

EKİM 2001

CİLT 10

SAYI:4

ISSN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Tamsayıların Bölüntüsü için Cebirsel Özdeşlikler
ve Algoritmalar

M.Cihan Girgintaş- Selim Özgen

Otomoto ile Tanışalım

Gonca Güngör Ayık

1.Görece Uluslararası Matematik Yarışması

Menemen Görece Belediyesi

Mikrobilgisayarda Aritmetik (II)

Timur Karaçay

Limitin Öyküsü

Ünal Ufuktepe

Problemler/Çözümler



MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Bu sayımızda okurlarımıza TÜBİTAK'ın proje yarışmasında derece alan İzmir Fen Lisesi öğrencilerinin bir projesini lise öğrencilerine örnek teşkil etmesi için yayımlıyoruz. Günlük yaşantımızın vazgeçilmez parçası olan teknoloji ürünlerinde matematiğin hangi boyutta kullanıldığına dair Gonca Güngör Ayık'ın "Otomoto ile Tanışalım" ve Timur Karaçay'ın "Mikrobilgisayarda Aritmetik (II)" yazısını zevkle okuyacağınızı düşünüyoruz. Kendisi bir matematikçi olan Menderes ilçesi Görece Belediye Başkanı Sayın Mustafa ÖZTÜRK'ü Matematik Yarışması düzenlemesinden dolayı kutluyoruz. Dileriz bu yarışmada tıpkı Akdeniz Üniversitesi Matematik Olimpiyatları gibi geleneksel hale gelir. Bu sayıda ilk kez okur kösesi oluşturduk. Emektar matematik öğretmenlerimizin MD hakkındaki dileklerini yayın kurulu olarak yerine getirmeye özen göstereceğimizden kimse kuşku duymasın. Çok yakın zamanda tekrar görüşmek üzere...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Tamsayıların Bölüntüsü için Cebirsel Özdeşlikler ve Algoritmalar M.Cihan Girgintaş - Selim Özgen	2
Otomoto ile Tanışalım Gonca Güngör Ayık	10
1.Görece Uluslararası Matematik Yarışması Menemen Görece Belediyesi	13
Mikrobilgisayarda Aritmetik (II) Timur Karaçay	16
Limitin Öyküsü Ünal Ufuktepe	21
Problemler ve Çözümler	28

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık

DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gun ve-660 YKD. Baş. K.İ. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2001) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 8.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 6.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)Parakende satış fiyatı 2.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35437-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987569, 4987504 ve 4987519 ; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

TAMSAYILARIN BÖLÜNTÜSÜ İÇİN CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER VE ALGORİTMALAR

M. Cihan GİRİNTAŞ - Selim ÖZGEN

İzmir Fen Lisesi

I. GİRİŞ

Bölüntü, bir pozitif tamsayının, pozitif tamsayıların toplamı biçiminde ifade edilmesidir. Bu ifade-
de toplananların sırasının bir önemi yoktur. Örneğin 3 sayısı için $3 = 2 + 1$ ve $3 = 1 + 2$ gösterimleri
özdeş kabul edilmektedir. Bir sayının bölüntüsünde toplanan konumundaki tüm sayılara bölüntülenen
sayının parçaları denmektedir. Bir n sayısına ait bölüntüler, bölüntüyü oluşturan parçaların azal-
mayan sırada listesi şeklinde ifade edilmektedir. Öte yandan birden fazla kez kullanılan parçaların
kaç kez kullanıldığı parçanın üstüne yazılarak gösterilir. Örneğin, $12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ için
gösterimi, $(1^2 2^2 3^2)$ şeklindedir.

TANIM:

Bir n doğal sayısının tüm bölüntülerinin sayısı $p(n)$ bölüntü fonksiyonuyla ifade edilmektedir.
 $p(0) = 1$ kabul edilmektedir. Bölüntünün tanımından n negatif tamsayı ise $p(n) = 0$ olmaktadır.
(Hiç bir negatif tamsayı pozitif tamsayıların toplamı şeklinde yazılamaz.)

n 'nin küçük değerleri için $p(n)$ sayısını, n 'nin bölüntülerini bir liste halinde yazarak hesaplamak
mümkündür. Örneğin $p(5) = 7$ dir. Çünkü 5 sayısı tam olarak 7 farklı şekilde parçalanabilir. Bunlar,
 $(5), (14), (23), (1^2 3), (12^2), (1^3 2), (1^5)$ dir. Şüphesiz, aynı yöntemi kullanarak çok daha büyük sayılar
için $p(n)$ 'i - örneğin 1004 için $p(100) = 190569292$ - bilgisayar desteği olmadan hesaplamak imkansız
gibi görünmektedir.

$p(n)$ 'in hesaplanması bir çok matematik otoritesini uzun yıllar meşgul etmiş bir problemdir. Prob-
lem, ilk olarak 16544 yılında Leibniz tarafından ifade edilmiştir. 1740'ta Alman matematikçi Philipp
Node tarafından Leonhard Euler'e sunulmuş; Euler, bölüntüler üzerine yaptığı çalışmalarda bir çok
ilginç özellik bulmuştur. Bunlar arasında ünlü "pentagonal teoremi" merkez teorem niteliğindedir.

İstatiksel Mekanik ve Dizgi Teorisi başta olmak üzere birçok modern fizik teorisinde ve Olasılık
Teorisi ve İstatistiksel Analiz başta olmak üzere matematiğin birçok alanında, çok parçadan oluşan bir
sistemin tüm olası konfigürasyonlarının bulunmasına, dolayısıyla bir sayının bölüntülerinin sayısına
ve buna ait bölüntü fonksiyonlarına fazlasıyla ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu yüzden n 'nin büyük değerleri için $p(n)$ 'in bulunmasıyla ilgili etkili metodlar ve özelliklerin
bulunması uygulamalı matematik için önemli bir problemdir.

