MAYIS 2001 CİLT 10 SAYI:2 ISNN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

VI.Antalya Matematik Olimpiyadı-2001
Doğan Çoker - İlham Aliev

Kuaterniyonlar Dört Tamkare Teoremi
Oktay Pashaev-Engin Büyükaşık

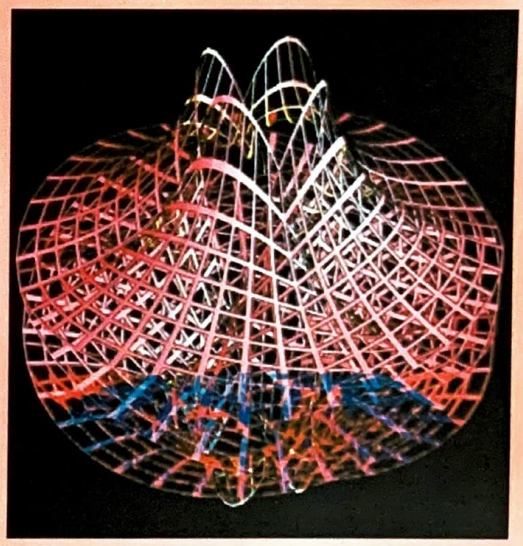
Bir Genişleme Teoremi (II)
Nurettin Ergun

Dokuz Nokta Çemberi
Sevtlana Gadetska-Halide Sagıdova

Sürekli Kesirler
İsmail Aslan

Matematik Etkinliklerine 2001'e Dair
Tina Beşeri-S.Eylem Erdoğan

Problemler/Çözümleri



MATEMATİK DÜNYASINDAN...

İkinci sayıyla yine karşınızdayız. On yıldır alışıla gelmiş kapağı değiştirmiş olmanın korkusunu sizlerden gelen olumlu eleştiriler bizlere ayrı bir güç verdi. Bu sayıdan sonra Matematik Dünyası içerik zenginliği ile daha geniş kitlelere ulaşsın istiyoruz. Yazarlarımızın farklı kurum ve kuruluşlardan olması, eğitimci ve felsefeci dostlarımızın birikimlerini okurlarımızla paylaşması Matematik Dünyasını daha bir büyütecektir. Ankara'daki 2. Matematik Etkinlikleri ve Sempozyumunda da dile geldiği gibi öğrenciler lise üçüncü sınıf matematik konularına yeni sınav sistemi ile bütünüyle yabancılaşmakta, matematiksel düşüncenin temeli olan Temel Matematik konularından uzaklaşmaktadır. Bu konuda Matematik Dünyası'na tarihi bir misyon düşüyor ve bu misyonu yerine getireceğimizden de kimsenin kuşkusu olmasın.

Bu sayımızda Antalya Matematik Olimpiyatlarına geniş yer ayırdık. Gelecek sayımızda ise Ege bölgesinde yapılmakta olan benzer bir yarışmaya yer vereceğiz.

Okuyucularımız bölgelerindeki benzer Matematik Etkinliklerini haber olarak bize gönderdikleri taktirde dergimizde imkanlarımız el verdiği ölçüde onlara yer ayırmaya çalışacağız. Matematik Dünyası dost okuyucularına güzel bir yaz tatili diliyor.

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından... 1

VI. Antalya Matematik Olimpiyatı-2001 2
Sorular ve Kısa Çözümler
İlham Aliyev - Doğan Çoker

VI. Antalya Matematik Olimpiyatı-2001 8
2. Seçme Sınavı
İlham Aliyev - Doğan Çoker

Kuaterniyonlar ve Dört Tamkare Teoremi 14
Oktay Pashaev - Engin Büyükaşık

Bir Genişleme Teoremi (II) 17
Nurettin Ergun

Dokuz Nokta Çemberi 20
Svetlana Gadetska - Halide Sagıdova

Sürekli Kesirler 23
İsmail Aslan

Basında Matematik 27

Matematik Etkinlikleri 2001'e Dair 28
Tina Beşeri - S.Eylem Erdoğan

Problemler ve Çözümler 29

Matematik Dünyası
SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık
DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfınınn işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gun ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2001) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 8.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 6.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği' nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)Parakende satış fiyatı 2.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35435-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987510 ve 4987504; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

VI. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI-2001 (SORULAR VE KISA ÇÖZÜMLER)

İlham Aliyev-Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

1996 yılından beri düzenlenmekte olan 'Antalya Matematik Olimpiyatı' nın altıncısının 1.aşaması bu yıl Nisan ayında Akdeniz Üniversitesinde yapıldı. Türkiye genelinden 166 okuldan gelen neredeyse 1100 'ü aşkın üstün yeteneğe sahip Lise I ve Lise II öğrencisinin katılmış olduğu bu olimpiyat, beklenildiği gibi, gencecik matematik-severler için bir bilgi bayramı havasında geçti.

Bu arada bizler (Jüri üyeleri ve Olimpiyat Düzenleme Komitesi), TÜBİTAK ve Antalya Matematik Olimpiyatlarında yeri doldurulamayacak hizmetleri geçmiş USTA GEOMETRİCİ, hepimizin çok sevdiği ve saydığı **Dr. Fikri Gökdal** 'ın, olimpiyata bir kaç gün kala ansızın ölümünden dolayı yaşadığımız büyük üzüntüyü Olimpiyatın bayram havasına yansıtmamaya çalıştık. 6. Olimpiyatın sevgili hocamız **Dr. Fikri Gökdal** anısına yapılmasına oybirliği ile karar vererek, kendisine olan sonsuz vefa borcumuzu az da olsa ödemeye çalıştık...

Olimpiyat Jürisi, 1. aşamanın sonuçlarını değerlendirerek Lise I ve Lise II gruplarının her birinden en başarılı 23 öğrencinin 2. aşama sınavına çağrılmalarını uygun gördü. Bundan başka, Antalya ilinden olan öğrenciler için kendi aralarında bir sıralama belirleyebilmek için, 1. aşamanın barajını aşamayan 5 Antalyalı öğrenci daha 2. aşamaya davet edildi.

Mayıs-2001 ayında Akdeniz Üniversitesinde yapılmış olan 2.aşama sınavının sorularını ve kısa yanıtlarını da bu yazının ardında bulabilirsiniz.

TEŞEKKÜRLER: Jüri olarak, 6. Antalya Matematik Olimpiyatının yapılmasındaki katkılarından dolayı,

Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğüne,

Akdeniz Üniversitesi Sağlık, Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığı'na,

Konyaaltı Belediyesi'ne,

Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş'a (Başkent Üniversitesi, Ankara),

Prof. Dr. Rafail Alizade'ye (İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, İzmir)

en içten teşekkürlerimizi sunarız.

SORULAR

1. $x^3+px^2+qx-2001=0$ denkleminin kökleri a, b, c ise, p^2-2q ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $a^2+b^2+c^2$ B) $(a+b+c)^2$ C) $ab+ac+bc$
D) abc E) 2001

2. Aşağıdaki denklemin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

$$2^x = \frac{x+5}{4-4x}$$

A) 5 B) 2 C) 3 D) 1 E) Sonsuz çoklukta

3. $\|x\|$, x 'in tam değer fonksiyonu olmak üzere, $\{x\}=x-\|x\|$ olarak tanımlansın. Her x reel sayısı için,

$$x=f(x)+f(\{x\})$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $x=-\frac{17}{7}$ noktasındaki değeri nedir?

A) $-\frac{31}{14}$ B) $-\frac{19}{7}$ C) -3 D) $-\frac{19}{14}$ E) $-\frac{31}{7}$

4. Aşağıdaki denklemler sisteminin çözümü olan kaç tane (x,y) reel sayı ikilisi vardır?

$$2y=4-x^2$$

$$2x=4-y^2$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

5. $ABCD$ karesinin AB kenarı üzerinde E noktası ve AD kenarı üzerinde F noktası, $\widehat{AFE}$ açısı $15°$ olacak biçimde alınmıştır. $[EF]$ ile $[AC]$ 'nin kesiştiği nokta G olmak üzere $|AG|=1$ ise, $\frac{1}{|AE|}+\frac{1}{|AF|}$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{2}+1$
D) $(2+\sqrt{2})\sin 75°$ E) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.

$$n=37^{73^{1}}+73^{41^{37}}+69^{96^{1}}$$

sayısının onluk sayı sistemindeki yazılımında son iki basamak aşağıdakilerden hangisidir?

A) 03 B) 69 C) 75 D) 73 E) 41

7. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ve $x + y + z = 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 75 B) 73 C) 105 D) 83 E) 81

8. 8×8 boyutlu bir kare bulmaca hazırlanacaktır. 8 siyah kare öyle yerleştirilecektir ki, soldan sağa ve yukarıdan aşağıya oluşacak en az 2 harfli sözcük sayısı olabilecek en büyük değerine kavuşsun. Bu en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 32 C) 30 D) 28 E) Hiçbiri

9. Kaç tane a reel sayısı için

$$|y + 100| + |y + 99| + \cdots + |y + 1| + |y|$$

$$+|y - 1| + \cdots + |y - 99| + |y - 100| = a$$

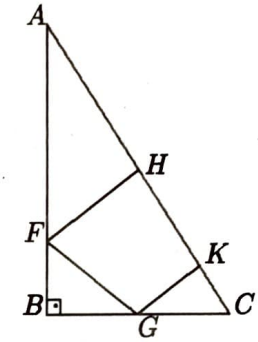
denkleminin yalnızca bir reel çözümü vardır?

A) 3 B) 1 C) 2 D) 0 E) 3 'ten çok

10. İki çocuğu olan Ahmet Bey, oğlunun bugünkü yaşında iken, kızının doğmasına 16 yıl vardı. Oğlu kızının bugünkü yaşında iken, Ahmet Bey 'in yaşı oğlunun yaşının 4 katı idi. Ahmet Bey ilk kez kaç yaşında baba olmuştur?

A) 18 B) 32 C) 24 D) 30 E) 26

11. Şekilde $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin dik kenarları üzerinde F ve G noktaları alınarak, hipotenüse $[GK]$ ve $[FH]$ dikmeleri çizilmiştir. $|BC| = 3$, $|AB| = 4$ olduğuna göre $|HF| + |FG| + |GK|$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?



A) $\frac{25}{5}$ B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{23}{5}$ D) $\frac{26}{5}$ E) $\frac{24}{5}$

12. 30 farklı kitap 3 kişiye, kişilerdeki kitapların sayısı bir aritmetik dizi oluşturacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir? (Aritmetik dizinin ilk terimi sıfır da olabilir.)

A) $3.\binom{30}{10}.\binom{20}{10}$ B) $3.4^{10}.\binom{30}{10}$ C) $3.2^{10}.\binom{30}{10}$
D) $2.3^{10}.\binom{30}{10}$ E) Hiçbiri

13. $a_0 = 1$ ve her $n \geq 1$ için

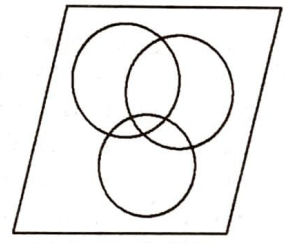
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2 \cdot a_{n-1} + 1}$$

biçiminde tanımlanan (a_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ dizisi için a_{11} nedir?

A) $\frac{1}{509}$ B) $\frac{1}{505}$ C) $\frac{1}{512}$ D) $\frac{1}{507}$ E) $\frac{1}{511}$

14. Yarıçapları eşit olmak zorunda olmayan 11 çember bir düzlem üzerinde öyle yerleştirilmiştir ki, herhangi iki çemberin tam iki ortak noktası vardır ve herhangi üç çemberin ortak noktası yoktur. Bu çemberler düzlemi kaç parçaya böler?

Açıklama: Aşağıdaki şekilde üç çember düzlemi 8 parçaya bölmüştür.



A) 121 B) 110 C) 99 D) 112 E) 92

15. $5^n - 1$ sayısı 2^{2001} sayısının bir katı olacak şekilde en küçük n doğal sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^{1001} B) 2^{1999} C) 2^{2002} D) 2^{2001} E) 2^{2000}

16. x ve y reel sayıları

$$x^3 - 3xy^2 = 10 \quad \text{ve} \quad y^3 - 3yx^2 = 5$$

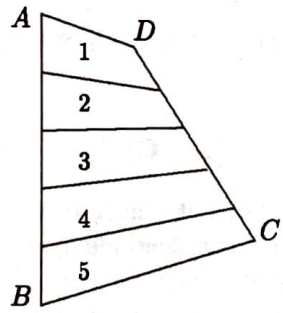
eşitliklerini sağlarsa, $x^2 + y^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 18 B) 10 C) 8 D) 13 E) 5

17. 60 ardışık doğal sayı içinden, toplamları 3 ile bölünebilen üç farklı sayı kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 11420 B) 10240 C) 11240 D) 10420 E) 12440

18. Aşağıdaki şekilde $ABCD$ konveks dörtgeninde, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının her biri 5 eşit parçaya bölünmüş ve ortaya çıkan küçük dörtgenler numaralandırılmıştır. 1 numaralı dörtgenin alanı 12/5 ve 5 numaralı dörtgenin alanı 46/5 birim ise, 4 numaralı dörtgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?



A) 7,2 B) 6,8 C) 7,7 D) 6,4 E) 7,5

19. $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninde C noktasından hipotenüse (yani $[AB]$ kenarına) indirilen yüksekliğin hipotenüsle kesişim noktası H olmak üzere, $|AH| = 5$ ve $|BH| = 7$ birimdir. $[CH]$ yüksekliğini çap olarak kabul eden çembere A ve B noktalarında çizilen ($[AB]$ 'den farklı) teğetlerin çembere değme noktaları sırasıyla F, K ve bu teğetlerin kesişim noktası G olsun. Bu durumda $|FG|$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 3 D) 4 E) $3\sqrt{2}$

20. Yarıçapları 4 ve 8 olan, birbirlerine A noktasında dıştan teğet iki çember verilsin. Büyük çember üzerinde alınmış bir B noktasından, küçük çembere bir C noktasında teğet olan doğru çizilmiştir. $|AB| = \sqrt{2}$ ise, $|BC|$ nedir?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

KISA ÇÖZÜMLER

1. Vieta Teoreminden

$$p = -(a+b+c), \quad q = ab + bc + ca$$

ve buradan da

$$p^2 - 2q = a^2 + b^2 + c^2$$

olur. YANIT A

2. $\forall x \in \mathbf{R}$ için

$$2^x > 0 \Rightarrow \frac{x+5}{4-4x} > 0 \Rightarrow -5 < x < 1$$

$$\Rightarrow -4 \leq x < 0\,.$$

Deneme yolu ile $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ 'in çözüm olduğu görülür. YANIT C

3. $x = -\frac{17}{7}$ koyarsak,

$$-\frac{17}{7} = f(-\frac{17}{7}) + f(\frac{4}{7})\,;$$

yine verilen eşitlikte $x = \frac{4}{7}$ koyarsak,

$$\frac{4}{7} = f(\frac{4}{7}) + f(\frac{4}{7}) \Rightarrow f(\frac{4}{7}) = \frac{2}{7}\,.$$

Bunu yukarıda gözönüne alırsak,

$$f(-\frac{17}{7}) = -\frac{17}{7} - \frac{2}{7} = -\frac{19}{7}.$$

YANIT B

4. Denklemleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$(y-x)(2-(y+x))=0$$

olur. $y-x=0$ ve $y+x=2$ durumlarının her biri iki çözüm veriyor. YANIT D

5. $\widehat{AFE}=15^o$ olması koşulu kullanılmıyor.

