmaşık tamsayılar* ya da *Gauss tamsayıları* denir ve $\mathbb{Z}[i] = \{n + im \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ ile gösterilir. Geometrik olarak Gauss tamsayıları düzlem üzerinde koordinatları tamsayılar olan noktalar kümesini, başka bir deyişle tamsayılar kafesini verir. (2) denklemine göre iki Gauss tamsayısının toplamı (farkı) bir Gauss tamsayıdır. (3) denklemine göre $z_1 = n_1 + im_1$, $z_2 = n_2 + im_2$ için;

$$z_1 z_2 = (n_1 + im_1)(n_2 + im_2) = (n_1 n_2 - m_1 m_2) + i(n_1 m_2 - m_1 n_2) \quad (15)$$

çarpımı bir Gauss tamsayıdır. Bu son eşitlikten iki tamkare özdeşliğinin Gauss tamsayılarının modülü için sağlandığı görülür yani;

$$(n_1^2 + m_1^2)(n_2^2 + m_2^2) = (n_1 n_2 - m_1 m_2)^2 + (n_1 m_2 + m_1 n_2)^2 \quad (16)$$

$\mathbb{C}$ de olduğu gibi $\sigma : z = m + in \rightarrow \bar{z} = m - in$ dönüşümü $\mathbb{Z}[i]$ üzerinde de bir involüt'dir. Ancak (8) ile tanımlanan involüt genelde $\mathbb{Z}[i]$ 'de involüt değildir. Bunun sebebi bölme işleminin Gauss tamsayıları üzerinde tanımlı olmamasıdır. Başka bir açıdan bakılırsa, $z = m + in$ ve $n = kn_1$, $m = km_1$, $k \in \mathbb{Z}$ yada $n \equiv 0 \pmod{k}$, $m \equiv 0 \pmod{k}$ olacak şekilde bir karmaşık sayı ise $z = m + in = k(m_1 + in_1) = kz_1$, $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$ olur. Buradan da

$$|z|^2 = n^2 + m^2 = k^2(n_1^2 + m_1^2) = k^2|z_1|^2 \quad (17)$$

Böylece $z \equiv 0 \pmod{k}$ ise $|z|^2 \equiv 0 \pmod{k}$ olur.

Şimdi $M = \{m^2 + n^2 \mid |z|^2 = m^2 + n^2, z \in \mathbb{Z}[i]\}$ kümesinin elemanlarını belirlemeye çalışalım. Bu küme aslında iki tamsayının kareleri toplamı şeklinde yazılabilen tamsayılar kümesidir. Her tamsayı sonlu sayıda asal sayının çarpımı olarak yazılabildiğinden, sözkonusu problem $p = m^2 + n^2$ şeklinde yazılabilen p asal sayılarını bulmaya indirgenir.

Teorem 1. (Fibonacci) p ve q iki tamkare toplamı şeklinde yazılabilen iki asal sayı ise, çarpımları da iki tamkare toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat (16) daki iki tamkare özdeşliğinden doğrudan yapılabilir.

Böylece iki tamkare toplamı şeklinde gösterilebilen asal sayıları bulabilirsek iki tamkare toplamı şeklinde yazılabilen bütün tamsayıları belirlemiş oluruz.

Her $p \geq 3$ asal sayısı $k \in \mathbb{N}$ için $4k + 1$ ya da $4k + 3$ şeklinde olduğundan bu sayıları dikkate almamız yeterli olur.

Teorem 2. $p = 4k + 3$ şeklinde bir asal sayı ise, p iki tamkare toplamı şeklinde yazılamaz.

İspat: $n^2 + m^2$ toplamı ancak n, m sayılarından en az biri tek olduğunda asal olabilir. Gerçekten n, m çift sayıları için, $(2k)^2 + (2l)^2 = 4(k^2 + l^2)$ olur. Bu durumda $n^2 + m^2$ toplamı için iki olası durum vardır:

$$(2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$$

ya da

$$(2k + 1)^2 + (2l)^2 = 4(k^2 + k + l^2) + 1$$

Görüldüğü gibi iki tamkare toplamının 4 ile bölümünden kalan 0,1,2 olabilir.

Teorem 3. $p = 4k + 1$ şeklindeki her asal sayı iki tamkare toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat:

$$x^2 + 4yz = p \quad (18)$$

denkleminin doğal sayılardaki bütün x, y, z çözümler kümesini gözönüne alalım ve bu kümeyi M ile gösterelim. İspatı tamamlamak için, $p = 4k + 1$ ise (18) denkleminin $y = z$ olacak şekilde bir (x, y, z) çözümünün varlığını göstermek yeterli olur. Ancak $y = z$ olan çözüm M üzerinde tanımlanan;

$$\sigma(x, y, z) = (x, z, y) \quad (19)$$

involütünün (nin bir involüt olduğunu gösteriniz) bir sabit noktasıdır. Bu nedenle (18) denkleminin çözümler kümesi olan M 'nin eleman sayısının tek olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu göstermek için D. Zagier başka bir τ involütü tanımlar ve bu involütün tam bir sabit noktası olduğunu gösterir. Böylece M 'nin eleman sayısının tek olduğu gösterilmiş olur. İlk olarak (18) denklemi için aşağıdaki ifadelerle bakalım;

a. $x \neq 2y$, aksi halde $p = x^2 + 4yz = 4(y^2 + yz)$ asal bir sayı değil,

b. $x \neq y - z$, aksi halde $p = (y - z)^2 + 4yz = (y + z)^2$ asal bir sayı değil.

Dahası $y - z < 2y$ dir. Böylece x değerlerini üç aralığa bölebiliriz:

$$(I) \quad x < y - z$$

$$(II) \quad y - z < x < 2y$$

$$(III) \quad 2y < x$$

Şimdi aşağıdaki involütü ele alalım,

$$\tau(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & x \in (I) \\ (2y - x, y, x - y + z), & x \in (II) \\ (x - 2y, x - y + z, y), & x \in (III) \end{cases} \quad (20)$$

$x^2 + 4xy$ denkleminin herhangi bir çözümünün τ involütü ile aynı denklemin bir başka çözümüne dönüştüğünü kontrol etmek kolaydır. Gerçekten (I)'de

$$(x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) = x^2 + 4yz$$

(II) ve (III)'de

$$(x - 2y)^2 + 4y(x - y + z) = x^2 + 4yz.$$

olduğu görülür.

Şimdi $\tau(x, y, z) = (x', y', z')$ olsun. $x \in (I)$ ise $(x < y - z)$, bu durumda $x' = x + 2z > 2z = 2y'$ olur ve (I) 'deki bir nokta (III) 'deki bir noktaya dönüşmüş olur yani $x' \in (III)$. Benzer şekilde $x \in (III)$ noktasının $x' \in (I)$ noktasına dönüştüğü görülür. Buradan (I) yada (III) 'deki bir noktanın; (I) 'de $x' = x + 2z > x$ ve (III) 'de $x' = x - 2y < x$ olduğundan sabit bir nokta olamayacağı görülür. Bunun anlamı sabit nokta yalnız (II) aralığında olabilir ve böyle bir nokta için $z' = x - y + z$ ve buradan $z = z'$ olduğundan $x = y$ olur. Böylece $p = x^2 + 4yz = x^2 + 4xz = x(x + 4z)$ ve p asal bir sayı olduğundan $x = y = 1$ bulunur. Sonuç olarak $p = 4k + 1$ ise $(1, 1, k)$ bir sabit noktadır. Gerçekten $x = 1, y = 1$ ve $z = k$ ise, $x' = 2 - 1 = 1, y' = 1$ ve $z' = 1 - 1 + k = k$ ve $p = 4k + 1$ olur.

Şimdi yukarıdaki teoremler yardımıyla elde etmek istediğimiz sonucu yazabiliriz.

Sonuç: (Fermat) n tamsayısının iki tamkare toplamı şeklinde yazılabilmesi için gerek ve yeter şart n 'nin $4k + 3$ şeklindeki bütün asal çarpanlarının üssünün çift olmasıdır.

Örnek: $245 = 5.7.7 = 7^2 + 14^2$, $42 = 2.3.7 \neq a^2 + b^2$

Yukarıdaki sonuçtan da görüldüğü gibi her tamsayıyı iki tamkare ya da Legendre'nin "üç tamkare teoremine" göre üç tamkare toplamı şeklinde yazmak mümkün değil. Bundan sonraki yazımızda her tamsayıyı dört tamkare toplamı şeklinde bir gösterimi olduğunu ifade eden "Dört Tamkare Teoremi" ni ve bu teoremin, karmaşık sayıların genelleşmesi olan quaternionlarla ilişkisini bulabileceksiniz.

Ek: M herhangi bir küme ve $\sigma : M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Eğer σ dönüşümü her $m \in M$ için $\sigma(\sigma(m)) = m$ koşulunu sağlarsa σ 'ya bir involüt denir. Involüt M 'nin elemanlarını $(m, \sigma(m))$ gibi çiftlere ayırır. $\sigma(\sigma(m)) = m$ olduğundan m ve $\sigma(m)$ elemanları için sırasıyla simetrik $(m, \sigma(m))$ ve $(\sigma(m), m)$ çiftleri elde edilir. Ancak $\sigma(m) = m$ olduğunda (m, m) elemanı elde edilir. Böyle bir noktaya sabit nokta denir. Böylece M sonlu bir küme ise $(m, \sigma(m))$ noktalar kümesinin eleman sayısının çift yada tek olması, sabit noktalarının çift ya da tek olmasına bağlı olduğu görülür.

KAYNAKLAR:

1. V.V. Prasolov, Story of numbers, polynomials and figures, Moscov, 1997.
2. D. Zagier, A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1(mod 4)$ is a sum of two squares, American Math Montly, 1990, 114
3. D.R. Heath-Brown, Fermat's two squares theorem, Invariant 1984, 3-5.

Modern matematiğin kapsadığı o çok geniş alan hakkında bir fikir vermek zordur. Ben matematik denilince çıplak bir düzlük anlamıyorum; matematik, içinde binbir güzelliğin kaynaştığı nefis manzaralı bir vatan köşesi gibidir; önce uzaktan şöyle bir görülür; fakat bu yetmez; bir uçtan, diğer uca onun en ince ayrıntıları, vadileri, ırmakları, kayaları, ormanları ve çiçekleri mutlaka incelenmeye değer.

ARTHUR CAYLEY

BİR GENİŞLEME TEOREMİ (I)

Nurettin Ergun

İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, Vezneciler/İSTANBUL

I. Genişleme Fonksiyonu Kavramı

Bir $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı, sürekli ve gerçel değerli bir f fonksiyonumuz var olsun. Bu fonksiyonun tanımını, $c < a < b < d$ olmak üzere $[c, d]$ aralığına sürekli olarak genişletebilir miyiz? Ne demektir bu? Bu, yeni ve daha büyük $[c, d]$ aralığında tanımlı ve sürekli öyle yeni bir g gerçel değerli fonksiyonu tanımlamak demektir ki, her $x \in [a, b]$ için $g(x) = f(x)$ gerçekleşsin, kısacası g fonksiyonu eski $[a, b]$ tanım aralığında f gibi davransın, üstelik yeni $[c, d]$ tanım aralığında sürekli olsun ve en önemlisi, eğer f fonksiyonu bir $[a', b']$ aralığında değerler alıyorsa g fonksiyonu da $[a', b']$ aralığında değerler alsın. Tanımlayabilir miyiz böyle bir genişleme fonksiyonunu, ne dersiniz? Evet sevgili okurlar, kolayca ve üstelik pek çok farklı biçimde. En kolay tanımlanabilen genişleme fonksiyonu kuşkusuz

$$g_0(x) = \begin{cases} a' & ; x \in [c, a] \\ f(x) & ; x \in [a, b] \\ b' & ; x \in [b, d] \end{cases}$$

dir. Bir başkası ise

$$g_1(x) = \begin{cases} a' + (b' - a') \sin\left(\frac{\pi(x-a)}{c-a}\right) & ; x \in [c, a] \\ f(x) & ; x \in [a, b] \\ b' + (b' - a') \sin\left(\frac{\pi(x+\pi d-2\pi b)}{d-b}\right) & ; x \in [b, d] \end{cases}$$

fonksiyonudur, burada $f(b) = b'$ ve $f(a) = a'$ dir. Peki, sözgelimi $[b, d]$ aralığında g_1 fonksiyonu $[a', b']$ aralığında mı değerler alır; bu alt aralıkta g_1 sürekli midir? Evet! Dikkat edilirse her $x \in [b, d]$ için

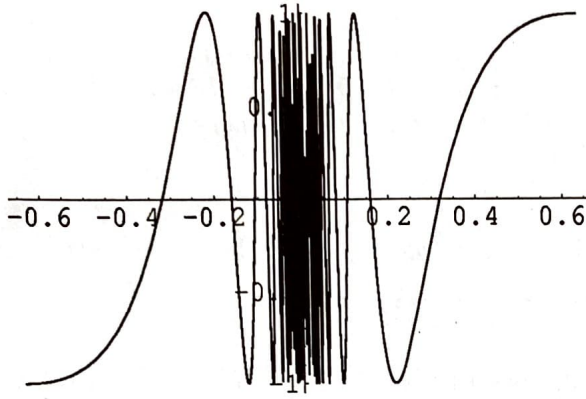
$$\pi \leq \frac{\pi x + \pi d - 2\pi b}{d - b} \leq 2\pi$$

ve dolayısıyla $[\pi, 2\pi]$ aralığında sinüs pozitif değerler almadığından kolaylıkla, bu alt aralıkta

$$a' \leq b' + (b' - a') \sin\left(\frac{\pi x + \pi d - 2\pi b}{d - b}\right) \leq b'$$

bulunur ve ayrıca gerek $\lim_{x \rightarrow b^-} g_1(x)$ sol limit ve gerekse $\lim_{x \rightarrow b^+} g_1(x)$ sağ limit değerleri var ve $f(b) = b'$ değerine eşit olduğundan g_1 fonksiyonu bu alt aralıkta istenenleri gerçekler. Benzer işlemler $[c, a]$ alt aralığı için de yapılır.

