

TEMMUZ 2001

CİLT 10

SAYI:3

ISSN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Polinomların Asal Bölenleri

Metehan Aydın

Bikompleks Sayılarla Tanışmak İster misiniz?

Nurhayat İspir

Eisenstein Kriterinin Bir Uygulaması

Ogün Öge

Mikrobilgisayarda Aritmetik (I)

Timur Karaçay

Descartes İşaret Kuralı

İsmail Aslan

Problemler/Çözümler



MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Üçüncü sayımızla yine birlikteyiz. Dergimizin normal süresinde çıkmamasındaki temel sorunumuz mevcut ekonomik krizin yansması ve bize ulaşan makale sayısının azlığı. Yazarlarımız ve okurlarımızdan yazılarını elektronik ortamda bize göndermeye özen göstermelerini birkez daha rica ediyoruz.

Gelecek sayımızı Matematik Eğitimi ve Matematik Felsefesi konularına ayırmak istiyoruz, bu konularda yazılarınız dergimize güç katacaktır. Matematik Dünyasının web sitesine arşivimizdeki mevcut bütün sayıların kapaklarını yerleştirdik. Bu sayıları İstanbuldaki Türk Matematik Derneğinden edinebilirsiniz.

Bu sayımızda TÜBİTAK'dan ödül alan lise öğrencilerimizin projelerine de yer ayırdık, her sayıda bu projelerden birini yayınlamayı düşünüyoruz. MD ile ilgili haberlere (<http://www.tmd.org.tr>), (<http://galois.iyte.edu.tr/mdunyasi>) adreslerinden erişebilirsiniz..

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Polinomların Asal Bölenleri Metehan Aydın	2
Bikompleks Sayılarla Tanışmak İster misiniz? Nurhayat İspir	6
Eisenstein Kriterinin Bir Uygulaması Ogün Öge	10
Mikrobilgisayarda Aritmetik (I) Timur Karaçay	15
Descartes İşaret Kuralı İsmail Aslan	23
Problemler ve Çözümler	28

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık

DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.İ. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2001) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 8.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 6.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.) Parakende satış fiyatı 2.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35435-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987510 ve 4987504; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

POLİNOMLARIN ASAL BÖLENLERİ (*)

Metehan Aydın
Özel Samanyolu Lisesi

Tamsayı katsayılı polinomlarla tamsayılar arasında belirgin bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi kısaca açıklama gerekirse tamsayılarda asallarla, dolayısıyla çarpma işlemiyle ilgili özellikler tamsayı katsayılı polinomlarda indirgenemez polinomlarla ortaya çıkar.

Sözgelimi **Aritmetiğin Temel Teoremi** olarak bilinen bir tamsayının asal sayıların çarpımı olarak tek türlü ifade edilmesi, tamsayı katsayılı polinomlarda farklı bir şekilde yine karşımıza çıkar. Bu benzerliğin oluşmasında polinomun bir fonksiyon olarak sahip olduğu özelliklerin katkısı yoktur. Bu benzerlik tamamiyle cebirseldir.

Yani; $n \geq m$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ve

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

polinomları yerine

$$A = (\dots, 0, 0, \dots, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$$

ve

$$B = (\dots, 0, 0, \dots, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0)$$

dizilerini düşünerek

$$AB = (\dots, 0, 0, \dots, c_{m+n+1}, c_{m+n}, \dots, c_1, c_0)$$

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

şeklinde bir çarpma işlemi ve

$$A + B = (\dots, 0, 0, \dots, 0, a_n + b_n, \dots, a_0 + b_0)$$

$n = m$ için ;

$$A + B = (\dots, 0, 0, \dots, a_n, \dots, a_m + b_m, \dots, a_0 + b_0)$$

$n > m$ için ;

şeklinde bir toplama işlemi tanımlandığında; bu dizilerin oluşturduğu kümenin tüm elemanlarını, cebirsel özelliklerini koruyarak, polinomlar kümesine bire-bir ve örten bir şekilde eşleyebiliriz; yani polinomların çarpma işlemi vasıtasıyla ortaya çıkan özellikleri nedeniyle sayı dizilerinden bir farkı yoktur. Dolayısıyla polinomun bir fonksiyon olarak hangi tamsayı noktasında hangi değerleri alıyor olmasının, polinomların tamsayılarla ilişkilendirilmesi konusunda etkisi yoktur.

Hazırlanan bu projede tamsayı katsayılı polinomların fonksiyon olarak tamsayı noktalarında aldığı değerlerin de, tamsayıların çarpma işlemiyle belirlenen cebirsel özellikleriyle ilişkili olduğu gösterilecektir.

Projenin hazırlanmasına esin kaynağı olan soru şu şekildedir :

SORU: $P(x)$ tamsayı katsayılı sabit olmayan bir polinom olsun. $P(x)$ 'in sonsuz sayıda asal bölene bulunduğunu gösteriniz (Bu soru projenin geri kalanında da sık kullanılacağı için (**) ile ifade edilsin)

YANIT: $P(b) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ olsun. Bezout teoreminden,

$$n \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} | P(p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} \cdot n + b) - P(b)$$

olduğunu ve dolayısıyla

$$p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} | P(p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} \cdot n + b) - P(b)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan da

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} | P(b)$$

ise

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} | P(p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} \cdot n + b)$$

ve

$$P(p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} \cdot n + b) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot x_n$$

olarak yazabiliriz.

Ayrıca x_n ; $p_1, p_2, \dots, p_k$ dan farklı olarak 0 veya ± 1 ise $p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} \cdot n + b$ arttığı için bu durumlarda $P(x)$ polinomu sabit olur. Bu da polinomun verililişiyle çelişir.

Şimdi x_n ; $p_1, p_2, \dots, p_k$ dan birine eşit olduğunda, örneğin genelliği bozmadan, $x_n = p_1$ olarak alalım. Bu durumda $p_1^{\alpha_1+1} | P(p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \dots p_k^{\alpha_k+1} \cdot n + b)$ ve $p_1^{\alpha_1+1} | P(b)$ olur. Bu da $P(b)$ yi kabulümüzle çelişir. O halde $P(x)$ in sonsuz tane farklı asal bölene vardır.

SORU : $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunun her tamsayıdaki değeri bir tamsayının karesine eşitse, her $x \in \mathbb{R}$ için, $P(x) = (dx + e)^2$ sağlanacak biçimde d ve e tamsayılarının varlığını kanıtlayınız.

Yukarıdaki sorunun yanıtını [1]'de bulabilirsiniz. Bu sorunun genel şeklinin ifadesi aşağıda verilmiştir.

SORU: $P(x)$ polinomu eğer her tamsayı x değeri için bir tamsayının m . kuvveti oluyorsa; $P(x)$ in bir rasyonel katsayılı polinomun m . kuvveti olduğunu ispat ediniz.

Bu soruda, polinomun tamsayı noktalarında aldığı değerlerin her zaman tamsayının m . kuvveti olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her n tamsayısı için, $p | P(n)$ ve p asalı için p nin $P(n)$ yi bölen en büyük kuvvetinin m ile bölünüyor olmasıdır. Bu bize, polinomların, bir fonksiyon olarak düşünüldüğünde, asal sayılarla ilişkisini kurmamızı sağlayan ilk soruyu hatırlatır. Şimdi çözümünü başta yaptığımız ilk soruyu kullanarak genel halini çözelim. Öncelikle sorunun yanıtına yardımcı olacak birkaç iddiayı ispatlayalım.

İDDİA 1 : $P(x)$ ve $Q(x)$ aralarında asal tamsayı katsayılı polinomlar olsun. $(P(n), Q(n))$ ni bölmeyen fakat $[P(n), Q(n)]$ i bölen asal sayı bulunacak şekilde sonsuz sayıda n bulunabilir.

İSPAT : $P(x)$ ve $Q(x)$ aralarında asal olduğu için; Euclid Algoritmasından $p(x).P(x) + q(x).Q(x) = m$ olacak şekilde tamsayı katsayılı $p(n)$ ve $q(n)$ polinomları vardır. ($m \in \mathbb{Z} - 0$). Bu ifade de

$(P(n), Q(n)) | m$, yani $(P(n), Q(n))$ nin sonlu sayıda asal böleni vardır, fakat (**) dan dolayı $P(n)$ nin $(n = 1, 2, \dots)$ sonsuz sayıda asal böleni vardır. O halde $P(n)$ i bölen dolayısıyla $[P(n), Q(n)]$ ni bölen asalların bulunmasını sağlayan sonsuz sayıda n vardır.

İDDİA 2 : $P(x)$ indirgenemeyen, tamsayı katsayılı ve sabit olmayan bir polinom olsun. Bu durumda

$$P(n) \equiv 0 \pmod{p}$$

ve

$$P(n) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

olacak şekilde bir p asalının bulunmasını olanaklı kılacak sonsuz tane n sayısı bulunabilir.

İSPAT : $P(x)$ ve $P'(x)$ aralarında asal olmalıdır. Çünkü $P(x)$ indirgenemezdir. (**) dan dolayı $P(n)$ yi bölen sonsuz sayıda asal sayı olduğunu ve "İDDİA 1" den dolayı da bunlardan ancak sonlu tanesinin $(P(n), P'(n))$ ni böldüğünü biliyoruz. Yani $P(n) \equiv P(n+p) \equiv 0 \pmod{p}$ ve $P'(n) \not\equiv 0 \pmod{p}$ olacak şekilde sonsuz sayıda p asalı ve bu p asalına bağlı belirlenebilen n tamsayısı vardır. Şimdi

$$P(n+p) - P(n) \equiv p \cdot P'(n) \pmod{p^2}$$

olduğunu gösterelim. Eğer $P(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ ise

$$P(n+p) - P(n) = a_m((n+p)^m - n^m) + a_{m-1}((n+p)^{m-1} - n^{m-1}) + \dots + a_1((n+p) - n)$$

olur. Diğer yandan

$$(n+p)^k - n^k = \binom{k}{k-1} n^{k-1} p + \binom{k}{k-2} n^{k-2} p^2 + \dots + \binom{k}{1} n p^{k-1} + \binom{k}{0} p^k \equiv p \cdot k \cdot n^{k-1} \pmod{p^2}$$

eşitliğini kullanarak

$$P(n+p) - P(n) = \sum_{k=1}^m a_k((n+p)^k - n^k) \equiv \sum_{k=1}^m p \cdot k \cdot a_k \cdot n^{k-1} \pmod{p^2}$$

denkliğini elde ederiz.

Öte yandan

$$\sum_{k=1}^m a_k \cdot k \cdot n^{k-1} = P'(n)$$

olduğu için

$$P(n+p) - P(n) \equiv p \cdot P'(n) \pmod{p^2}$$

denkliğini ispatlamış oluruz.

O halde $P(n+p)$ ve $P(n)$ aynı anda p^2 ile bölünüyor olamaz; yani p asalı $P(n)$ yi bölecek, $P'(n)$ ni bölmeyecek şekilde seçilirse-böyle sonsuz tane p ve n sayısının bulunabileceğini "İDDİA 1" de gösterdik - ya $P(n)$ ya da $P(n+p)$, p ile bölünür fakat p^2 ile bölünmez.

İDDİA 3 : Tamsayı katsayılı $P(x)$ polinomunu indirgenemez çarpanlarına ayırdığımızı farzedelim. Bu çarpanlardan derecesi en küçük olanın derecesi m olsun. $p^m | P(n)$ ve " p^{m+1} , $P(n)$ yi bölmez" olacak şekilde sonsuz sayıda p asalı ve buna bağlı olarak n bulunabilir.

İSPAT : $P(x) = [R(X)]^m [R_1(x)]^{m_1} \dots [R_k(x)]^{m_k}$ ($m \leq m_1 \leq \dots \leq m_k$) olacak şekilde tamsayı katsayılı $R, R_1, \dots, R_k$ polinomları vardır. R 'lerin tümü indirgenemez olduğundan $(R, R_1 R_2 \dots R_k) = 1$ olan ve "İDDİA 1" den dolayı $p | R(n)$ ve " $p, R' \cdot R_1 \cdot R_2 \dots R_k(n)$ yi bölmez" olan n ve p asalı vardır. "İDDİA 2" den dolayı $R(n)$ ve $R(n+p)$, p ile bölünür fakat p^2 ile bölünemez. O halde $[R(n)]^m$ ya da $[R(n+p)]^m$, p^m ile bölünür fakat p^{m+1} ile bölünemez.

Şimdi genelleştirilmiş sorumuzun yanıtını verebiliriz.

İSPAT : İddianın aksini farzedelim. $P(x)$ bir polinomun m . kuvveti olmadığından $P(x) = [Q(x)]^m \cdot R(x)$ olacak şekilde tamsayı katsayılı Q ve R polinomları vardır. Burada R indirgenemez polinomların çarpımı şeklinde yazılırsa çarpanların kuvvetleri m den küçüktür. Ancak "İDDİA 3" den dolayı $R(n)$, p ile bölünecek fakat p^m ile bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda p, n ikilisi vardır, böyle bir n için $P(n)$ bir sayının m . kuvveti olamaz. Bu da sorunun verililiyle çelişir. O halde genelleştirmemizin doğruluğunu ispatlamış olduk.

Şimdi de olimpiyat çalışmalarımız esnasında [2]'de karşılaştığımız şu soruya bakalım.

SORU : Bir aritmetik dizinin aynı asal bölenlere sahip sonsuz uzunlukta bir alt dizisinin varlığını gösteriniz.