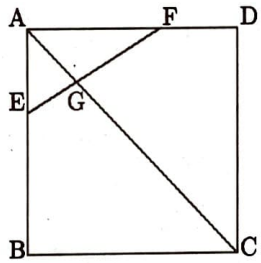
$$Alan(\overset{\triangle}{AEF}) = Alan(\overset{\triangle}{AEG}) + Alan(\overset{\triangle}{AGF})$$

'den

$$|AE|.AF| = |AE|.|AG|.\sin 45^o + |AG|.|AF|.\sin 45^o$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(|AE|+|AF|) \Rightarrow \tfrac{1}{|AE|} + \tfrac{1}{|AF|} = \sqrt{2}.$$

YANIT A



6. n 'nin 100 ile bölünmesinden oluşan kalanı bulmalıyız. Euler Teoremini kullanacağız: $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$; $(a,m)=1$.

$\varphi(100)=\varphi(2^2.5^2)=2.20=40$. Böylece,

$37^{73!} \equiv 1\ (100)$, $69^{96!} \equiv 1\ (100)$; $41^{37} \equiv 1\ (40)$

$\Rightarrow 41^{37} = 40.m+1 \Rightarrow 73^{41^{37}} \equiv 73\ (mod\ 100)$.

YANIT C

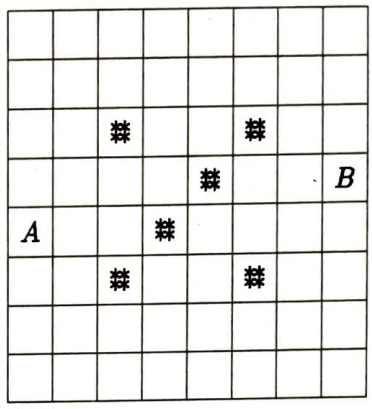
7. "Harmonik Ortalama" $\leq$ "Aritmetik Ortalama" eşitsizliğini kullanacağız:

$$\frac{9}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{y}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}}$$

$$\leq \frac{x+y+z}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{25}{z} \geq 81$$

olur. Eşitlik durumu $x=\frac{1}{9}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{5}{9}$ için elde edilir. YANIT E

8. Önce merkezdeki 6 haneyi zaptediyoruz (şekle bakınız), sonra şekildeki gibi 2 haneyi (örneğin A ve B) daha boyuyoruz. YANIT C



9. Sol taraf y 'nin çift fonksiyonudur. Buna göre de y_0 çözüm ise, $-y_0$ da çözümdür. Tek çözüm olması için $y_0=-y_0 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow a=2.(1+2+...+100)$. YANIT B

(**NOT:** $f(y)=|y+100|+...+|y|+...+|y-100|$ fonksiyonu $y \geq 0$ için artandır!)

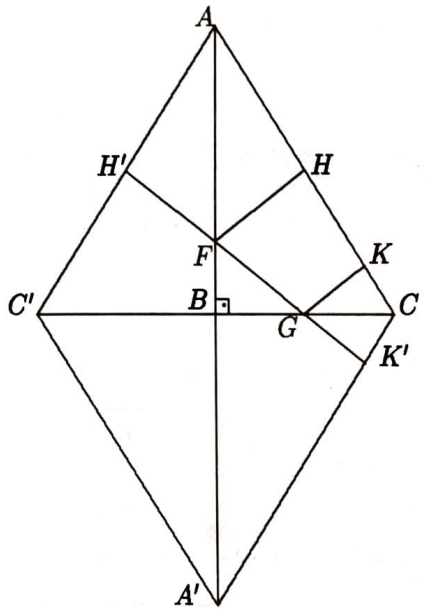
10. Baba, oğul ve kızın şu andaki yaşları, sırasıyla, x, y, z olsun. Aşağıdaki denklemler elde edilir: $x-y=z+16$ ve $x-(y-z)=4z$. Bu ikisinden $z=8$ ve $x-y=3z=24$ olur.
YANIT C

11. Üçgeni dik kenarlara göre simetrik döndürürsek, $|FH|=|FH'|$; $|GK|=|GK'|$ olur ve problem, $|H'F|+|FG|+|GK'|$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulmaya indirgenir.

Bu minimum değer $AC'A'C$ rombüsünün yüksekliğine eşittir:

$$\frac{2.3.4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{24}{5}.$$

YANIT E



(**NOT:** Sözkonusu sayı, üçgende B 'den AC 'ye indirilen yüksekliğin iki katıdır.)

12. Kişilerden biri 10 kitap alacaktır. Bu kişiye 10 kitap $\binom{30}{10}$ sayıda yolla verilebilir. Geriye kalan 20 kitabın her birinin 2 "seçeneği" bulunduğundan, bu 20 kitap 2 kişi arasında 2^{20} yolla dağıtılabilir. Aritmetik dizinin orta terimi (10) bu kişilerden herhangi birine rastlayacağından, dağıtım sayısı $3.2^{20}.\binom{30}{10}$ olur. Bu sayıdan fazla saydığımız $2.\binom{30}{10}.\binom{20}{10}$ sayısını çıkarırsak tüm farklı dağıtım sayısını elde ederiz. YANIT E

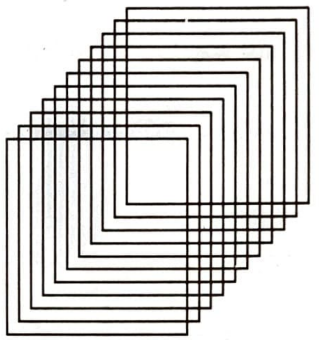
13. I.YOL: $b_n = \frac{1}{a_n}$ dersek,

$$b_n = n^2 + b_{n-1} \Rightarrow b_n - b_{n-1} = n^2$$
$$\Rightarrow b_n - b_0 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\Rightarrow b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + b_0 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{1}{507}.$$

II.YOL: $n = 1, 2, 3, ...$ için doğrudan hesaplayarak, a_n için bir formül bulabiliriz. YANIT D

14. I.YOL: (Euler Formülünü bilenler için) Düzlemin parçalar sayısına P, düğüm noktaları sayısına D, çemberlerin bölünmüş olduğu yaylar sayısına Y dersek, $P = Y - D + 2$ olur. $D = 2.\binom{11}{2} = 110$; $y = 2.10.11$ (çünkü 11 çemberin her biri diğer 10 çemberin her biri ile 2 ayrı noktada kesişiyor). Böylece, $P = 220 - 110 + 2 = 112$.

II.YOL: Soru, topolojik bir soru olduğundan, çemberler yerine kareler alarak doğrudan sayım yapabiliriz. YANIT D



15. $5^{2^k} - 1 = (5^{2^{k-1}} - 1)(5^{2^{k-1}} + 1)$. İkinci çarpım 2 ile bölünüyor, fakat 4 ile bölünmüyor. $5^{2^{k-1}} - 1 = (5^{2^{k-2}} - 1)(5^{2^{k-2}} + 1)$ için de aynı şey söylenebilir. Bu şekilde devam edersek, sonuçta $(5^{2^1} - 1)(5^{2^1} + 1) = 24.26$ elde ederiz ki, burada 24, 2^3 ile bölünüyor. Buradan görünüyor ki, $n = 2^{1999}$ alınırsa, $5^{2^{1999}} - 1 = (5^{2^1} - 1)(5^{2^1} + 1)(5^{2^2}+1)(5^{2^3}+1)...(5^{2^{1998}}+1)$ yazılabileceğinden, sağ taraf $2^3.2^{1998} = 2^{2001}$ 'e bölünür ve 2^{2002} 'ye bölünmez. YANIT B

16. $10^2 + 5^2 = (x^3 - 3xy^2)^2 + (y^3 - 3yx^2)^2 = (x^2 + y^2)^3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$. YANIT E

NOT: *Çözümün "kısa" görünmesine bakmayınız; bu sınavın en zor sorusu bu soru olmuştur!*

17. 60 sayıyı, birbirleriyle kesişmeyen 3 sınıfa ayıralım:

3 ile tam bölünenler (bu sınıfa A diyelim);

3 ile bölününce 1 kalan verenler (B sınıfı);

3 ile bölününce 2 kalan verenler (C sınıfı).

Seçilen üç sayının üçü de aynı sınıftan olabilir: (toplam: $3.\binom{20}{3}$ seçenek).

Seçilen üç sayının biri A 'dan, biri B 'den, biri de C 'den olabilir: (toplam: $\binom{20}{1}.\binom{20}{1}.\binom{20}{1} = [\binom{20}{1}]^3$ seçenek).

Böylece, farklı seçenekler sayısı:

$3.\binom{20}{3} + [\binom{20}{1}]^3$

$= 3.\frac{20!}{17!.3!} + (\frac{20!}{19!.1!})^3 = 11420$

YANIT A

18. Dörtgenlerin alanları bir aritmetik dizi oluşturuyor. Aritmetik dizinin dizi farkına d denirse, $9,2 = 2,4 + 4d$ eşitliğinden $d = 1,7$ bulunur. Böylece, 4 numaralı dörtgenin alanı $9,2 - 1,7 = 7,5$ olur. YANIT E

19. Aşağıdaki çözümden görülebileceği gibi, $|AH|$ ve $|BH|$ uzunlukları değil, sadece onların toplamları olan $|AH| + |BH|$ biliniyorsa, problem yine çözülebilir. $|AH| = y, |HB| = z$ diyelim (bizim problemde $|AH| = 5, |HB| = 7$ 'dir). $y + z = 12$ 'dir. $|KF| = |KG| = x$ diyelim. O halde $|CH| = \sqrt{yz}$ olacaktır. Bundan başka, $\overset{\triangle}{KAB}$ üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapının uzunluğu $\frac{1}{2}|CH| = \frac{1}{2}\sqrt{yz}$ olacaktır. $\overset{\triangle}{KAB}$ 'nin alanını 2 yolla hesaplayalım: Heron formülü $S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ ve $S = u.r$ (burada $u = x + y + z$ ve $r = \frac{1}{2}\sqrt{yz}$ 'dir).

Böylece,

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)\frac{1}{2}\sqrt{yz}$$

ve buradan da $\sqrt{x} = \frac{1}{2}(x+y+z)$; $y + z = 12$ olduğundan, $x = \frac{1}{4}(x + 12) \Rightarrow x = 4$. YANIT D

20. BA doğrusunun küçük çemberle ikinci kesişim noktası D olsun. $B\hat{O}_1A = D\hat{O}_2A$ olduğundan, $\overset{\triangle}{BO_1A} \sim \overset{\triangle}{DO_2A}$.

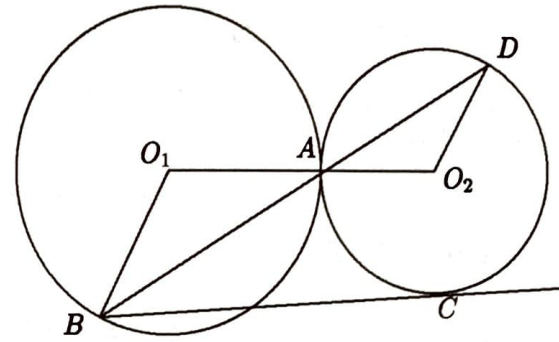
Buradan, $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|O_2D|}{|O_1B|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$|AD| = |AB|.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$|BC|^2 = |BA|.|BD| = \sqrt{2}.(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3$

$\Rightarrow |BC| = \sqrt{3}$.

YANIT A



ŞİİRSEL MATEMATİK ...

Güzel ve zariftir enaz şiir kadar
Rasyonel düşünme gücüne güç katar
Tutkunları takdir edilmeli, zira
Matematik aşkı kafayı dinç tutar

Anonim

VI. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI-2001 2.SEÇME SINAVI (SORULAR VE KISA ÇÖZÜMLER)

İlham Aliyev-Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

LİSE I SORULARI

1. $abcd = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$\frac{1+abc}{1+a}+\frac{1+bcd}{1+b}+\frac{1+cda}{1+c}+\frac{1+dab}{1+d}\geq 4$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

2. $2^{2001}+3^{2001}=n^k$ $(n,k\in\mathbb{N})$ sağlanacak biçimde n 'nin varlığı için k sayısı 1 'e eşit olmalıdır; kanıtlayınız.

3. Bir çember 32 eş parçaya bölünmüştür. Uç noktaları çakışan herhangi 2 parçaya "komşu parçalar" diyeceğiz. Ahmet ve Betül şöyle bir oyun oynuyorlar: Önce Ahmet kendi isteğine göre seçtiği 3 parçayı boyar. Sonra Betül, boyanmamış parçalardan herhangi 3 tanesini boyar. Daha sonra Ahmet boyanmamış 3 parçayı boyar ve oyun bu şekilde devam eder. En sonda kalan boyanmamış 2 parça komşu değilse, Ahmet kazanır; komşu ise, Betül kazanır. Doğru stratejiyi uyguladığı takdirde hangi oyuncu oyunu kesinlikle kazanır?

4. Köşe noktası O olan bir açı ve bu açının ışınlarına A ve B noktalarında teğet olan bir çember verilmiştir. A noktasından $[OB$ ışınına paralel olan doğrunun bu çember ile kesiştiği noktaya C diyelim. $[OC]$ parçasının çemberle kesiştiği diğer nokta E olsun. $[AE$ ve $[OB$ ışınlarının kesişim noktasına K denirse, $|OK|=|KB|$ olduğunu gösteriniz.

5. Dikdörtgen şeklindeki karton levha makasla 2 parçaya bölünüyor. Parçalardan biri alınarak tekrar 2 parçaya bölünüyor. Sonra bu 3 parçadan biri alınarak yine 2 parçaya bölünüyor ve bu işlem bu şekilde sürdürülüyor. Belirli bir anda ortaya çıkan parçalar içinde tam 77 tane 29-genin bulunması için, makasın en az 2001 kez kullanılması gerektiğini kanıtlayınız.