Peki f fonksiyonunun tanım kümesi $(a, b]$ ya da (a, b) türündeki kapalı olmayan aralıklar olsaydı, onun yine tanım aralığını kapsayan bir aralığa sürekli bir genişlemesi tanımlanabilir mi acaba? Dikkat edilmelidir, bu tür aralıklarda tanımlı, sürekli ve sınırlı değerler alan gerçel değerli fonksiyonlar için sözü edilen nitelikte sürekli bir genişleme fonksiyonunun tanımlanabilmesi her zaman olanaklı değildir. Örneğin $x = 0$ noktasına sağdan yaklaşıldıkça sinüzoidal dalgaları olağanüstü sıklıkta yapmaya başlayan ve sıfıra yakınsayan $x_n = \frac{1}{n\pi}$ irrasyonel sayılarında hep sıfır değeri alan ve $x \in (0, 1]$ için $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonun grafiği aşağıda yer alır ve görüyorsunuz $[-1, 1]$ aralığında değerler alan bu sınırlı sürekli gerçel değerli fonksiyon için $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ limit değeri tanımsız olduğundan, bu fonksiyonun $x = 0$ noktasını kapsayan bir aralığa sürekli genişlemesini tanımlamak olanaksızdır.



Matematiğin sürekli genişlemelere ilişkin en ünlü ve en kullanışlı sonuçlarının başında hiç kuşkusuz ünlü **Tietze & Urysohn Genişleme Teoremi** gelir. Bu teoremin ne dediğini, nasıl kanıtlandığını ve hepsinden önemlisi önemini yeterince kavrayabilmek için ciddi düzeyde topoloji bilmek gereklidir. Alman matematikçi Tietze tarafından 1915 yılında ortaya atılan bu önermeyi on yıl sonra en genel biçimiyle usta Rus matematikçi Pavel S. Urysohn kanıtlamıştır. Biz, bu yazıda gerekli metrik uzay bilgisini “biraz” verdikten sonra, Urysohn’unkinden dört yıl önce Alman Felix Hausdorff tarafından metrik uzaylar için verilen kanıtlamadan söz etmek istiyoruz. Peki sevgili okurlar, **infimum** denilen kavramı biliyor muyuz? $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin boş olmayan bir A altkümesinin herhangi bir x_0 alt sınırının, her $a \in A$ için $x_0 \leq a$ gerçekleştiğini biliyoruz; **eğer** her bir $0 < \epsilon$ için $a_\epsilon < x_0 + \epsilon$ olacak biçimde en az bir $a_\epsilon \in A$ elemanı bulunabiliyorsa, işte bu özel koşulu gerçekleyebilen özel x_0 alt sınırına **A kümesinin infimumu** (en büyük alt sınırı=e.b.a.s.) denir. Demek ki ϵ pozitif sayısı ne denli küçük olursa olsun $\inf\{a : a \in A\} + \epsilon$ artık A kümesi için bir alt sınır olamayacak ve sonuçta $a_\epsilon < \inf\{a : a \in A\} + \epsilon$ gerçekleyen en az bir $a_\epsilon \in A$ var olacaktır. Üstelik eğer bir x gerçel sayısı A kümesi için bir alt sınır ise, yani her $a \in A$ için $x \leq a$ gerçekleşiyorsa $x \leq \inf A = \inf\{a : a \in A\}$ olmak zorundadır, çünkü eğer, tam tersine $\inf A < x$ geçerli olsaydı, $(x - \inf A)/2$ pozitif sayısından küçük bir pozitif ϵ sayısını gelişigüzel seçerek, son gözlemimiz yardımıyla, öyle uygun bir $a_\epsilon \in A$ var olurdu ki $a_\epsilon < \inf A + \epsilon < x - \epsilon < x$ bulunur ve sonuçta x gerçel sayısı A için bir alt sınır olamazdı. İşte bu nedendir ki, eğer her $a \in A$ için $x \leq a$ gerçekleşiyorsa, “infimum olarak” $x \leq \inf\{a : a \in A\} = \inf A$ elde edilir denilir.

Yazı boyunca birkaç kez kullanılacak olan bu temel gerçekleri kavradıysanız eğer, bu yazıdaki tüm öteki akıl yürütmeleri de benzeri kolaylıkla kavrayacağınıza emin olabilirsiniz. Kısacası okuyup bilgilenebilir ve kavraması güç olmayan bir yazı karşısında olduğunuzu söyleyebilirim.

II. Metrik Uzaylar: Öz ve Temel Bilgiler

Metrik uzaylar matematiğin pek çok alanında, özellikle analizde kullanılan neredeyse demirbaş uzay türüdür. Boş olmayan bir X kümesinin elemanları ile tanımlanan tüm (x, y) eleman çiftlerine (sıralı ikililerine) $d(x, y)$ gerçel sayısını eşleştirirken aşağıdaki temel koşulları gerçekleyen bir d gerçel değerli fonksiyonuna X kümesinde (ya da X kümesi üzerinde) tanımlanmış bir **metrik** denir. Bu koşullar, $x, y, z \in X$ elemanları ne olursa olsun

$$(1) \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (2) \ d(x, y) = d(y, x), \quad (3) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

gerçeklendiğini söylerler. d fonksiyonu hiç bir (x, y) ikilisinde asla negatif değer almaz, çünkü $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$ nedeniyle $0 \leq d(x, y)$ elde edilir; dikkat edilirse ilk

eşitlikte (1) koşulu, sonra kullanılan eşitsizlikte (3) koşulu ve en son eşitlikte (2) koşulu kullanılmıştır. Negatif olmayan $d(x, y)$ gerçel sayısına d uzaklık fonksiyonu tarafından belirlenen x ve y **eleman-ları arasındaki uzaklık** denir. Matematiğin belki de en ünlü uzaklık fonksiyonu $\mathbf{R}$ üzerinde, her $x, y \in \mathbf{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ biçiminde tanımlanan **bir boyutlu Öklid metriğidir**. (1) ve (2) koşulları kolayca gözlenir; (3) koşulunu ünlü $|x + y| \leq |x| + |y|$ eşitsizliği yardımıyla

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

biçiminde gözleriz. $\mathbf{C}$ karmaşık (kompleks) sayılar kümesi üzerinde ise, z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{|Re\ z_1 - Re\ z_2|^2 + |Im\ z_1 - Im\ z_2|^2}$$

biçiminde tanımlanan d istenen koşulları gerçekleyen bir uzaklık fonksiyonudur. Burada $Re\ z$ ve $Im\ z$ sırasıyla z karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımları olan gerçel sayılardır. Küçük bir çabayla (3) koşulunu gözleyebiliriz. a ve b gerçel sayıları ne olursa olsun $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ gerçekleştiğinden, a_1, a_2, b_1, b_2 gerçel sayıları ne olursa olsun, kısaklık için $A = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}$ ve $B = \sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}$ yazarak

$$\frac{|a_1|}{A} \frac{|b_1|}{B} + \frac{|a_2|}{A} \frac{|b_2|}{B} \leq \frac{1}{2} \frac{|a_1|^2}{A^2} + \frac{1}{2} \frac{|b_1|^2}{B^2} + \frac{1}{2} \frac{|a_2|^2}{A^2} + \frac{1}{2} \frac{|b_2|^2}{B^2} = 1$$

ve dolayısıyla

$$|a_1||b_1| + |a_2||b_2| \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} \cdot \sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2} \quad (\text{CSE})$$

elde edilir; yukarıda negatif olmayan A ve B gerçel sayıları pozitif varsayıldı, bu sayılardan en az biri sıfır olsaydı CSE $\equiv$ Cauchy&Schwarz eşitsizliğinde her iki yan sıfır olur, eşitlik geçerli olurdu. O halde $2(a_1b_1 + a_2b_2) \leq 2AB$ bulunur ve her iki yana $A^2 + B^2$ yani $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$ ekleyerek ve bir gerçel sayının karesi ile mutlak değerinin karesinin eşit olduğunu anımsayarak sonuçta ünlü Minkowski Eşitsizliği ($\equiv$ ME)

$$\sqrt{|a_1 + b_1|^2 + |a_2 + b_2|^2} \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} + \sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2} \quad (\text{ME})$$

elde edilir. Özel olarak $a_1 = Re\ z_1 - Re\ z_2$, $b_1 = Re\ z_2 - Re\ z_3$ ve $a_2 = Im\ z_1 - Im\ z_2$, $b_2 = Im\ z_2 - Im\ z_3$ seçilirse kolaylıkla $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ bulunur.

Şimdi şu önemli ve yararlı gerçeği gözleyelim. X kümesi üzerinde eğer d bir metrik ise, her $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

biçiminde tanımlanan ρ aynı X üzerinde yeni bir metriktir, gerçekten negatif olmayan a ve b gerçel sayıları için $a \leq b$ ise, $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ olduğundan ve $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ gerçekleştiğinden

$$\rho(x, z) \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

elde edilir. ρ için (1) ve (2) koşullarının doğruluğunu gözlemek kolaydır: Bu yeni uzaklık fonksiyonunun en ilginç özelliği uzaklıkların < 1 gerçekleşmesidir. Bir X kümesinde $d(x, x) = 0$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) = 1$ biçiminde tanımlanan d uzaklık fonksiyonu da bir metriktir; dikkat edilirse 0 ve 1'den başka uzaklık değeri yoktur, üstelik a ve b gerçel sayılarının en büyüğü yani $\max\{a, b\}$ kısaca $a \vee b$ işareti ile yazılırsa, bu tuhaf metrik, $x, y, z \in X$ ne olursa olsun, (3) koşulundan çok daha güçlü olan

$$d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z) \quad (\text{UME})$$

koşulunu gerçekler, çünkü gerçekten $d(x, y) = 1 = d(y, z)$ ise, elbette $d(x, z) \leq 1 = d(x, y) \vee d(y, z)$ olur; yok eğer $d(x, y) = 0 < 1 = d(y, z)$ ise, bu kez zorunlu olarak $x = y$ olur ve dolayısıyla $d(x, z) = d(y, z) = 1 = d(x, y) \vee d(y, z)$ olur; $d(y, z) = 0 < 1 = d(x, y)$ durumu benzerdir, vb,... Yalnızca 0 ve 1

değerini alan bu metriğe **kesikli** (ya da **diskret**) **metrik** denir. UME ise ultrametrik eşitsizliği olarak bilinir, çünkü bu sıradışı koşulu gerçekleyen bir metriğe, onu ilk tanımlayan usta Fransız matematikçi Andre Weil'in yakıştırmasıyla **ultrametrik** denir; **Arşimedyen olmayan metrik** adını kullananlar da vardır.

Kesikli metriktan farklı olarak UME'yi gerçekleyen metrikler de vardır. Bir X kümesinde tanımlı tüm dizilerin kümesi, yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere tüm $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerini eleman kabul eden küme ki, bu aslında, kartezyen çarpım kavramını bilenlerin kolayca gözleyebileceği gibi, her bir X_n kümesi X olmak üzere $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots$ kartezyen çarpım kümesinden başka bir şey değildir ve kısaca X^{ω} işareti ile gösterilir, evet X^{ω} kümesi üzerinde

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \begin{cases} 0 & ; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \frac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}} & ; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

biçiminde, René Baire tarafından tanımlandığı için **Baire metriği** adını alan metrik de UME'yi gerçekler. Bu metriğin $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ rasyonel sayılarından başka değer almadığını kolayca görürüz. Dikkat edilirse $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \frac{1}{m}$ olabilmesi için gerek yeter koşul şu m tane koşulun tümünün gerçekleşmesidir: $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{m-1} = y_{m-1}$ ve $x_m \neq y_m$. O halde aynı uzaklığın $< 1/m$ gerçekleyebilmesi için gerek $x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m$ olmasıdır. Bu nedenle $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = 1/m$ ve $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = 1/k$ ise ve m ile k doğal sayıları sözgelimi $m \leq k$ gerçekliyorsa, kolayca $x_1 = y_1 = z_1, \dots, x_{m-1} = y_{m-1} = z_{m-1}$ geçerli olacağından

$$d(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \frac{1}{m} = \frac{1}{k} \vee \frac{1}{m} = d(\{y_n\}, \{x_n\}) \vee d(\{x_n\}, \{z_n\})$$

bulunur. Ultrametriklerin pek çok şaşırtıcı ve "doğal olmayan" özellikleri vardır, birisiyle aşağıda karşılaşacağız. Şimdi bir metrik yardımıyla nasıl bir topoloji tanımlandığını görelim, topoloji denen kavramı daha önce tanımış olmanız gerekmiyor sevgili okurlar.