YANIT : Söz konusu diziyi; $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$ şeklinde seçelim . Bu durumda

$x_m = (a, d) \left(\left(\frac{a}{(a, d)} \right)^{m \cdot \phi \left(\frac{d}{(a, d)} \right) + 1} \right)$ dizisi şartı sağlayan bir dizidir. Çünkü

$$\left(\frac{a}{(a, d)} \right)^{m \cdot \phi \left(\frac{d}{(a, d)} \right) + 1} \equiv \frac{a}{(a, d)} \pmod{\frac{d}{(a, d)}}$$

olduğu için $(a, d) \left(\left(\frac{a}{(a, d)} \right)^{m \cdot \phi \left(\frac{d}{(a, d)} \right) + 1} \right) \equiv a \pmod{d}$ dir. Dolayısıyla; $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$ dizisinin bir alt dizisi olan bu dizinin tüm asal bölenleri de aynıdır.

SORU : $P(x)$ tamsayı katsayılı, sabit olmayan bir polinom olsun. $P(0), P(1), \dots, P(n), \dots$ dizisinin elemanları sonlu sayıda asal kullanılarak oluşturulamaz. Acaba bu dizinin sonsuz elemanlı bir alt dizisini sonlu sayıda asal kullanarak oluşturmak mümkün müdür? Bu şartı sağlayan $P(x) = (ax+b)^n$ polinomlarının var olduğunu biliyoruz.

KAYNAKLAR:

- [1] Karakaş, H.İ ve Aliyev, İ: Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, TÜBİTAK
- [2] Sierpinski, A: 250 Problems in Elementary Number Theory
- [3] 1998 Uluslararası Bilim Olimpiyatlarına Hazırlık Kış Kampı Notları

(*) Özendirici olacağı inancıyla okuyucularımıza sunduğumuz bu yazı, TÜBİTAK-BAYG tarafından desteklenmiş bir proje olup, 2001 yılı genç araştırmacılar yarışmasında ödüle layık görülmüştür. Biz de, Metehan AYDIN'ı bu başarılı çalışmasından dolayı kutluyoruz. MD

BİKOMPLEKS SAYILARLA TANIŞMAK İSTER MİSİNİZ?

Nurhayat İspir

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Beşevler-ANKARA

Kompleks sayıların esrarlı varlığı sizi daima etkilemişse bikompleks sayılarda aynı gizemle yaşamınızda bir yer edinecektir. Ben karmaşık sayı yerine literatürde yaygın olan kompleks sayı terimini kullanmayı tercih ediyorum. Çünkü kompleks sayılara karmaşık sayı denmesi başlangıçta pek sevimli gözükmemekte kişi kendini karmakarışık bir sayılar sistemi içinde matematik yapacağı korkusu ile karşı karşıya bulmaktadır. Oysa spor kompleksi veya alış-veriş kompleksi gibi dilimize giren terimler düşünülürse örneğin hiçbir zaman spor karmaşığı biçiminde bir ifade söz konusu değildir. Nasıl ki spor kompleksinden algıladığımız şey belli spor birimlerinin bir arada bulunması ise kompleks sayı da iki reel sayının belli bir kural altında ki birlikteliğidir. Belkide karma sayı, bileşik sayı terimleri kompleks sayıları belirtmek için daha uygundur. İki reel sayıyı o muhteşem i sayısı ile birbirine sarılmış dans eden bir çift gibi düşünün. Bazen bu yavaş, yavaş yapılan tatlı romantik bir danstır ki o sırada problemler kompleks sayılarla hoş bir zariflikle çözümlenir bazen çigan müziğinin hırçın, bazen de bir tangonun meydan okuyan figürleri olur ve en zor problemler mükemmel bir sonla noktalanır. Neyse bizim bu makaledeki amacımız daha farklı, size yeni bir çifti yani bikompleks sayıları tanıtmak istiyorum.

Tarihi 1800'lü yıllara dayanan bikompleks sayılar ilk olarak 1892'de Corrada Serge tarafından tanımlanmıştır. Bikompleks sayılar kuaterniyonlar cebirinin altcebirlerinden birinin elemanları olup, Serge, bikompleks sayıları hatta trikompleks, ..., n -kompleks sayıları tanımladı. Bikompleks sayılar uzayının 4-boyutlu Euclid uzayına gömülebilir olduğunu gösterdi. Bikompleks idempotent elemanları ve bikompleks sayıların idempotent gösterimini elde etti.

1894'de Scheffers tek kompleks değişkenli fonksiyonların bikompleks fonksiyonlara bir genelleştirmesini verdi. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kaydedildiği yıllar 1928- 1940 yıllarıdır. Özellikle 1933'de yazdığı makalede, Ringleb'in bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı vermesi ile bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır. Günümüzde, hiperkompleks sayılar ya da kuaterniyonlar teorisi alanlarında bu sayılarla yapılan çalışmalara rastlamaktadır.

Burada bikompleks sayı kavramını tanıtarak bikompleks sayılar kümesinin özelliklerinden bahsedip, çok kısa olarak da bikompleks değişkenli fonksiyonlara değineceğiz. Daha fazla bilgi ve ayrıntılar içinse metnin sonundaki kaynağı öneriyorum.

Burada reel sayıları C_0 ile kompleks sayılar kümesini C_1 ile bikompleks sayılar uzayında C_2 ile gösteriyoruz. Kompleks sayılar uzayının bir genelleştirmesi olan bikompleks sayılar uzayı

$$z_1 + i_2 z_2, \quad i_2^2 = -1, \quad z_1, z_2 \in C_1 \quad (1)$$

biçimindeki elemanlardan oluşur. Buradaki kompleks sayılar

$$z_1 = x_1 + i_1 x_2, \quad z_2 = x_3 + i_1 x_4, \quad i_1^2 = -1, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in C_0$$

biçiminde olduğundan bikompleks sayılar uzayında bir eleman $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C_0$ olmak üzere

$$x_1 + i_1 x_2 + i_2 x_3 + i_1 i_2 x_4, \quad i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1, \quad i_1 i_2 = i_2 i_1 \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan açık olarak C_2 , C_0^4 uzayına gömülebilir (embedding) olduğu ve (1) ifadesinden dolayı da C_2 nin C_1^2 ye gömülebilir olduğu görülür. Ayrıca C_0 , C_1 in bir alt uzayı C_1 de C_2 nin bir alt uzayıdır.

(2) gösterimi göz önüne alınırsa, C_2 de iki elemanın eşitliği, toplamı ve bir elemanın reel bir skalerle çarpımı C_0^4 de olduğu gibi tanımlanır. Böylece C_2 bir *lineer uzaydır*. Yine C_2 de bir $z_1 + i_2 z_2$ *elemanının normu*

$$\|z_1 + i_2 z_2\| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$$

olup bu norm tanımı ile C_2 bir *normlu lineer uzaydır*. C_0^4 uzayının tam uzay olduğu bilinmektedir. C_2 , C_0^4 e gömülebilir olduğundan ve C_2 deki norm C_0^4 deki normla aynı olduğu için C_2 normlu lineer uzayı da *tamdır*. Sonuç olarak C_2 bir *Banach uzayıdır*. C_2 de iki elemanın çarpımı, $z_1, z_2, w_1, w_2 \in C_1$ ve $i_2^2 = -1$ olmak üzere

$$(z_1 + i_2 z_2)(w_1 + i_2 w_2) = (z_1 w_1 - z_2 w_2) + i_2(z_1 w_2 + z_2 w_1)$$

olarak tanımlanır ve C_2 nin bir *cebiri* olduğu kolayca görülebilir. Hatta normun

$$\|z(z_1 + i_2 z_2)\| = \|z\| \|z_1 + i_2 z_2\|, \quad z \in C_1, \quad z_1 + i_2 z_2 \in C_2$$

ve

$$\|(z_1 + i_2 z_2)(w_1 + i_2 w_2)\| \leq \sqrt{2} \|z_1 + i_2 z_2\| \|w_1 + i_2 w_2\|$$

özelliklerinden dolayı C_2 nin bir *Banach cebiri* olduğunu gösterebiliriz.

C_2 de $z_1 - i_2 z_2$ sayısına $z_1 + i_2 z_2$ bikompleks sayısının *i_2 -eşleniği* denir. Açık olarak $(z_1 + i_2 z_2)(z_1 - i_2 z_2)$ çarpımı bir kompleks sayıdır. Ayrıca $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ sırası ile, z_1 ve z_2 nin C_1 deki eşleniklerini göstermek üzere $z_1 + i_2 z_2$ bikompleks sayısının *$i_1 i_2$ - eşleniği* $\bar{z}_1 - i_2 \bar{z}_2$ biçiminde tanımlanır.

Şimdi C_2 de tanımlayacağımız yeni bir gösterimle hem C_2 de kümelerin bazı özelliklerini hemde fonksiyonlara ilişkin kavramları daha kolay ifade edebileceğiz. Karesi kendisine eşit olan elemanlara idempotent eleman denildiğini biliyoruz. C_2 de tam dört tane idempotent eleman vardır. Bunlar,

$$0, 1, \frac{1 + i_1 i_2}{2}, \frac{1 - i_1 i_2}{2}$$

elemanlarıdır. C_2 deki her $z_1 + i_2 z_2$ elemanı

$$z_1 + i_2 z_2 = (z_1 - i_1 z_2) \left(\frac{1 + i_1 i_2}{2} \right) + (z_1 + i_1 z_2) \left(\frac{1 - i_1 i_2}{2} \right) \quad (3)$$

olarak bir tek biçimde yazılabilir. $z_1 + i_2 z_2$ bikompleks sayısının (3) gösterimine $z_1 + i_2 z_2$ bikompleks sayısının *idempotent gösterimi* denir. Burada kolaylık sağlaması bakımından

$$\left(\frac{1 + i_1 i_2}{2} \right) = e_1, \quad \left(\frac{1 - i_1 i_2}{2} \right) = e_2$$

gösterimlerini kullanıyoruz. Buna göre (3) eşitliği

$$z_1 + i_2 z_2 = (z_1 - i_1 z_2) e_1 + (z_1 + i_1 z_2) e_2$$

olarak yazılır ve $z_1 - i_1 z_2$, $z_1 + i_1 z_2$ elemanlarına $z_1 + i_2 z_2$ nin *idempotent bileşenleri* denir. Burada e_1 ve e_2 idempotent elemanları $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$ özelliklerine sahiptir.

Şimdi bikompleks uzayda açık küme, irtibatlı küme kartezyen çarpım kümesi ve disk kavramlarını tanımlamak istiyoruz. A_1 ve A_2 kompleks uzaylarını

$$A_1 = \{z_1 - i_1 z_2 : z_1, z_2 \in C_1\}$$

ve

$$A_2 = \{z_1 + i_1 z_2 : z_1, z_2 \in C_1\}$$

olarak tanımlayalım. C_1 deki her eleman $z_1 - i_1 z_2$ veya $z_1 + i_1 z_2$ biçiminde gösterilebildiğinden A_1 ve A_2 deki elemanlar C_1 deki elemanlarla aynıdır. Yani A_1 ve A_2 kümeleri C_1 in farklı gösterimleridir. $(z_1 - i_1 z_2)e_1 + (z_1 + i_1 z_2)e_2$ idempotent gösteriminden dolayı C_2 deki her $z_1 + i_2 z_2$ elemanına karşılık A_1 ve A_2 de $(z_1 - i_1 z_2)$ ve $(z_1 + i_1 z_2)$ elemanları ve $A_1 \times A_2$ deki her bir $(z_1 - i_1 z_2, z_1 + i_1 z_2)$ elemanına karşılık da C_2 de bir tek nokta bulunduğu açıktır. Bu durumu dikkate alarak her $z_1 + i_2 z_2 \in C_2$ ve her $z_1 - i_1 z_2 \in C_1$, $z_1 + i_1 z_2 \in C_2$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$h_1 : C_2 \rightarrow A_1, h_1(z_1 + i_2 z_2) = z_1 - i_1 z_2$$

$$h_2 : C_2 \rightarrow A_2, h_2(z_1 + i_2 z_2) = z_1 + i_1 z_2$$

ve

$$H : A_1 \times A_2 \rightarrow C_2, H(z_1 - i_1 z_2, z_1 + i_1 z_2) = (z_1 - i_1 z_2)e_1 + (z_1 + i_1 z_2)e_2.$$

X , C_2 nin bir alt kümesi olsun. $h_1|_X : X \rightarrow A_1$, $h_2|_X : X \rightarrow A_2$ kısıtlama dönüşümleri X 'i, A_1 ve A_2 nin sırası ile

$$X_1 = \{w_1 \in A_1 : w_1 = h_1(z_1 + i_2 z_2), z_1 + i_2 z_2 \in X\}$$

ve

$$X_2 = \{w_2 \in A_2 : w_2 = h_2(z_1 + i_2 z_2), z_1 + i_2 z_2 \in X\}$$

altkümelerine dönüştürür. X ve X_1, X_2 çifti arasındaki bağıntının anlamı bu kısıtlama dönüşümleri yardımı ile gösterilebilir. Şöyle ki;

X , C_2 de bir küme olsun ve h_1, h_2 dönüşümleri de X 'i, sırası ile, A_1 in X_1 ve A_2 in X_2 altkümeleri içine dönüştürsün.

1. Eğer X , C_2 de bir açık küme ise bu durumda X_1 ve X_2 de A_1 ve A_2 de açık kümelerdir.
2. Eğer X , C_2 nin bir konveks kümesi ise, bu durumda X_1 ve X_2 de A_1 ve A_2 de konveks kümelerdir.
3. X , C_2 deki $a + i_2 b$ ye göre yıldızsal (starlike) ise, X_1 ve X_2 sırası ile, $a - i_1 b$ ve $a + i_1 b$ ye göre yıldızsal kümelerdir (G. B. Price, sayfa 38).
4. X , C_2 de bir irtibatlı (connected) küme ise, bu durumda X_1 ve X_2 de A_1 ve A_2 de irtibatlı kümelerdir.

Karşıt olarak, kompleks düzlemin kümelerinin özelliklerinden faydalanarak bikompleks uzayın kümeler ilişkin bazı sonuçları elde etmek için aşağıdaki tanıma gerek vardır.