LİSE I KISA ÇÖZÜMLERİ

Çözüm 1. $abc=\frac{1}{d}$, $bcd=\frac{1}{a}$, $cda=\frac{1}{b}$, $dab=\frac{1}{c}$ olduğunu verilen eşitsizliğin sol tarafında gözönüne alırsak,

$$\frac{1+abc}{1+a}+\frac{1+bcd}{1+b}+\frac{1+dac}{1+c}+\frac{1+dab}{1+d}=\frac{1+d}{d(1+a)}+\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+d)}\geq\cdots$$

(Aritmetik Ortalama $\geq$ Geometrik Ortalama olduğundan)

$$\geq 4.\left(\frac{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}{abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}\right)^{1/4}=4.\left(\frac{1}{abcd}\right)^{1/4}=4$$

olur. $a = b = c = d = 1$ için eşitlik durumu elde edilir.

Çözüm 2. $2^{2001} + 3^{2001} = (2+3)(2^{2000} - 2^{1999}.3^1 + ... - 2^1.3^{1999} + 3^{2000})$.

$3^k \equiv (-2)^k \equiv (-1)^k.2^k \ (mod\ 5)$ olduğundan,

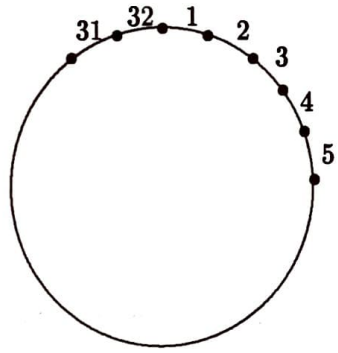
$2^{2000} - 2^{1999}.3^1 + ... + 3^{2000} \equiv 2^{2000} + 2^{2000} + ... + 2^{2000} + 2^{2000}$

$\equiv 2001.2^{2000} \equiv 1 \ (mod\ 5)$ 'tir.

Böylece, $2^{2001} + 3^{2001}$ sayısı 5 ile bölünüyor, fakat 25 ile bölünmüyor. n^k 'nın 5 ile bölünüp, 5^2 ile bölünmemesi için $k = 1$ olmalıdır.

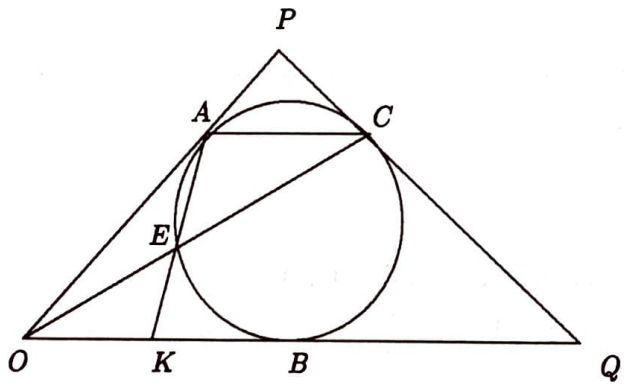
Çözüm 3. Düzgün oynarsa, oyunu Betül kazanır. Betül, örneğin, şöyle bir strateji uygulayabilir. O, parçaları 1 'den 32 'ye kadar numaralar ve aşağıdaki 16 tane ikiliyi düşünür:

$$(1,2), (3,4), ..., (29,30), (31,32)\ .$$



Eğer Ahmet 3 tane ayrı ikilinin her birinden bir parçayı boyarsa, Betül de aynı ikililerin boyanmamış parçalarını boyar ve böylece, boyanmamış ikililer sayısını $16 - 3 = 13$ 'e düşürür. Eğer Ahmet bir ikilinin her iki parçasını boyarsa, bu durumda, Betül Ahmetin ele aldığı ikinci ikilinin diğer parçasını boyar ve bundan başka, boyanmamış bir ikiliyi daha boyar. Bu takdirde yine de boyanmamış ikililer sayısı 3 azalarak 13 olur. Betül bu taktiği kullanarak ikililer sayısını 1 'e indirebilir ve böylece, en sona kalan boyanmamış parçaların komşu olmalarını sağlar.

Çözüm 4. C noktasında çembere çizilmiş teğetin $[OA$ ve $[OB$ ışınları ile kesiştiği noktalara P ve Q diyelim. $|AP| = |PC|$ olduğu için $\overset{\triangle}{APC}$ ve $\overset{\triangle}{OPQ}$ ikizkenar üçgenlerdir.

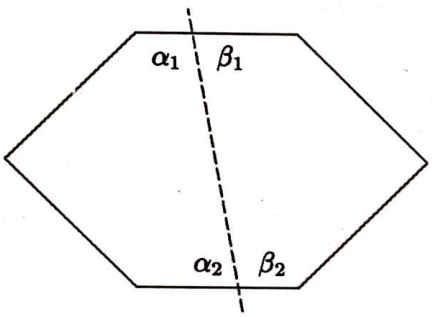


Bundan dolayı, $|AO| = |OB| = |BQ| = |QC|$ 'dir. $O\hat{A}K = A\hat{C}E = E\hat{O}K$ ve $A\hat{O}B = C\hat{Q}B$ olduğundan,

$$\overset{\triangle}{OAK} \sim \overset{\triangle}{QOC} \Rightarrow \frac{|OK|}{|OA|} = \frac{|QC|}{|QO|} = \frac{1}{2};$$

$|OA| = |OB|$ olduğundan, $\frac{|OK|}{|OB|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |OK| = |KB|$.

Çözüm 5. Dikdörtgenin iç açıları toplamı 2π 'dir. İlk kesimden sonra ortaya çıkan 2 çokgenin iç açıları toplamı en fazla $2\pi + 2\pi = 4\pi$; ikinci kesimden sonra ortaya çıkan 3 çokgenin iç açıları toplamı en fazla $4\pi + 2\pi = 6\pi$ ve böylece k. kesimden sonra ortaya çıkan $k+1$ tane çokgenin iç açıları toplamı en fazla $(k+1).2\pi$ olur. Yani, makasın her kullanılışından sonra tüm çokgenlerin iç açılarının toplamı en fazla 2π artar. Bu, aşağıdaki şekilden de anlaşılıyor:



(Bu şekile göre: "artış" $= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = 2\pi$.)

Çokgenler içinde tam 77 tane 29-gen bulunması için gereken adım sayısı k olsun. O halde k. adımdan sonra ortaya çıkan $k+1$ tane çokgenin iç açıları toplamı, yukarıda belirtildiği gibi, en fazla $(k+1).2\pi$ olacaktır. Bu $(k+1)$ çokgenden 77 tanesi 29-gendir ve bunların iç açıları toplamı $77.27.\pi$ 'dir. Geriye kalan $k + 1 - 77 = k - 76$ tane çokgenin her biri en azından 3-gen olacağından, onların iç açıları toplamı en az $(k - 76).\pi$ 'dir. Böylece,

$$(k+1)2.\pi \geq 77.27.\pi + (k - 76).\pi$$

olur. Buradan

$$2k + 2 - k \geq 77.27 - 76 \Rightarrow k \geq 77.27 - 78 = 77.26 - 1 = 2001,$$
$$k \geq 2001$$

elde edilir.

NOT: Makası 2001 kez kullanarak tam 77 tane 29-gen elde edilebilir. (Siz kendiniz bunun nasıl yapılabileceğini düşününüz!)

LİSE II SORULARI

1. $abcd = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$x = a + b + c + d, \quad y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{ve} \quad z = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$$

denirse,

$$x + y \leq 2z$$

olduğunu kanıtlayınız.

2. Reel katsayılı $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ polinomunun 3 pozitif reel kökü (eşit veya farklı) olduğu biliniyorsa, $a + b$ toplamının alabileceği en küçük değerin 6 olduğunu kanıtlayınız.

3. Tüm köşeleri tamsayı koordinatlı noktalarda bulunan herhangi bir kirişler çokgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunun karesi bir rasyonel sayıdır; kanıtlayınız.

4. $x^{2001} - x$ ve $x^2 - x$ tamsayı ise, x 'in de bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

5. a ve b pozitif tamsayıları için

$$3b^2 - 2a^2 = 1$$

eşitliği sağlansın. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $[a\sqrt{2}, b\sqrt{3}]$ aralığında $m\sqrt{2} + n\sqrt{3}$ şeklinde hiç bir sayının bulunmadığını gösteriniz.

LİSE II KISA ÇÖZÜMLERİ

Çözüm 1. $x \leq z$ ve $y \leq z$ olduğunu göstermek yeter. Önce $x \leq z$ olduğunu görelim. Genel kuvvet ortalamaları arasındaki eşitsizliğe göre

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \left(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}\right)^{1/3} \Rightarrow z = a^3+b^3+c^3+d^3 \geq 4.\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 .$$

$4.(\frac{a+b+c+d}{4})^3 \geq a+b+c+d$ olduğunu gösterirsek iş biter. Sonuncu eşitsizlik, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq 1$ ile denktir. Bu ise, $abcd = 1$ olmasından dolayı, doğru eşitsizliktir.

Şimdi de $y \leq z$ olduğunu görelim.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc = \frac{1}{d};$$

$$\frac{b^3+c^3+d^3}{3} \geq bcd = \frac{1}{a}; \quad \frac{a^3+c^3+d^3}{3} \geq acd = \frac{1}{b}; \quad \frac{a^3+b^3+d^3}{3} \geq abd = \frac{1}{c}$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{3.(a^3+b^3+c^3+d^3)}{3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \Rightarrow z \geq y$$

olur.

Çözüm 2. r, s ve t pozitif sayıları verilen polinomun kökleri ise,

$$P(x) = (x-r)(x-s)(x-t) \text{ ve } rst = 1$$

olacaktır. Şimdi, $P(-1) = -1 - a - b - 1 = -2 - (a + b)$ ifadesinden

$$a + b = -2 - P(-1) = -2 - (-1 - r)(-1 - s)(-1 - t)$$
$$= -2 + (1 + r)(1 + s)(1 + t) \geq -2 + 2\sqrt{r}.2\sqrt{s}.2\sqrt{t} = -2 + 8\sqrt{rst} = -2 + 8 = 6, \quad a + b \geq 6 \text{ olur.}$$

$r = s = t = 1$ için $(1 + r)(1 + s)(1 + t) = 8$ olduğundan,

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 1) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

polinomu için $a + b = 6$ olur.

Çözüm 3. Çokgenin herhangi 3 köşesini alalım: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Burada x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 sayıları birer tamsayı olup, A, B, C köşelerinin koordinatlarıdır. Çokgenin çevrel çemberi aynı zamanda $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberidir. $a = |BC|$, $b = |AC|$ ve $c = |AB|$ diyelim. $a^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, b^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$ ve $c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ sayıları birer tamsayıdır.

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin (ve dolayısıyla, verilen çokgenin) çevrel çemberinin yarıçapına R denirse, Sinüs Teoremine göre,

$$R = \frac{a}{2.\sin \widehat{BAC}}$$

olur. Öte yandan, Kosinüs Teoremine göre,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

'dır. Böylece,

$$R^2 = \frac{a^2}{4.\sin^2 \widehat{BAC}} = \frac{a^2}{4.(1 - \cos^2 \widehat{BAC})} = \frac{a^2b^2c^2}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

ve sağ taraf bir rasyonel sayıdır.

NOT: $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin koordinatlarının rasyonel sayılar olduğunu gösterirseniz, problem yine çözülür. (Analitik geometri yöntemi kullanarak, $[AB]$ ve $[BC]$ doğru parçalarını orta noktalarından geçen ve bu parçalara dik olan doğruların kesişim noktasını bulunuz ve bu noktanın "rasyonel nokta" olduğunu gösteriniz.)

Çözüm 4. $x^2 - x = n$ diyelim. $n = 0$ ise, $x = 0$ veya $x = 1$ olabilir. Yani, x bir tamsayıdır. Şimdi $n \geq 1$ olsun. Önce, $x^{2001} = ax + b$ sağlanacak biçimde $a > 1$ ve $b > 1$ tamsayılarının varlığını gösterelim. Bunun için, tümevarım yardımıyla, her $k \geq 2$ tamsayısı için $x^k = a_k x + b_k$ sağlanacak biçimde a_k, b_k pozitif tamsayılarının var olduğunu kanıtlayalım. $k = 2$ için iddia doğrudur. $k = m$ için varsayarak $m + 1$ için ispatlayalım. Varsayım gereği, $x^m = a_m x + b_m, (a_m, b_m \in \mathbf{Z})$ 'dir Bu eşitliğin her iki yanını x ile çarparsak ve $x^2 = x + n$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$x^{m+1} = a_m x^2 + b_m x = a_m(x + n) + b_m x = (a_m + b_m)x + na_m = a_{m+1}.x + b_{m+1},$$
$$(a_{m+1} = a_m + b_m, b_{m+1} = a_m).$$

Her $m \geq 3$ için $a_m > 1$ olacağı açıkça görülmektedir.

Şimdi $x^{2001} = ax + b$, $(a > 1)$ eşitliğinden $x^{2001} - x = (a - 1)x + b$ elde ederiz. Problemin varsayımına göre, $x^{2001} - x$ ve dolayısıyla, $(a - 1)x + b$ bir tamsayıdır. $a - 1 \neq 0$ olduğundan, x bir rasyonel sayıdır. $x = \frac{r}{s}, ((r, s) = 1)$ olsun.

$$x^2 - x = n \Rightarrow \frac{r^2}{s^2} - \frac{r}{s} = n \Rightarrow \frac{r^2}{s} = r + ns\ .$$

Sağ taraf tamsayı olduğundan, sol taraf da tamsayı olmalıdır ve dolayısıyla $s = 1$ 'dir.

Çözüm 5. Problemin iddiasının aksini varsayalım:

$$a\sqrt{2} \leq m\sqrt{2} + n\sqrt{3} \leq b\sqrt{3} \qquad (*)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde m ve n pozitif tamsayıları var olsun. $(*)$ 'dan $m < a$ çıkar. Zira, $m \geq a$ olursa, $0 \leq (m-a)\sqrt{2} + n\sqrt{3} \leq b\sqrt{3} - a\sqrt{2} < 1$ eşitsizliğinden $0 \leq n\sqrt{3} \leq 1$ çelişkisi elde edilir. ($b\sqrt{3} - a\sqrt{2} < 1$ olması, $3b^2 - 2a^2 = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3}b - \sqrt{2}a)(\sqrt{3}b + \sqrt{2}a) = 1$ bağıntısının basit sonucudur.) Öte yandan, $(*)$ 'dan $n < b$ olması çıkar. Böylece, $m < a$ ve $n < b$ olduğuna göre,

$$0 < n\sqrt{3} + (a-m)\sqrt{2} < b\sqrt{3} + a\sqrt{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliği, $(*)$ ile denk olan

$$0 \leq n\sqrt{3} - (a-m)\sqrt{2} \leq b\sqrt{3} - a\sqrt{2}$$

eşitsizliği ile taraf tarafa çarparsak,

$$0 \leq 3n^2 - 2(a-m)^2 < 3b^2 - 2a^2 = 1$$

ve buradan da, $0 \leq 3n^2 - 2(a-m)^2 < 1$ olur. Sonuncu eşitsizlikten de

$$3n^2 - 2(a-m)^2 = 0$$

elde edilir. Fakat, sonuncu eşitliği sağlayan sıfırdan farklı tamsayılar yoktur.