Üzerinde bir d metriği tanımlı olan X kümesinin, boş kümeyi ve ayrıca

$$A \text{ Koşulu: } \forall x \in G \exists \epsilon_x > 0, S_d(x, \epsilon_x) \subseteq G$$

koşulunu gerçekleyen, yani tüm elemanlarının uygun bir yuvarlarını kapsayabilen G altkümelerini ve yalnızca bu tür kümeleri üye kabul eden altkümeler topluluğu τ_d , X kümesi üzerinde bir topolojidir. Burada $x \in X$ ve $0 < \epsilon$ için $S_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ yazılmaktadır ve bu kümeye genellikle $x \in X$ merkezli ve ϵ yarıçaplı **açık yuvar** denir, açık sıfatının neden kullanıldığını ve topolojinin ne olduğunu ilerde göreceğiz. Peki X kümesinin bu koşulu gerçekleyen boştan farklı altkümeleri var mıdır? Evet, apaçıktır ki X ana kümesi tüm $S_d(x, \epsilon)$ yuvarlarını kapsamaktadır, kısacası X bu koşulu gerçekler. Ayrıca herhangi bir $S_d(x, \epsilon)$ yuvarı da bu koşulu gerçekler. Öncelikle $x \in S_d(x, \epsilon)$ gözleyelim, bu kolaydır çünkü $d(x, x) = 0 < \epsilon$ geçerlidir. Demek ki yuvarlar boş değildir ve ayrıca (isterseniz bu yuvarları belirleyen metriğin ne olduğu açıkça belli olsun diye alta yazdığımız d işaretini de artık yazmalıyım) $y \in S(x, \epsilon)$ ise $d(x, y) < \epsilon$ olur ve y noktasının, $0 < \epsilon' < \frac{1}{2}(\epsilon - d(x, y))$ koşulunu gerçekleyen pozitif ϵ' sayısı yarıçaplı yuvarı $S(y, \epsilon') \subseteq S(x, \epsilon)$ gerçekler, çünkü herhangi bir $z \in S(y, \epsilon')$ için $d(z, x) < \epsilon$ ve dolayısıyla $z \in S(x, \epsilon)$ kolayca gözlenir, çünkü

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \epsilon' < \epsilon - \epsilon' < \epsilon$$

geçerlidir. Demek ki açık yuvarlar her elemanın uygun bir yuvarını kapsayabilmektedirler. Yalnızca açık yuvarlar değil onların herhangi sayıda birleşim kümesi de yukarıdaki koşulu gerçekler. Aslında sözü edilen koşulu gerçekleyen boştan farklı kümeler ancak ve yalnız "birtakım" açık yuvarların birleşimi olarak yazılabilen kümelerdir, çünkü bu koşulu gerçekleyen herhangi bir $G \neq \emptyset$ alındığında bu G kümesi koşulda sözü geçen tüm $S(x, \epsilon_x)$ yuvarlarının birleşim kümesinden başka birşey değildir, yani $G = \cup\{S(x, \epsilon_x) : x \in G\}$ gerçekleşir çünkü $S(x, \epsilon_x)$ yuvarları zaten G tarafından kapsandığı için $\cup\{S(x, \epsilon_x) : x \in G\}$ birleşim kümesi de apaçıktır ki G tarafından kapsanır, tersine herhangi bir

$x \in G$ elemanı elbette bu birleşim tarafından kapsanan $S(x, \epsilon_x)$ yuvarına ve sonuçta bu birleşime aittir. Peki, herhangi sayıda $S(x_\alpha, \epsilon_\alpha)$ yuvarlarının birleşimi $E = \bigcup_{\alpha \in I} S(x_\alpha, \epsilon_\alpha)$ neden A koşulunu gerçekler? Bunu gözlemek de çok kolaydır, çünkü E birleşim kümesine ait olan herhangi bir $y \in X$ elemanı, uygun bir $\alpha_0 \in I$ indisi yardımıyla $y \in S(x_{\alpha_0}, \epsilon_{\alpha_0})$ gerçekler ve yukarda gösterildiği gibi uygun bir ϵ pozitif sayısı sayesinde $S(y, \epsilon) \subseteq S(x_{\alpha_0}, \epsilon_{\alpha_0}) \subseteq E$ bulunur. Ayrıca, eğer G_1 ve G_2 kümeleri koşulu gerçekliyorlarsa $G_1 \cap G_2$ kesişim kümesi de gerçekler, çünkü $x \in G_1 \cap G_2$ elemanı ne olursa olsun uygun birer ϵ_1 ve ϵ_2 pozitif sayıları sayesinde $S(x, \epsilon_1) \subseteq G_1$ ve $S(x, \epsilon_2) \subseteq G_2$ olur ve sonuçta $0 < \epsilon < \epsilon_1$ ve $0 < \epsilon < \epsilon_2$ gerçekleyen pozitif ϵ sayesinde $S(x, \epsilon) \subseteq G_1 \cap G_2$ olur, çünkü ϵ yarıçaplı yuvar hem $S(x, \epsilon_1)$ ve hem de $S(x, \epsilon_2)$ yuvarları tarafından kapsanır; demek ki $G_1 \cap G_2$ kesişim kümesi her elemanın uygun bir yuvarını kapsama koşulunu gerçeklemektedir. Evet sevgili okurlar, işte X kümesinin, τ_d altkümeler topluluğunun gerçeklediği aşağıdaki özellikleri gerçekleyen herhangi bir τ altkümeler topluluğuna X üzerinde tanımlanmış bir **topoloji** (ya da **ilinge**) denir. Nedir bu özellikler: (1) τ 'nun herhangi sayıda üyesinin birleşim kümesi τ üyesi olmalıdır, (2) τ 'nun herhangi iki üyesinin kesişim kümesi τ üyesi olmalıdır ve, (3) $\emptyset$ ve X kümeleri τ üyesi olmalıdır. Peki, bu özellikleri gerçekleyen bir altkümeler ailesi neden özel bir isimle anılıp ayrıntılarıyla incelenme gereği duyulmuştur? Bunun nedeni sevgili okurlar, matematiğin iki temel taşı kavramı olan limit ve süreklilik kavramlarını soyut kümeler üzerinde tanımlayıp incelemeye elveren yapıyı belirlemeleridir. Bir X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlamadan bu kümede "limit almaktan", o küme üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun sürekliliğinden söz etmek olanaksızdır, üstelik fonksiyonun gönderildiği küme üzerinde de bir topoloji tanımlanmış olması gereklidir. Biz bu kavramları yalnızca yukarda tanımlanan τ_d topolojisi için, çok kısa bir biçimde, çok ayrıntıya girmeye sayfalar ve bu derginin amacı elvermediği için, kısaca vereceğiz. X kümesi ve onun üzerinde tanımlanan bir τ topolojisinin belirlediği **topolojik uzay** kısaca (X, τ) işareti ile gösterilir, τ 'nun üyelerine bu topolojik uzayın **açık kümeleri** denir. Demek ki yukarıdaki A koşulu (X, τ_d) uzayında açık küme olabilme koşulundan başka bir şey değildir, bu nedenle $S_d(x, \epsilon)$ yuvarlarına açık yuvar denilmiştir. (X, τ_d) metrik uzayında, bir $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi için ancak ve yalnız $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ yazılır ve bu diziye $x_0 \in X$ **elemanına yakınıyor** denir. Yukarıda belirttiğimiz gibi herhangi bir (X, τ) uzayı için limit kavramından ne yazık ki söz açamıyoruz. Şimdi bir $x_0 \in X$ elemanı için aşağıdaki koşulların eşdeğer olduklarını gösterelim:

(1) $\forall \epsilon > 0$ için $S(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ olur ;

(2) Tüm terimleri A kümesinden seçilmiş bir $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ olur.

Gerçekten de (1) geçerliyse, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in S(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$ elemanlarını seçerek tanımlanan $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq d(a_n, x_0) < \frac{1}{n}$ geçerli olduğundan, kolayca $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, x_0) = 0$ verir; tersine A kümesinin (2) koşulunu gerçekleyen bir $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi varsa, $\{d(a_n, x_0)\}_{n=1}^\infty$ gerçel sayı dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, x_0) = 0$ nedeniyle, $0 < \epsilon$ verildiğinde

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon \text{ için } 0 \leq d(a_n, x_0) < \epsilon$$

olacağından $\{a_n : n_\epsilon \leq n\} \subseteq S(x_0, \epsilon) \cap A$ bulunur, yani (1) geçerli olur. Aslında bir metrik uzayda, herhangi $x \in X$ elemanı ve herhangi bir $\emptyset \neq A$ altkümesi için, $a \in A$ ne olursa olsun $0 \leq d(a, x)$ nedeniyle $0 \leq \inf \{d(x, a) : a \in A\}$ bulunur. (Dikkat: $A = \emptyset$ için $d(a, x)$ uzaklık değerlerinden söz edebileceğimiz $a \in A$ elemanları var olmadığından böyle bir infimum doğal olarak tanımlanamayacaktır.) Negatif olmayan bu infimuma, x noktası ile boştan farklı A altkümesinin arasındaki uzaklık denir ve bu gerçel sayı kısaca $d(x, A)$ işareti ile yazılır; elbette bu sayı $d(A, x)$ ile gösterilen $\inf \{d(a, x) : a \in A\}$ infimum değerine eşittir. Yukarıdaki eşdeğer (1) ve (2) koşullarının

(3) $d(x_0, A) = 0$

koşuluna eşdeğer olduklarını gözlemek güç değildir. Gerçekten (2) koşulundaki dizi yardımıyla, (infimumun bir alt sınır olması nedeniyle herhangi bir $a \in A$ için $d(x_0, A) \leq d(x_0, a)$ geçerli olduğundan) her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_0, A) \leq d(x_0, a_n)$ bulunur ve kolayca $0 \leq d(x_0, A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, x_0) = 0$ ve sonuçta (3) koşulu elde edilir. Tersine, (3) koşulunu gerçekleyen $x_0 \in X$

elemanı için, bu yazının başında infimum için söylenen temel gerçek nedeniyle, uygun bir $a_\varepsilon \in A$ için

$$d(x_0, a_\varepsilon) < \inf \{d(x_0, a) : a \in A\} + \frac{\varepsilon}{2} = d(x_0, A) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ve dolayısıyla $a_\varepsilon \in S(x_0, \varepsilon) \cap A$ bulunarak (1) elde edilir. Yeri gelmişken $\emptyset \neq A \subseteq B$ ise, herhangi bir $x \in X$ için $d(x, B) \leq d(x, A)$ gerçeğlendiğini görelim; gerçekten her $a \in A$ için $d(x, B) \leq d(x, a)$ olduğundan $d(x, B) \leq \inf \{d(x, a) : a \in A\} = d(x, A)$ bulunur. Bu arada yeni kavramlara geçmeden d eğer bir ultrametrik ise, $S_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarının tüm elemanlarının bu açık yuvarın merkezi olduğunu söyleyen şaşırtıcı iddiayı göstereyim. Aman ne saçmalık, olmaz böyle şey diyorsunuz, ama gerçek böyle! Herhangi bir $y \in S_d(x, \varepsilon)$ için $S_d(x, \varepsilon) = S_d(y, \varepsilon)$ gerçekleşir; çünkü $z \in S_d(y, \varepsilon)$ için $d(z, x) \leq d(z, y) \vee d(y, x) < \varepsilon$ olur çünkü hem $d(z, y) < \varepsilon$ hem de $d(y, x) < \varepsilon$ geçerlidir ve sonuçta $z \in S_d(x, \varepsilon)$, yani $S_d(y, \varepsilon) \subseteq S_d(x, \varepsilon)$ bulunur; tümüyle benzer biçimde $S_d(x, \varepsilon) \subseteq S_d(y, \varepsilon)$ gösterilir. Demek ki d bir ultrametrikse ve $y \in S_d(x, \varepsilon)$ ise, bu y elemanı $S_d(x, \varepsilon)$ yani $S_d(y, \varepsilon)$ 'un "merkezidir". İlgili ve meraklı okuyucu, eğer d bir ultrametrikse, $x \in X$ elemanı ve $0 < \varepsilon$ ne olursa olsun $S_d(S_d(x, \varepsilon), \varepsilon) = \{y \in X : d(y, S_d(x, \varepsilon)) < \varepsilon\}$ yuvarının $S_d(x, \varepsilon)$ yuvarına eşit olduğunu kolayca ve şaşırtarak gösterebilir.

Aslında ultrametrik kadar alışılmadık ve garip özellikleri olan başka metrikler de vardır. Ve ultrametriklerin daha nice şaşırtıcı özellikleri de ... , ama amacımız bu özel bilgileri anlatmak değildir. Şimdi de metrik uzaylarda düzgün sürekli fonksiyonların ne denli yalın ve kolay tanımlanabildiklerini gözleyelim. Boştan farklı herhangi bir A altkümesi yardımıyla, her $x \in X$ için $f(x) = d(x, A)$ biçiminde tanımlanan gerçel değerli f fonksiyonu düzgün sürekli, hatta $d(x, y) < \varepsilon$ ise, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gerçekler, neden mi? Önce herhangi bir $a \in A$ için $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ gözleyerek $d(x, A) - d(x, y) \leq \inf \{d(y, a) : a \in A\} = d(y, A)$ ve dolayısıyla, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ elde edelim. Benzer biçimde, ya da x ve y 'nin üstlendikleri rolleri değiştirerek bu kez $d(y, A) - d(x, y) \leq d(x, A)$ buluruz. Tüm bunlar ise $-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ ve dolayısıyla, $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ verir ve yukarıda söylenen düzgün süreklilik iddiası elde edilir. Aman sakın yanlış anlamayın lütfen, bir metrik uzayda tanımlanan tüm düzgün sürekli fonksiyonların yukarıdaki biçimde tanımlandığı düşünülmesin; örneğin, her $x \in \mathbf{R}$ için $f(x) = \sin x$ biçiminde tanımlanan ünlü sinüs fonksiyonu $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ gerçekler ve düzgün sürekli, ve yukarıdaki fonksiyon gibi tanımlanmamıştır.