C_2 de bir X kümesine kartezyen küme denmesi için, gerek ve yeter koşul,

$$X = \{z_1 + i_2 z_2 \in C_2 : z_1 + i_2 z_2 = w_1 e_1 + w_2 e_2, (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\} \quad (4)$$

olacak biçimde A_1 de X_1 ve A_2 de X_2 kümelerinin var olmasıdır. Eğer X , (4) ü sağlıyorsa, bu durumda X 'e X_1 ve X_2 ile belirlenen *kartezyen küme* denir.

Şimdi, X , A_1 deki X_1 ve A_2 deki X_2 ile belirlenen C_2 deki kartezyen küme olsun. Bu durumda

5. Eğer X_1 ve X_2 sırası ile A_1 ve A_2 de açık kümeler ise, X de C_2 de açıktır.

6. X_1 ve X_2 sırası ile A_1 ve A_2 de konveks kümeler ise, X de C_2 de konvektir.
7. Eğer X_1 ve X_2 sırası ile $a - i_1 b$ ve $a + i_1 b$ ye göre yıldızsal kümeler ise, X de $a + i_2 b$ ye göre yıldızsal kümedir.
8. X_1 ve X_2 irtibatlı kümeler ise X de irtibatlı kümedir (G.B.Price, sayfa 40).

C_2 de tanımlanan disk (discus) kavramı özel bir kartezyen kümedir. Şöyleki; C_2 de sabit bir nokta $a : (a_1 + i_1 a_2 + i_2 a_3 + i_1 i_2 a_4)$ olsun. $\alpha = a_1 + i_1 a_2$ ve $\beta = a_3 + i_1 a_4$ diyelim. Buna göre

$$a = a_1 + i_1 a_2 + i_2 a_3 + i_1 i_2 a_4 = \alpha + i_2 \beta$$

dir. r, r_1, r_2 pozitif reel sayılar olmak üzere A_1 ve A_2 de

$$X_1 = \{w_1 \in A_1 : |w_1 - (\alpha - i_1 \beta)| < r_1\}$$

ve

$$X_2 = \{w_2 \in A_1 : |w_2 - (\alpha + i_1 \beta)| < r_2\}$$

kümelerini gözönüne alalım. (4) de X_1 ve X_2 ile belirli X kartezyen kümesine a merkezli r_1, r_2 yarıçaplı açık disk denir ve $D(a; r_1, r_2)$ ile gösterilir. Buna göre

$$D(a; r_1, r_2) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 + i_2 z_2 \in C_2 : z_1 + i_2 z_2 = w_1 e_1 + w_2 e_2, \\ |w_1 - (\alpha - i_1 \beta)| < r_1, \quad |w_2 - (\alpha + i_1 \beta)| < r_2 \end{array} \right\}$$

dir (Kapalı disk tanımında benzer biçimde yapılabileceğine dikkat edilmelidir). $D(a; r_1, r_2)$ deki herhangi iki nokta tamamen bu kümenin içinde kalan bir poligonal eğri ile birleştirilebilir. Yani $D(a; r_1, r_2)$ açık kümesi aynı zamanda irtibatlı bir kümedir. Kompleks düzlemde olduğu gibi bikompleks uzayda da açık ve irtibatlı kümelere bölge (domain) adını veriyoruz. Bölgeler, bikompleks değişkenli analitik fonksiyonların tanım kümesi olmaları açısından önem taşırlar.

Bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlar türevlenebilme, Cauchy-Riemann anlamında analitiklik veya kuvvet serisi açılımları ile tanımlanabilir. Bunun yanı sıra bikompleks değişkenli fonksiyonların varlığını göstermek ve bunların özelliklerini geliştirmek için tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların varlığı kullanılır.

C_2 de bir X bölgesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu $z_1 + i_2 z_2 \in X$ için idempotent gösterim kullanılarak

$$f(z_1 + i_2 z_2) = f_1(z_1 - i_1 z_2)e_1 + f_2(z_1 + i_1 z_2)e_2$$

biçiminde tanımlanır. Burada f_1 ve f_2 sırası ile kompleks düzlemin X_1 ve X_2 bölgeleri üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve $z_1 - i_1 z_2 \in X_1$, $z_1 + i_1 z_2 \in X_2$ dir. Buna göre, X_1 ve X_2 kompleks düzlemde bölgeler ve X bikompleks uzayda bir küme olsun. $z_1 + i_2 z_2$ bikompleks değişkenli $f : X \rightarrow C_2$ fonksiyonunun analitik olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z_1 + i_2 z_2) = f_1(z_1 - i_1 z_2)e_1 + f_2(z_1 + i_1 z_2)e_2$$

olacak biçimde $f_1 : X_1 \rightarrow C_1$ ve $f_2 : X_2 \rightarrow C_2$ analitik fonksiyonlarının bulunmasıdır (G. B. Price, sayfa 89).

KAYNAKÇA:

Price, G. B: An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions, Marcel Dekker, 1990.

EISENSTEİN KRİTERİNİN BİR UYGULAMASI

Ogün ÖGE

Özel Selim Pars Lisesi , Florya/İSTANBUL

Giriş :

Bir polinomun asal olup olmadığını belirlemek önemli bir problemdir. Asallığı belirleyen kriterlerden biri de Eisenstein kriteridir. Bu yazıda Eisenstein Asallık kriterinin doğrudan uygulanamadığı 2. ve 3. dereceden polinomlar ele alınmış , $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $P(x+n)$ ötelemesi yapılmadan bu polinomların asal olduğu gösterilmiştir ve $P(x+n)$ ötelemesi yapılmadan polinomların asallığı için bir yeter koşul verilmiştir.

$\mathbb{Z}[x]$ üzerinde tanımlı $P(x)$ polinomların asal olduğunu belirlemek için, kullanılan Eisenstein Asallık kriterine göre

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

ve bir p asal sayısı için ; $p \mid a_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) , $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$ ise $P(x)$ asaldır[1].

Örneğin bu kritere göre $P(x) = x^3 - 2$ ($p = 2$) polinomu, $\mathbb{Z}[x]$ üzerinde asaldır. Diğer yandan bu asallık kriteri bazı polinomlar için kullanılamaz. Bu kriter, örneğin, $P(x) = x^2 + x + 1$ polinomu için sonuç vermez. Fakat bir $n \in \mathbb{Z}$ için , $P(x+n)$ asal ise $P(x)$ de asaldir ve uygun bir n için bu kriter $P(x+n)$ 'e uygulanabilir. Bu projede bir $P(x)$ polinomu verildiğinde (uygun n 'i aramadan) $P(x)$ polinomunun asallığı incelenmiştir.

Yöntem :

Şimdi bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu verilsin. Eğer $P(x) = A(x).B(x)$, burada (der $A(x) \geq 1$, der $B(x) \geq 1$, $A(x), B(x) \in \mathbb{Z}[x]$), şeklinde bir yazılış mümkün değilse $P(x)$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ üzerinde asaldir denir. Bu çalışmada asal olan bazı polinomları belirleyeceğiz.

Tanım :

Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_i \in \mathbb{Z}$) polinomunda $(a_n, \dots, a_1, a_0) = 1$ ise $P(x)$ 'e primitif polinom denir. Bu çalışmada ele alacağımız polinomlar primitif polinomlar olacaktır.

1. $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomu

$P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a, b, c) = 1$ polinomunu ele alalım. Eisenstein kriterinin bu polinoma uygulanamadığını varsayalım. Uygun bir n için $P(x+n)$ polinomuna Eisenstein kriterinin uygulanıp uygulanmayacağını araştıralım.

$P(x+n) = a(x+n)^2 + b(x+n) + c = ax^2 + (2an+b)x + an^2 + bn + c$ elde edilir. n 'i öyle seçelimki p uygun bir asal sayı olmak üzere ;

$$p \nmid a , p^2 \nmid an^2 + bn + c , p \mid 2an+b , p \mid an^2 + bn + c$$

(1)

olsun.

$$\left. \begin{array}{l} p \mid 2an+b \Rightarrow p \mid 4a^2n^2 + 4abn + b^2 \\ p \mid an^2 + bn + c \Rightarrow p \mid 4a^2n^2 + 4abn + 4ac \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid b^2 - 4ac \text{ elde edilir.}$$

O halde aranılan p , $p \mid b^2 - 4ac$ koşulunu gerçekler. Önce şunu görelim: $ax^2 + bx + c$ asal ise $cx^2 + bx + a$ da asaldır ve tersi de doğrudur. Çünkü ; $cx^2 + bx + a = (ex+f)(gx+h)$ olsa buradan $ax^2 + bx + c = (fx+e)(hx+g)$ elde edilir.

Şimdi bir p_1 asal sayısı için $p_1 \mid b^2 - 4ac$ ve $p_1^2 \nmid b^2 - 4ac$ olduğunu kabul edelim.

Buna göre $p_1 \mid b^2 - 4ac$ ise $p_1 \nmid a$ kabul edebiliriz. Çünkü $p_1 \mid a$ ise bu durumda $cx^2 + bx + a$ polinomunu alırsız ve burada $p_1 \nmid c$ olur. (Çünkü $p_1 \mid c$ olsaydı $p_1 \mid b^2 - 4ac$ ve $p_1 \mid c$ den $p_1 \mid b$ çıkardı ve böylece $p_1 \mid a$, $p_1 \mid b$, $p_1 \mid c$ elde edilirdi ki bu $ax^2 + bx + c$ nin primitif oluşu ile çelişirdi.)

Şimdi bu p_1 asal sayısının (1) deki bağıntıları gerçeklediğini gösterelim.

- a) $p_1 = 2$ *hali* : $p_1 = 2$ ise $2 \mid b^2 - 4ac$ den $2 \mid b$ olup $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $2 \mid 2an + b$ bulunur. c tek ise n 'i tek seçerek, c çift ise n 'i çift seçerek $2 \mid an^2 + bn + c$ bulunur.

Şimdi $2^2 \nmid an^2 + bn + c$ olduğunu gösterelim. $2^2 \mid an^2 + bn + c$ olsa $2 \mid 2an + b$ den

$$\left. \begin{array}{l} 2^2 \mid 4a^2n^2 + 4abn + 4ac \\ 2^2 \mid (2an+b)^2 = 4a^2n^2 + 4abn + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^2 \mid b^2 - 4ac \text{ bulunurdu ki bu } p_1 \text{ in seçimi ile çelişir.}$$

- b) $p_1 > 2$ olsun. $p_1 \nmid a$ dan $2an+b \equiv 0 \pmod{p_1}$ kongrüansının bir $n = n_0$ çözümü vardır.

$$\begin{aligned} p_1 \mid (2an_0+b)^2 &\Rightarrow p_1 \mid 4a^2n_0^2 + 4abn_0 + b^2 \\ &\Rightarrow p_1 \mid b^2 - 4ac \end{aligned} \quad \text{ve buradan}$$

$$p_1 \mid 4a^2n_0^2 + 4an_0b + 4ac \Rightarrow p_1 \mid 4a(an_0^2 + bn_0 + c) \text{ olup } p_1 \nmid 4a \text{ dan } p_1 \mid an_0^2 + bn_0 + c \text{ elde edilir.}$$

Şimdide $p_1^2 \nmid an_0^2 + bn_0 + c$ olduğunu gösterelim.

Eğer $p_1^2 \mid an_0^2 + bn_0 + c$ olsa bu ve $p_1^2 \mid (2an_0+b)^2$ den $p_1^2 \mid 4a(an_0^2 + bn_0 + c) - (4a^2n_0^2 + 4an_0b + b^2)$
 $\Rightarrow p_1^2 \mid b^2 - 4ac$ elde edilir ki bu p_1 'in seçimi ile çelişir. Böylece şu sonucu buluruz

Sonuç 1.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ primitif polinomu verilsin. Eğer bir p asal sayısı için $p \mid b^2 - 4ac$ ve $p^2 \nmid b^2 - 4ac$ ise $P(x)$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ üzerinde asaldır.

Not : $P(x) = 0$ denkleminin kökleri $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ olduğundan $b^2 - 4ac = -p^2 < 0$ (p asal)

ise $P(x)$ polinomu asaldır. Bu durumda bu polinomun asallığını Eisenstein kriteri ile elde edemeyiz. Buna sebep Eisenstein kriterindeki şartların bir gerek şart olmayışıdır.

1. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomu

Bu polinomun asallığını direkt olarak Eisenstein kriteri ile test edilmediğini kabul edelim ve $P(x+n)$ polinomunu oluşturalım.

$$P(x+n) = ax^3 + (3an+bx^2 + (3an^2+2bn+c)x + an^3 + bn^2 + cn + d$$

olup bir p asal sayısı için (ve uygun bir n için)

$$p \mid 3an + b = A, \quad p \mid 3an^2 + 2bn + c = B \quad \text{ve} \quad p \mid an^3 + bn^2 + cn + d = C \quad (2)$$

olduğunu kabul edelim.

$p \mid A$ ve $p \mid B \Rightarrow p \mid nA - B \Rightarrow p \mid bn + c$ ve bunu $p \mid A$ ile kullanarak $p \mid 3a(bn+c) - Ab \Rightarrow p \mid b^2 - 3ac$ elde edilir. Yine ;

$$p \mid 3C, \quad p \mid B \Rightarrow p \mid 3C - Bn \Rightarrow p \mid bn^2 + 2cn + 3d \quad \text{olup bunu } p \mid B \text{ ile tekrar kullanarak}$$

$$p \mid 3a(bn^2 + 2cn + 3d) - bB \Rightarrow p \mid (6ac - 2b^2)n + 9ad - bc \quad \text{elde edilir.}$$

Bunu $p \mid A$ ile tekrar kullanırsak ; $p \mid 27a^2d - 9abc + 2b^3$ bulunur. Yani aranan p asal sayısı

$$p \mid (b^2 - 3ac, 27a^2d - 9abc + 2b^3) \quad (3)$$

koşulunu gerçekler.