NOT: $3b^2 - 2a^2 = 1$ denklemini sağlayan sonsuz çoklukta (a, b) tamsayı ikilisi vardır: $(1, 1)$ bir çözümdür ve (a, b) bir çözüm ise, $(5a + 6b, 5b + 4a)$ da bir çözümdür.

MATEMATİKSEVERLER İÇİN KİTAPLAR...

MATEMATİK MASALLARI
Yazan: A. Herscovici, Çeviren: Ercüment Akad, Güncel Yayıncılık, 2001

Sayılar evreninden muhteşem öyküler...Şehrazat masal anlatmaya 1002. geceden devam ediyor. Ama bu kez aşk değil, matematik masalları anlatıyor. Bu kitap sizi sayıların harika evrenine götürecek ve dünyadaki uyumun gizemlerini bulma olanağı verecek. Sarı ırmağın büyülü kıyılarından halifeler döneminin Bağdat'ına, eski Yunan'dan Vancouver adasına yapacağınız yolculuklarda size, matematiğin sonsuz uzayında eşlik edecek olan Thse, Archibald Arcsonius, İmparator Yu ve Şehrazat ile karşılacaksı Anlaşılması zor gibi görünen, fakat bir o kadar da gerekli olan matematik mantığını biraz olsun anlamak isteyenler için...

MATEMATİĞİN GİZLİ DÜNYASI
Yazan: D. Wells, Çeviren: Selçuk Alsan, Sarmal Yayınevi, 1995

Üçgenlerin sırlarıyla başlayan Matematiğin Gizli Dünyası sizi Eski Yunan matematikçilerinden kuantum kuramına kadar uzanan bir yolculuğa çıkartıyor. Kitaptaki her bölüm, kuramsal açıklamaların yanı sıra kutular içinde konuya ilişkin sorular da içeriyor. Bunların kimisi kolay, kimisi de oldukça zor, ama hepsinin tek amacı var: sizi düşündürmek. Çözün onları ve siz de matematikçiler arasına katılın. Tabi çok sıkıştığınızda ve kimi soruların altında ezildiğinizi hissettiğinizde yanıtlara bakabilirsiniz.

(Devamı 32. sayfada)

KUATERNİYONLAR VE DÖRT TAMKARE TEOREMİ

Oktay K. Pachaev-Engin Büyükaşık

İYTE,Matematik Bölümü, İZMİR

Geçen sayıdaki yazımızda $p = 4k+3$ şeklindeki asal sayıların iki tamkare toplamı şeklinde yazılamayaca ve dolayısıyla her tamsayının iki tamkare toplamı şeklinde yazılamıyacağını göstermiştik. Doğal olarak her tamsayının üç tamkare toplamı olarak yazılıp yazılamıyacağı sorulabilir. Cevabın hayır olduğu aşağıdaki teorem yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

Teorem.1 n pozitif bir tamsayı ve $n \equiv 7(mod\ 8)$ ise, n tamsayısı üç tamkare toplamı şeklinde yazılamaz.

İspat 0'dan 9'a kadar olan sayıların kareleri mod 8'e göre 0, 1 ya da 4'e denktir.Böylece üç tamkare toplamı mod 8'e göre 0, 1, 2, 3, 4, 5 ya da 6'ya denk olur ancak 7'ye denk olamaz.

Fermat her pozitif tamsayının dört tamkare toplamına eşit olduğunu iddia etmiştir. Lagrange 1770 yılında Fermat'ın bu iddiasını yani; her pozitif n tamsayısı için

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

olacak şekilde x, y, z, w tamsayılarının bulunduğunu ispatlamıştır. Örneğin;

$$100 = 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$$

ve

$$118 = 10^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2.$$

Jacobi ise n tamsayısının bu şekildeki gösterimlerinin sayısını bulmuştur.

Dört Tamkare Özdeşliği: Eğer m ve n,

$$m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

ve

$$n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$$

şeklinde yazılabilen iki tamsayı ise bu durumda $mn = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$ dir.

İspat: Bu özdeşliğin ispatı,

$$c_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b4$$
$$c_2 = a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b3$$
$$c_3 = a_1b_3 - a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b2$$
$$c_4 = a_1b_4 - a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b2$$

eşitliklerinden doğrudan yapılabilir.

Yardımcı Teorem: Her asal sayı dört tamkare toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat: p asal bir sayı olsun. $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ olduğundan p'yi tek sayı olarak kabul edebiliriz. İlk olarak p'nin bir katının dört tamkare toplamı şeklinde yazılabileceğini gösterelim.

$X = \{x^2 | 0 \leq x \leq \frac{(p-1)}{2}\}$ ve $Y = \{-1 - y^2 | 0 \leq y \leq \frac{(p-1)}{2}\}$ kümelerinin herbiri $mod\ p$'ye göre birbirne kongürent olmayan $\frac{(p+1)}{2}$ eleman içerir (gerçekten X ve Y'deki bütün elemanlar p den küçük dolayısıyla birbirinden farklıdır). $mod\ p$'ye göre birbirine kongürent olmayan p tane eleman ve diğer taraftan X ve Y kümelerinde toplam $p + 1$ eleman oldugundan; X kümesinin bir elemanı

Y kümesindeki bir elemana *mod* p'ye göre kongürent olmalıdır. Böylece $x^2 \equiv -1 - y^2$ $(mod\ p)$ yani $kp = 1 + x^2 + y^2$, ve buradan da $kp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2$ olarak bulunur.
Şindi yaptığımız son işlemlerden dolayı $kp = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ ve $k \geq 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Amaçladığımız şey k'yı $k = 1$ oluncaya kadar indirgemek.

k çift ise, x, y, z, w'den çift olanların sayısı tektir; gerekirse sıralarını değiştirerek $x \equiv y$ $(mod\ 2)$ ve $z \equiv w$ $(mod\ 2)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\frac{k}{2}p = (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2 + (\frac{z+w}{2})^2 + (\frac{z-w}{2})^2$$

olur. Ve bu işlemi p'nin başındaki sayi tek oluncaya kadar uygulayabileceğimizden, $kp = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, $k \geq 1$ ve tek bir sayı olarak kabul edebiliriz.
Şimdi $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$, $z \equiv z_0$, $w \equiv w_0$ $(mod\ p)$ olsun. Burada $|x_0|$, $|y_0|$, $|z_0|$, $|w_0| \leq k/2$'dir. Bu nedenle

$$0 < x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2 < (k/2)^2 + (k/2)^2 + (k/2)^2 + (k/2)^2 = k^2$$

ve böylece

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv 0 \ (mod\ k),$$

buradan da $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2 = kl$, $0 < l < k$ bulunur. Şimdi Dört Tamkare Özdeşliğinden;

$$x_1 = xx_0 + yy_0 + zz_0 + ww_0 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv 0 \ (mod\ k),$$

$$y_1 = (xy_0 - x_0y) + (zw_0 - z_0w) \equiv 0 \ (mod\ k),$$

$$z_1 = (xz_0 - x_0z) - (yw_0 - y_0w) \equiv 0 \ (mod\ k),$$

$$w_1 = (xw_0 - x_0w) - (zy_0 - z_0y) \equiv 0 \ (mod\ k),$$

için;

$$\begin{aligned} k^2lp = (kp)(kl) &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2) \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 \end{aligned}$$

elde edilir, buradan da

$$lp = (x_1/k)^2 + (y_1/k)^2 + (z_1/k)^2 + (w_1/k)^2$$

dört tamkare toplamı olur ve $1 < l < k$'dir. Sonlu adım sonra aynı indirgeme yöntemi ile $k = 1$ elde edilir. Bu ise p'nin dört tamkare toplamına eşit olduğunu gösterir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz teoremlere dayanarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç: Her pozitif tamsayı dört tamkare toplamı şeklinde yazılabilir.

Jacobi bir tamsayının farklı dört tamkare toplamı şeklindeki gösterimlerinin sayısı üzerinde çalışmış ve bununla ilgili aşağıdaki teoremi bulmuştur.

Theorem.2 n pozitif bir tamsayı olsun. $n = x^2 + y^2 + w^2 + z^2$ olan (x, y, w, z) dörtlülerinin sayısı, n tek ise, $8\sum_{d|n} d$; n çift ise, d tek olmak üzere $24\sum_{d|n} d$' ye eşittir.

Örneğin $n = 5$ ise teoreme göre, 5'in 8(1+5)=48 tane dört tamkare gösterimi vardır.

Kuaterniyonlar

Bir kuaterniyon, $q = w + ix + jy + kz$ karmaşık sayılarda olduğu gibi; reel kısım $w = Re(q) \in R$ ve sanal kısım olan $Im(q) = ix + jy + kz \in R^3$ nin toplamından oluşur.

Kuaterniyonlar $q = w + ix + jy + kz$ formundaki genelleşmiş karmaşık sayılar (hiperkompleks) olarak düşünülebilir. Buradaki i, j, k arasında aşağıdaki çarpım kuralları vardır;

$$ij = k = -ji,$$

$$jk = i = -kj,$$
$$ki = j = -ik$$

Yukarıda tanımlanan çarpım bağıntılarından, kuaterniyonlar kümesinin (H) çarpma işlemine göre değişmeli olmadığını görebiliriz.

$q = w + ix + jy + kz$ olmak üzere q'nun eşleniği $\bar{q} = w - ix - jw - kz$ olarak tanımlanır. Buradan da

$$q\bar{q} = (w + ix + jy + kz)(w - ix - jy - kz) = ... =$$
$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2$$

elde edilir. Elde edilen $|q|$ reel sayısına q'nun ***normu*** adı verilir. Böylece $|q|^2 \neq 0$ yani $q \neq 0$ olduğunda $q(\frac{\bar{q}}{|q|^2}) = 1$ olur bunun anlamı ise, sıfırdan farklı her q'nin q^{-1} ile gösterilen çarpmaya göre tersi olduğudur ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

dir.

$q_a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$ ve $q_b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$ iki kuaterniyon olmak üzere, $q_a q_b$ çarpımı:

$$q_a q_b = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)$$
$$+i(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)$$
$$+j(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_2 b_4)$$
$$+k(a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

bulunur. Buradan da iki kuaterniyonun çarpımının normu için

$$|q_a q_b|^2 = |q_a|^2 |q_b|^2$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu ise birinci bölümde gördüğümüz "Dört tamkare özdeşliği"'nden başka birşey değildir.

Geçen sayıdaki yazımızda $z = x + iy$ ve $|z| = 1$ koşullarını sağlayan her karmaşık sayının

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

biçiminde bir gösterimi olduğunu göstermiştik. Benzer şekilde $q = w + ix + jy + kz$, $|q| = 1$ ve

$$\vec{n} = \frac{ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

olmak üzere, q kuaterniyonu

$$q = \cos(\varphi/2) + \vec{n}\sin(\varphi/2)$$

şeklinde yazılabilir.

Gauss tamsayılarının $Z[i] = \{x + iy | x, y \in Z\}$ şeklindeki karmaşık sayılardan oluştuğunu görmüştük. Benzer şekilde kuaterniyon tamsayıları yani katsayıları tamsayı olan kuaterniyonlar kümesini tanımlayabiliriz. Böylece "bir tamsayının dört tamkare toplamı şeklinde yazılabilmesi gerek ve yeter koşul bir kuaterniyon tamsayısının normuna eşit olmasıdır" sonucunu çıkarabiliriz.

BİR GENİŞLEME TEOREMİ (II)

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, Vezneciler/İSTANBUL

III. Hausdorff'un Genişleme Teoremi

Evet, artık bunca bilgiyle donatıldıktan sonra bu yazının ana sonucunu ve kanıtlamasını görelim. Aşağıdaki kanıtlamayı okumadan önce temel bilgiler kısmında anlatılanları bir kez daha sindirerek okumanızı öneririz.

Hausdorff Teoremi (1919): Metrik bir uzayın kapalı bir alt uzayında tanımlı olan her sürekli ve sınırlı gerçel değerli fonksiyonun uzaya sürekli bir genişlemesi vardır.

Kanıtlama: X üzerinde d metriği tanımlı olsun, genelliği bozmaksızın $0 \leq d \leq 1$ alabiliriz, çünkü X üzerindeki topolojiyi, bu son koşulu gerçekleyen ve d metriğine eşdeğer olan bir metriğin belirlediğini, anımsayacağınız gibi, zaten göstermiştik. Alt uzay kavramını ayrıntılarıyla bilmeden bu kanıtlamayı başarabiliriz, tek bilmemiz gereken (X, τ_d) uzayında kapalı bir K kümesinde tanımlı ve K'nın her noktasında sürekli olan $f : K \to [0,1]$ gerçel değerli fonksiyonun sürekli bir genişlemesinin (X, τ_d) uzayında tanımlanabildiğini göstermektedir. Peki, sınırlı f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değil, gelişigüzel bir $[a,b]$ aralığında değerler alsaydı ne değişirdi? Bu önemli ve can alıcı soruyu sona bırakalım, şimdi kanıtlamada "teknik kolaylıklar" sağladığı için, her $x \in K$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ gerçeklendiğini varsayarak genişleme fonksiyonu tanımlayalım; bu özel varsayım altında kanıtlamayı başarırsak eğer, $f : K \to [a,b]$ durumunda da kolaylıkla başarabileceğimizi sonradan göreceğiz. Şimdi, yine $[0,1]$ aralığında değerler alan

$$F(x) = \begin{cases} inf\{f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,K)} - 1 : y \in K\} & ; \quad x \in X - K \\ f(x) & ; \quad x \in K \end{cases}$$

tanımlayalım. Dikkat edilirse K kapalı olduğundan, herhangi $x \in X - K$ için, negatif olmayan $d(x,K)$ gerçel sayısının sıfır olması yani x noktasının K kümesine yapışık olması söz konusu değildir, kısacası her $x \in X - K$ için tanımda paydada yer alan $d(x,K)$ pozitiftir ve dolayısıyla bu yeni fonksiyon X uzayının tüm noktalarında tanımlıdır ve üstelik K kümesindeki her x noktası için $F(x) = f(x)$ olmaktadır, üstelik F fonksiyonu f'nin bir genişlemesidir, çünkü o da $[0,1]$ aralığında değerler alır:

$$\forall x \in X - K \quad \text{için} \quad F(x) \leq \frac{d(x,y)}{d(x,K)}$$

olur, çünkü $f(y) - 1 \leq 0$ dir ve sonuçta $y \in K$ elemanları üzerinden infimum alarak $F(x) \leq inf \frac{d(x,y)}{d(x,K)} = \frac{1}{d(x,K)} inf\{d(x,y) : y \in K\} = 1$ bulunur. Üstelik $0 \leq \frac{d(x,y)}{d(x,K)} - 1$ ve $0 \leq f(y) \leq f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,K)} - 1$ nedeniyle, her bir $x \in X - K$ için $0 \leq F(x) \leq 1$ ve sonuçta her $x \in X$ için $0 \leq F(x) \leq 1$ bulunur. Şimdi bu yeni fonksiyonun uzayın her noktasında sürekli olduğunu ve dolayısıyla aranan genişleme fonksiyonu olduğunu gösterelim. Bu, uzun ve gerçekten çaba gerektiren bir kanıtlama olacaktır. Öncelikle herhangi bir $x_1 \in X - K$ noktasında sürekliliği gösterelim.