Şimdi de bir metrik uzayda "kapalı olma" kavramından bahsedelim. Bunun için **yapışık nokta** kavramını bilmeliyiz. Boştan farklı bir A kümesi verildiğinde $d(x, A) = 0$ koşulunu gerçekleyen bir $x \in X$ elemanına, A kümesine **yapışık** ya da **yanışık nokta** denir. A kümesine yapışık tüm noktaların oluşturduğu altkümeyi, şimdilik ve geçici olarak $Yap(A)$ ya da daha kısa olarak $Y(A)$ işareti ile göstereyim. Küçük küçük ama her biri yalın ve önemli bazı gözlemler yapabiliriz: Örneğin, öncelikle, $Y(A) = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$ tanımını vurguladıktan sonra herhangi bir $x \in A$ için $0 \leq d(x, A) \leq d(x, x) = 0$ gözleyip, her A altkümesi için $A \subseteq Y(A)$ kapsamasını elde ederiz; sonra, $\emptyset$ kümesine uzaklık tanımsız olduğundan $d(x, \emptyset) = 0$ gerçekleyen bir $x \in X$ elemanının var olması söz konusu olamayacaktır ve kolayca $Y(\emptyset) = \emptyset$ buluruz; bir başka şaşırtıcı gerçek her $x \in X$ ve boş olmayan her A altkümesi için $d(x, A) = d(x, Y(A))$ eşitliğini gözlemektir, dikkat edilirse zaten $A \subseteq Y(A)$ nedeniyle $d(x, Y(A)) \leq d(x, A)$ geçerlidir, üstelik herhangi bir $y \in Y(A)$ için yukarıda gösterilen $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ eşitsizliği ve $d(y, A) = 0$ gerçeği kullanılarak $d(x, A) \leq d(x, y)$ bulunur ve sonuçta infimum alarak $d(x, A) \leq \inf \{d(x, y) : y \in Y(A)\} = d(x, Y(A))$ ters eşitsizliği de bulunur. Bir de şunu gözleyelim: A kümesine yapışık olmayan tüm noktaların kümesi olan $\{x \in X : 0 < d(x, A)\}$ açık bir kümedir. Neden mi? Önce bu kümeye, gerektiği için, bir isim verelim dilerseniz. Evet sevgili okurlar bu kümeye A 'nın dışı denir ve $dışA$ ile gösterilir. $Y(A)$ kümesine ait bir $x \in X$ elemanının $0 < d(x, A)$ koşulunu gerçeklemeyeceği kolayca görülür, demek ki yalnızca A değil $Y(A)$ bile dış A ile ayrıktır; üstelik $x_0 \in dış A$ ise, $0 < \varepsilon_0 < d(x_0, A)$ gerçekleyen pozitif ε_0 sayesinde $S(x_0, \varepsilon_0) \subseteq dışA$ olur, çünkü $x \in S(x_0, \varepsilon_0)$ ise, $d(x, A) > d(x_0, A) - d(x_0, x) > d(x_0, A) - \varepsilon_0 > 0$ geçerlidir. Evet artık kapalı küme kavramını öğrenebiliriz: (X, τ_d) metrik uzayında ancak ve yalnız $Y(A) \subseteq A$ (ve dolayısıyla, ters kapsama zaten geçerli olduğundan $A = Y(A)$ koşulunu)

gerçekleyen bir A altkümese **kapalı küme** denir. Tüm altkümeler gibi $Y(X)$ kümesi de X kümesi tarafından kapsandığı için, öncelikle X ana kümesi ve $\emptyset$ kümesinin kapalı oldukları gözlenir. Üstelik **her A altkümese için $Y(A)$ kümesi kapalıdır**, çünkü daha önce gözlediğimiz gibi her $x \in X$ için $d(x, A) = d(x, Y(A))$ idi, dolayısıyla bu uzaklıklardan ikincisi sıfır ise elbette birincisi de sıfır olur ve sonuçta $Y(Y(A)) \subseteq Y(A)$ bulunur. Ayrıca, boş olmayan bir A altkümese ve $0 < \varepsilon$ sayesinde tanımlanan

$$\{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}, \{x \in X : \varepsilon \leq d(x, A)\}$$

altkümeleri de kapalıdır. Birinci kümeye K_1 diyelim ve $Y(K_1) \subseteq K_1$ gösterelim. $d(x, K_1) = 0$ gerçekleyen bir x elemanı için, eğer, $x \in K_1$ olmasaydı $0 < d(x, A) - \varepsilon$ olur ve sonuçta her bir $y \in K_1$ için $d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y) \leq d(x, y) + \varepsilon$ nedeniyle $0 < d(x, A) - \varepsilon \leq \inf \{d(x, y) : y \in K_1\} = d(x, K_1) = 0$ çelişkisi doğardı. Öteki kümeyi $K_A(\varepsilon)$ ile gösterip onun kapalılık kanıtlamasını okuyucuya bırakalım. Üstelik $dışA = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_A(\frac{1}{n})$ gerçekleştiğini söylemekle yetinelim. İlgili ve istekli okurların biraz çabıyla bu şaşırtıcı gerçeği gösterebileceklerini umuyoruz. Demek ki metrik uzayda açık bir kümenin sayılabilir tane kapalı kümenin birleşimi olarak yazılması gerçekleştirilebiliyor. Bu saydıklarımızdan farklı kapalı kümeler de vardır, örneğin $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x_0 limitine yakınsıyorsa, $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ kümesi kapalıdır. Ayrıca bir metrik uzayda sonlu sayıda elemanlı tüm kümeler de kapalıdır; gerçekten $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesine yapışık bir $x \in X$ alındığında, bu elemanın x_k elemanlarına uzaklıkları olan gerçel sayılar için, yeniden numaralama sayıları kullanarak, sözgelimi $d(x, x_{n_1}) \leq d(x, x_{n_2}) \leq \dots \leq d(x, x_{n_m})$ gerçekleşiyorsa, sonuçta

$$0 = d(x, A) = \inf \{d(x, x_k) : 1 \leq k \leq m\} = d(x, x_{n_1})$$

olur ve dolayısıyla metrik koşullarının birincisi nedeniyle $x = x_{n_1} \in A$ bulunur.

Son olarak şunları vurgulayalım. Bir (X, τ_d) metrik uzayında herhangi bir A altkümese kapsayan kapalı kümelerin en "küçüğü" $Y(A)$ kümesidir. Öncelikle $A \subseteq B$ ise, $Y(A) \subseteq Y(B)$ gerçekleştiğini gözlemleyelim, gerçekten her bir $x \in X$ elemanı için geçerli olan $0 \leq d(x, B) \leq d(x, A)$ bize isteneni verir. Üstelik yukarda $A \subseteq Y(A)$ gerçekleştiğini ve $Y(A)$ 'nın kapalı olduğunu kanıtlamıştık, ayrıca A kümesini kapsayan herhangi bir K kapalı kümesi için bu son gözlem yardımıyla $Y(A) \subseteq Y(K) \subseteq K$ buluruz. Demek ki $Y(A)$ kapalı kümesi A 'yı kapsayan tüm kapalı kümeler tarafından kapsanmaktadır. Genel olarak herhangi bir topolojik uzayda ancak ve yalnız tümleyenleri açık küme olan altkümelere kapalı küme denir ve bir altkümeyi kapsayan tüm kapalı kümelerin en küçüğüne ise o kümenin **kapamışı** denir; aslında A 'nın kapamışı $\bar{A}$ işareti ile gösterilir ve A 'yı söz konusu uzayda kapsayan tüm kapalı kümelerin oluşturduğu aile $\mathcal{K}(A)$ ile gösterilirse, $\bar{A} = \bigcap \{K : K \in \mathcal{K}(A)\}$ eşitliği geçerlidir. Bu genel bilgiler (X, τ_d) metrik uzayında da geçerlidir, çünkü $X - Y(A) = dışA$ nedeniyle $Y(A)$ 'nın tümleyeni açıktır ve söz konusu metrik uzayda $Y(A) \in \mathcal{K}(A)$ ve her bir $K \in \mathcal{K}(A)$ için $Y(A) \subseteq K$ geçerli olduğundan $Y(A) = \bigcap \{K : K \in \mathcal{K}(A)\}$ bulunur; kısaca metrik uzaylarda bir A kümesinin kapamışı

$$\bar{A} = Y(A) = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

gerçekler. Öte yandan $dış(X - A)$ açık kümesine ise A **kümesinin içi** denir ve bu küme kısaca $içA$ ile gösterilir. O halde, $içA = \{x \in X : 0 < d(x, X - A)\}$ geçerlidir. Eğer $x \in içA$ ise, $0 < \varepsilon_x < d(x, X - A)$ gerçekleyen pozitif ε_x sayısı sayesinde $S(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ gözlemek güç değildir. Tersine eğer bir $x \in X$ elemanı için, uygun bir $0 < \varepsilon$ yardımıyla, $S(x, \varepsilon) \subseteq A$ gerçekleşiyorsa, $X - A$ tümleyen kümesine ait herhangi bir y elemanı $S(x, \varepsilon)$ yuvarına ait olamaz ve sonuçta

$$0 < \varepsilon \leq \inf \{d(x, y) : y \in X - A\} = d(x, X - A)$$

nedeniyle $x \in içA$ bulunur. Demek ki bir metrik uzayda, herhangi bir A altkümese için $içA = \{x \in X : 0 < d(x, X - A)\} = \{x \in X : \exists \varepsilon_x > 0, S(x, \varepsilon_x) \subseteq A\}$

geçerlidir, kısacası ancak ve yalnız uygun bir yuvarı A tarafından kapsanabilen elemanlar $içA$ kümesine aittirler. İlgili okuyucu, $içA$ 'nın aslında A kümesinin kapsadığı tüm açık yuvarların birleşim kümesi olduğunu kolayca gösterecektir, yanılıyor muyum? Aman dikkat, boş olmayan bir kümenin içi

boş olabilir; $\mathbf{R}$ kümesi üzerinde tanımlanan bir boyutlu Öklid metriğinde, rasyonel sayılar kümesi, hiç bir $S(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbf{R} : |y - x| < \varepsilon\} = \{y \in \mathbf{R} : x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ yuvarını kapsayamaz, çünkü bu yuvarda yani $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığında sonsuz tane irrasyonel sayı vardır, dolayısıyla bu metrik uzayda rasyonel sayılar kümesi $\mathbf{Q}$ için $\text{ic}\mathbf{Q} = \emptyset$ gerçekleşir.

Bir metrik uzayda bir A altkümesi için $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ kümesine, yani hem A ve hem de onun tümleyeni $X - A$ kümesine yapışık olabilen noktaların kümesine A 'nın **sınır kümesi** denir. Bu kümenin elemanlarına hem A kümesinin ve hem $X - A$ kümesinin elemanlarını kullanarak tanımlanan yakınsak dizilerle yakınsanabilir. Herhangi bir kapanış kümesi için $\overline{A} = \text{ic}A \cup \partial A$ gerçekleştiğini ve $\text{ic}A \cap \partial A = \emptyset$ olduğunu söylemekle yetinelim. Bir boyutlu Öklid metriğinde $\partial \mathbf{Q} = \mathbf{R}$ olduğunu gözlemek çok kolaydır. $x \in \mathbf{R}$ ne olursa olsun, $r_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ gerçekleyen r_n rasyonel ve $q_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ gerçekleyen q_n irrasyonel sayıların belirlediği $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin ikisi de $x \in \mathbf{R}$ gerçel sayısına yakınsarlar.

Temel bilgilere ayırdığımız bu bölümü, metrik uzaylarda tanımlı gerçel değerli fonksiyonların sürekliliğine ilişkin bir iki temel bilgiyle sürdürelim. (X, τ_d) metrik uzayında tanımlanmış gerçel değerli bir f fonksiyonuna, ancak ve yalnız, herhangi $0 < \varepsilon$ verildiğinde, $x_0 \in X$ noktasının

$$f(S(x_0, \delta_\varepsilon)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon), \quad \text{yani } d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \text{ ise, } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

koşulu gerçekleşecek biçimde δ_ε yarıçaplı bir açık yuvarı bulunabiliyorsa, evet işte ancak bu koşul altında $x_0 \in X$ **noktasında sürekli** denir. f fonksiyonuna, (X, τ_d) uzayının tüm noktalarında sürekli olabiliyorsa **sürekli fonksiyon** denir. x_0 noktasında süreklilik için bir başka önemli eşdeğer koşul, (X, τ_d) metrik uzayında $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gerçekleyen her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin $f(x_0)$ gerçel sayısına yakınsaması koşulunun gerçekleşmesidir. Bu iddianın yalnızca yeterliliğini göstermekle yetinelim. x_0 noktasına yakınsayan her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ olsun. Bu hipotez altında f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreksiz olsa, yani her $0 < \delta$ için $f(S(x_0, \delta)) \not\subseteq (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ gerçekleşecek biçimde bir $0 < \varepsilon_0$ var olsaydı, özellikle her $n \in \mathbf{N}$ için

$$f(S(x_0, \frac{1}{n})) \not\subseteq (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$$

olurdu; bu ise en az bir $x_n \in S(x_0, \frac{1}{n})$ elemanı için $f(x_n)$ gerçel sayısının $(f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ aralığına ait olmaması demektir. Oysa $0 \leq d(x_n, x_0) \leq 1/n$ eşitsizlikleri her $n \in \mathbf{N}$ için geçerli olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ olduğu halde $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ gerçekleşmez çünkü $f(x_n)$ gerçel sayılarının hiç birisi $(f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ aralığına ait değildir.