1. hal: (3) bağıntısını sağlayan tek asal sayı 3 olsun. Eğer $3 \nmid a$ ise kriter uygulanamaz. $3 \nmid a$ olduğunu kabul edelim. $3 \mid b^2 - 3ac$ den $3 \mid b$ bulunur. Bunu $p \mid B$ de kullanırsak $3 \mid c$ elde edilir. O halde $3 \mid c$ ise kriter uygulanamaz. $3 \mid c$ ise bunu $3 \mid C$ de kullanarak $3 \mid an^3 + d$ bulunur. Burada şu halleri incelemeliyiz.

a) $d \equiv 0 \pmod{3}$ hali

Bu durumda n sayısını $n \equiv 0 \pmod{3}$ olacak şekilde alırsak $3 \mid C$ olur. O halde $9 \nmid d$ ise $P(x)$ asaldır. $9 \mid d$ ise kriter uygulanamaz.

b) $d \equiv 1 \pmod{3}$ hali

Eğer $a \equiv 1 \pmod{3}$ ise n'i $n \equiv 2 \pmod{3}$ olarak alırsak $3 \mid C$ olur. Eğer $9 \nmid 8a + d$ ise $P(x)$ asaldır. $9 \mid 8a + d$ ise kriter sonuç vermez. $a \equiv 2 \pmod{3}$ durumunda n sayısını $n \equiv 1 \pmod{3}$ olacak şekilde seçersek $3 \mid C$ bulunur. Eğer bu durumda $9 \nmid a + d$ ise $P(x)$ asaldır. $9 \mid a + d$ ise kriter yine uygulanamaz.

c) $d \equiv 2 \pmod{3}$ hali

$a \equiv 1 \pmod{3}$ ise n 'i $n \equiv 1 \pmod{3}$ olarak alırsak $3|C$ olur. Eğer $9 \nmid a+d$ ise

($9 \nmid c^2$ olacağından) kriter uygulanamaz. $9 \nmid a+d$ ise ($9 \nmid c$ olacağından) $P(x)$ asaldir. Eğer

$a \equiv 2 \pmod{3}$ ise n 'i $n \equiv 2 \pmod{3}$ olarak seçersek $3|C$ olur. Eğer $9 \nmid 8a+d$ ise $9 \nmid c^2$

olacağından $P(x)$ asaldir. $9 \nmid c$ ise Eisenstein kriteri yine uygulanamaz.

2. hal: (3) bağıntısı $p \neq 3$ için sağlansın. Eğer (3)'ü sağlayan her p asal sayısı için $p \nmid a$ ise kriter

uygulanamaz. $p \nmid a$ olsun. n_0 sayısını $3an_0 + b \equiv 0 \pmod{p}$ olacak şekilde seçelim.

(($3a, p$) = 1 olduğundan bu mümkündür.)

$$\left. \begin{array}{l} p|3an_0+b \Rightarrow p|3abn_0+b^2 \\ p|b^2-3ac \end{array} \right\} \Rightarrow p|3abn_0+3ac$$

$$\Rightarrow p|3a(bn_0+c) \Rightarrow p|bn_0+c$$

bulunur.

Son olarak ;

$$p|bn_0+c \text{ ve } p|3an_0^2+bn_0 \text{ dan } p|B$$

elde edilir.

Benzer şekilde $p|A$, $p|B$ ve $p|27a^2d-9abc+2b^3$ kullanılarak $p|C$ yani $p|P(n_0)$ elde edilir. Diğer yandan n_0 sayısı $3an_0+b \equiv 0 \pmod{p}$ 'yi gerçeklersek $3an+b \equiv 0 \pmod{p}$ 'yi gerçekleyen tüm n 'ler $n=kn_0$ formundadır. $P(x+n_0)$ yerine $P(x+kn_0)$ ötelemesi de yapılsa yine $p|B$ ve $p|C$ bulunur. Bu son öteleme için ne zaman $p^2|C$ olduğunu araştırmalıyız.

$$C \equiv P(n) \equiv 0 \pmod{p^2} \Rightarrow P(kn_0) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$a(kn_0)^3 + b(kn_0)^2 + c(kn_0) + d \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$\text{Yani; } kn_0(3an_0^2 + 2bn_0 + c) + P(n_0) \equiv 0 \pmod{p^2} \text{ ve sonuç olarak}$$

$$kpB + P(n_0) \equiv 0 \pmod{p^2} \text{ olup } B \equiv 0 \pmod{p} \text{ den dolayı } P(n_0) \equiv 0 \pmod{p^2} \text{ elde edilir.}$$

O halde şu teoremi elde ederiz.

Teorem . $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ primitif polinomu verilsin. Bir p asal sayısı için

$$(p, 3a) = 1 \text{ olup } p \nmid (b^2 - 3ac, 27a^2d - 9abc + 2b^3) \text{ ve}$$

$$3an_0 + b \equiv 0 \pmod{p} \text{ olsun. Eğer } P(n_0) \not\equiv 0 \pmod{p^2} \text{ ise } P(x) \text{ polinomu } \mathbb{Z}[x] \text{ üzerinde asaldir.}$$

Uygulama : $P(x) = 2x^3 + 23x^2 + 74x + 54$ polinomunu alalım.

$$b^2 - 3ac = 23^2 - 3 \cdot 2 \cdot 74 = 85$$

$$27a^2d - 9abc + 2b^3 = 27 \cdot 4 \cdot 54 - 9 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 74 + 2 \cdot 23^3 = -470 \quad \text{olup,}$$

$p = 5$ alabiliriz.

$$3 \cdot 2n_0 + 23 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n_0 \equiv -23 \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{olup } n_0 = 2 \text{ için}$$

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 + 23 \cdot 2^2 + 74 \cdot 2 + 54 \not\equiv 0 \pmod{5}$$

olduğundan $P(x)$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ üzerinde asaldır.

Sonuç ve Tartışma :

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$) polinomu verilsin. Verilen p asal sayısı için $(p, 3a) = 1$ ve

$p \mid (b^2 - 3ac, 27a^2d - 9abc + 2b^3)$ olsun. Eğer $3an_0 + b \equiv 0 \pmod{p}$ ve $P(n_0) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ ise $P(x)$

polinomu $\mathbb{Z}[x]$ üzerinde asaldır. Bunun için 2. ve 3. dereceden primitif polinomlar, Eisenstein

kriteri aracılığıyla asallığı incelenerek konu ile bağlantılı sorulara çözümler getirmede

kullanılabilirliği ortaya konmuştur. Hemen hemen tüm elemanter sayılar teorisi kitaplarında Eisenstein

kriteri verildikten sonra bazı polinomların asallığı $P(x+n)$ ötelemesi ile gösterilmiş. Fakat hangi “n”

için $P(x+n)$ ötelemesinin sonuç vereceği hakkında bir bilgi verilmemiştir. Biz bu çalışmada öteleme

yapmadan $P(x)$ polinomlarının asal olması için bir yeter koşul veriyoruz. Burada kullandığımız

yöntem daha yüksek dereceli asal polinomlar için uygulanabilir ve polinomların asal olması için bir

yeter şart polinomların katsayıları cinsinden verilebilir.

Kaynakça:

Landau, E: Elementary Number Theory, New York, 1958

Matematiksel buluşun itici gücü mantık değil hayal gücüdür.

Augustus de Morgan

Bir matematik problemine dalıp gitmekten daha saf bir zihinsel mutluluk yoktur.

Anonim

MİKROBİLGİSAYARDA ARİTMETİK (1)

Timur Karaçay

Başkent Üniversitesi, ANKARA

SAYITLAMA DİZGELERİ

Sayıları göstermek (temsil etmek) için tarih boyunca türlü simgeler kullanılmıştır. Konumuz bu tarihi gelişimi incelemek değildir. Kullanılan sayıtlama dizgesi, aritmetik işlemleri çok kolaylaştırabilir ya da zorlaştırabilir. Örneğin, Roma sayaklarıyla çarpma ve bölme işlemlerini yapmayı deneyiniz. Roma sayıtlama dizgesinin aritmetik işlemler yapmaya hiç bir yarar sağlamadığını göreceksiniz. Sayma ve aritmetik işlemler yapma amacıyla insanoğlu uzun zaman içinde büyük uğraş vermiştir. Bu uzun sürecin sonunda, aritmetik işlemleri kolay yapmamızı sağlayan 10 tabanlı sayıtlama dizgesi küresel yaygınlık kazanmıştır. Kuramsal açıdan, herhangi bir r ($r > 0$) tamsayısını taban kabul eden sayıtlama dizgesi kurulabilir.

r tabanlı dizgede bir gerçel sayının temsili, onlu dizgedeki gibidir. Örneğin, $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . b_1 b_2 \dots b_m)_r$,

simgesi şu sayıyı temsil eder: $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 + b_1 r^{-1} + b_2 r^{-2} + \dots + b_m r^{-m}$

Buna, verilen sayının r tabanına göre açılımı diyeceğiz. Bazı sayılarda b_m lerin sayısı sayılabilir sonsuz olabilir.

r tabanlı sayıtlama dizgesi içinde aritmetik işlemler, 10 tabanlı dizgede olduğu gibi kolayca yapılabilir. Herhangi bir r tabanlı dizgede yazılan sayı, istendiğinde başka bir b tabanlı dizge içindeki temsiline dönüştürülebilir. Dolayısıyla, kuramsal açıdan, sayıları hangi dizgede temsil edersek edelim ve hangi dizge içinde aritmetik işlemler yaparsak yapalım, sonuç aynı olacaktır.

Ancak, kuramsal açıdan birbirlerine denk olmakla birlikte, pratikte bazı işler için özel sayıtlama dizgelerini kullanmak daha uygundur.

10 Tabanlı (Onlu, decimal) Sayıtlama Dizgesi

Günlük yaşamda çoğunlukla sayıları 10 tabanı ile temsil ederiz. İnsanoğlu, parmak sayarak aritmetik yaptığı için, Onlu (10 tabanlı) Sayıtlama Dizgesini kullanmaya alışmıştır. Bu dizgenin sayakları (digit) 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 dur.

Örnek: 2718 sayısını düşünelim. Bu bir simgedir ve aşağıdaki toplamı (10 tabanına göre açılımını) temsil eder:

$$2718 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 2000 + 700 + 10 + 8.$$

Başka bir deyişle, 2718 sayısı tabloda kendi sağındaki hanelerin toplamına eşittir.

Örnek: 0.6875 sayısını onlu sayıtlama sistemine göre yazarken, bu sayının içinde 10^{-n} lerden kaç tane olduğunu buluruz. Bunun için, verilen sayıda önce kaç tane $1/10$ olduğunu bulur onu sayıdan çıkarırız. Sonra geriye kalan kısımda kaç tane $1/100$ olduğunu bulur, çıkarırız. Sonra geriye kalanda kaç tane $1/1000$ olduğunu bulur, çıkarırız. Bu işleme geriye kalan sayı 0 olana kadar devam ederiz. Bu işlem, sayının 10^{-n} lerin bazı katlarının toplamı olarak yazılması demektir.

$$\begin{aligned} 0.6875 &= 6 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} \\ &= 6/10^1 + 8/10^2 + 7/10^3 + 5/10^4 \\ &= 6/10 + 8/100 + 7/1000 + 5/10000 \end{aligned}$$

olur.

Örnek: 0.317 sayısının 10 lu sayıtlama dizgesindeki açılımını yazınız.

$$\begin{aligned}
 0.317 &= 3 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3} \\
 &= 3/10^1 + 1/10^2 + 7/10^3 \\
 &= 3/10 + 1/100 + 7/1000
 \end{aligned}$$

Örnek: 2317.52 sayısının 10 lu sayıtlama dizgesindeki açılımını yazınız.

$$\begin{aligned}
 2317.52 &= 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} \\
 &= 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 1 \times 10 + 7 \times 1 + 5/10 + 2/100
 \end{aligned}$$

2 Tabanlı (2 li, binary) Sayıtlama Dizgesi

Sayısal (digital) bilgisayarlar *İkili Sayıtlama Dizgesini* kullanır. İkili Sayıtlama Dizgesi 2 tabanlı dizgedir; yalnızca 0 ile 1 sayaklarını kullanır. Bu dizgedeki hanelere İngilizce'de *bit* denilir. Bu sözcük, **Binary digit** deyiminden türetilmiştir. Bilgisayarın elektronik devrelerinde 0 bit'i alçak voltaj, 1 bit'i ise yüksek voltaj ile temsil edilir.

İkili Sayıtlama Dizgesi'nin yapısı onlu sayıtlama dizgesi gibidir; yani sayılar bitlerin yer aldığı haneye göre değer alır. Bunu daha iyi anlamak için, herhangi bir sayının onlu sayıtlama dizgesindeki yazılışını anımsayalım.

10 un kuvvetleri	10^3	10^2	10^1	10^0
Hane değeri	1000	100	10	1
2718	2×10^3	7×10^2	1×10^1	8×10^0
2718	2000	700	10	8

olur. Aynı işi, 10 nun kuvvetleri yerine, 2 nin kuvvetlerini kullanarak yapalım.