İddia: $\forall x_1, x_2 \in X - K$ için $|F(x_1) - F(x_2)| \leq d(x_1,x_2)\left(1 + \frac{4}{d(x_1,K)} + \frac{4}{d(x_2,K)}\right)$. Bu iddianın kanıtlanması sırasında, yine kısalık ve kolaylık amacıyla $0 < \delta_1 = d(x_1,K)$ yazalım. $x_1 = x_2$ için iddia apaçıktır; eğer $x_1 \neq x_2$ ise $d(x_1,x_2)$ uzaklığı pozitif olacağından, infimum tanımı gereği uygun bir $y \in K$ elemanı için

$$f(y) + \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)} - 1 < F(x_1) + d(x_1,x_2)$$

gerçeklenir ve üstelik işin ilginç yanı $y \in S(x_1, 3\delta_1)$ olmak zorunadadır, çünkü aksi halde $3d(x_1,K) \leq d(x_1,y)$ olur ve sonuçta

$$2 \leq f(y) + 2 \leq f(y) + \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)} - 1 < F(x_1) + d(x_1,x_2) \leq 2$$

çelişkisi doğardı. Demek ki yukarıdaki eşitsizliği gerçekleyen aracı y elemanı $K \cap S(x_1, 3\delta_1)$ kümesine aittir ve bunun aracılığı yardımıyla

$$F(x_2) \leq f(y) + \frac{d(x_2,y)}{d(x_2,K)} - 1 < F(x_1) + d(x_1,x_2) + \frac{d(x_2,y)}{d(x_2,K)} - \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)}$$

bulunur. Oysa son fark için

$$\left|\frac{d(x_2,y)}{d(x_2,K)} - \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)}\right| \leq \frac{|d(x_2,y) - d(x_1,y)|}{d(x_2,K)} + d(x_1,y)\frac{|d(x_2,K) - d(x_1,K)|}{d(x_1,K)\cdot d(x_2,K)}$$

bulunur, çünkü gerçel sayılarda

$$\left|\frac{1}{b_1}a_1 - \frac{1}{b_2}a_2\right| \leq \frac{1}{|b_1|}|a_1 - a_2| + |a_2|\frac{|b_1 - b_2|}{|b_1 \cdot b_2|}$$

eşitsizliği geçerlidir. $d(x_1,y) < 3\delta_1$ olduğu anımsanırsa, sağ yan

$$\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,K)} + \frac{3\delta_1}{d(x_1,K)} \cdot \frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,K)} = 4\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,K)}$$

ifadesinden ve dolayısıyla $4d(x_1,x_2)\left(\frac{1}{d(x_1,K)} + \frac{1}{d(x_2,K)}\right)$'den küçük kalır. Tüm bunlar

$$F(x_2) - F(x_1) < d(x_1,x_2)\left(1 + \frac{4}{d(x_1,K)} + \frac{4}{d(x_2,K)}\right)$$

verir. x_1 ve x_2'nin rollerini değiştirerek elde edilecek olan benzeri eşitsizlikten yararlanılırsa, yukarıdak iddia elde edilir. Oysa temel bilgiler kısmında gözlediğimiz gibi $\forall x \in X$ için $g(x) = d(x,K)$ biçiminde tanımlanan gerçel değerli g fonksiyonu sürekli (aslında düzgün sürekli) olduğundan, x_1 noktasındaki süreklilik gereği

$$\forall x \in S(x_1,\epsilon_1) \quad \text{için} \quad g(x) \in \left(g(x_1) - \frac{\delta_1}{2}, g(x_2) + \frac{\delta_1}{2}\right)$$

olacak biçimde $0 < \epsilon_1$ vardır; kısacası $x \in S(x_1,\epsilon_1)$ için $\frac{\delta_1}{2} = g(x_1) - \frac{\delta_1}{2} < g(x) = d(x,K)$ ve dolayısıyla $\frac{1}{d(x,K)} < \frac{2}{\delta_1}$ bulunur. O halde iddiadaki eşitsizlik kullanılacak olursa, çok zorlanmadan

$$\forall x \in S(x_1,\epsilon_1) \quad \text{için} \quad |F(x) - F(x_1)| \leq \left(1 + \frac{12}{\delta_1}\right) d(x,x_1)$$

bulunur. Burada $c_1 = 1 + \frac{12}{\delta 1}$ sabitinin yalnızca sürekliliğin incelendiği $x_1 \in X - K$ noktasına bağlı olduğu gözlenmelidir. Tüm bunların sonunda, $0 < \delta_\epsilon < min\{\epsilon_1, \frac{\epsilon}{c_1}\}$ pozitif sayısı seçilirse her bir $x \in S(x_1,\delta_\epsilon)$ için $|F(x) - F(x_1)| < \epsilon$ gerçekleşir, kısacası F fonksiyonu x_1 noktasında sürekli olur. Şimdi de F fonksiyonunun herhangi bir yakınsak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$ gerçeklendiğini kanıtlayarak gözleyelim. Dikkat: K kümesi kapalı olduğundan $\partial K \subseteq \overline{K} = Y(K) \subseteq K$ geçerlidir ve dolayısıyla $x_0 \in K$ ve $F(x_0) = f(x_0)$ ilk gözlemimizdir. Ayrıca herhangi bir $x \in X - K$ elemanı için $x \neq x_0$, $0 < d(x,x_0)$ ve dolayısıyla $inf\{d(x,y) : y \in K\} = d(x,K) < d(x,K)\cdot(1 + d(x,x_0))$ geçerli olduğundan uygun bir $0 < \epsilon_x$ ve $y_x \in K$ sayesinde $d(x,y_x) < inf\{d(x,y) : y \in K\} + \epsilon_x < d(x,K)\cdot(1+d(x,x_0))$ bulunur; dikkat edilsin: a ve b gerçel sayıları için $a < b$ ise $a + \frac{b-a}{3} < b - \frac{b-a}{3} < b$ geçerli olur. O halde bu aracı $y_x \in K$ elemanı sayesinde $F(x) \leq f(y_x) + \frac{d(x,y_x)}{d(x,K)} - 1 \leq f(y_x) + d(x,x_0)$ bulunur. Ayrıca yukarıda yapıldığı gibi, uygun bir $y'_x \in K \cap S(x,3\delta_x)$ elemanı yardımıyla $f(y'_x) + \frac{d(x,y'_x)}{d(x,K)} - 1 < F(x) + d(x_0,x)$ ve sonuçta

$$f(y'_x) - d(x,x_0) < F(x) - \left(\frac{d(x,y'_x)}{d(x,K)} - 1\right) \leq F(x)$$

bulunur. Burada $\delta_x = d(x, K) > 0$ yazılmıştır. Demek ki her bir $x \in X - K$ elemanı için aracı elemanlar yardımıyla

$$f(y'_x) - d(x, x_0) < F(x) < f(y_x) + d(x, x_0) \qquad (*)$$

bulunur. Oysa $x_0 \in \partial K \subseteq \overline{X - K}$ olduğundan, tüm terimleri $X - K$ açık kümesinden alınmış ve $\lim_{n\to\infty} = x_0$ yani $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ gerçekleyen herhangi bir yakınsak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için de bu eşitsizlikler yardımıyla

$$f(y'_n) - d(x_0, x_n) < F(x_n) < f(y_n) + d(x_0, x_n) \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

gerçeklenecek biçimde aracı $y_n, y'_n \in K$ noktaları var olacaktır. Dikkat edilirse $y_n \in K$ noktalarının tanımı gereği $0 \leq d(x_n, y_n) < d(x_n, K) \cdot (1 + d(x_0, x_n))$ gerçekleşmektedir. Oysa $0 \leq |d(x_n, K) - d(x_0, K)| \leq d(x_0, x_n)$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = d(x_0, K) = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ elde edilir. Limit işlemi yardımıyla, kanıtlamanın nasıl başarıyla sürdürüldüğünün ayrımına varıyorsur değil mi sevgili okurlar? Daha bitmedi! Üstelik $0 \leq d(y'_n, x_n) \leq 3d(x_n, K)$ gerçeklendiğini, $y'_n \in K \cap S(x_n, 3d(x_n, K))$ elemanlarının tanımından çıkarırız. O halde önce $\lim_{n\to\infty} d(y'_n, x_n) = 0$ ve sonra da bu sonuçtan ve $0 \leq d(y_n, x_0) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_0)$ eşitsizliklerinden kolayca $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_0) = 0$ buluruz. Demek ki bu aracı $y_n, y'_n \in K$ elemanlarının belirlediği diziler için sırasıyla $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ ve $\lim_{n\to\infty} y'_n = x_0$ sonuçlarına ulaşırız. Oysa gerçel değerli f fonksiyonu K kümesinin her noktasında ve özellikle $x_0 \in K$ noktasında sürekli olduğundan sonuçta $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ ve $\lim_{n\to\infty} f(y'_n) = f(x_0)$ elde ederiz. Şimdi yukarıda bulunan (*) eşitsizlikleri kullanılarak, her $n \in \mathbf{N}$ için

$$f(y'_n) - f(x_0) - d(x_0, x_n) \leq F(x_n) - f(x_0) \leq f(y_n) - f(x_0) + d(x_0, x_n)$$

geçerli olduğundan, sol ve sağ yanı sıfır gerçel sayısına yakınsadığı için sonuçta $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = f(x_0) = F(x_0)$ buluruz. Evet, arkanıza yaslanıp biraz soluklanın, işin önemli kısmını başardık. "Peki geriye ne kaldı, tanrı aşkına?" diye sorabilirsiniz. Ufak ama önemli ayrıntılar kaldı. Dikkat edilirse F fonksiyonunun $x_0 \in \partial K$ noktasında süreklilik kanıtlamasının tam anlamıyla bitirilmiş olması için x_0 noktasına yakınsayan her tür $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için bu son sonucun gösterilmesi gerekir. Ama böyle bir dizinin ister **i)** sonlu tanesi dışında tüm terimleri K kümesinden seçilmiş olsun, ister **ii)** sonlu tanesi dışında tüm terimleri $X - K$ kümesinden seçilmiş olsun ve isterse **iii)** sonsuz sayıda terimi K kümesinden ve sonsuz sayıda terimi $X - K$ kümesinden seçilmiş olsun, hep $F(x_n) \to f(x_0)$ gerçekleşecektir, nedenini kolayca gösterebileceğinizi umuyorum. Son irdelenmesi gereken durum ise F fonksiyonunun herhangi bir $x_0 \in ic(K)$ noktasında sürekli olduğunu göstermektir, oysa bu durumda $S(x_0, \epsilon_0) \subseteq K$ gerçekleyen bir açık yuvar vardır ve bu yuvardaki tüm noktalarda F ve f eşit değerler alırlar ve f fonksiyonu bu yuvarın tüm noktalarında süreklidir, sorun kalmaz. Kısaca sonuç olarak F fonksiyonu tanımlandığı metrik uzayın her noktasında süreklidir. Evet, yazının sonunda şimdi, ya $f : K \to [a, b]$ ya da $f : K \to \mathbf{R}$ olması durumlarında sürekli bir genişleme fonksiyonu var mıdır acaba, bunları bir araştıralım bakalım. Birinci durumda $g(x) = \frac{f(x)-a}{b-a}$ biçiminde tanımlanan sürekli ve gerçel değerli $g : K \to [0, 1]$ fonksiyonunun tüm uzaya yapılan sürekli genişlemesini $G : X \to [0, 1]$ ile gösterecek olursak, $F(x) = a + (b - a)G(x)$ fonksiyonunun sürekli olsduğunu, $F : X \to [a, b]$ gerçeklendiğini ve üstelik her bir $x \in K$ için $F(x) = a + (b - a)g(x) = f(x)$ gerçekleştiğini kolayca görürüz. Peki ya $f : K \to \mathbf{R}$ durumunda ne yapabiliriz? "Ama nasıl olur, bu durumda $f(K)$ görüntü kümesinin sınırlı bir aralık tarafından kapsanmış olması güvence altında değil ki, Hausdorff genişleme teoremini nasıl uygulayabiliriz?" diye sorabilirsiniz. Oysa her $x \in \mathbf{R}$ için $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ olmak üzere hof bileşke fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında değerler aldığını ve üstelik h fonksiyonunun bire-bir ve sürekli olduğunu gözlemek güç değildir. Peki ya sonra... neler yapılmalıdır? Çok kolay sevgili okurlar, biraz dikkat lütfen. Yazının sonunda sizlere bir önerim var. Önce biraz soluklanın sonra biraz müzik dinleyin, örneğin büyük türkü ustası Ruhi Su'nun Pir Sultan Abdal'ını ve daha sonra Hausdorff'un şu güzelim kanıtlamasını bir kez daha okuyun, usta işi matematiğin değerine varın. İyi çalışmalar sevgili okurlar!

DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ

Svetlana Gadetska
Ukrayna Bankacılık Akademisi, Kharkov Şubesi, Kharkov, UKRAYNA

Halide Sagıdova

247 sayılı okul, Nesimi Bölgesi, Bakü, AZERBAYCAN

GİRİŞ

Eski zamanlarda matematik denildiğinde geometri anlaşılıyordu. Son yüzyılda matematiğin çok çeşitli dallarının ortaya çıkmasına rağmen geometri çağdaş matematikte önemini korumaktadır.

Eski zamanlardan beri ilgilenen her kişiyi büyüleyen çok sayıda geometrik problem bilinmektedir. Kübün üç katı büyütülmesi, açının üç eşit parçaya bölünmesi ve bir dairenin alanına eşit karenin bulunması gibi, ünlü geometrik çizim problemlerini çözme çabası matematiğin yeni dallarının ortaya çıkmasına neden oldu.