Temel bilgilere ayrılan bu kısmı olağanüstü önemli bir bilgiyle kapatalım: X kümesi üzerinde tanımlı bir d metriğinin belirlediği τ_d topolojisi ile $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ biçiminde tanımlanan ρ metriğinin belirlediği τ_ρ topolojisi eşittir, başka bir deyişle τ_d ve τ_ρ altküme toplulukları eşittir. Öncelikle $\rho(x, y) \leq d(x, y)$ yardımıyla, $x \in X$ ve $0 < \varepsilon$ ne olursa olsun $S_d(x, \varepsilon) \subseteq S_\rho(x, \varepsilon)$ ve sonra da çok zorlanmadan $S_\rho(x, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}) \subseteq S_d(x, \varepsilon)$ gözleyebiliriz. O halde, bu bilgiler yardımıyla, τ_d topolojisinin tanımındaki A koşulunu gerçekleyen boştan farklı herhangi bir G kümesinin, ρ metriğinin belirlediği τ_ρ topolojisinin tanımındaki benzer

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0, \quad S_\rho(x, \varepsilon_x) \subseteq U$$

koşulunu gerçekleyeceği ve tersine bu yeni koşulu gerçekleyen U kümelerinin de önceki A koşulunu gerçekleyeceği kolayca görülür, yani kısacası τ_d ve τ_ρ altküme toplulukları tümüyle aynı kümelerden oluşurlar. Metrik uzaylar terminolojisinde d ve ρ metriklerine **eşdeğer metrikler** denir. Dikkat, $0 \leq \rho(x, y) \leq 1$, kısaca $0 \leq \rho \leq 1$ gerçekleştiğini unutmayalım. Evet, bu kadar temel bilgi yeter! Yazımızın ikinci bölümünde ise bu konunun devamını bulabileceksiniz...

GALİLEO GALİLEİ'NİN İLGİNÇ BİR DİZİSİ

Ogün Doğru

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100, Tandoğan-Ankara

Bir çoğumuzun adını duyduğu 17. yüzyılın ünlü astronomi bilgini Galileo Galilei'nin (1564-1642) ilk kez dürbünü uzaya çevirme fikri ile teleskopu bulması, yalnızca yıldızları incelemesini gerektirmedi ve teleskopunu biraz da sayılara çevirerek matematikte de ilginç gözlemler yaptı. Yazımızda bu gözlemlerden birini bulacaksınız.

1615 yılında Galileo ortaya attığı bir fikirde $\frac{1}{3}$ sayısı ile ardışık tek doğal sayılar arasında bir ilişki kurdu. Bu ilişki

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots$$

eşitliklerinin sağlanması idi (Bkz.[1]). Kuşkusuz başlangıçta bu gözlemi ortaya koymak, şimdiki teknikler ispatlamaktan daha zordu.

İspat basittir; $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(1+3+\dots+(4n-1)) - (1+3+\dots+(2n-1))} = \\ & \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^{2n} (2k-1) - \sum_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{n^2}{4n^2 - n^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olur. Şimdi Galileo'nin bu gözlemden esinlenerek buna benzer bir eşitlik yazalım;

$$\frac{1}{3} = \frac{1^3+3^3}{[2(1+3)-1](5+7)} = \frac{1^3+3^3+5^3}{[2(1+3+5)-1](7+9+11)} = \dots$$

ispat için

$$1^3+3^3+\dots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

(Bkz.[2]) eşitliğinden hareketle

$$\begin{aligned} & \frac{1^3+3^3+\dots+(2n-1)^3}{[2(1+3+\dots+(2n-1))-1]((2n+1)+\dots+(4n-1))} = \\ & \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)^3}{[2\sum_{k=1}^n (2k-1)-1][\sum_{k=1}^{2n} (2k-1) - \sum_{k=1}^n (2k-1)]} = \\ & \frac{n^2(2n^2-1)}{[2n^2-1][4n^2-n^2]} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de $\frac{1}{3}$ için bu eşitliklere benzer ilginç başka eşitler yazalım ve yazacağımız eşitliklerin de benzer ispat yöntemi ile basitçe ispatlanabileceklerini söyleyerek ispatları okuyucularımıza bırakalım.

$$\frac{1}{3} = \frac{1^2+3^2}{2(3+5+7)} = \frac{1^2+3^2+5^2}{2(3+5+7+9+11)} = \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1^2+2^2}{5(1+2)} = \frac{1^2+2^2}{5(1+2)} = \frac{1^2+2^2+3^2}{7(1+2+3)} = \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5+7}{17+19} = \frac{7+9+11}{25+27+29} = \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5+7}{1+3+5+7+9+11} = \frac{7+9+11}{1+3+5+7+9+11+13+15+17} = \dots$$

Hemen burada "Neden bu ve benzeri eşitlikler $1/3$ için geçerli?" sorusu kafanıza takılmasın, çünkü bu tür eşitlikler $1/3$ 'ten farklı kesirler için de geçerli olabilir. Gerçekten payı 1, paydası tek doğal sayı olan tüm kesirli ifadeler için,

$$\frac{1}{2t-1} = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^{tn} (2k-1) - \sum_{k=1}^n (t-1)n(2k-1)}$$

eşitliğini yazabilir yazabilir ve bu eşitlik yardımı ile de $1/3, 1/5, 1/7, \dots$ şeklindeki bütün kesirler için benzer eşitlikler elde edebiliriz.

Ayrıca, tüm doğal sayıların küplerinin kendi sayıları kadar ardışık tek doğal sayının toplamı olarak yazılabileceğini de belirterek, aşağıdaki eşitliklerle yazımızı noktalayalım.

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$

.....

$$n^3 = ((n-1)n+1) + ((n-1)n+3) + \dots + ((n-1)n+2n-1) = \sum_{k=1}^n ((n-1)n+2k-1)$$

KAYNAKLAR

- [1] O.P. Ma, Galileo's sequences and dangling problem, Amer. Math. Mont. No:1, pp.67-71 (1979).
- [2] O. Doğru, Gauss toplamları için açık formüller, Matematik Dünyası, Cilt 8, No:3, sayfa:13-17 (1999).

Şimdiki Adresim:

Gülhane Askeri Tıp Akademisi,
Dekanlık Eğitim-Planlama Şubesi, Bilgisayar Ders Kurulu Temsilcisi, 06018, Etlik-Ankara

Bir matematikçi, bir şair veya ressam gibi modeller yaratır. Eğer modelleri diğerlerinin modellerinden daha kalıcı ise, düşüncelerle yapıldığındandır...bir satranç problemi, basitçe söylersek, katıksız bir matematik uygulamasıdır.

G.H. HARDY

ZAYIF ASAL SAYI TEOREMİ VE BAZI SONUÇLARI

Emre Alkan

Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü,
Bebek-İSTANBUL

Asal sayıların dağılımları ile ilgili bir çok problem matematikçileri uzun bir süre uğraştırmıştır. Asal sayıların dağılımı üzerine köşe taşı kabul edilebilecek bir sonuç, Rus matematikcisi P. L. Chebyshev (1821-1894) tarafından elde edilmiştir. Chebyshev' in elde ettiği sonuç kabaca şöyle ifade edilebilir. Eğer $\pi(x)$, $\leq x$ olan asal sayıların sayısını veren fonksiyon ise, öyle a, b sabitleri vardır ki, $x \geq 2$ için,

$$a \frac{x}{\log x} < \pi(x) < b \frac{x}{\log x}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuç **Zayıf Asal Sayı Teoremi** olarak bilinmektedir. Chebyshev 'in analizinde a, b sabitleri 1 'e oldukça yakındır. Bu ise **Asal Sayı Teoremi** olarak bilinen ve asal sayıların asimptotik davranışına ışık tutan,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \pi(x) \frac{\log x}{x} \right\} = 1$$

savının ortaya atılmasını desteklemiştir. Bu sonuç ise ilk defa 1896 'da J. Hadamard tarafından kanıtlanmıştır. Bu yazıdaki amacımız, Zayıf Asal Sayı Teoremini kanıtlayıp, bazı sonuçlarını elde etmektir.

Lemma: $1, 2, \dots, n$ sayılarının en küçük ortak katı $f(n)$ olsun. $n \geq 1$ için $f(2n) \geq 2^n$ olur.

Kanıt: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ olduğu görülebilir. $n \geq 1$ için $f(2n) \geq \binom{2n}{n}$ olduğunu görelim. $\binom{2n}{n} = \frac{(n+1) \dots 2n}{n!}$ sayısının $2n$ 'den büyük asal böleni olamaz. $2 \leq p < 2n$ olacak şekilde herhangi bir p asal sayısının $\binom{2n}{n}$ 'yi bölen en büyük kuvveti,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^j} \right] \right\} = \sum_{j=1}^m \left\{ \left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^j} \right] \right\},$$

$$m = \left\lceil \frac{\log 2n}{\log p} \right\rceil$$

olarak bulunur. $\left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^j} \right] < \frac{2n}{p^j} - 2 \left(\frac{n}{p^j} - 1 \right) = 2$ olduğundan $\left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^j} \right] \leq 1$ elde ederiz. Böylece p 'nin $\binom{2n}{n}$ 'yi bölen en büyük kuvveti en fazla $m = \left\lceil \frac{\log 2n}{\log p} \right\rceil$ olabilir. Öte yandan en küçük ortak katın tanımından,

$$f(2n) = \prod_{2 \leq p < 2n} p^{\left\lceil \frac{\log 2n}{\log p} \right\rceil}$$

yazılabilir. Bu derhal $f(2n) \geq \binom{2n}{n} \geq 2^n$ olduğunu gösterir.

Teorem: Öyle a, b sabitleri vardır ki $x \geq 2$ için $a \frac{x}{\log x} < \pi(x) < b \frac{x}{\log x}$ olur.

Kanıt: Lemma yardımıyla,

$$\begin{aligned} n \log 2 \leq \log f(2n) &= \sum_{2 \leq p < 2n} \log p^{\left\lceil \frac{\log 2n}{\log p} \right\rceil} \\ &\leq \pi(2n) \log 2n \end{aligned}$$

ve hemen

$$\log 2 \frac{n}{\log 2n} \leq \pi(2n)$$

elde ederiz. Herhangi bir $x \geq 2$ sayısı alalım. $2n, \leq x$ olan en büyük çift sayı olsun. Böylece $2n \leq x < 2n+2$ ve $\frac{x}{2} \leq 2n$ olduğu söylenebilir. Buradan kolayca

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \log 2 \frac{n}{\log 2n} = \frac{\log 2}{2} \frac{2n}{\log 2n} \text{ ve } \frac{x}{\log x}$$

artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\frac{2n}{\log 2n} \geq \frac{x}{2 \log \frac{x}{2}} > \frac{x}{2 \log x}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{\log 2}{4} \frac{x}{\log x} < \pi(x)$$

elde ederiz. $a = \frac{\log 2}{4}$ alabiliriz. Bundan sonra $\pi(2n) - \pi(n)$ ifadesi ile ilgileneceğiz.

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \\ &\leq \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \right\}^2 \\ &= 2^{2n} \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca $n < p < 2n$ olacak biçimde bir p asal sayısı için $p | \binom{2n}{n}$ olduğu açıktır. Böylece,

$$n^{\pi(2n) - \pi(n)} < \prod_{n < p < 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$$

ve buradan

$$\pi(2n) - \pi(n) < 2 \log 2 \frac{n}{\log n} \leq 8\pi(n)$$

ve

$$\pi(2n) < 9\pi(n)$$

elde ederiz. Biz $\pi(x) < b \frac{x}{\log x}$ olacak biçimde bir b sabitinin yalnızca varlığını göstereceğiz, bu sabiti hesaplamayacağız. $\pi(2n) - \pi(n) < 2 \log 2 \frac{n}{\log n}$ sonucundan kolayca şu elde edilir:

$$x \geq 2 \text{ için } \pi(2x) - \pi(x) < k \frac{x}{\log x}$$

olacak biçimde bir k sabiti vardır. (k burada $2 \log 2$ 'den biraz farklı olabilir.)

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) < k \frac{x}{2 \log \frac{x}{2}},$$

$$\pi\left(\frac{x}{2}\right) - \pi\left(\frac{x}{2^2}\right) < k \frac{x}{2^2 \log \frac{x}{2^2}}, \dots$$

eşitsizliklerini toplayarak,

$$\pi(x) < k \sum_{j=1}^m \frac{x}{2^j \log \frac{x}{2^j}}, \quad m = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor - 1$$

elde edilir. Şimdi $f(x) = \sum_{j=1}^m m \frac{\log x}{2^j \log \frac{x}{2^j}}$ fonksiyonunun asimptotik davranışını anlamaya çalışalım.