2^k	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2718	1×2^{11}	0×2^{10}	1×2^9	0×2^8	1×2^7	0×2^6	0×2^5	1×2^4	1×2^3	1×2^2	1×2^1	0×2^0
2718	2048	0	512	0	128	0	0	16	8	4	2	0

O halde, 2718 sayısının 2 tabanına göre açılımını yazarsak

$$\begin{aligned}
 (101010011110)_2 &= 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
 &= 2048 + 512 + 128 + 16 + 8 + 4 + 2 \\
 &= 2718_{10}
 \end{aligned}$$

olacaktır. Görüldüğü gibi, onlu sayıtlama dizgesinde yapıldığı gibi 2 li sayıtlama dizgesinde de sayakların basamak değerleri (place value) vardır. Bunları sağdan sola doğru sıralarsak

1 ler basamağı,

2 ler basamağı,

4 ler basamağı,

8 ler basamağı,

16 lar basamağı,

32 ler basamağı,

64 ler basamağı,

128 ler basamağı,

256 lar basamağı,

512 ler basamağı,

1024 ler basamağı,

2048 ler basamağı,

...

olacaktır. Bu yöntemle bütün doğal sayıları yazabileceğimiz açıktır.

Örnek: 1101_2 sayısının açılımını yazınız.

$$\begin{aligned} 1101_2 &= 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 \\ &= 1x8 + 1x4 + 0x2 + 1x1 \\ &= 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 13_{10} \end{aligned}$$

Kesirli sayıların ikili sayıtlama dizgesindeki temsillerini açıklayabilmek için, önce $(0,1)$ aralığındaki sayıları 10-lu sayıtlama dizgesinde nasıl yazdığımızı anımsayalım.

Örnek: 0.0101_2 sayısının açılımını yazınız.

$$\begin{aligned} 0.0101_2 &= 0x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0x2^{-3} + 1x2^{-4} \\ &= 0/2 + 1/4 + 0/8 + 1/16 \\ &= (5/16)_{10} \end{aligned}$$

Bir tabandan ötekine dönüşüm

Bir tabana göre yazılmış bir sayıyı başka bir tabana göre yazmak için, sayının istenen tabana göre açılımını yazmak yetecektir. Bunu bazı örneklerle açıklayalım.

A. Onlu dizgeden ikili dizgeye dönüşüm

10 tabanına göre yazılmış bir sayıyı 2 tabanına dönüştürmek için, verilen sayıda 2 nin hangi kuvvetlerinin kaçar tane bulunduğunu saptayıp, 2 nin artan kuvvetlerine göre açılımı yazmak yetecektir.

a. Verilen sayı tamsayı ise

Sayıyı 2 ye bölüp kalanı saptamak ve sonra bölüm için aynı işi yaparak bölüm 0 oluncaya kadar bu işe devam etmek gerekir. Birinci adımda kalan 1 ler hanesine, ikinci adımdaki kalan 2 ler hanesine, üçüncü adımdaki kalan 4 ler hanesine vb. yazılır.

Örnek: 71_{10} sayısını 2 tabanına göre yazınız.

2 ile bölme işlemi	Kalan
$71 : 2 = 35$	1
$35 : 2 = 17$	1
$17 : 2 = 8$	1
$8 : 2 = 4$	0
$4 : 2 = 2$	0
$2 : 2 = 1$	0
$1 : 2 = 0$	1

Ohalde $71_{10} = (1000111)_2$ dir.

b. Verilen sayı kesirli sayı ise

Kesirli sayıları yazmak için $(0,1)$ aralığındaki sayıları 10-lu sayıtlama dizgesinde nasıl yazdığımızı anımsayalım ve ikili dizgede benzer usavurmaya bakalım.

Sayıyı 2 ile çarpar, çarpımın tam kısmını ayırırız. Kalan kesri tekrar 2 ile çarpar, çarpımın tam kısmını ayırırız. Aynı işleme, kesirli kısım 0 oluncaya kadar ya da yeterince ardışık işlem yaparak istenen yaklaşık sayı bulununcaya kadar devam etmek gerekir. Birinci adımdaki tam kısım $\frac{1}{2}$ ler hanesine, ikinci adımdaki tam kısım $\frac{1}{4}$ ler hanesine, üçüncü adımdaki tam kısım $\frac{1}{8}$ ler hanesine vb. yazılır.

1.Durum: Kesirli sayı 2 nin negatif kuvvetlerinin sonlu toplamı olarak yazılabiliyorsa.

2 li sayıtlama dizgesinde de aynı yöntem kullanılır. Yukarıdaki 0.6875 sayısını 2 tabanına göre yazmak için, bu sayı içinde kaç tane $1/2$, kaç tane $1/2^2$, kaç tane $1/2^3$, kaç tane $1/2^4$, kaç tane $1/2^5$...vb olduğunu bulmalıyız.

$$\begin{aligned} 0.6875 &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\ &= 1 \times (1/2) + 0 \times (1/4) + 1 \times (1/8) + 1 \times (1/16) \\ &= (1011)_2 \end{aligned}$$

2.Durum: Kesirli sayı 2 nin negatif kuvvetlerinin sonlu toplamı olarak yazılamıyorsa (sonsuz toplam).

Örnek: $(0.317)_{10}$ sayısını 2 tabanına göre yazınız.

2 ile çarpma işlemi

$$0.317 \times 2 = 0.634$$

$$0.634 \times 2 = 1.268$$

$$0.268 \times 2 = 0.536$$

$$0.536 \times 2 = 1.072$$

$$0.072 \times 2 = 0.144$$

$$0.144 \times 2 = 0.288$$

$$0.288 \times 2 = 0.576$$

$$0.576 \times 2 = 1.152$$

$$0.152 \times 2 = 0.304$$

...

Tamsayı kısmı

0

1

0

0

0

0

0

1

0

Ohalde $(0.317)_{10} \cong (0.010100010...)_{2}$ dir.

Bu kez, sayıyı 2^{-n} nin katlarının sonlu toplamı şeklinde yazamadığımızı görüyoruz. Bu, 10 lu dizgede sonsuz ondalıklı temsillere benzer. Bu durumda, yeterince basamak yazarak, asıl sayıya istediğimiz kadar yakın 2 li bir temsil elde edebiliriz.

Örnek: $(0.7215)_{10}$ sayısını 2 tabanına göre yazınız.

2 ile çarpma işlemi

$$0.7215 \times 2 = 1.4430$$

$$0.4430 \times 2 = 0.8860$$

$$0.8860 \times 2 = 1.7720$$

$$0.7720 \times 2 = 1.5440$$

$$0.5440 \times 2 = 1.0880$$

$$0.0880 \times 2 = 0.1760$$

$$0.1760 \times 2 = 1.3520$$

$$0.3520 \times 2 = 0.7040$$

$$0.7040 \times 2 = 1.4080$$

Tamsayı kısmı

1

0

1

1

1

0

0

0

1

Ohalde $(0.7215)_{10} \cong (0.101110001)_{2}$ dir.

Sayının tam ve kesirli kısımları varsa, tam ve kesirli kısımlar ayrı ayrı dönüştürülür ve sonra ikisi birleştirilir.

Örnek: $(41.6875)_{10}$ sayısını 2 tabanına göre yazınız.

2 ile bölme işlemi	Kalan
$41 : 2 = 20$	1
$20 : 2 = 10$	0
$10 : 2 = 5$	0
$5 : 2 = 2$	1
$2 : 2 = 1$	0
$1 : 2 = 0$	1

Ohalde $41_{10} = (101001)_2$ dir. Öte yandan,

2 ile çarpma işlemi	Tamsayı kısmı
$0.6875 \times 2 = 1.3750$	1
$0.3750 \times 2 = 0.7500$	0
$0.7500 \times 2 = 1.5000$	1
$0.5000 \times 2 = 1.0000$	1

Ohalde $(41.7215)_{10} \cong (101001.1011)_2$ dir.

İkiliden onluya dönüşüm

2 tabanına göre yazılmış bir sayıyı 10 tabanına göre yazmak için, 2 tabanına göre açılımını yazar ve ortaya çıkan terimleri toplarız.

$$\begin{aligned} \text{Örnek: } (1010.011)_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} \\ &= (10.375)_{10} \end{aligned}$$

Sekizliden onluya dönüşüm

$$\begin{aligned} \text{Örnek: } (630.4)_8 &= 6 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^0 + 0 \times 8^{-1} + 1 \times 8^{-2} + 1 \times 8^{-3} \\ &= 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} \\ &= (10.375)_{10} \end{aligned}$$

Onlu dizgeden sekizli dizgeye dönüşüm

Örnek: $(153)_{10}$ sayısını sekizli dizgeye döndürünüz.

8 ile bölme işlemi	Kalan
$153 : 8 = 19$	1
$19 : 8 = 2$	3
$2 : 8 = 0$	2

Ohalde

$$(153)_{10} = (231)_8$$

dir.

Örnek: $(0.513)_{10}$ sayısını sekizli dizgeye döndürünüz.

8 ile çarpma işlemi

$$0.513 \times 8 = 4.104$$

$$0.104 \times 8 = 0.832$$

$$0.832 \times 8 = 6.656$$

$$0.656 \times 8 = 5.248$$

$$0.248 \times 8 = 1.984$$

$$0.984 \times 8 = 7.782$$

...

Tamsayı kısmı

4

0

6

5

1

7

...

Ohalde $(0.512)_{10} \cong (0.406517...)_{8}$ dir. Bu sonuç virgülden sonraki 7 basamağa kadar duyarlıdır. İşlem yürütülerek istenen ince duyarlılık sağlanabilir.

r tabanlı gösterimden onlu gösterime dönüşüm

Verilen sayının r tabanına göre açılımı yazılır ve ortaya çıkan terimler toplanır.

İkili (binary) Aritmetik

İkili sayıtlama dizgesinde dört işlem, aynen onlu dizgede olduğu gibi yapılır.

Örnek:

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ + \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ + \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ + \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 00111011 \\ 00101010 \\ + \\ \hline 01100101 \end{array} \quad \begin{array}{r} 59 \\ 42 \\ + \\ \hline 101 \end{array}$$

Örnek :

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ - \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ - \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ - \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ - \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01010101 \\ 00111001 \\ - \\ \hline 00011100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ 57 \\ - \\ \hline 28 \end{array}$$

Örnek:

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ \times \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \times \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ \times \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \times \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1101 \\ 101 \\ \times \\ \hline 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ + \\ \hline 1000001 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 5 \\ \times \\ \hline 65 \end{array}$$

Örnek: Aşağıda ikili sayıtlama dizgesinde 110111 sayısının 101 sayısına bölümü yapılmıştır. Yapılan işlemin onlu sayıtlama dizgesindeki benzer olduğunu görünüz.

$$\begin{array}{r}
 110111 \\
 101 \\
 \hline
 00111 \\
 101 \\
 \hline
 0101 \\
 101 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Bilgisayarda Çıkarma İşlemi

İkili sayıtlama dizgesinde elle yapılan dört işlemi onlu dizgedekine benzer olarak yapabiliyoruz. Bilgisayardaki bütün işlemler ikili sayıtlama sisteminde gerçekleşir. Toplama işlemi, yukarıda elle yaptığımız esasa dayanır. Ancak, mikrobilgisayarlarda çıkarma işlemi yapacak devre yoktur; devreler tümleme (complement, negation) ve artırma (increment, 1 ekleme) işlemlerini yapabilir. Dolayısıyla çıkarma işlemi veya daha genel olarak, işaretli sayılarda aritmetik işlemlerini yaparken, negatif sayıların ikilere tümleyenlerini (twos complement) kullanırlar. Bunun yanında, çoğu mikrobilgisayarlarda dört işlemi hızlı yapacak özel devreler vardır.

Çıkarma işleminin tümleme ve toplama işlemleri ile nasıl yapıldığını daha iyi anlamak için, bunu önce alışık olduğumuz onlu sayıtlama dizgesinde deneyelim. 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sayılarından herhangi birisinin 10 a (tabana) tümleyeni, 10 ile arasındaki farktır. Benzer şekilde, 9 a tümleyenleri ise, 9 ile aralarındaki farktır. Örneğin 7 sayısının 10 a tümleyeni $(10-7=3)$, ve 9a tümleyeni ise $(9-7=2)$ olur. Şimdi aşağıdaki örnekleri düşünelim:

Örnek:

$$\begin{aligned}
 7 - 4 &= 7 + 10 - 4 - 10 \\
 &= 7 + (10 - 4) - 10 \\
 &= 7 + 6 - 10 \\
 &= 13 - 10
 \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Son satırdaki çıkarma işlemi yapmak için, 13 sayısının en solundaki hanesinin atılmasının yeterli olduğunu düşünmek yetecektir.

Örnek:

$$\begin{aligned}
 67 - 15 &= 67 + 100 - 15 - 100 \\
 &= 67 + (100 - 15) - 100 \\
 &= 67 + 85 - 100 \\
 &= 152 - 100 \\
 &= 52
 \end{aligned}$$

İkinci satırdaki $(100-15) = 85$ sayısına 15 in 100 e tümleyeni diyelim. Bu sayıyı çıkarma işlemiyle elde etmek yerine, sonucu bir tümleme ve bir toplama işlemiyle bulabiliriz. Gerçekten, 15 sayısının basamaklarının 9 a tümleyenleri $(9-5=4)$ ve $(9-1=8)$ dir. Bunları ait oldukları basamaklara yazarsak, 84 sayısı bulunur. Şimdi buna 1 ekleyelim: $84 + 1 = 85$ elde edilir. Demek ki, 15 sayısının basamaklarının her birisinin yerine, 9 a tümleyenlerini yazıp ortaya çıkan sayıya 1 ekleyince, 15 sayısının 100 e tümleyeni $(100-15=85)$ bulundu. Bunu yaparken, çıkarma işlemi kullanmadığımıza dikkat ediniz. Şimdi, yukarıdaki çıkarma işlemine dönelim. Üçüncü satırdaki $67+85$ ifadesi, eksilen sayıya çıkan sayının 100 e tümleyeninin eklenmesinden başka bir şey değildir. O halde, dördüncü satırdaki 152 sayısını bir tümleme ve iki toplama işlemiyle elde etmiş oluyoruz. Son satırdaki 52 sonucuna ulaşmak için, $152-100$ çıkarma işlemi gerekiyor. Çıkarma işlemi yapamayan bilgisayarımız, 152 nin yazılı olduğu almaçtan (register) en sol hanedeki 1 sayısını silebilir; ki bu istediğimiz sonucu verir.