19. asırda yapılan birçok ciddi incelemeler sonucu klasik noktalar, doğrular ve çemberlere yenileri eklendi.

Biz bu yazıda Euler doğrusu ve dokuz nokta çemberinden bahsedeceğiz.

EULER DOĞRULARI

Bir üçgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimizde elde edilen üçgene, o üçgenin orta üçgeni diyelim. Şekil 1'deki $A_1B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin orta üçgenidir. Bu üçgenlerin elemanları arasındaki bazı bağıntıları görelim.

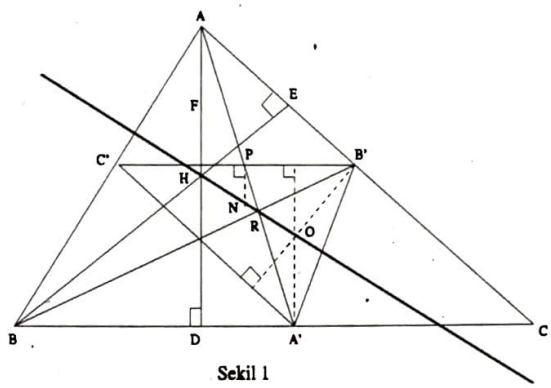
ABC üçgeninin ağırlık merkezini R ile, diklik merkezini H ile, çevrel çemberinin merkezini O ile gösterelim. ***O noktası aynı zamanda $A'B'C'$ üçgeninin diklik merkezidir.***

$AB'A'C'$ paralelkenar olduğundan, $[AA']$ ve $[B'C']$ köşegenlerinin P kesişim noktası bu köşegenleri yarıya böler, dolayısıyla $A'B'C'$ üçgeninin $[A'P]$ kenarortayı, ABC üçgenin $[AA']$ kenarortayı üzerinde Benzer şekilde $A'B'C'$ üçgeninin diğer kenarortaylarının da ABC üçgeninin karşılık gelen kenarortayları üzerinde olduğu görülür. Böylece R noktası, $A'B'C'$ üçgeninin de ağırlık merkezidir. ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin benzerlik oranı 2:1 olduğundan, $\mid AH \mid = 2 \mid A'O \mid$ ve $\mid AR \mid = 2 \mid A'R \mid$ dir. $[BC]$ kenarına ait yükseklik $[AD]$ olsun. AD ve $A'O$ doğrularının paralelliğinden, AHR ve $A'OR$ üçgenlerinin Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) benzerlik teoreminden 2:1 oranıyla benzer olduğunu, buradan da $\widehat{ARH}$ ve $\widehat{A'RO}$ açılarının eşit olduğunu elde ediyoruz. Dolayısıyla H,R,O noktaları doğrusaldır. Ayrıca $\mid HR \mid = 2 \mid RO \mid$ olduğundan, bu da R noktasının H ve O noktalarının arasında bulunduğunu göstermektedir.

Böylece, aşağıdaki teoremi kanıtladık.

Teorem 1. Her hangi bir üçgenin ağırlık merkezi, diklik merkezi ve çevrel çemberinin merkezi doğrusaldır. Ağırlık merkezi, diklik merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasındaki uzaklığı 2:1 oranında böler. □

Teoremde sözü geçen bir üçgenin ağırlık merkezi, diklik merkezi ve çevrel çemberinin merkezinin üzerinde yer aldığı doğruya **Euler doğrusu** denir.



Sekil 1

DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ

Şekil 1'i incelemeye devam edelim. ABC üçgeninin $A'B'C'$ orta üçgeninin çevrel çemberine bakalım. O ve R noktaları $A'B'C'$ üçgeninin sırasıyla diklik ve ağırlık merkezleri olduğundan OR, bu üçgenin ***Euler doğrusudur***. $PN, [B'C']$ kenarının orta dikmesi olsun (burada N bu dikmenin OR ile kesişim noktasıdır). Teorem 1'den dolayı $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çember merkezi (bu merkez doğal olarak PN üzerindedir) OR Euler doğrusu üzerinde bulunacaktır. Öyleyse $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çember merkezi N noktasıdır, ayrıca $r = |NA'| = |NB'| = |NC'|$ yarıçapı ABC üçgenin çevrel çember yarıçapının yarısıdır (ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin 2:1 oranıyla benzerliklerinden dolayı).

AH, PN ve $A'O$ doğruları paralel olduğundan ve $[AA']$ doğru parçası PN doğrusu ile kendi orta noktası olan P noktasında kesiştiğiden, PN doğrusu AH ve $A'O$ doğrularından eşit uzaklıktadır. Böylece N, $[HO]$ doğru parçasının orta noktasıdır. $[AH]$ doğru parçasının F orta noktasını ele alalım. Daha önce elde ettiğimiz $|AH| = 2|A'O|$ bağlantısından $|NA'| = |NF|$ eşitliğini elde ediyoruz, yani A' ve F, N merkezli r yarıçaplı çember üzerindeki antipodal (çember ve bir çapının kesiştiği iki nokta) noktalardır. O halde F noktası $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. ABC üçgeninin diğer yüksekliklerinin köşeden H diklik merkezine kadar olan parçalarının orta noktalarının da aynı özelliğe sahip olacağı açıktır. Bu üç nokta da ***Euler'in*** adını taşıyorlar.

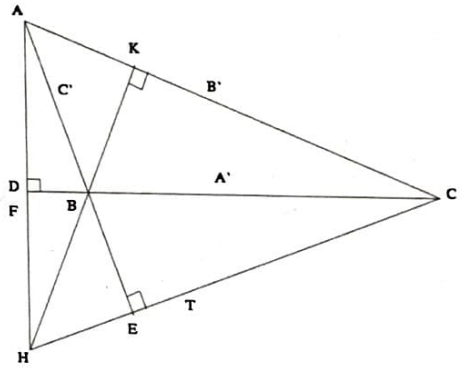
$\widehat{A'DF}$ dik açısı sözü geçen çemberin $[A'F]$ çapını gördüğünden, D noktasının (ve benzer şekilde ABC üçgeninin diğer yüksekliklerinin ayaklarının da) bu çemberin üzerinde olduğunu elde ediyoruz. Böylece $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çemberi ABC üçgeninin Euler noktalarından ve yüksekliklerinin ayaklarından geçer.

Başka bir deyişle, ABC üçgeninin dokuz özel noktasından geçen bir çemberin bulunduğunu kanıtladık. Bu önemli sonucu aşağıdaki teorem şeklinde verelim.

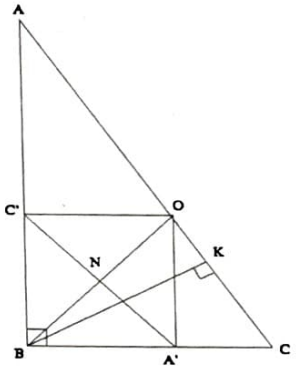
Teorem 2. Herhangi bir üçgenin tüm yüksekliklerinin ayakları, tüm kenarlarının orta noktaları ve Euler noktaları aynı bir çember üzerinde bulunur. Bu çemberin yarıçapı, üçgenin çevrel çemberinin yarıçapının yarısına eşittir, merkezi de Euler doğrusu üzerindedir ve üçgenin diklik merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasında bulunur. □

Teoremde bahsedilen çember **dokuz nokta çemberi** olarak bilinir.

Teoremin ispatında kullandığımız şekildeki üçgen dar açılıydı. Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin dışında kalacaktır (Şekil 2'deki H noktası). Dik üçgende ise ele alınan 9 nokta Şekil 3'teki B, A', K, O, C' gibi beş noktaya dönüşür.



Sekil 2



Sekil 3

Aşağıdaki dört problem ise okuyuculara alıştırma olarak verilmiştir.
Dokuz nokta teoremi hakkında daha fazla bilgi için kaynakçada belirtilen kitablara bakabilirsiniz.

PROBLEMLER

1. Geniş açılı üçgen için Teorem 2'yi detaylı şekilde kanıtlayınız.

2. Dik üçgen için Teorem 2'yi detaylı şekilde kanıtlayınız.

3. ABC üçgeninin iç açıortaylarını, çevrel çemberi D, E, F noktalarında kesene kadar uzatalım. Açı ortaylarının kesişim noktası L olmak üzere, $[AL], [BL], [CL], [DL], [EL], [FL], [DE], [EF], [DF]$ doğru parçalarının orta noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu kanıtlayınız.

4. Bir kirişler dörtgenin köşegenleri birbirine dik ise, bunun kenarlarının orta noktaları ve köşegenlerin kesişim noktasından kenarlara inilen dikmelerinin ayakları aynı çember üzerindedir. Kanıtlayınız.

Kaynakça

1. H.S. Coxeter, S.L. Greitzer. Geometry Revisited. Mathematical Assn. of America, New-York

2. H.S. Coxeter. Introduction to Geometry. 2-*nd* Ed., J.Wiley&Sons, 1989

SÜREKLİ KESİRLER

İsmail Aslan
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR
e-posta: iaslan@likya.iyte.edu.tr

Bu yazıda rasyonel yaklaşım teorisinde önemli bir yeri olan ve birçok transandantal sayıları oluşturmada kolaylık sağlayan sürekli kesirlerden söz edeceğiz. Sürekli kesirleri, $\frac{11}{8}$ gibi, bileşik kesirlerin bir genelleştirilmesi olarak düşünebiliriz. Örneğin,

$$\frac{11}{8} = 1\frac{3}{8} = 1 + \frac{1}{8/3} = 1 + \frac{1}{2\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3/2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

Bu yazım biçimi her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için de geçerlidir, yani $a_0, a_1, \ldots, a_r$ pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots + \frac{1}{a_r}}}$$

olarak yazılabilir. Gösterim kolaylığı için bunu genellikle $p/q = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ şeklinde ifade ederiz. Ayrıca belirtelim ki irrasyonel sayıları da sürekli kesirler şeklinde ifade etmek olanaklıdır. Örneğin, $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısını göz önüne alacak olursak

$$\sqrt{3} = 1 + .7320508\ldots = 1 + \frac{1}{1 + .3660254\ldots} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + .7320508\ldots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + .3660254\ldots}}}}$$

Bu tür kesirleri sonsuz sürekli kesir olarak isimlendirmek yerinde olacaktır. Sadece rasyonel sayıların sonlu sürekli kesir olarak yazılabileceğine dikkat edilmelidir. Genel olarak her x gerçel sayısının $x = [a_0(x), a_1(x), \ldots]$ şeklinde bir açılımı vardır. Örneğin,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

ve

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, \ldots]$$

Bir sayının sürekli kesir olarak açılımının en önemli özelliği, baştan itibaren alınan rakamlardan oluşturulan kısmın, genellikle bir **yakınsama** olarak adlandırılır, açılımı yapılan sayıya çok iyi bir yaklaşım sağlamasıdır. Diğer bir deyişle, $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ sürekli kesirinin k-inci yakınsaması, $c_k = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$ olarak tanımlanır. Burada $k \geq n$ için $c_k = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ olduğuna dikkat edelim. Örneğin, $[1, 2, 3, 4]$ sürekli kesiri için,

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7}$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{43}{30}$$

ve $c_4 = c_5 = \ldots = \frac{43}{30}$ dır. Başka bir örnek için,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

sayısını ele alırsak, ilk iki rakamdan oluşan bir yakınsama

$$c_1 = [3, 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

olup, bu sayı π sayısına iyi bir yaklaşık değerdir. Diğer bir yaklaşık değer için 292 den önce gelen rakamları alarak oluşturacağımız yakınsama olan

$$c_3 = [3, 7, 15, 1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292\ldots$$

sayısını elde ederiz ki bu da $\pi = 3.141592653\ldots$ sayısına oldukça yakın bir değerdir. Yaptığım bu girişten sonra sürekli kesirlerin matematik tarihindeki yerinden söz etmek yerinde olacaktır. Sürekli kesirler, bir milenyum olmasa da, yüzyıllarca insanlığı büyülemişitr. Kutsal oran(bu terim Rönesans'tan gelmektedir) ve kendine- benzerlik özelliklerine sahip bir dikdörtgenin oluşturulması çabaları,

$$\phi \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}$$

altın oranının sürekli kesir açılımının geometrideki kopyasından başka bir sey değildi. Sürekli kesirlerin çıkış noktasını tam olarak belirlemek oldukça zordur. Bu zorluk, sürekli kesirlerle matematikte son 2000 yılda karşılaşılması fakat 1600'ların başlarına ve 1700'lerin sonlarına kadar geçen süreçte bu kavramın tam olarak oturtulamamasından kaynaklanmaktadır. Buna karşın, sürekli kesirlerin kökeni, geleneksel olarak, Öklid Algoritmasının yaratıldığı zamanla çakıştırılır. Öklid Algoritması iki sayının en büyük ortak bölenini(ebob) bulmada kullanılır. Bu Algoritmayı ustaca kullanarak, p ve q nın ebob'unu bulmanın yerine, p/q rasyonel sayısının sürekli kesir açılımını bulabiliriz. Bunu görebilmek için, örneğin, 348 ve 124 sayılarına Öklid Algoritmasını **tekrarlı** olarak uygulayalım.

$$348 = 124 \times 2 + 100$$

$$\frac{348}{124} = 2 + \frac{100}{124} = 2 + \frac{1}{\frac{124}{100}}$$

$$124 = 100 \times 1 + 24$$

$$\frac{124}{100} = 1 + \frac{24}{100} = 1 + \frac{1}{\frac{100}{24}}$$

$$100 = 24 \times 4 + 4$$

$$\frac{100}{24} = 4 + \frac{4}{24} = 4 + \frac{1}{\frac{24}{4}}$$

$$24 = 6 \times 4$$

Bütün bu kesirler yerlerine konulup yeniden yazılırsa, $\frac{348}{124} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}$ sürekli kesiri elde edilir ve kısaca $\frac{348}{124} = [2, 1, 4, 6]$ olarak ifade edilir.

Öklid ve kendinden öncekilerin bu Algoritmayı sürekli kesirleri oluşturmada kullanıp kullanmadıkları tartışmalıdır. Fakat Öklid Algoritmasının sürekli kesirlerle olan yakın ilişkisinde dolayı, Öklid Algoritmasının keşfinin sürekli kesirlerin gelişimine yol açtığı yaygın bir inanıştır

Yıllar içinde yapılan ve sürekli kesirleri içeren herhangi bir çalışma çok özel örneklerle sınırlıydı. Hintli matematikçi Aryabhata (M.S. 550), sürekli kesirleri doğrusal belirsiz denklemleri çözmek için kullanmıştı. Yunan ve Arap matematik yazınında da sürekli kesirlerin izleri ve örnekleri ile karşılaşmak şaşırtıcı olmasa gerek. Tabii ki bunların kullanışı yine özel örneklerle kısıtlıydı.