$x \geq 2$ için $f(x) > \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j}$ olacağından, x büyük iken m de büyük olduğundan, x 'den bağımsız $f(x) \leq A < 1$ olacak biçimde A sabiti olamaz.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log x}{2 \log \frac{x}{2}} + \frac{\log x}{2^2 \log \frac{x}{2^2}} + \cdots + \frac{\log x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \log \frac{x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}} \\ &\quad + \frac{\log x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} \log \frac{x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}}} + \cdots + \frac{\log x}{2^m \log \frac{x}{2^m}} \\ &< \frac{\log x}{\log \frac{x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right\} \\ &\quad + \frac{\log x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}} \left\{ \frac{1}{\log \frac{x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{m - (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1)} \log \frac{x}{2^m}} \right\} \end{aligned}$$

Şimdi $k = 1, 2, \dots, m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ için, $2^{k-1} \log \frac{x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + k}} > 1$ olduğunu görelim. $k = 1$ için

$$\log \frac{x}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}} > 1$$

eşitliği x yeterince büyük seçildiğinde sağlanır. Bundan sonra k üzerine tümevarım yapabiliriz. Tümevarım adımı için, $\log \frac{x}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2} \log \frac{x}{2^n}$ olduğunu görmek yetecektir. Bu ise $n \leq \frac{\log x}{\log 2} - 2$ olmasına eşdeğerdir. Tümevarım sınırimızdan $n \leq m - 1 = \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor - 2 \leq \frac{\log x}{\log 2} - 2$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla istediğimizi göstermiş olduk. Bu sonucu ve $m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ olduğunu gözönüne alarak, x yeterince büyük iken

$$f(x) < \frac{\log x}{\log x - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \log 2} + \frac{\log x (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}}$$

elde ederiz. $\frac{\log x (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}}$ ifadesi $\frac{(\log x)^2}{2^2 \log 2}$ ifadesi civarındadır. Bunu,

$$\frac{\log x (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)}{2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}} = O\left(\frac{(\log x)^2}{2^2 \log 2}\right)$$

olarak ifade ederiz. $x \rightarrow \infty$ iken $\frac{(\log x)^2}{2^2 \log 2} \rightarrow 0$ olduğundan, x yeterince büyük iken ikinci terim ihmal edilebilir. Öte yandan,

$$\frac{m}{2} \leq \frac{\log x}{2 \log 2} - \frac{1}{2}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\log x}{\log x - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \log 2} &\leq \frac{\log x}{\log x - \log 2 \left(\frac{\log x}{2 \log 2} - \frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{2 \log x}{\log x + \log 2} < 2 \end{aligned}$$

olduğundan $f(x)$ asimptotik olarak üstten sınırlıdır. Ek olarak, toplamı, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ yerine bir $n \geq 2$ için $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ keserek, $\frac{\log x}{\log x - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor \log 2} < \frac{n}{n-1}$ olmasını sağlayabiliriz. $\eta > 0$ sayısı verilsin; hem x hem de n yeterince büyük seçilirse,

$$\pi(x) < k(1 + \eta) \frac{x}{\log x}$$

olacaktır. x büyük iken, $n = [x]$ alırsak, $\pi(2n) - \pi(n)$ ve $\pi(2x) - \pi(x)$ ifadeleri hemen hemen aynı olacaktır. $\pi(2n) - \pi(n) < 2 \log 2 \frac{n}{\log n}$ olduğunu biliyoruz. Böylece x büyük iken $\pi(2x) - \pi(x) < 2 \log 2 \frac{x}{\log x}$ olacaktır. $k = 2 \log 2$ seçebiliriz. Sonuç olarak M uygun bir sınır olmak üzere $x \geq M$ iken $\pi(x) < (2 + \varepsilon) \log 2 \frac{x}{\log x}$, $\varepsilon = 2\eta$ sağlanır. Bu eşitlik $x < M$ değerleri için de sağlanacak biçimde $(2 + \varepsilon) \log 2$ sabiti uygun bir b sabitiyle değiştirilebilir. Böylece $x \geq 2$ için $\pi(x) < b \frac{x}{\log x}$ olacak biçimde bir b sabitinin varolduğunu gösterdik. Bu sonuç zayıf asal sayı teoreminin kanıtı tamamlar.

Şimdi bazı sonuçları ele alalım:

Sonuç 1: Yeterince büyük x için, $\pi(9x) - \pi(x) = O(\frac{x}{\log x})$ sağlanır.

Kanıt: $x \geq M = M(\varepsilon)$ iken

$$\pi(9x) - \pi(x) > \frac{9}{4} \log 2 \frac{x}{\log 9x} - (2 + \varepsilon) \log 2 \frac{x}{\log x},$$

$$\varepsilon > 0$$

sayısını $2 + \varepsilon < \frac{9}{4}$ olacak biçimde seçelim. $\frac{x}{\log 9x} = \frac{x}{\log 9 + \log x}$, $\frac{x}{\log x}$ civarında olacağından, x büyük iken $\alpha \frac{x}{\log x} < \pi(9x) - \pi(x)$ olacak biçimde bir $\alpha > 0$ bulunabilir. Öte yandan,

$$\pi(9x) - \pi(x) < \pi(9x) < \beta \frac{x}{\log x}$$

şeklindeki bir $\beta > 0$ ise zayıf asal sayı teoreminin bir sonucudur. Bu ise $\pi(9x) - \pi(x) = O(\frac{x}{\log x})$ olduğunu gösterir.

Zayıf Asal Sayı Teoreminin kanıtında ister istemez $\psi(x) = \log f(x) = \sum_{p \leq x} \log p \left[\frac{\log x}{\log p} \right]$ fonksiyonunu ele aldık. $\left[\frac{\log x}{\log p} \right]$ kuvvetleri saydığından $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ olarak da şöyle gösterilebilir: Bu toplamda baskın terimler, $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ fonksiyonunda geçer. $\theta(x) = O(x)$ ve $\psi(x) = O(x)$ olduğu bilinmektedir. Burada bunların kanıtlarına girmeyip, yalnız şu ilginç sonucu vermekle yetinelim.

Teorem: (Erdős-Kalmar) $x \geq 2$ için $\theta(x) < 2x \log 2$ olur.

Kanıt: $\prod_{n \leq p \leq 2n} p$ çarpımının $\binom{2n}{n+1}$ sayısını böldüğü görülebilir. $\binom{2n}{n+1} < \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ olacağından logaritma alarak

$$\theta(2n-1) - \theta(n-1) = \sum_{n \leq p \leq 2n} \log p < 2n \log 2$$

elde ederiz. n üzerine tümevarım yapalım. $n = 2$ için yapılacak bir şey yok. $m < n$ için $\theta(m) < 2m \log 2$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} n \text{ çift ise } \theta(n) &= \theta(2m) = \theta(2m-1) \\ &< 2(2m-1) \log 2 < 2.2m \log 2 \\ &= 2n \log 2, \\ n \text{ tek ise } \theta(n) &= \theta(2m-1) = \theta(2m-1) \\ &= \theta(m-1) + \theta(m-1) \\ &< 2m \log 2 + 2(m-1) \log 2 \\ &= 2(2m-1) \log 2 = 2n \log 2. \end{aligned}$$

Tümevarım tamamlanır. $x \geq 2$ için $n = [x]$ alırsak,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{p \leq n} \log p \\ &= \theta(n) < 2n \log 2 \leq 2x \log 2 \end{aligned}$$

olması kanıtı tamamlar.

Sonuç 2: P_n , n -inci asal sayı olsun. Bu durumda öyle a, b sabitleri vardır ki, $n \geq 2$ için $a n \log n < P_n < b n \log n$ eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt: $x \geq 2$ için $\pi(x) < b \frac{x}{\log x}$ olduğunu biliyoruz. $x = P_n$ alarak $n = \pi(P_n) < b \frac{P_n}{\log P_n}$ ve hemen $\frac{1}{b} n \log P_n < P_n$ elde ederiz. $n < P_n$ olduğundan kolayca $\frac{1}{b} n \log n < P_n$ bulunur. Benzer biçimde $a \frac{x}{\log x} < \pi(x)$ olduğunu biliyoruz, $x = P_n$ olarak,

$$P_n < \frac{1}{a} n \log P_n$$

elde ederiz. Şimdi, n yeterince büyük olduğu zaman $P_n < n^2$ olacağını görelim. Tersine kesin artan bir n_k dizisi için $P_{n_k} \geq n_k^2$ olsaydı,

$$a \frac{n_k^2}{2 \log n_k} < \pi(n_k^2) \leq n_k$$

elde ederdik. Fakat n_k yeterince büyük iken elde edilen eşitsizlik sağlanmaz. O halde $n \geq N$ için $P_n < n^2$ olmalıdır. Böylece

$$P_n < \frac{2}{a} n \log n, \quad n \geq N$$

elde ederiz. $n = 2, 3, \dots, N-1$ için de $P_n < c n \log n$ olacak biçimde bir c sabiti olarak kolayca $n \geq 2$ için

$$P_n < \max(c, \frac{2}{a}) n \log n$$

elde ederiz. Bu sonuç 2'nin kanıtını tamamlar.

Sonuç 3: $g(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ ise, $g(x) = O(\log \log x)$ olur.

Kanıt: Sonuç 2'den P_n asal sayısı $n \log n$ civarındadır. Böylece

$$g(x), \quad \sum_{P_n \leq x} \frac{1}{n \log n}$$

civarında olur. Bu seri ise integral testi ile,

$$\int_2^x \frac{dt}{t \log t} = O(\log \log x)$$

civarındadır. Ayrıntıları okuyucuya bırakıyoruz.

Sonuç 4: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$, asal sayıların yoğunluğu sıfırdır.

Kanıt: $\frac{\pi(x)}{x}, \frac{1}{\log x}$ civarında olduğundan kolayca görülebilir.

Sonuç 5: $k \geq 1$ sayısı verilsin, $n \geq N = N(k)$ için $P_k^n = P_1 P_2 \cdots P_{n-1}$ olur.

Kanıt: Logaritma alınca istenen,

$$k \log P_n < \sum_{i=1}^{n-1} \log P_i$$

şeklinde yazılabilir. $P_n < c n \log n$ olduğundan,

$$k \log P_n < k(\log n + \log \log n + \log c) = O(\log n)$$

olur. Öte yandan,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log P_i = \theta(P_{n-1}) = O(P_{n-1}) = O(n \log n)$$

sağlanır, çünkü Sonuç 1 'den x büyük iken x ile $9x$ arasında bir asal sayı vardır ve bu $P_{n-1} < P_n < 9P_{n-1}$ olması demektir ki $P_n = O(P_{n-1})$ yazılabilir. Sol taraf $\log n$ civarındadır. Bu, kanıtı tamamlar.

Teorem: $g(x) = \prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p})$ ise $x \geq 2$ için $(\log x)^{-\varepsilon} < g(x) < c(\log x)^{-1}$ $c, \varepsilon > 0$ sabitleri vardır.

Kanıt: $\frac{1}{g(x)} = \prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p})^{-1}$ yazalım.

$$(1 - \frac{1}{p})^{-1} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots$$

yazılarak $p \leq x$ bu serilerin Cauchy çarpımı yapılırsa, çıkan toplamda, $[x]$ 'e kadar olan doğal sayıların tersleri geçer. Böylece,

$$\frac{1}{g(x)} = \prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} > \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} > k \log x$$

olacak biçimde bir k sabiti vardır. ($\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = O(\log x)$ olduğunu biliyoruz.) Böylece,

$$g(x) < \frac{1}{k} (\log x)^{-1}$$

elde ederiz. Şimdi

$$(\log x)^{-\varepsilon} < g(x)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon < 0$ sabiti bulalım. Logaritma alarak,

$$-\varepsilon \log \log x < \log g(x) = \sum_{p \leq x} \log(1 - \frac{1}{p})$$

ve

$$\sum_{p \leq x} \log \frac{p}{p-1} < \varepsilon \log \log x$$

elde ederiz. $\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ ve $0 < x \leq 1$ için $\log(1+x) < x$ olduğundan,

$$\sum_{p \leq x} \log \frac{p}{p-1} < 2 \sum_{p \leq x} \frac{1}{p-1} < \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \varepsilon \log \log x$$

elde edilebilir (Sonuç 3 'den dolayı). Bu, kanıtı tamamlar.

Pozitif tamsayıların kesin artan öyle bir n_k dizisini ele alalım ki dizinin herhangi iki terimi aralarında asal olsun. Örnek olarak asal sayılar dizisi ve Fermat sayıları dizisi $k = 1, 2, \dots$ için 2^{2^k+1} verilebilir. Daha zor örneklerin hepsinde sözü edilen dizilerin yoğunluğu sıfırdır ve bu bir raslantı değildir. Bu son sonuçla yazıyı bitirelim:

Teorem: n_k yukarda söylendiği gibi bir dizi olsun. $f(x)$, bu dizinin $\leq x$ olan terimlerinin sayısı ise, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ olur.

Kanıt: Dizinin terimlerinin en az bir asal çarpanı vardır ve bu çarpanlar farklıdır. Böylece hemen $f(x) \leq \pi(x)$ elde ederiz. Sonuç 4 kanıtı tamamlar.

KAYNAKLAR

- [1] E. Alkan, Fermat ve Euler Teoremleri Üzerine Uygulamalar, Matematik Dünyası, Cilt: 5, Sayı: 3.
- [2] G. H. Hardy, An Introduction to the Theory of Numbers, E. M. Wright, 1979.

ÖKLİD ALGORİTMASININ BİR UYGULAMASI

İsmail Aslan

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

e-posta: iaslan@likya.iyte.edu.tr

$n \times n$ tipinde bir A matrisini göz önüne alalım. m pozitif tamsayı olmak üzere, $A \cdot A \cdots A$ (m çarpan) çarpımı yine bir $n \times n$ matrisidir, bunu A^m ile gösterelim. Bu yazıda, zengin uygulama alanı olan Öklid Algoritmasını (Bkz.[1]) kullanarak, m nin büyük değerleri için,

$$a_k A^m + a_{k-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

matris polinomlarının hesaplanmasından söz edeceğiz (Burada I_n , $n \times n$ tipindeki birim matrisi göstermektedir). Bu amaçla, öncelikle bazı tanımlara ve teoremlere gereksinimimiz olacak.

Tanım: Eğer $AV = \lambda V$ olacak şekilde sıfır olmayan $n \times 1$ tipinde bir V matrisi varsa, λ sayısına, A matrisinin bir **özdeğeri** denir.

A matrisinin determinantını $|A|$ ile gösterelim ve aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem: λ sayısının A matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

olmasıdır.

Şimdi k -inci dereceden

$$P(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

polinomunu göz önüne alalım. A , bir $n \times n$ matris olmak üzere,

$$P(A) = a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

olarak tanımlayalım. $P(A)$ polinomunun yine bir $n \times n$ matris olduğu açıktır.

Tanım: A , bir $n \times n$ matris olmak üzere, $|x I_n - A|$ polinomuna A matrisinin **karakteristik polinomu**, $|x I_n - A| = 0$ denkleminde A matrisinin **karakteristik denklemi** denir.