Yukarıdaki algoritma iki basamak yerine başka basamaklı işlemlere de uygulanır. Örneğin, 1 basamaklı işlemlerde 10 a, iki basamaklı işlemlerde 100 e, üç basamaklı işlemlerde 1000 e, ... tümlene yapılır. Genel kural olarak, tümlene işlemi, işlemdeki basamak sayısının bir üst basamağına yapılır.

Şimdi yukarıdaki algoritmayı ikili sayıtlama dizgesinde yapalım. Elle yapılan işlem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{r}
 67 \quad = \quad 1000011 \\
 15 \quad = \quad 0001111 \\
 \hline
 52 \quad = \quad 0110100
 \end{array}$$

Şimdi bunu bilgisayarın nasıl yaptığını gösterelim:

9 a tümlenmede yaptığımız gibi, 15 sayısının ikili sayıtlama sisteminde birlere tümleyeni, basamak sayılarının 1 den çıkarılmasıyla elde edilir. $(1-1=0)$ ve $(1-0=1)$ olduğundan, 15 in ikili temsilindeki 1 ler yerine 0 ve 0 lar yerine 1 koymak yetecektir:

$$\begin{array}{r}
 15 \text{ in birlere tümleyeni } (15)' = 1110000 \\
 \phantom{15 \text{ in birlere tümleyeni } (15)' = } 1 \\
 + \phantom{15 \text{ in birlere tümleyeni } (15)' = } 1 \\
 \hline
 (15)' + 1 = 1110001
 \end{array}$$

Şimdi bunu eksilen sayıya, yani 67 ye ekleyelim:

$$\begin{array}{r}
 67 \quad = \quad 1000011 \\
 (15)' + 1 = 1110001 \\
 \hline
 = \quad 10110100
 \end{array}$$

Bulduğumuz toplamda en soldaki basamağı atalım.

0110100

sayısını elde ederiz. Bu ise 52 ye eşittir ve aradığımız farktır.

Özetlersek, bir çıkarma işleminde, çıkan sayının birlere tümleyenine bir eklenir ve bulunan sayı eksilen sayı ile toplanır. Toplamın en solundaki basamak atılır. Geriye kalan sayı çıkarma işleminin sonucudur.

(devamı gelecek sayıda)

DESCARTES İŞARET KURALI

İsmail Aslan

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

e-posta: iaslan@likya.iyte.edu.tr

Tarih boyunca insanlığın yaptığı birçok aktivite matematiksel çıkarımlar ve çözümler gerektiriyordu. Örneğin, vergi toplamak ve ticaret yapmak amacıyla, tarımda toprağın alanını ve elde edilen ürünün miktarını ölçebilmek önemliydi. Denize ilk erişildiği zaman, bir geminin konumunu belirleme problemi ortaya çıkmıştı. Gemilerle birlikte toprakların geliştirilmesi; uzaklık, yükseklik ve yörünge kavramlarını içeren problemleri beraberinde getirdi. Köprüler, yollar ve binalar inşa etmek için bazı problemlerin çözümlerine gereksinim duyuldu. Tabiatına yanıtlanmayı bekleyen birçok soruyla donanmıştı. Bu sorular tipik olarak hareket, hız, ivme ve zaman gibi şeyleri kapsamaktaydı. Sözünü ettiğimiz bütün bunlar kendileri ile ilgili bir tür matematiksel denklemlere sahiptirler. Bu nedenledir ki denklem çözümleri, matematikte, her zaman temel uğraşlardan biri olagelmıştır.

Yukarıda sözünü ettiğimiz olayların bazılarının matematiksel modellenmesinde polinom denklemlerle karşılaşılır. Bu tercih edilebilir bir durumdur, çünkü polinom denklemler diğer denklemlere kıyasla daha iyi, daha hoş davranış gösterirler. Bu doğrultuda geliştirilen denklemler teorisi, polinom denklemlerin köklerinin yapısı ve kökleri bulma metodları ile ilgili olup, matematik ve fen bilimlerinin her dalında uygulama alanına sahip olmuştur. Polinom denklemler üzerine yapılan yoğun çalışmalar, bazı gözlemlere ve teoremlerin doğmasına yol açmış ve bunlardan biri de **Descartes İşaret Kuralı** olarak isimlendirilmiştir. Bu kural, kısaca, bir polinom denklemin köklerinin karakterini (pozitif, negatif ya da sanal) belirlemeye yardımcı bir araç olarak geliştirilmiştir.

Yeri gelmişken, n -inci dereceden gerçel katsayılı bir polinom denklemin, $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

şeklinde tanımlandığını belirtelim. Bilindiği gibi, Cebirin Temel Teoremine göre, n -inci dereceden bir polinom denklemin (kompleks düzlemde) n tane kökü vardır. Yazımızın ana konusu Descartes İşaret Kuralı olmakla beraber, **tam veya rasyonel katsayılı** bir polinom denklemin **tam ve rasyonel kökleri** hakkında bilgi edinmeye ve bu kökleri bulmaya yarayan yöntemlerin birinden söz etmek yerinde olacaktır. Göz önüne alacağımız denklem eğer rasyonel katsayılı ise, kökleri değiştirmeksizin, katsayıların ortak paydası ile denklemin her iki tarafını çarparak orijinal denklemi, katsayıları tamsayı olan başka bir denkleme dönüştürebileceğimiz açık olsa gerek. Yani, rasyonel katsayılı bir denklem daima tam katsayılı bir denkleme indirgenebileceğinden, buradaki tartışmamızı tam katsayılı (1) denklemine yoğunlaştırmak bize zaman kazandıracaktır.

Şimdi, (1) denkleminde $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ katsayılarının tamsayı olduğunu kabul edelim. Herhangi bir k sayısının (1) denkleminin kökü olması

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0 \quad (2)$$

eşitliğinin gerçekleşmesi ile eşdeğerdir. Bir adım daha atarak, (2) eşitliğini

$$k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0 \quad (3)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Eğer k bir tamsayı ise, her i için a_i tamsayı olduğundan, (3) eşitliğinden $k \mid a_0$ olduğunu, yani k nın a_0 sabit terimini böleceği sonucunu çıkarırız. Böylece **Tam Kök Testi** olarak isimlendirdiğimiz şu gerçeği ifade edebiliriz:

$a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ tamsayılar olmak üzere (1) denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin tam kökü olabilecek sayılar, a_0 sabit teriminin bölenleridir.

Başka bir deyişle, a_0 sabit teriminin bölenleri (1) denklemi için aday tam kökler olacaktır. Eğer $a_0 \neq 0$ ise, bu durumda a_0 sabit teriminin sonlu sayıda bölenleri olacağından, bu bölenlerden hangisinin denklemin kökü olacağını (denkleme yerine koyarak) birkaç adımda görebiliriz. Eğer $a_0 = 0$ ise, $x = 0$ bir tam kök olup, diğer olası tam kökleri bulmak için de a_1 katsayısının bölenlerini sınamak gerekecektir. Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 1 : $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 = 0$ denkleminin (varsa) tam köklerini bulmaya çalışalım. Sabit terim -6 olup, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ bölenlerine sahiptir. Bunları denkleme yerlerine koyup sınavarak, 1 ve -3 tamsayılarının denklemin kökleri olduğunu kolayca görebiliriz. Diğer taraftan, $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ ifadesi denklemin bir çarpanı olacağından, sentetik bölme yöntemiyle, denklemin diğer çarpanını $x^2 + 2$ olarak elde ederiz. Yani, $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 = (x-1)(x+3)(x^2 + 2) = 0$ olup, denklemin başka tam köklerinin olmayacağı görülür.

Şimdi de, tam katsayılı (1) denkleminin rasyonel köklerinin nasıl bulunacağı sorusunu irdelleyelim. Bilindiği gibi, herhangi bir r rasyonel sayısı, p ve q aralarında asal tamsayılar, $q \neq 0$ olmak üzere, p/q olarak yazılabilir. Bu şekildeki bir r rasyonel sayısının (1) denkleminin kökü olması

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

eşitliğinin gerçekleşmesi ile eşdeğerdir. Bu eşitlikten de aşağıdaki özdeş eşitlikleri elde edebiliriz:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \quad (4)$$

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) \quad (5)$$

O halde, (4) eşitliğinden, $q \mid (a_n p^n)$ olduğunu kolayca görürüz. Ayrıca, p ve q aralarında asal olduğundan, q ve p^n aralarında asal olacaktır. Buradan da, $q \mid a_n$ sonucunu çıkarırız. Aynı yaklaşımla, (5) eşitliğinden de $p \mid a_0$ olduğu görülecektir. Bu gözlemin sonucundan, **Rasyonel Kök Testi** olarak isimlendirdiğimiz başka güzel bir gerçeği de şu şekilde ifade etmek olanaklıdır:

$a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ tamsayılar olmak üzere (1) denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin rasyonel kökü olabilecek sayılar, $p \mid a_0$ ve $q \mid a_n$ olmak üzere, p/q formundaki rasyonel sayılardır.

Örnek 2 : $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 - 38x - 14 = 0$ denkleminin (varsa) rasyonel köklerini bulalım. Olası rasyonel kökler, $p \mid -14$ ve $q \mid 6$ koşulu ile, p/q formundadır. O halde, $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ ve $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ olup $p/q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2/3, \pm 7/2, \pm 7/3, \pm 7/6, \pm 14/3\}$ kümesi olası bütün rasyonel kökleri gösterecektir. Denklemden yerine koyarak bu sayıları kontrol edersek bulacağımız ilk rasyonel kök $-1/3$ dir. O halde, $3x + 1$ ifadesi denklemin bir çarpanı olup sentetik bölme yöntemi ile denklem $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 - 38x - 14 = (3x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 4x - 14) = 0$ olarak yazılabilecektir. Diğer kökleri bulmak için, aynı yöntemi $2x^3 - 7x^2 + 4x - 14$ çarpanına uygulayalım. Bu defa aradığımız aday rasyonel kökler, $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14, \pm 1/2, \pm 7/2$ olup bu sayıları da $2x^3 - 7x^2 + 4x - 14 = 0$ denklemini için kontrol edersek, $7/2$ sayısının diğer bir rasyonel kök olduğunu keşfederiz. Yani, $2x - 7$ ifadesi de denklemin bir çarpanı olacaktır. Yaptığımız bu gözlemlerden sonra, denkleminizi $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 - 38x - 14 = (3x + 1)(2x - 7)(x^2 + 2) = 0$ şeklinde düzenleyerek başka rasyonel köklerin olamayacağı sonucunu çıkarırız.

Denklemler teorisinde üstesinden gelinmeye çalışılan bir başka soru da, bir denklemin pozitif, negatif, ve kompleks köklerinin sayısının tahmin edilebilmesiydi. Cardan (1501-1576), bir denklemin kompleks kökünün eşleniğinin de aynı zamanda bir kök olacağını farkına varmıştı. Bu durum, günümüzde, eşlenik-çift teoremi olarak anılmaktadır. Newton (1643-1727), *Arithmetica Universalis* adlı eserinde bu teoremin kanıtını verdi. Fakat, yazımızın akışından, bizim polinom denklemlerin gerçel (reel) kökleriyle ilgilendiğimiz açık olsa gerek. Descartes (1596-1650), devrim yaratan *La Geometrie* adlı yapıtında polinom denklemlerin köklerini tartışırken, işaretlerle ilgili kuralından söz etmiş ama kanıtına dair herhangi bir ipucu vermemişti. Büyük dikkat çeken söz konusu kuralı şu şekilde sunmuştu:

On connoift auffy de cecy combien il peut y auoir de vraves racines, & combien de fauffes en chafque Equation. A fcauoir il y en peut auoir autant de vraves, que les signes + & - s'y trouuent de fois efre changes; & autant de fauffes qu'il s'y trouue de fois deux signes +, ou deux signes- quie s'entrefuiuent.

Aynı zamanda, bir denklemin doğru ve yanlış köklerinin sayısını aşağıdaki gibi belirleyebiliriz: Bir denklem, en fazla, + dan - ye veya - den + ya, içerdiği işaret değişimi kadar doğru köklere; ve, en fazla, ardışık olarak bulunan iki + işareti veya iki - işaretinin sayısı kadar yanlış köklere sahip olabilir.

Descartes, burada, pozitif kökler için doğru kökler, negatif kökler için de yanlış kökler terimlerini kullanmıştı. Bu işaret kuralının Descartes'in, *La Geometrie* adlı yapıtından önce bilinip bilinmediği konusunda anlaşmazlıklar yaşanmıştır. Bazıları, bu kuraldan Thomas Harriot'ın (1560-1621), 1631 yılında yayımlanan *Artis analyticae praxis* adlı eserinde yer verdiğinden söz eder. Cantor (1845-1918), bu görüşe, Harriot'ın negatif köklerin varlığını kabul etmediği savıyla karşı çıkar. Cardan da, ayrıca, pozitif köklerin ortaya çıkışı ve işaretçe bir ya da iki değişimin varlığı arasında ilişki kuran bir bağıntıdan söz etmişti. Newton, sanal köklerin sayısını bulan bir yöntem geliştirdi. Leibniz (1646-1716), ispatın ana hatlarını duyurdu, fakat ayrıntısına girmedi. 1745'den 1828'ye kadar birçok matematikçi, Descartes kuralının ispatı üzerinde çalıştı ve bu kuralı daha anlaşılır, arı bir şekilde ifade etmek için uğraş verdi. Gauss (1777-1855), 1828 yılında, bu kurala bir ifade daha ekledi: Eğer pozitif köklerin sayısı işaret değişiminin sayısından az olursa, bu durumun bir çift sayı eksiği kadar gerçekleştirilebileceğini vurguladı. Negatif kökler için de aynı şey geçerlidir. Özetle, Descartes İşaret Kuralı'nı kesin ve yalın bir biçimde ifade etmek istersek:

$a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ gerçel sayılar olmak üzere (1) denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin pozitif köklerinin sayısı; ya denklemin katsayıları arasındaki işaret değişiminin sayısına eşit ya da işaret değişimi sayısının bir çift tamsayı eksiği kadardır.