Sürekli kesirler, Wallis'in(1616-1703) çalışmaları esnasında başlıbaşına bir ilgi alanı oldu. Wallis,

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 9 \ldots}$$

özdeşliğini geliştirdi. Brouncker(1620-1684), bu özdeşliği

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{\ldots}}}}$$

olarak belirledi. Brouncker, sürekli kesir kavramını o zaman düşünmemişti ama Wallis ilk adımı atarak sürekli kesirler teorisini genelleştirmede ve göz kamaştırıcı bir konu olmasında büyük rol oynadı.

Sürekli kesirlerin uygulanmasına ilginç bir örnek olarak yazıcılardan çıktı aldığımız A4 boyutundaki kağıtları göz önüne alalım. Bir A4 kağıdı kendine-benzerlik özelliğine sahiptir. Yani, kağıt katlanıldığında, kenarları arasındaki ilk oranla yaklaşık olarak aynı olan bir oran elde edilir. Bilindiği gibi bir A4 kağıdının boyu 29.7 cm. ve genişliği de 21 cm. olarak tanımlanmıştır. Kenarlar arasındaki oranı hesaplarsak, $\frac{29.7}{21} = \frac{99}{70} = [1, 2, 2, 2, 2, 2]$ elde ederiz. Ayrıca $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots]$ olduğundan, $\frac{29.7}{21}$ oranının $\sqrt{2}$ sayısına bir yakınsama olduğu görülecektir.

Şimdi de, kısaca, sürekli kesirler teorisinden söz edelim. Bunu yapabilmek için bazı tanımlara ve teoremlerin ifadelerine gereksinimimiz olacak. $a_1, a_2, \ldots$ ve $b_1, b_2, \ldots$ sayıları gerçel ya da kompleks sayılar olmak üzere

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2+\frac{b_2}{a_3+\frac{b_3}{\ldots}}}}$$

biçimindeki ifadeye bir **sürekli kesir** denir. Burada a_i ve b_i sayıları sonlu ya da sonsuz sayıda olabilir. Her i için $b_i = 1$ olması durumunda, elde edilen kesire **basit sürekli kesir** denir. Basit sürekli kesirler, kısaca, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ şeklinde gösterilirler. Ayrıca terimlerin sayısı sonlu(sonsuz) ise sonlu(sonsuz) basit sürekli kesir terimi kullanılır. Bu tanımlamalardan sonra, sayılarla ilgili iki güzel teoremi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Teorem: Bir sayının rasyonel olması, o sayının sonlu sayıda terim içeren basit sürekli kesir olarak ifade edilmesiyle eşdeğerdir.

Bu arada, herhangi bir rasyonel sayının birden fazla sürekli kesir açılımına sahip olabileceğini de belirtelim. Örneğin,

$$\frac{47}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}$$

Teorem: Her irrasyonel sayının basit sürekli kesir açılımı sonsuz sayıda terim içerir.

Bu teoremlerin kanıtları zor olmamakla beraber, ilgili okuyucu kaynaklarda belirttiğimiz çalışmalara başvurabilirler. Yazımızı birkaç sürekli kesir örnekleri ile noktalayalım:

$$\frac{14}{11} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-\frac{1}{3-\frac{1}{2}}}} \qquad \frac{9x+14}{7x+11} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}}$$

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+\frac{x}{2-\frac{x}{3+\frac{x}{\cdots}}}}} \qquad \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{\cdots}}}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\frac{e^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}$$

Yukarıdaki en son kesir, matematik dehası S. Ramanujan'ın bir buluşudur.

KAYNAKLAR

[1] Brezinski, C: History of Continued Fractions and Pade Approximations, Springer-Verlag, New York, 1980

[2] Olds,C.D: Continued Fractions, Random House, New York, 1963

BASINDA MATEMATİK...

FERMAT TEOREMİ

Ercan Kumcu, Radikal, Ekonomi Sayfası, 15 Mayıs 1999

Ortaokul matematik kitaplarında ilk öğrendiğimiz konulardan birisi de dik açılı bir üçgenin iki kenarının karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşit olduğudur. Formül $a^2 + b^2 = c^2$ olmaktadır.

Eski Yunan matematikçisi Diofantus'un Aritmetik kitabını okuyan 1601 doğumlu Fransız Pierre de Fermat, Pisagor'un bu teoreminin anlatıldığı sayfanın kenarına bir şeyler karalamıştır. Rakamların kareleri alındığında yukarıdaki eşitliği sağlayan sonsuz sayıda a,b ve c tam sayıları vardır. Fakat sayıların kesimi değil de, daha büyük üslerini aldığınızda bu eşitliği sağlayan hiçbir a,b ve c tamsayısı yoktur. Bir başka deyişle, $a^n + b^n = c^n$ ifadesinde n, 2 den büyükse bu eşitliği sağlayan, a,b, ve c tam sayıları bulunamaz. Aslında matematikçi olmayıp Kral 14.Louis'nin hizmetinde hakimlik yapan Fermat kitabın kenarına bunun ispatını bildiği fakat yer darlığı nedeniyle kitabın kenarına yazamadığını not düşer. Kitap Fermat öldükten sonra bulunur, fakat ispatı bulunamaz.

Söylendiğine göre, hiçbir matematik problemi matematikçilerin kafasını bu kadar uzun süre meşgul etmemiştir. Fermat bu teoremi 1637 yılında kitabın kenarına yazmış, teoremin doğruluğu ise 357 yıl sonra 1994 yılında genç matematikçi Andrew Wiles tarafından ispatlanmıştır.

Fermat teoremi üzerinde 357 yıl boyunca kimler çalışmadı ki? İspatlamaya çalışırken de, birçok matematikçi hem üne kavuştu hem de yeni şeyler buldular. Bulamadıkları tek şey Fermat teoreminin ispatıydı. Sophie Germain çok özel bir durum için Fermat teoremini ispatladı. Özel durum n nin asal sayı olmasıydı. Asal bir sayının karesini alıp bir eklediğinizde bir başka asal sayıya ulaşıyorsunuz. Örneğin, $2^2 + 1 = 5$. Burada 2 de 5 de asal sayılar. Bu asal sayılara Sophie'nin asal sayıları denmeye başlandı.

Meşhur matematikçi Gauss da biraz bu konuya kafa yordu. Gauss, konuyla kendi uğraşmaktansa Germain'i yüreklendirmeye çalıştı. Germain'dan sonra en ciddi yaklaşımlardan biri Alman matematikçi Ernst Eduard Kummer'den geldi. O da ancak özel bazı sayılarda Fermat teoremini ispatlayabildi. Daha sonra Alman ve Fransız bilim akademileri teoremi ispatlayanlara ödüller koydular. Yalnızca 1908 yılında ödülü almaya çalışan 621 çalışma geldi. Ödülün peşinde 1970'li yıllara kadar koşuldu, fakat başarılı olunamadı.

Fermat teoreminin ispatı konusunda son yaklaşım 1986 yılında Ken Ribert'ten geldi. Ribert problemin çözülmesine çok yaklaştı, fakat başaramadı. Wiles, Ribert'in çalışmasını okuduktan sonra hiç kimselere haber vermeden tam sekiz yıl bu konu üzerinde sessiz sedasız çalıştı. Teoreme son darbeyi vurduğunu sandı. Wiles 1993 yılında matematikçiler önünde verdiği konferansta ispatını sundu. Alkışlar aldı. Yüz yıllarca matematikçilerin rüyalarına giren bir teoremi ispatlayarak bir bilinmeyeni de yok ettiğini sandı. İspatta bir hata vardı. Hata ancak 14 ay sonra düzeltildi. Wiles, Fermat'ın Son Teoremi'ni ispatlamıştı. Alman Bilimler Akademisi'nin 90 yıl önce koyduğu ödülü o günkü değerine alabilseydi, Wiles 2 milyon dolar alacaktı. Hiperenflasyonla erimiş Alman Markı Wiles'ye 1997 yılında ancak 50 bin dolar olarak döndü.

Wiles artık herkesin tanıdığı meşhur biriydi. Amerikan tlevizyonlarının meşhur spikeri Barbara Walters kendisiyle mülakat yapmak istedi. Wiles, Barbara Walter'ın kim olduğunu bilmiyordu. Çünkü hayatında hiç televizyon seyretmemişti.

MATEMATİK ETKİNLİKLERİ 2001'E DAİR

Tina Beşeri - S.Eylem Erdoğan

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

Matematikçiler Derneğinin duyurusunu ve içeriğini ilk duyduğumuzda Matematik Eğitimi üzerine böylesine yoğun ve detaylı bir programdan ister istemez çok etkilendik. Davetli konuşmacılar ve seçilen konular ise işin bir başka cazibeli noktasıydı. Bir Araştırma Görevlisinin maaşının yarısına mal olacak masrafları hiç düşünmeden , İzmir'den çıktık yola. Perşembe sabahı Ankaradaydık. O gün Ankara bir başka güzeldi, yeşilin yoğunluğu , gökyüzünün maviliği içine serpilmiş fraktal bulutlar günün ilk konuşmasının habercileriydiler sanki. Bekleme salonunda üç-dört kuşak yüzlerce matematikçi ve misafirler toplanmıştı. Matematikçiler Derneği ve bizim Matematik Dünyası standımız önündeki kalabalık bizlere ayrı bir sevinç veriyordu. Kimisi dergiyi ilk kez duyuyor, kimisi tekrar derginin çıkıyor olmasına seviniyor, kimisi ise yeni kapağı yadırgıyordu.

İlk konuşma ismini liseden beri ders kitaplarımızda, matematik sözlüklerinde gördüğümüz ama ilk kez karşılaştığımız Timur Karaçay hocamızdı. Onun hastalıkları geride bırakıp yaşama yeniden merhaba demesinden ayrı bir keyif aldık. Konuşması ise keyiften de öteydi: "Matematik ve Sanat". Matematiğin ve sanatın benzerlik ve ayrımlarını betimleme yoluyla ortaya koymayı amaçladı ve ayrıca estetiğin matematik ve fiziksel bilimlerde ne denli ciddiye alındığını örneklerle göstermeye çalıştı. Bu konuşmada "Neden matematik öğreniyoruz?" sorusuna yanıt ararken, "Matematiksel güzellik nedir?" sorusuyla karşılaştık ve sanıldığının aksine, eğitim ve kültür sistemimizin, matematiği liberal sanatlardan çok daha iyi öğrettiği sonucuna ulaştık.

Ertesi gün Öner Çakar hocamızın "Doğadan Matematiksel Esintiler" üzerine diya eşliğinde yaptığı konuşması biz matematikçilerin Ankara'nın bahar keyfini doya doya yaşamamıza neden oldu.

Sergi salonunda üç gün boyunca çeşitli kurum ve kuruluşlar poster gösterilerini sundu, biz de molalarda bu yerlerde matematik oyunları ile beyin cimnastiği yaptık. Bazen çocuk olmak ve çocuk gibi sevinmek insana ayrı bir huzur veriyor.

Bizi en çok etkileyen sunumlardan bir diğeri de , Ankara Fen Lisesi öğrencilerinin "Öğrenci Gözüyle Matematik Öğretimi" adlı sunumuydu. Ankara Fen Lisesi 2. sınıf öğrencilerinin matematiği farklı öğretim metodlarıyla sevdirme ve yeni araç ve gereçler üretme konusunda yapmış oldukları çalışmalar bir çok profesyonele taş çıkartacak nitelikteydi.

Ünal Ufuktepe hocamız ise "Bir Eğlenceli Matematik Deneyimi" adlı konuşmasında matematik korkusunun kaynaklarını sorgulayan alternatif bir öğretme modeli de olabilecek, sanatın tiyatro ve müzik gibi dallarını kullanarak, amatör bir ruhla hazırladıkları matematik gösterisinden bahsetti. Bu gösteriler sonrasında katılımcılar arasından rassal seçilen 500 öğrenciye sunulan değerlendirme anketlerinin sonuçlarını görüş ve önerilerimize sundu.

Sempozyumun son etkinliği olan "Matematik ve Toplum" adlı panel, Timur Karaçay başkanlığında Ziya Aktaş, Orhan Güvenen, Bülent Karasözen, Emrehan Halıcı ve Ünal Ufuktepe 'nin katılımlarıyla gerçekleştirildi. İnsanlığın daha iyiye ve daha doğruya ulaşması için matematik uğraşısının vazgeçilmez olduğu, bunun yanında teknolojinin inasanoğluna rahatlık ya da kolaylıklar sunarken insan ilişkilerileri ve insanın düşünme sistemini olumsuz yönde etkileyebileceği vurgulandı.

Son Söz: Bu tür toplantılara ülke olarak çok ama çok ihtiyacımız var. Önümüzdeki günlerde de matematik sempozyumlarının daha sık aralıklarla düzenlenmesi dileğiyle...

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 31 Ağustos 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.231. 1'den bir $n > 1$ pozitif tam sayısına kadar olan sayıların art arda yazılmasından elde edilen sayıya "seri" diyelim (örneğin, 1234, 12345678910111213 v.s.). İki serinin çarpımının seri olamayacağını ispatlayınız.

A.232. ABC dik üçgeninin AB hipotenüsü üzerinde, $BM - MC$ ve $|AN| = |AC|$ olacak şekilde, M ve N noktaları alınmıştır. Sonra $|BP| = |BN|$ ve $|AQ| = |AM|$ olacak şekilde, BC ve AC kenarları üzerinde sırasıyla P ve Q noktaları alındılar. C, Q, M, N, P noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

A.233. $a_1, a_2, ..., a_{200}$ sayılarından bir kısmı mavi kalemle, geriye kalanları kırmızı kalemle yazılmıştır. Kırmızı sayıları silersek, geriye 1'den 100'e kadar olan tüm tam sayılar (artan sırayla) kalacak. Mavi sayıları silersek, geriye 100'den 1'e kadar tüm tam sayılar (azalan sırayla) kalacak. $a_1, a_2, ..., a_{100}$ sayıları arasında 12'den 100'e kadar olan tüm tam sayıların bulunduğunu ispat ediniz.

A.234. her n pozitif tam sayısı için

$$\{\sqrt{(1)}\} + \{\sqrt{(2)}\} + ... + \{\sqrt{(n^2)}\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (Burada $\{x\} = x - [|x|]$, x sayısının kesir değerini göstermektedir).

A.235. $2x2x2$ boyutlu kübü dört tane $1x1x1$ boyutlu kübün açılımı ile kapatmak mümkün müdür?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.231. Her $n > 2$ tam sayısı için

$$a_n = 2^{2^n - 1} - 2^n - 1$$

sayısının bileşik olduğunu gösteriniz.