Teorem: Her $n \times n$ matrisi kendi karakteristik denklemini sağlar.

Yani, A , bir $n \times n$ matris olmak üzere, A matrisinin karakteristik polinomu

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ise

$$A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

dır. Buradan da bir matrisin karakteristik denkleminin köklerinin sözkonusu matrisin özdeğerlerini verdiği sonucunu çıkarırız.

Şimdi de polinomlar için Öklid Algoritması'nı ifade edelim:

$f(x)$ ve $g(x) \neq 0$ polinomları verilsin ve $f(x)$ 'in derecesi $g(x)$ 'in derecesinden büyük ya da eşit olsun. Bu durumda

$$f(x) = g(x) q(x) + r(x)$$

olacak şekilde $q(x)$ ve $r(x)$ polinomları vardır. Burada $r(x)$ polinomunun derecesi, $g(x)$ polinomunun derecesinden küçüktür ya da $r(x) = 0$ dır.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi için $A^{2001} - 2A^{2000}$ matrisini hesaplayalım. Bu amaçla $f(x) = x^{2001} - 2x^{2000}$ diyelim. A matrisinin karakteristik polinomu

$$|xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x+2 & -4 & -3 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -5 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - x$$

olup, $x^3 - x = 0$ karakteristik denklemini çözerek 0, -1, 1 özdeğerlerini buluruz. Öklid Algoritmasını $x^{2001} - 2x^{2000}$ ve $x^3 - x$ polinomlarına uygulayarak

$$x^{2001} - 2x^{2000} = (x^3 - x)q(x) + (a_0 + a_1x + a_2x^2) \quad (1)$$

denklemini elde ederiz. Öte yandan A matrisi kendi karakteristik denklemini sağlayacağından, $A^3 - A = 0$ olup, bu gerçeği ve (1) denklemini kullanarak

$$A^{2001} - 2A^{2000} = a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 \quad (2)$$

denklemini elde ederiz. Ayrıca (1) denkleminde, 0, -1, 1 özdeğerlerini kullanarak,

$$0 = a_0$$

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$-3 = a_0 - a_1 + a_2$$

sistemini elde eder ve buradan da $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ve $a_2 = -2$ olarak buluruz. Böylece (2) denkleminde

$$A^{2001} - 2A^{2000} = a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 = A - 2A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini buluruz.

Öte yandan, $A = (a_{ij})$ olmak üzere, A^k matrisini hesaplamak için *Mathematica* programını kullanmış olsaydık, aşağıdaki komutları işletmek yeterli olacaktı.

$$A = \{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$$

$$\text{matrixpower}[b, 1] := b;$$

$$\text{matrixpower}[b, n] := b.\text{matrixpower}[b, n-1];$$

$$\text{matrixpower}[A, k];$$

Alıştırma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi için A^{15} matrisini hesaplayınız.

KAYNAKLAR

- [1] Koç, C: Öklid Algoritması, Matematik Dünyası, 4, Sayı 1,2-5 (1994)
- [2] Kolman, B: Elementary Linear Algebra, Prentice Hall, 1996

MOSKOVA MATEMATİK BAYRAMI

Lüdmila Kadets

Kharkov Lisesi No:45

Kharkov-UKRAYNA

10 seneyi aşkın bir süredir Moskova'da her sene 6. ve 7. sınıf öğrencileri için Matematik Bayramı denilen Matematik olimpiyadı yapılmaktadır.

Bu bayram, Moskova Üniversitesi öğretim üyeleri ve öğrencileri katkılarıyla gerçekleşir. Bu sene yarışmaya Rusya'dan, Ukrayna'dan ve Beyaz Rusya'dan 3000 öğrenci katıldı. Yarışma 18 Şubat'ta Moskova Devlet Üniversitesi binasında saat 10'da başladı. İki saatlik bir süre için herkes 6 soruyla baş başa kaldı. Olimpiyatta önerilen sorulardan iki tanesi aşağıda veriyoruz. Peki, siz bu problemleri çözebilir misiniz?

1. (T. Golenişçeva-Kutuzova, V. Kleptsyn) Saşa, Paşa ve Maşa kar topu oynuyorlar. İlk kar topunu Maşa attı. Daha sonra kendisine isabet eden her kar topunun karşılığında Saşa 6 kar topu, Paşa 5 kar topu ve Maşa 4 kar topu attı. Bir süre sonra oyun bitti. Hedefe ulaşmayan kar topunun sayısı 13 olduğuna göre, her kişiye kaç tane kar topu isabet ettiği bulunuz. (Kişi kendi kendisine kar topu atamaz.)

2. (I. Akulich) 8×8 boyutlu kareli tahtanın karelerini, her kare boyandıktan sonra boyanmış bölgenin bir simetri eksenini bulunacak şekilde, birer birer boyuyoruz.

a) 26 karenin;

b) 28 karenin bu koşulu sağlayarak nasıl boyanabileceğini gösteriniz. (Çözüm olarak 1'den 26'ya kadar veya 1'den 28'e kadar olan sayıları, boyanan karelere boyanma sırası ile yazınız).

Yarışmadan sonra jüri çözümleri kontrol ederken, çocuklar konserleri ve çizgi filmleri izlediler. Bazıları dünyanın en büyük ve güzel şehirlerden olan Moskova'yı gezmeye çıktılar. Herkes için ünlü Moskova Üniversitesinde bulunmak heyecan verici idi.

Akşam saat 6'da galipler jüri tarafından ilan edildi ve ödüllendirildi. Törenin sonunda tüm katılanlara bu ve önceki yarışmalarda çıkan problemleri ve bunların çözümlerini içeren kitaplar dağıtıldı. Önceki senelerde çıkmış 2 soruyu aşağıda veriyoruz.

1. (1990) Düzlem üzerinde, her biri geriye kalanlardan üçüne 1 birim uzaklıkta bulunan 6 nokta bulunuz.

2. (1994) Bir ailede herkes birer fincan sütü kahve içti (fincanlar aynıdır). Katya tüm sütün $\frac{1}{4}$ 'nü ve tüm kahvenin $\frac{1}{6}$ 'nı içti. Aile kaç kişiden oluşur?

Matematik Bayramı tüm çocukların çok hoşuna gitti. Herkes anılarını okula arkadaşlarıyla paylaşır için bir an önce eve dönmeyi bekliyordu.

Matematik, ne hakkında konuştuğumuzu asla bilmediğimiz ve söylediklerimizin doğruluğunda da bilgi sahibi olmadığımız bir konudur.

BERTRAND RUSSELL

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 31 Mayıs 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.226. ABC üçgeninde açortayların kesişim noktası I , iç teğet çemberin yarıçapı ise,

$$|AI| + |BI| + |CI| \geq 6r \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

A.227. Bir pozitif tamsayının ard arda gelen herhangi iki rakamının oluşturduğu iki basamaklı sayı 17'ye veya 23'e bölünüyorsa, bu sayıya "ilginç sayı" diyelim. Kaç tane 2001 basamaklı ilginç sayı vardır?

A.228. Her pozitif gerçel a, b, c sayıları ve pozitif n sayısı için

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a}\right)^n + \left(\frac{c+a}{b}\right)^n \geq 3 \cdot 2^n$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

A.229. Tüm gerçel sayılar kümesinde tanımlı olan f fonksiyonu her x için

$$f(x+3) \leq f(x) + 3, f(x+2) \leq f(x)$$

eşitsizliklerini sağlar. $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösteriniz.

A.230. N arkadaş birkaç kere beraber tiyatroya gittiler. Her gidişlerinde aynı sırada bulunan yan yana N koltuğu paylaştılar. Her ikili tam bir kez yan yana oturdular. N 'nin çift sayı olduğunu gösteriniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.226. Pozitif tamsayılardan oluşan kesin olarak artan sonsuz dizide 4.'den başlayarak her terimin karesi bundan daha önce gelen herhangi üç terimin kareleri toplamına eşittir. Bu dizide sonsuz sayıda bileşik sayıya rastlanacağını ispat ediniz.

Y.227. 5×5 boyutlu tabloya 1' den 25'e kadar olan pozitif tam sayılar yazılmıştır. İçerdikleri sayılar arasındaki fark en az 5 olacak şekilde iki komşu hane bulunacağını gösteriniz. Not: Bir ortak kenarı bulunan iki haneye komşu haneler denir.

Y.228. $a_0, a_1, \dots, a_n$ pozitif sayılar olmak üzere $x^{n+1} + a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_0$ polinomunun $x_0, x_1, \dots, x_n$ kökleri için $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$ eşitsizlikleri sağlanır. $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$ sayılarının $x^n - n x^{n-1} + b_n - 2x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 - n x + 1$ polinomunun kökleri olduğu biliniirse, $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ olduğunu gösteriniz.

Y.229. ABC üçgeninin BC, CA ve AB kenarları üzerinde, $|AA| \leq 1, |BB| \leq 1, |CC| \leq 1$ olacak şekilde sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktaları alınmıştır. ABC üçgeninin alanının $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 'ü aşmadığını gösteriniz.

Y.230. Öğle saatinde (12:00'de) üç sinekten biri saatin akrepinin, diğeri yelkovanın ve üçüncüsü de saniye göstergesinin üzerine oturdular. Bunlardan biri diğerine yetiştiğinde yer değiştirdiler (saniye göstergesi aynı zamanda yelkovan ve akrepe yetiştiğinde saniye göstergesi ve akrep üzerindeki sinekler yer değiştirdiler). Gece yarısına kadar sineklerin her biri kaç kez merkez etrafında döndü?

ÇÖZÜMLER

A.216. ...12345678987654321 biçiminde olup 1999^{2000} sayısına bölünen doğal sayı var mıdır?

Çözüm. Evet vardır. Yazılımın kolaylığı için $A = 12345678987654321, B = 1999^{2000}$ diyelim ve $B + 1$ tane $A, \overline{AA}, \overline{AAA}, \dots, \overline{AA \dots A}$ sayılarına bakalım. Bu sayılar içinde B 'ye eşit kalanla bölünen en az ikisi vardır. Söz konusu iki sayının farkı olan

$$\overbrace{AA\dots A}^k - \overbrace{AA\dots A}^m = \overbrace{AA\dots A}^m \cdot 10^{k-m}$$

k tane m tane m tane
sayısı, B'ye tam bölünecektir. Fakat 10^{k-m} ile B sayısı aralarında asal olduğundan, $\overbrace{AA\dots A}^m$ sayısı B'ye bölünmek zorundadır. m tane

A.217. $x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$ denkleminin kökleri olan x_1, x_2 ve x_3 sayılarının $(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$ eşitliğini sağlamasını garanti eden a sayılarının hepsini bulunuz.

Çözüm. $y = x - 3$ diyelim. O halde, $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3 - 3$ sayıları

$(y + 3)^3 - 6(y + 3)^2 + a(y + 3) + a = y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + 4a - 27$ polinomunun kökleri olacaktır. Vieta teoremine göre,

$$y_1 + y_2 + y_3 = -3,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a - 9,$$

$y_1y_2y_3 = 27 - 4a$ eşitlikleri sağlanacaktır. Şimdi biz a parametresini, hem Vieta eşitlikleri ve hem de $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$ eşitliği sağlanacak biçimde seçmek istiyoruz. Direkt hesaplamalarla aşağıdaki özdeşliği kontrol edebilirsiniz:

$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1y_2y_3$. Yukarıdaki eşitlikleri bu son özdeşlikte göz önüne alırsak, $0 = (-3)^3 - 3(a - 9)(-3) + 3(27 - 4a) = -27 - 3a, a = -9$ elde ederiz.

A.218. Toplamları 1'e eşit olan herhangi pozitif $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sayıları için

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2 - \alpha_i} \geq \frac{n}{2n - 1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

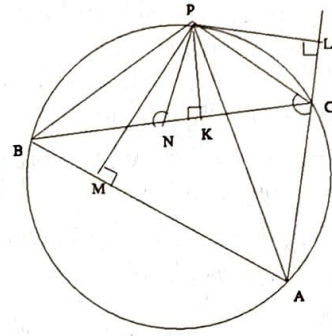
Çözüm. $\beta_i = 2 - \alpha_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ diyelim. O halde,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 2n - 1$$

olacaktır. Şimdi Aritmetik ve Geometrik Ortalamalar arasındaki eşitsizliği kullanarak,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2 - \alpha_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + \beta_i}{\beta_i} - n =$$

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} - n \geq 2 \frac{n}{\sqrt[n]{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}} - n \geq$$



Şekil1

$$\frac{2n^2}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} - n = \frac{2n^2}{2n - 1} - n = \frac{n}{2n - 1}$$

elde ederiz.

A.219. Üçboyutlu uzayı, bir-biriyle keşismeyen ve bir-birine kongruent olan 1001 tane kümenin birleşimi biçiminde ifade etmek mümkün müdür?

Çözüm. Evet mümkündür. Üç boyutlu uzayın söz konusu parçalanmasına bir örnek gösterelim. $OXYZ$ kordinat sisteminde düşüneceğimiz (x, y, z) noktalarını şöyle sınıflandıralım: $M_i (i = 1, 2, \dots, 1001)$ kümesine, ilk koordinat x 'in tam değerinin

$$[x] \equiv i \pmod{1001}$$

denkliğini sağladığı (x, y, x) noktalarına ait edelim. Kolayca anlaşılabileceği gibi, M_i ler ikişer-ikişer keşismiyorlar, bir-birine kongruentler ve birleşimleri tüm uzayı vermektedir.