Negatif kökler için de şu gözlemi yapabiliriz. Eğer x sayısı denklemin negatif kökü ise, $-x$ sayısının pozitif kök olacağı kolayca görülebilir. O halde, denkleminde x yerine $-x$ koyarak yukarıda belirttiğimiz gerçeği negatif kökler için uygulamak yerinde bir davranış olacaktır. Descartes İşaret Kuralı, bir bakıma, denklemin pozitif (negatif) köklerinin sayısının maksimumunu vermektedir. Şimdi de bu kuralın uygulanabilirliğini görebilmek için örnekler verelim.

Örnek 3 : $6x^4 - 31x^3 + 25x^2 + 33x + 7 = 0$ denklemini göz önüne alalım. Denklemden de görüldüğü gibi katsayıların işareti (soldan-sağa), sırasıyla, $+, -, +, +, +$ olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 2 kez gerçekleşmektedir. O halde pozitif köklerin sayısı ya 2'dir ya da 0'dır. Negatif köklerin sayısını belirlemek için de x yerine $-x$ koyarak $6x^4 + 31x^3 + 25x^2 - 33x + 7 = 0$ denklemini elde eder ve bu denklemin katsayıları arasındaki işaret değişimine bakarız. Benzer bir bakışla, bu denkleminde de 2 işaret değişiminin varlığı kolayca görülür. O halde negatif köklerin sayısı ya 2'dir ya da 0'dır.

Örnek 4 : $4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$ denklemini ele alalım. Katsayıların işareti, sırasıyla, $+, -, +$ olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 2 defa gerçekleşmektedir. O halde pozitif köklerin sayısı ya 2'dir ya da 0'dır. Ayrıca, $-4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$ denkleminin katsayıları arasında işaret değişimi 1'dir. O halde 1 tane negatif kök vardır.

Örnek 5 : $x^3 - 6x^2 + 14x - 15 = 0$ denklemine bakalım. İşaretlere bakacak olursak, sırasıyla, $+, -, +, -$ olup, katsayılar arasındaki işaret değişiminin sayısı 3'dür. O halde pozitif köklerin sayısı ya 3'dür ya da 1'dir. Ayrıca, $-x^3 - 6x^2 - 14x - 15 = 0$ denkleminin katsayıları arasındaki işaret değişimi 0'dır. O halde hiç negatif kök yoktur.

Örnek 6 : $x^6 - x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x - 4 = 0$ denklemini inceleyelim. Sırasıyla, işaretler $+, -, +, -, -, -, -$ olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 3'dür. O halde pozitif köklerin sayısı ya 3'dür ya da 1'dir. Ayrıca, $x^6 + x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x - 4 = 0$ denkleminin katsayıları arasındaki işaret değişimi yine 3'dür. Aynı şekilde negatif köklerin sayısı da ya 3'dür ya da 1'dir.

Yukarıdaki örneklerde elde ettiğimiz sonuçların tutarlılığına tanık olmak için Tam veya Rasyonel Kök Testlerini uygulayarak denklemin bütün köklerini bulup karşılaştırma yapabiliriz.

Yazımızı noktalamadan önce, geçerliliği kabul görmüş ve doğruluğu kanıtlanmış olan Descartes İşaret Kuralı'nı, pozitif kökler için, iki durumu ele alarak yorumlayalım:

Önce, (1) denklemini $a_1x + a_0 = 0$ şeklinde birinci dereceden denklem olarak düşünelim. Bu durumda, $x = -a_0/a_1$ denklemin tek kökü olacaktır. Buradan da, a_1 katsayısı ve a_0 sabit teriminin zıt işaretli olması durumunda, yani katsayılar arasındaki işaret değişiminin bir olması halinde, bir tane pozitif kökün var olacağı kolayca görülebilir. Diğer yandan a_1

ve a_0 'ın aynı işaretli olması (denklemin katsayıları arasında işaret değişiminin olmaması) durumunda pozitif kökün var olamayacağı da açıktır.

Şimdi de, (1) denklemini, $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ şeklindeki ikinci dereceden denklem olarak düşünelim. Bu denklemin her iki tarafını a_2 katsayısı ile bölerek, orijinal denklemle aynı köklere ve katsayılar arasında aynı sayıda işaret değişimine sahip yeni bir $x^2 + bx + c = 0$ denklemini elde ederiz. Dahası, bu denklemin köklerinin de x_1 ve x_2 olduğunu kabul edelim. O halde, $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ ve buradan da $b = -(x_1 + x_2)$ ve $c = x_1x_2$ sonucunu çıkarırız. Ayrıca, incelediğimiz bu ikinci dereceden denklemin köklerini veren

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (6)$$

förmülünü de anımsayarak aşağıdaki analizi yapalım:

- Eğer $b < 0$ ve $c > 0$ ise (katsayılar arasında iki işaret değişimi varsa), bu durumda $x_1x_2 > 0$ ve $x_1 + x_2 > 0$ olacaktır. Yani gerçel kökler varsa, ikisi de pozitif olacaktır. Fakat, (6) formülünden, $b^2 - 4c < 0$ olacak şekilde c nin yeteri kadar büyük olması durumunda gerçel köklerin varlığı olanaksızlaşacaktır.
Sonuç: Katsayılar arasında iki işaret değişiminin var olması durumunda, ya kesin iki pozitif kök var ya da hiç yoktur.
- b 'nin işareti ne olursa olsun, $c < 0$ ise, (katsayılar arasında bir tane işaret değişimi varsa), bu durumda $x_1x_2 < 0$ ve $x_1 + x_2 < 0(> 0)$ olacaktır. Yani gerçel kökler varsa, zıt işaretli olacaklardır. Diğer taraftan, (6)'dan $b^2 - 4c > 0$ olduğundan, gerçel köklerin varlığı kesindir.
Sonuç: Katsayılar arasında bir tane işaret değişiminin var olması durumunda, kesin bir tane pozitif kök vardır.
- Eğer $b > 0$ ve $c > 0$ ise (katsayılar arasında işaret değişimi yoksa), bu durumda $x_1x_2 > 0$ ve $x_1 + x_2 < 0$ olacaktır. Yani gerçel kökler varsa, ikisi de pozitif olamayacaktır.
Sonuç: İşaret değişimi yoksa pozitif kök de yoktur.

Böylece, Descartes İşaret Kuralı'nın geçerliliğini birinci ve ikinci dereceden denklemler için göstermiş olduk. Peki, daha büyük dereceli denklemler için nasıl bir kanıtlamaya gidilebilir? Şunu belirtelim ki, $n \geq 3$ dereceli denklemler için Descartes İşaret Kuralı'nın doğruluğunu göstermek amacıyla yukarıdaki biçimde bir girişimde bulunmak pratik olmayacaktır. Daha sistematik bir yaklaşıma gereksinim vardır. Bunu da ilgili okuyucuya bırakalım.

Alıştırma : Aşağıdaki denklemlerin pozitif ve negatif köklerinin sayısını belirleyiniz.

- (1) $x^{12} - 14x^{10} + 183x^8 - 612x^6 - 2209x^4 - 35374x^2 + 38025 = 0$
- (2) $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 25x = 0$
- (3) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x - 1 = 0$

KAYNAKÇA :

Smith, D.E and Latham, M.L : The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition, Dover, New York, 1954

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 30 Kasım 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.236. 347777743 sayısı asal mıdır?

A.237. ABC ikizkenar dik üçgeninin AC hipotenüsü üzerinde, $\widehat{MBN} = 45^\circ$ olacak şekilde M ve N noktaları alınmıştır.

$$|AM|^2 + |NC|^2 = |MN|^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

A.238. 1×5 boyutlu dikdörtgeni öyle 5 parçaya ayırın ki, bunlar birleştirilerek bir kare oluşturulabilsin.

A.239.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{21}$$

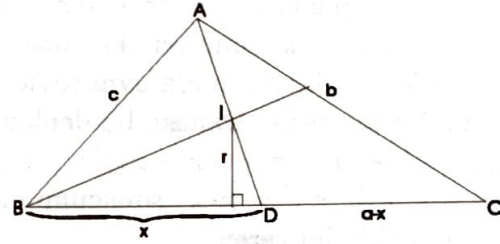
denklemini çözünüz.

A.240. 20 kişinin katıldığı bir satranç turnuvasında herkes birbiriyle birer maç yaptı. Sonuçta katılanlardan her birinin kazandığı ve berabere kaldığı maçların sayısı aynı olabilir mi?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.236. Sonsuz sayıda n pozitif tam sayısı için, n 'nin iki tam sayının kareleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini; $n-1$ ve $n+1$ sayılarının ise bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

Y.237. M dışbükey çokgeni bir nokta etrafında 90° dönme sonucu kendisine dönüşüyor. Birisi



Şekil 1

M 'yi içeren, diğeri de M 'nin içinde bulunan ve yarıçapları biri diğerrinin $\sqrt{2}$ katı olan iki daire bulunduğunu kanıtlayınız.

Y.238. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}$ sayılarından oluşan ve çift sayıda eleman içeren tüm kümeler alınıyor ve her kümedeki sayıların çarpımı hesaplanıyor. Tüm çarpımların toplamını bulunuz.

Y.239. $a < b < c$ sayıları $x^2 - 3x + a = 0$ denkleminin çözümleridir. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ toplamını bulunuz.

Y.240. Her $n > 1$ tam sayısı için,

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = M$$

denkleminin negatif olmayan tam sayılardan oluşan $x_1, x_2, \dots, x_n$ kökünün bulunmamasını sağlayan sonsuz sayıda M sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.226. ABC üçgeninde açıortayların kesişim noktası I , iç teğet çemberin yarıçapı ise,

$$|AI| + |BI| + |CI| \geq 6r \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm. (Şekil 1), $[AD]$ açıortay, $[BD] = x$ ise, $\frac{c}{a} = \frac{x}{a-x}$, buradan da $x = \frac{ac}{b+c}$ elde edilir. $[BI]$, ABD üçgeninin açıortayı olduğundan

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{c}{x} = \frac{b+c}{a}$$

dır. $r \leq |ID|$ eşitsizliğini gözönünde bulundurursak, $|AI| \geq r \cdot \frac{b+c}{a}$ sağlandığını görürüz. Benzer şekilde $|BI| \geq r \cdot \frac{a+c}{b}$ ve $|CI| \geq r \cdot \frac{a+b}{c}$ eşitsizlikleri elde edilir. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlik kullanılarak

$$|AI| + |BI| + |CI| \geq r \left(\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \right) =$$

$$r \left[\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) \right] \geq$$

$$r \left(2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} \right) = 6r$$

olduğu gösterilir.

A.227. Bir pozitif tamsayının art arda gelen herhangi iki rakamının oluşturduğu iki basamaklı sayı 17'ye veya 23'e bölünüyorsa, bu sayıya "ilginç sayı" diyelim. Kaç tane 2001 basamaklı ilginç sayı vardır?

Çözüm. İki basamaklı "ilginç sayılar" aşağıdakilerdir: 17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85, 92. Bunlar arasında 7 ile başlayan sayı bulunmadığından, herhangi "ilginç sayıda" 7 rakamı sadece sonuncu basamak olabilir. Bir "ilginç sayıda" 1 rakamı varsa, bundan sonra 7 rakamı gelmek zorundadır. O halde sadece 2000. veya 2001. basamak 1 rakamı olabilir. Benzer şekilde 5 rakamı ilk 1998 ve 8 rakamı ilk 1997 basamak arasında yer alamaz. Böylece bir "ilginç sayı" 2, 3, 4, 6, 9 rakamlarından biri ile başlamak zorunda ve örneğin 2 ile başlamışsa, ilk 1995 basamağı 2346923469...23469 şeklinde olacaktır. Dolayısıyla 2001 basamaklı "ilginç sayılar" tam 9 tanedir: 23...692, 23...685, 34...6923, 34...6851, 46...69234, 46...68517, 69...692346, 92...69, 92...68.

A.228. Her pozitif gerçel a, b, c sayıları ve pozitif n sayısı için

$$\left(\frac{a+b}{c} \right)^n + \left(\frac{b+c}{a} \right)^n + \left(\frac{c+a}{b} \right)^n \geq 3 \cdot 2^n$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizliği iki kez kullanarak aşağıdakileri elde ederiz:

$$\left(\frac{a+b}{c} \right)^n + \left(\frac{b+c}{a} \right)^n + \left(\frac{c+a}{b} \right)^n \geq$$

$$3 \sqrt[n]{\left(\frac{a+b}{c} \right)^n \cdot \left(\frac{b+c}{a} \right)^n \cdot \left(\frac{c+a}{b} \right)^n} =$$

$$3 \sqrt[n]{\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \right]^n} \geq$$

$$3 \sqrt[n]{\left[\frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc} \right]^n} =$$

$$3 \sqrt[n]{2^{3n}} = 3 \cdot 2^n$$

A.229. Tüm gerçel sayılar kümesinde tanımlı olan f fonksiyonu her x için

$$f(x+3) \leq f(x) + 3, f(x+2) \geq f(x) + 2$$

eşitsizliklerini sağlar. $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İlk koşuldan $g(x+6) = f(x+6) - x - 6 \leq f(x+3) + 3 - x - 6 \leq f(x) + 3 + 3 - x - 6 = g(x)$ ve ikinci koşuldan $g(x+6) = f(x+6) - x - 6 \geq f(x+4) + 2 - x - 6 \geq f(x+2) + 2 + 2 - x - 6 \geq f(x) + 2 + 2 + 2 - x - 6 = f(x) - x = g(x)$ elde edilir. Dolayısıyla, $g(x+6) = g(x)$ eşitliği her x için gerçekleşir, yani $g(x)$ fonksiyonu periyodiktir.