Y.232. ABC ikizkenar üçgeninde ($|AB| = |AC|$)AK ve BL kenarortaylarıdır. $\widehat{BAK} = \widehat{CBL} = 30°$ ise, ABC üçgeninin iç açılarının kosinüsünü bulunuz.

Y.233. Bir ülkede N tane havayolu şirketi var ve her kentten tüm şirketlerin birer uçuşu bulunur. Herhangi iki kentten birinden diğerine uçakla gitmek mümkündür (doğrudan veya birkaç uçak değiştirerek). Ekonomik krizden dolayı N-1 tane uçuş iptal edildi, fakat hiçbir şirketin birden fazla uçuşu iptal edilmedi. Yine de herhangi kentten diğerine uçakla ulaşmanın mümkün olduğunu gösteriniz.

Y.234. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen tüm $f : R \to R$ sürekli fonksiyonları bulunuz.

a-) Her $x \in R$ için $f(x) = x + f(x - f(x))$

b-) $f(0) = 0$

Y.235. Pozitif tam sayılar kümesi birbiriyle kesişmeyen iki sonsuz kümeye ayrılmıştır. Her iki kümede toplamları birbirine eşit olan 100'er sayı bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A.221. Terimleri tam sayılar olan bir sonsuz aritmetik dizinin bir terimini tam küp olduğunu varsayalım. bu dizinin terimleri içinde sonsuz çoklukta tam küpler bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Dizinin tam küp olan terimlerinden birine m^3 diyelim. Dizi farkı da d olsun. O halde k herhangi doğal sayı olmak üzere,

$$(m + kd)^3 = m^3 + 3mkd(m + kd) + k^3d^3 =$$

$$= m^3 + d \cdot [3m^2k + 3mk^2d + k^3d^2]$$

Sayısı bir tam küptür ve verilen aritmetik dizinin bir terimidir.

A.222. İstenilen dört tanesinin bir ortak noktası bulunan beş çemberin beşinin de bir noktadan geçtiğini kanıtlayınız.

Çözüm. 1.,2.,4. ve 5. çemberlerin ortak noktasına A; 1.,3.,4. ve 5. çemberlerin ortak noktasına B; 2.,3.,4. ve 5. çemberlerin de ortak noktasına C diyelim. A, B ve C noktaları içinde en az ikisi çakışmak zorundadır. Çünkü bu noktaların üçü de 4. ve 5. çemberlerin kesişme noktaları içindedir. (İki ayrı çember, en fazla iki farklı noktada kesişebilir). Böylece, noktalardan en az ikisi (diyelimki, A ve B) çakışmak zorundadır. O halde, çemberlerin hepsi A noktasından geçecektir.

A.223. Düzlem üzerine alınmış A, B, C, D noktaları öyledir ki, herhangi P noktası için $|PA| + |PD| \geq |PB| + |PC|$ eşitsizliği sağlanmaktadır. B ce C noktalarının AD doğru parçası üzerinde bulunduklarını ve $|AB| = |CD|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. P noktasının seçimi üzerine bir kısıtlama olmadığından, önce $P = A$ koyalım. O halde $|AD| \geq |AB| + |AC|$ olur. Sonra da $P = D$ koyalım. Bu durumda $|AD| \geq |BD| + |DC|$ olur. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, $2|AD| \geq |AB| + |AC| + |BD| + |CD|$ elde ederiz. Öte yandan, üçgen eşitsizliğine göre, $|AD| \leq |AC| + |CD|$ ve $|AD| \leq |AB| + |BD|$'dir. Bu eşitsizliklerin eşitliğe dönüşmesi için C ve B noktalarının AD parçası üzerinde olmasıdır. Son iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak, $2|AD| \leq |AB| + |AC| + |BD| + |CD|$ olur. Yukarıdaki eşitsizliği de göz önüne alırsak, $2|AD| = |AB| + |BD| + |DC| + |CA|$ elde ederiz. Bu sonuncu eşitlikten de A, B, C, D nin doğrusal olması ve yukarıda yazılan eşitsizliklerin hepsinin eşitlik olması çıkar. Bundan sonra $|AB| = |CD|$ olacağını görmek zor değildir.

A.224. Negatif olmayan her a ve b sayıları için $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. Eşitsizliği şu biçimde yazalım:

$$\frac{a+b}{2} \cdot [a + b + \frac{1}{2}] \geq \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \qquad (1)$$

Şimdi, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ve $a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (sonuncuyu siz kanıtlayınız) eşitsizlikleri doğru eşitsizlikler olduğundan, (1) eşitsizliğide doğrudur.

A.225. ABC üçgeninin [AD] yüksekliği üzerinde bir P noktası alınıyor, BP ve CP doğrularının [AC] ve [AB] ile kesişim noktaları sırasıyla E ve F ile gösteriliyor. [DA'nın, FDE açısına ait açıortay olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. A noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan doğru ile DE ve DF doğrularının kesişim noktaları H ve G olsun. Ceva teoremi gereğince,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

ve ilgili üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AG}{BD}, \frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AH}$$

yazılarak, bunlardan $AG{=}AH$ elde edilir. $AD \perp GH$ olduğundan DGH ikizkenardır, dolayısıyla [DA, $\widehat{FDE}$ nın açıortayıdır.

Y.221. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \geq 0$ ve $x_1 + x_2 + ... + x_n = 10$ bağlantılarını sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ sayıları için $S = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm. $max\{x_1, x_2, ..., x_n\} = x_k$ olsun. O halde

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1} \leq$$

$$x_k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \cdot \sum_{i=k+1}^{n} x_i = x_k \cdot (10 - x_k) \leq$$

$$[\frac{x_k + (10 - x_k)}{2}]^2 = (\frac{10}{2})^2 = 25 \Rightarrow S \leq 25$$

Öte yandan, $x_1 = x_2 = 25$, $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$ için $S(x_1, x_2, ..., x_n) = 25$ olur. Dolayısıyla, $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarının sağladığı koşullar altında $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ toplamının alabileceği en büyük değer 25'tir.

Y.222. Her $n \in \mathbf{N}$ için sistemin reel çözümlerini bulunuz:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 3$$
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = 3^n$$

Çözüm. n=1 için $x_1 = 3$; n=2 için

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3^2$$

sistemi elde ediliyor. Birinci eşitlikte her tarafın karesi alınıp, ikinci ile taraf tarafa çıkarılırsa, $x_2x_2 = 0$ olur. Buradan: ya $x_1 = 0, x_2 = 3$; ya da $x_1 = 3, x_2 = 0$.

Şimdi, $n \geq 3$ olsun. Sistemden aşağıdaki iki denklemi ele alalım:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3^2,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 3^3.$$

Birinci eşitliği $(\frac{x_1}{3})^2 + (\frac{x_2}{3})^2 + ... + (\frac{x_n}{3})^2 = 1$ biçiminde yazarsak, her $i = 1, ..., n$ için $(\frac{x_i}{3})^2 \leq 1$ ve dolayısıyla, $(\frac{x_i}{3})^3 \leq (\frac{x_i}{3})^2 \leq 1$ olur. Böylece,

$$1 = \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{3})^3 \leq \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{3})^2 = 1$$

ifadesinden

$$\sum_{i=1}^{n}[(\frac{x_i}{3})^2 - (\frac{x_i}{3})^3] = 0 \Rightarrow$$

Her $i = 1, 2, ..., n$ için

$$(\frac{x_i}{3})^2 - (\frac{x_i}{3})^3 = 0 \Rightarrow$$

$$(\frac{x_i}{3})^2(1 - \frac{x_i}{3}) = 0, \ (i = 1, 2, ..., n)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, her i için ya $x_i = 0$, ya da $x_i = 3$ olmalıdır. Yani, sistemin çözüm kümesi $(3, 0, ..., 0), (0, 3, 0, ..., 0), (0, 0, ...0, 3)$ tür. (Göründüğü gibi, $n \geq 3$ için tüm sistemin çözüm kümesi, II. ve III. denklemlerden oluşan sistemin kümesi ile çakışıyor.)

Y.223. Her $\alpha \leq 1$ ve $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n > 0$ sayıları için $(1+x_1+x_2+...x_n)^\alpha \leq 1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + ... + n^{\alpha-1}x_n^\alpha$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. Tümevarım uygulayalım. n=1 için eşitsizlik açıktır. Şimdi, eşitsizliğin bir n için doğru olduğunu varsayarak n+1 için ispatlayalım.

$$(1+x_1+x_2+...x_n+x_{n+1})^\alpha - (1+x_1+x_2+...x_n)^\alpha =$$

$$1+x_1+x_2+...x_n)^\alpha[(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+x_2+...x_n})^\alpha - 1] \leq$$

($(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ eşitsizliğini (Bernoulli eşitsizliği) uyguluyoruz)

$\leq (1+x_1+x_2+...x_n)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} \leq (\alpha - 1 < 0$ olduğunu gözönüne alıyoruz)

$\leq [(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} = (n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha$ eşitsizliğinden ve tümevarım varsayımından

$$(1+x_1+x_2+...x_n+x_{n+1})^\alpha \leq$$

$$(1+x_1+x_2+...x_n)^\alpha + (n+1)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1}^\alpha \leq$$

$$1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+...+n^{\alpha-1}x_n^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha$$

elde ederiz.

Y.224. Uzayda uzunlukları eşit olan 3 doğru parçası rasgele yerleştirilmiştir. Bu parçaların ortogonal(dikey) izdüşümlerinin eşit olduğu bir düzlemin varlığını gösteriniz.

Çözüm. Önce basit bir gözlem yapalım: Verilen bir parçayı kendi kendine paralel olacak biçimde kaydırırsak, onun bir düzlem üzerindeki ortogonal izdüşümünün uzunluğu bundan etkilenmez.

Şimdi, bir O noktası alalım ve parçaları kendilerine paralel kaydırarak bir uçlarını O noktasına getirelim. Ortaya çıkan parçalara OA,OB,OC diyelim. $|OA| = |OB| = |OC|$ olduğundan, A,B ve C noktaları bir doğru üzerinde değilller (bir çember üzerindeler). Şimdi, O noktası A,B ve C noktalarını üzerinde bulunduran düzlem üzerinde ise, problemde istenen düzlem olarak bu düzlemi alırız. (Çünkü OA, OB, OC 'nin bu düzleme izdüşümleri kendileridir ve $|OA| = |OB| = |OC|$'dir.) O boktası ABC düzleminde olmasın. Bu takdirde ABC düzlemi istenen düzlemdir. Gerçekten, O ABC düzlemine indirilen dikmenin ayağına P dersek, OPA, OPB, OBC dik üçgenlerinin hipotenusları ve bir dik kenarları eşit olduğundan diğer dik kenarları da eşit olacaktır: $|PA| = |PB| = |PC|$

Y.225. Biçimini değiştirmeyen bir ABC üçgeninin A köşesi sabit olup B köşesi bir çember üzerinde hareket etmektedir. C köşesinin geometrik yerinin bir çember olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. B köşesi O merkezli çember üzerinde hareket etsin. AC üzerinde $AB' = AB$ alıp AOB üçgenine eş $AO'B'$ üçgenini çizelim. $\widehat{O'AB'} \cong \widehat{OAB}$ ve $\widehat{O'AO} \cong \widehat{B'AB}$ olur. Dolayısıyla AO', sabit AO doğrusu ile sabit açı yapar. AO' nün doğrultusunun sabit oluğu böylece anlaşılır. $AO = AO'$ nedeniyle O' sabittir. $O'B' = OB$ den de B' nün O' den daima OB uzaklığında olduğu yani B' nün geometrik yerinin O' merkezli OB yarıçaplı çember olduğu anlaşılır. $\frac{AC}{AB'} = \frac{AC}{AB}$ sabittir. O halde C nin geometrik yeri B'

nün geometrik yeri olan çemberin homotetiği olan çemberdir.

(13. Sayfanın devamı)

DOĞANIN SAYILARI
Yazan: I.Stewart, İzdüşüm Yayınları, 2000

Her
gece gökyüzünde yıldızlar dairesel yörüngelerde hareket ediyor. Mevsimler yıllık ritimlerde kendilerini tekrarlıyor. Hiçbir kar tanesi bir diğerinin aynı değil, fakat hepsi de altıgen simetriye sahip. Kaplanların ve zebraların kürkleri çubuk desenli, leoparlarla sırtlanlarınki benekli, vb. Doğa modellerle ve bu modeller de yaşam bilmecesine ilişkin ipuçlarıyla dolu. Matematiğin doğaya yaklaşımı, Sherlock Holmes'un küçük bir kanıt parçasına yaklaşımına benziyor. Ünlü dedektif nasıl bir sigara izmaritinden sahibinin özelliklerine ilişkin sonuçlar çıkarabiliyorsa, matematik de, örneğin kar tanelerinin altıgen formundan buz kristallerinin atom geometrisine varabiliyor. stewart bu kitabında, keman yaylarından damlatan musluklara, hayvanların yürüyüş ritimlerinden çiçek yapraklarının sayısal düzenine kadar, hayatın içerdiği pek çok somut model üzerinden giderek, yaşamdaki değişim ile süreklilik ilişkisi, kelebek etkisi ve kaos teorileri, vb. birçok soyut tartışma konusuna ulaşıyor. Kitap boyunca matematiksel evrende bize rehberlik yapan Stewart, okuyuculara matematiksel bir Sherlock Holmes olmanın nasıl birşey olduğunu göstermeyi amaçlıyor.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.

Türk Matematik Derneği
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu
19-21 Eylül 2001, Eşkişehir

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Anadolu Üniversitesi

TÜBİTAK

Kapsam

- **Dizi ve Çağrılı Konuşmalar :** Belirli alanlarda yeni gelişmelerin ele alınacağı, diğer alanlarla ilişkileri vurgulayan tanıtıcı (çağrılı) dizi konuşmalar.
- **Genç Araştırmacılar Bölümü :** Doktorasını yeni bitirmiş ya da kısa süre içinde bitirecek olan genç matematikçilerin doktora tez konularını tanıtacakları konuşmalar.
- **Öğrenciler Konuşuyor :** Lisans ve/veya lisansüstü öğrenim yapmakta olan öğrencilerin ilgilerini çeken bir konuyu tanıtan bildirileri.
- **Araştırma Sunumları :** Güncel araştırmaların anlatıldığı kısa bildiriler.
- **Araştırma Problemleri :** Özellikle lisansüstü öğrencilere yönelik, güncel araştırmalar çerçevesinde ortaya çıkan araştırma problemlerinin sunumu (poster + kısa açıklamalar).

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Yunusemre Kampusu 26470
Eskişehir, Türkiye

Tel: +90 222 3350580-5108
Fax: +90 222 3204910
email: mat2001@anadolu.edu.tr

PEKER MATBAACILIK ve TİCARET 0.232.483 89 80