A.220. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin BC yayı üzerinde alınmış bir P noktasından, BC, AC, AB doğrularına, sırasıyla, PK, PL, PM dikleri indirilmiştir.

$$\frac{|BC|}{|PK|} = \frac{|AC|}{|PL|} + \frac{|AB|}{|PM|}$$

eşitliğini sağlayınız.

Çözüm. BC parçası üzerinde $\widehat{PNB} = \widehat{PCA}$ sağlanacak biçimde N noktası vardır. (Çünkü: $\widehat{PCB} < \widehat{PCA} = 180 - \widehat{PCB}$; şekil 1'den izleyiniz). Şimdi,

$$\triangle BPN \sim \triangle APC \text{ ve } \triangle CPN \sim \triangle APN \quad (1)$$

bağıntılarını yazabiliriz. Şekilden, PK 'nın BP ve CP üçgenlerinin ve PL ile PM 'nin ise sırasıyla, APC ve APB üçgenlerinin yükseklikleri olduğunu görebiliriz. (1) bağıntısını da gözönüne alarak şunları yazabiliriz.

$$\frac{|AC|}{|PL|} = \frac{|BN|}{|PK|}, \frac{|AB|}{|PM|} = \frac{|CN|}{|PK|}$$

Bu son bağıntılardan

$$\frac{|AC|}{|PL|} + \frac{|AB|}{|PM|} = \frac{|BN|}{|PK|} + \frac{|CN|}{|PK|} = \frac{|BN|+|CN|}{|PK|} = \frac{|BC|}{|PK|}$$

elde edilir.

Y.216. $abc = 1$ ve $a^3 > 36$ ise,

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

eşitsizliğinin sağlanacağını kanıtlayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \\ \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + \frac{a^2}{12} &= \\ \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 - 3bc + \frac{a^2}{12} &= \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^2}{12} - \frac{3}{a} = \\ \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36}{12a} \end{aligned}$$

ifadesinde $a^3 - 36 > 0$ olduğunu gözönüne alırsak, istenen eşitsizlik ispat edilmiş olur.

Y.217. Düzlem hanelere bölünmüş ve bu hanelerden rastgele 100 tanesi işaretlenmiştir. İspat ediniz ki, bir biriyle hiç ortak noktası olmayan en az 25 tane işaretlenmiş hane vardır.

Çözüm. Tüm düzlemi, her biri 4 haneden oluşan karelere bölelim ve her karenin üst sağ hanesini siyaha, üst sol hanesini beyaza, alt sağ hanesini kırmızıya, alt sol hanesini de maviye boyayalım. Aynı renge boyanmış hanelerin hiç ortak noktasının olmadığı açıktır. Şimdi, 100 tane işaretlenmiş hanenin en az $\frac{1}{4}$ 'ü (yani, en az 25 tanesi) aynı renge boyanmış olduğundan, işte bu haneler problemde iddia edilen özelliğe sahip olacaktırlar.

Y.218. Her $x \in [-1, 1]$ için $|P(x)| \leq 1$ koşulunu sağlayan $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

polinomlar kümesine M diyelim. Bu takdirde, öyle A sabiti vardır ki, M 'den olan her polinomun baş katsayısı a için $|a| \leq A$ eşitsizliği sağlanacaktır; kanıtlayınız.

Çözüm. Öncelikle, $P_0(x) = 4x^3 - 3x$ polinomunun M 'den olduğunu gözlemleyelim. Gerçekten, $P_0(-1) = -1$, $P_0(1) = 1$ ve yerel ekstremum noktaları olan $\frac{1}{2}$ ve $-\frac{1}{2}$ noktalarında $P_0(\frac{1}{2}) = 1$, $P_0(-\frac{1}{2}) = -1$ olduğundan, her $x \in [-1, 1]$ için $|P_0(x)| \leq 1$ eşitsizliği sağlanacaktır.

Şimdi gösterelim ki, problemde adı geçen A sayısı olarak, $P_0(x)$ 'in baş katsayısı olan 4 alınabilir; yani, M 'den olan her $P(x)$ polinomu için $|a| \leq 4$ olacaktır.

Aksini varsayalım: Öyle $P_1(x)$ polinomu vardır ki, $\forall x \in [-1, 1]$ için $|P_1(x)| \leq 1$ olmasına rağmen, $|a| > 4$ 'tür.

$$Q(x) = P_0(x) - \frac{4}{a}P_1(x)$$

polinomunu ele alalım. $Q(x)$ 'in derecesi 2'den fazla değildir. Öte yandan

$$\left|\frac{4}{a}P_1(x)\right| = \frac{4}{|a|} \cdot |P_1(x)| < |P_1(x)| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{4}{a}P_1(x)\right| < 1$$

olduğundan, $Q(-1) < 0$, $Q(\frac{1}{2}) > 0$, $Q(\frac{1}{2}) < 0$ ve $Q(1) > 0$ olur. Buradan $Q(x)$ polinomunun en az üç kökü olduğunu söyleyebiliriz. Oysa, $Q(x)$ polinomunun derecesi 3'ten küçüktür. Çelişki.

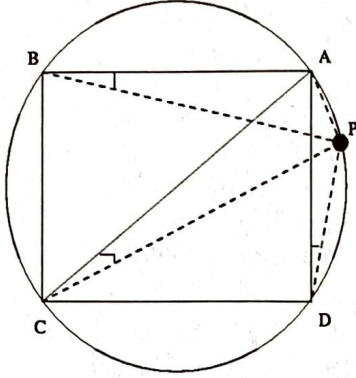
Y.219. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir kare verilmiştir. Çember üzerinde alınmış herhangi noktadan karenin köşelerine kadar olan uzaklıkları gösteren dört sayıdan en az birinin irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Çember üzerinde rastgele P noktası alalım ve şekildeki $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$, $|PD|$ uzaklıklarının hepsinin rasyonel sayı olamayacağını gösterelim. Karenin AC köşegenini (bu hem de çemberin çapıdır) çizelim ve onun uzunluğuna d diyelim. Ayrıca, $\widehat{ABP} = \widehat{ACP} = \widehat{ADP} = \alpha$ diyelim. Şekilden,

$$|AP| = d \sin \alpha, \quad |CP| = d \cos \alpha,$$

$$|BP| = d \sin(\widehat{PDB}) = d \sin(\alpha + 45) =$$

$$d(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(|AP| + |CP|)$$



olduğu görülür. Buradan, $|AB|$ ve $|BP|$ 'nin rasyonel olması halinde $|BP|$ 'nin irrasyonel olacağı açıktır.

Y.220. Alanı S olan A_1, A_2, A_3 üçgeninin $A_i, (i = 1, 2, 3)$ tepesinden çıkan yüksekliğine $A_i H_i$ diyelim. $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun

$$S = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^3 |A_i A_{i+1}| \cdot |A_i H_i|, \quad (A_4 = A_1)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $a_1 = |A_2 A_3|$, $a_2 = |A_1 A_3|$, $a_3 = |A_1 A_2|$, $h_1 = |A_1 H_1|$, $h_2 = |A_2 H_2|$, $h_3 = |A_3 H_3|$ diyelim.

Bu takdirde, Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden, $a_3 h_1 + a_1 h_2 + a_2 h_3 = a_1 h_1 \frac{a_3}{a_1} + a_2 h_2 \frac{a_1}{a_2} + a_3 h_3 \frac{a_2}{a_3} = 2S \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} \right) \geq 2S \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \right)} = 6S$

Sonuncu eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Böylece, $a_3 h_1 + a_1 h_2 + a_2 h_3 = 6S$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul, $a_1 = a_2 = a_3$ olmasıdır.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

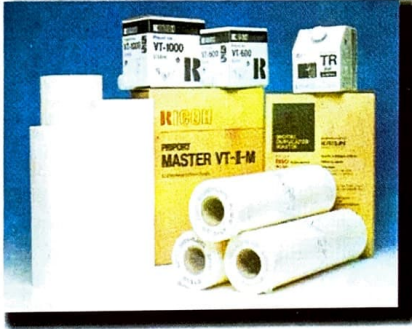
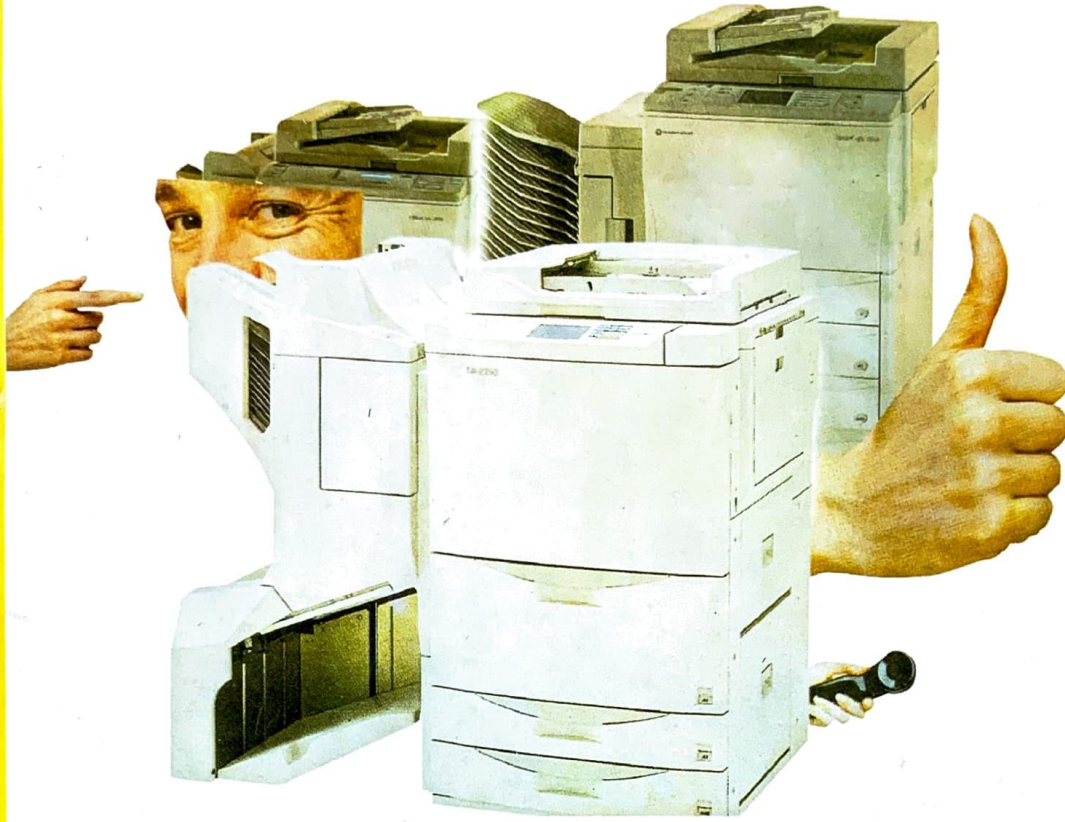
Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla, İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da mdunyasi@galois.iyte.edu.tr adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.



BÜRO MAKİNALARI SAN. ve TİC. LTD.ŞTİ.



**Üstün Hizmet Teknolojisi
ve Uygun Fiyatlarıyla
Hizmetinizdeyiz...!**

SANYO-MINOLTA-TOSHIBA-MITA-RICOH
fotokopi ve faks cihazları Teknik servis, yedek
parça ve sarf malzemeleri

Akdeniz Cad. No:5/2 - 204
Pasaport 35210 İZMİR - TURKEY
Tel: (0.232) 483 67 91 - 489 88 42
FAKS: (0.232) 489 88 42

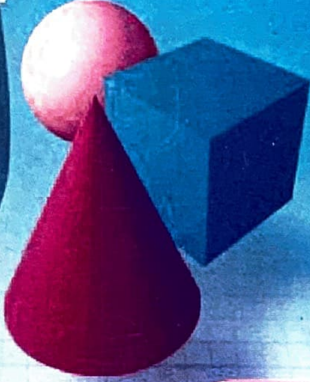
MATEMATİK ETKİNLİKLERİ 2001

24-26 MAYIS 2001

matematik
sempozyumu

24-26 MAYIS

Sizi matematikle oynamaya çağırıyoruz



matematik
sergileri

24-26 MAYIS



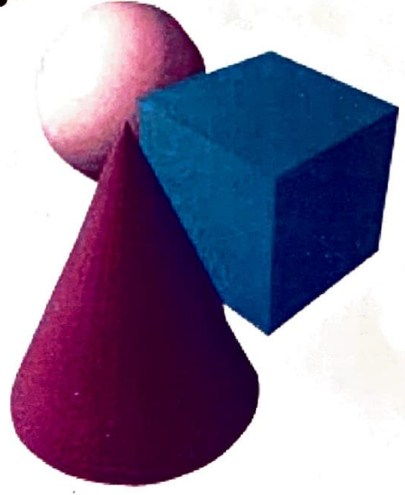
MATEMATİKÇİLER DERNEĞİ



Organizasyonu:
semor

Milli Kütüphane Konferans Salonu - ANKARA

Sizi matematikle oynamaya çağırıyoruz



SEMPOZYUM KONULARI

Matematik ve Toplum:
Yeni Gelişmeler ve Eğilimler

Matematik Öğretimi, Eğitimi
ve Sorunları - (İlköğretim Ağırlıklı)

İlköğretim Sınıf ve Matematik
Öğretmenlerinin Eğitimi

Matematik Eğitiminde Öğretim
Kaynakları ve Araçları

MATEMATİK SERGİLERİ

Matematik ve Bilim Oyunları
Sergisi

Okulların Matematik Çalışmalarının
Sergilenmesi

Matematik Yarışmalarına Katılan Eserlerin
Sergilenmesi

Matematikçi Sanatçıların Yapıtlarının
Sergilenmesi

MEB Ders Araç ve Gereçleri ile Yazılımlar
Sergisi