A.230. N arkadaş birkaç kere beraber tiyatroya gittiler. Her gidişlerinde aynı sırada bulunan yan yana N koltuğu paylaştılar. Her ikili tam bir kez yan yana oturdular. N 'nin çift sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her gidişte yan yana oturan çiftlerin sayısı $N-1$ 'dir, tüm çiftlerin sayısı ise $\frac{N(N-1)}{2}$ 'dir. O halde arkadaşlar $\frac{N}{2}$ kez tiyatroya gitmişler, dolayısıyla N çift sayıdır.

Y.226. Pozitif tamsayılardan oluşan kesin olarak artan sonsuz dizide 4.'den başlayarak her terimin karesi bundan daha önce gelen herhangi üç terimin kareleri toplamına eşittir. Bu dizide sonsuz sayıda bileşik sayıya rastlanacağını ispat ediniz.

Çözüm. Koşulları sağlayan bir $\{a_n\}$ dizisinde bileşik terimlerin sonlu olduğunu varsayalım. O halde $t > 3$ olmak üzere bir t . terimden başlayarak tüm terimleri asaldır. $s = \sum_{i=1}^{t-1} a_i^2$ ve $n = \max\{a_t, 5\}$ alalım. $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$ sayılarından her biri bileşik olduğundan (çünkü her $0 < k \leq n$ için $k \mid (n! + k)$), bu sayıların hiçbirisi dizinin bir terimi değildir. Dolayısıyla $a_m \leq n! + 1 < n! + n < a_{m+1}$ olacak şekilde bir m vardır. O halde $a_{m+1} - a_m \geq n$ 'dir. Diğer taraftan $u < v < w < m + 1$ olmak üzere

$$a_{m+1}^2 = a_u^2 + a_v^2 + a_w^2 \quad (1)$$

yazılabilir. Bir tam sayının karesi ya 3'e bölünür, yada bölündüğünde kalan 1 olur. a_{m+1} asal olduğundan $a_{m+1}^2 \equiv 1 \pmod{3}$ 'tür. o halde (1) eşitliğinden a_u, a_v, a_w sayılarından ikisi 3'e bölünecek (ve dolayısıyla ya 3'e eşittir, ya da

	1	2	4	5	6
1					
2					
3					
4					
5					

Sekil 2

bileşiktir). Bu durumda $u < t$ ve $v < t'$ 'dir. Böylece

$$n \leq a_{m+1} - a_m \leq a_{m+1} - a_w = a_u^2 + a_v^2 \leq s \leq n$$

eşitsizliğinden çelişki elde ederiz.

Y.227. 5x5 boyutlu tabloya 1' den 25'e kadar olan pozitif tam sayılar yazılmıştır. İçerdikleri sayılar arasındaki fark en az 5 olacak şekilde iki komşu hane bulunacağını gösteriniz.

Not: Bir ortak kenarı bulunan iki haneye komşu haneler denir.

Çözüm. i . satır ve j . sütün kesişimindeki haneyi (i, j) ile gösterelim. (i, j) ve (k, m) haneleri arasındaki uzaklık dediğimizde $|k - i| + |m - j|$ sayısını kastedeceğiz. Tüm komşu hanelerdeki sayıların farkının en fazla 4 olduğunu varsayalım. O halde aralarındaki uzaklık n olan iki hanedeki sayıların farkı en fazla $4n$ olur. Dolayısıyla $a - b > 20 = 5 \cdot 4$ ise, a ve b sayılarının bulunduğu haneler arasındaki uzaklık en az 6 olacak. Bu durumda 1,2,3,4,22,23,24,25 sayıları (şekil 2)'deki taraflı hanelerde bulunmak zorunda. Ayrıca 1,2,3,4 sayıları bir köşedeki üçgende (örneğin (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1) hanelerinde); 22,23,24,25 sayıları da karşı köşedeki üçgende ((5,5)'in bulunduğu köşe) bulunacaklar. O halde 1,2,3,4 sayılarından en az biri (3,1), (2,2), (3,1) hanelerinden birinde; 22,23,24,25 sayılarından en az biri de (3,5), (4,4), (5,3) hanelerinden birinde bulunacaktır. Bu iki sayı arasındaki fark en az $22-4=18$ 'dir, fakat bunların bulundukları haneler arasındaki uzaklık 4'dür. $4 \cdot 4 < 18$ olduğundan çelişki elde etmiş olduk.

Y.228. $a_0, a_1, \dots, a_n$ pozitif sayılar olmak üzere $x^{n+1} + a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_0$ polinomunun

$x_0, x_1, \dots, x_n$ kökleri için

$$x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$$

eşitsizlikleri sağlanır. $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$ sayılarının $x^n - nx^{n-1} + b_n x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 - nx + 1$ polinomunun kökleri olduğu bilinirse,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Önce $x_1 < 0$ olduğunu gösterelim. $a_0 > 0$ olduğundan

$$f(x) = x^{n+1} + a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_0$$

polinomunun kökleri sıfırdan farklıdır. $x_1 > 0$ olduğunu varsayalım. O halde $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ için $g(x_1) = 0$ 'dır. Diğer taraftan $0 < x_1 < x_0$ olduğundan

$$g(x_1) = x_1 + a_n \cdot \frac{a_{n-1}}{x_1} - \dots - \frac{a_0}{x_1^n} <$$

$$x_0 + a_n - \frac{a_{n-1}}{x_0} - \dots - \frac{a_0}{x_0^n} = g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0^n} = 0$$

olacak. $0 < 0$ çelişkisinden $x_1 < 0$, buradan da $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$ sayılarının pozitif olduğunu elde ederiz. Vieta teoreminden

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_i} = (-1)^{n-1} \cdot (-n)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n$$

yazabiliriz. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten

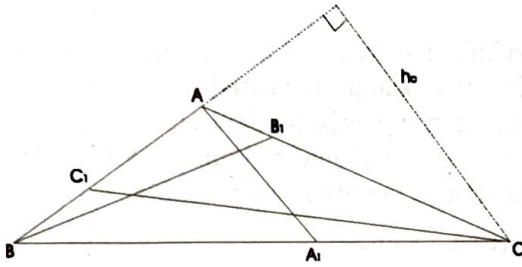
$$n^2 = \frac{n(-1)^{n-1}(-n)}{(-1)^n} =$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq$$

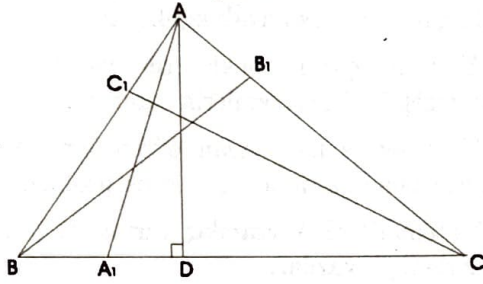
$$n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \cdot n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}} = n^2$$

elde edilir ve eşitlik durumu sadece $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ olduğunda sağlanır.

Y.229. ABC üçgeninin BC, CA ve AB kenarları üzerinde, $|AA_1| \leq 1, |BB_1| \leq 1, |CC_1| \leq$



Şekil 3



Şekil 4

1 olacak şekilde sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktaları alınmıştır. ABC üçgeninin alanının $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 'ü aşmadığını gösteriniz.

Çözüm. Önce geniş açılı üçgen durumunu inceleyelim (şekil 3). A açısı geniş olsun. O halde $|AB| < |BB_1| \leq 1$ ve $h_c \leq |CC_1| \leq 1$ olduğundan $A(ABC) \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olacak. Şimdi

$\triangle ABC$ bir dar açılı üçgen, $\hat{A}$ açısı da bunun en küçük açısı olsun. O halde $s(\hat{A}) \leq 60^\circ$ 'dir. (Şekil 4), dolayısıyla $\widehat{BAD}$ ve $\widehat{DAC}$ açılarından en az biri 30° 'den küçük veya eşittir (burada AD yüksekliktir). $|AD| = h_a \leq |AA_1| \leq 1$ olduğundan

$$\min\{|AB|, |AC|\} \leq \frac{|AD|}{\sin 30^\circ} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

elde ederiz. $h_B \leq |BB_1| \leq 1$ ve $h_c \leq |CC_1| \leq 1$ olduğundan $A(ABC) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 'dür.

Y.230. Öğle saatinde (12:00'de) üç sinekten biri saatin akrepinin, diğeri yelkovanın ve üçüncüsü de saniye göstergesinin üzerine oturdular. Bunlardan biri diğerine yetiştiğinde yer değiştirdiler (saniye göstergesi aynı zamanda yelkovan ve akrepe yetiştiğinde saniye göstergesi ve akrep üzerindeki sinekler yer değiştirdiler). Gece yarısına kadar sineklerin her biri kaç kez merkez etrafında döndü?

Çözüm. Koşullara dikkat ettiğimizde sineklerin birbirini geçmediğini görürüz. Dolayısıyla, iki sineğin dönme sayısı arasındaki fark en fazla 1 olabilir. 12 saat içinde akrep 1 kez, yelkovan 12 kez ve saniye göstergesi 720 kez merkez etrafında dönüyor. O halde üç sinek toplam $720+12+1=733$ kez dönmüştür. Bu sayıyı, aralarındaki fark en fazla 1 olan üç sayının toplamı şeklinde gösterelim. $733=244+244+245$. İlk baştan saniye göstergesi üzerinde bulunan sinek önde gittiği için diğerlerinden 1 fazla sayıda dönmüştür: 245 kez. Akrep ve yelkovan üzerinde yola çıkan sinekler 244'er kez dönmüşler.

DÜZELTME Cilt:10, Sayı:2 Problemler ve Çözümlerin Sayfa 29' daki Y232 sorusu aşağıdaki şekilde düzeltilmiştir.

Y.232. İkizkenar olmayan ABC üçgeninde AK ve BL kenarortaylardır. $\angle BAK = \angle CBL = 30^\circ$ ise, ABC üçgeninin iç açılarının kosinüsünü bulunuz.

Kitap Tanıtımı

Papağan Teoremi

(Le Theoreme du Perroquet)

Denis Guedj

İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra Amazonya'ya yerleşen 84 yaşındaki Elgar Grosrouvre, matematik fakültesinden eski arkadaşı ve Paris'te sahaflık yapan tekerlekli sandalye mahkumu Pierre Ruche'e çok değerli bir matematik kitapları koleksiyonunu gönderdikten sonra evinde çıkan bir yangında ölür. Elgar, Pierre'e yazdığı mektuplarda ünlü matematikçi Fermat ve Goldbach'ın teoremlerini tanıtladığını yazmaktadır. Yangından kurtulan Elgar'ın papağanı "Nofutur", değerli kuş kaçakçılarının sayesinde Paris'e, Pierre'nin safah dükkanı "Binbir Sayfa"ya rastlantı sonucu ulaşır. Elgar'ın ölümü bir cinayet mi, intihar mı, yoksa kaza mıdır? Bu sorulardan sonra Pierre Ruche ve meraklı ailesinin müthiş polisiye araştırmaları ve kovalamacaları başlar.

Japonya'dan Brezilya'ya, Mısır'dan Sicilya'ya uzanan bu muammalar zincirinin gerçek kahramanı matematiğin ta kendisi elbette. Yaşamımızın felsefi sınırları içinde matematiğin gerçek yerini sorgulayarak onu tüm açıklığıyla saptamamıza yardımcı olan Papağan Teoremi, azılı

matematikçilerden dört işlem ustalarına (yediden yetmişe) kadar herkesin elinden düşmeyecek bir felsefi roman. Matematik tarihinin en gizemli yanları ve kişiliklerinin de başrolleri paylaştığı bu edebiyat polisiye şöleninin oyuncularını, aslında Nizamülmülk, Hasan Sabbah ve Ömer Hayyam'ın günümüz uyarlamalarından başkaları değil...

"Denis Guedj Papağan Teoremi ile olağanüstü bir şey gerçekleştirdi: Matematiği ve edebiyatı uzaklaştırmak! Jostein Gaarder'ın "Sofi'nin Dünyası"nda felsefe için yaptığını Denis Guedj Papağan Teoremi'nde matematik için yaptı. Bu kitabın amacı, bize matematiğin yaşayan bir şey olduğunu göstermek... Meğer okulda bunu bizden saklamışlar" La Voix Du Nord

"Papağan Teoremi'ni okurken son derece etkileyici matematik portreleri karşısında insan hayranlığını gizleyemiyor; dramlar karşısında ürperiyor; birkaç saniye bile sürse, denklemlere ve metin akışını resimleyen geometrik şekillere takılmadan edemiyor."

"Papağan Teoremi, matematik ve felsefenin tarihleri ve ünlü matematikçilerin teoremleri boyunca devam eden; sayıların ve denklem soyutlamalarının soğuk yüzünden uzakta sıcak, sevimli, sürükleyici bir roman.

Bu romanda okuma zevki, matematiği yeniden öğrenme ve keşfetme keyfiyle son sınırlarına ulaşıyor." Le Monde

Çeviri: İsmail Yerguz, Güncel Yayıncılık

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

**Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR**

adresine posta ile gönderilmeli, ya da mdunyasi@galois.iyte.edu.tr adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.

"Bizim memleketimizde insanlar bilgiyi satmak için kullanıyorlar; neşretme amacında bu. Bu bilim değil! "
Cahit Arf (1910-1997)



PEKER

MATBAACILIK ve TİCARET Tel&Fax: 0.232.483 89 80