II. PROJENİN AMACI

Bölüntüler teorisinde bir grup cebirsel ilişki kurulması ve buradan hareketle bir n sayısı için $p(n)$
değerinin bulunmasını sağlayan etkili algoritmalar elde edilmesi.

III. TEORİ

Tanım: H , pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. Bu durumda " H " parçaları H 'nin
içinden seçilen bölüntülerin kümesini ; $p("H", n)$ ise bir n sayısının, parçaları H kümesinin eleman-
ları olan bölüntülerinin sayısını ifade eder.

IV. YÖNTEM

Bu iki bölümde $p(n)$ değerinin hesaplanması için iki farklı algoritma (yöntem) elde edilecektir. I. Bölümde Sonuç 1.1'de Algoritma I'e; II. Bölümde Teorem 2.1'de Algoritma II'ye ulaşılmıştır.

I. BÖLÜM

Yardımcı Teorem 1.1: H pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. Bu durumda;

$$I. f(q) = \sum_{n \geq 0} p({}^n H^n, n) q^n = \prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1}$$

$$II. f_d(q) = \sum_{n \geq 0} p({}^n H^n (\leq d), n) q^n = \prod_{n \in H} (1 + q^n + \dots + q^{dn}) = \prod_{n \in H} (1 - q^{(d+1)n}) (1 - q^n)^{-1}$$

Not: $f_d(q)$ ifadesinin iki formunun eşitliği sonlu geometrik serilerin toplamındaki basit bir özellikte gelmektedir: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

İspat: Yukarıdaki I ve II ifadelerinin ikisi de analitik bir yöntem izlenerek aşağıdaki gibi elde edilebilir. H kümesinin elemanları $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}$, $(h_1 \leq h_2 \leq h_3 \dots)$ olsun.

$$\begin{aligned} \prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1} &= \frac{1}{1 - q^{h_1}} \times \frac{1}{1 - q^{h_2}} \times \frac{1}{1 - q^{h_3}} \times \dots \\ &= (1 + q^{h_1} + q^{2h_1} + \dots) \times (1 + q^{h_2} + q^{2h_2} + \dots) \times (1 + q^{h_3} + q^{2h_3} + \dots) \times \dots \\ &= \sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \sum_{a_3 \geq 0} \dots q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots} \end{aligned}$$

Dikkat edilecek olursa q değerinin kuvveti, $(h_1^{a_1} h_2^{a_2} h_3^{a_3} \dots)$ şeklinde bir bölüntüdür. Yani, yukarıdaki toplamda q^N değeri, N 'nin, parçaları H kümesinden alınmış her farklı bölüntüsü için bir kez görülecektir. Buradan I elde edilir.

II'nin ispatı sonsuz geometrik serinin sonlu geometrik seriyle yer değiştirmesi dışında I ile özdeştir.

$$\begin{aligned} \prod_{n \in H} (1 + q^n + \dots + q^{dn}) &= \sum_{d \geq a_1 \geq 0} \sum_{d \geq a_2 \geq 0} \sum_{d \geq a_3 \geq 0} \dots q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} p({}^n H^n, n) q^n \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 1.2(Euler): Tüm n pozitif tamsayıları için $p(\theta, n) = p(\Delta, n)$.

İspat: Teorem 1.1'den faydalanılarak;

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})}{(1 - q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) (1 - q^{2n-1})^{-1} (1 - q^{2n})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^{-1} \end{aligned}$$

Sonuç olarak; $\sum_{n \geq 0} p(\theta, n) q^n = \sum_{n \geq 0} p(\Delta, n) q^n$.

Öyleyse, Özellik 1'den her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $p(\theta, n) = p(\Delta, n)$ dir.

Yardımcı Teorem 1.3: $p_e(\Delta, n)$; bir n sayısının, çift sayıda ve birbirinden farklı; $p_0(\Delta, n)$ ise tek sayıda ve birbirinden farklı parçalardan oluşan bölüntülerinin sayısını ifade etsin bu durumda:

$$p_e(\Delta, n) - p_0(\Delta, n) = \begin{cases} (-1)^n, & n = \frac{m(3m \pm 1)}{2} \\ 0, & n \neq \frac{m(3m \pm 1)}{2} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Tanım: $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\frac{r(3r \pm 1)}{2}$ formundaki sayılara pentagonal sayılar denir. Pentagonal sayıların i ve ii'deki koşulları sağlayan bölüntüleri birebir eşlemenin dışında kaldığından bölüntünün r değerinden hareketle $p_e(\partial, n) = p_0(\partial, n) + (-1)^r$ eşitliği elde edilir.

Teorem 1.1:(Euler'in Pentagonal Teoremi)

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} (1 + q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

İspat:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} &= \sum_{m=0}^0 (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=-1}^{-\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{-m} q^{\frac{(-m)(3(-m)-1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} q^m \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} (1 + q^m) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\partial, n) - p_0(\partial, n)) q^n \quad (\text{bkz. Teorem 1.2}) \end{aligned}$$

İspatın tamamlanması için aşağıdaki özdeşliğin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\partial, n) - p_0(\partial, n)) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Bu özdeşlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) &= \sum_{a_1=0}^1 \sum_{a_2=0}^1 \sum_{a_3=0}^1 \dots (-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots} q^{a_1 \times 1 + a_2 \times 2 + a_3 \times 3 + \dots} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\Delta, n) - p_0(\Delta, n)) q^n. \end{aligned}$$

Uyarı: q 'nın kuvveti olan $(a_1 \times 1 + a_2 \times 2 + a_3 \times 3 + \dots)$ değeri $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \dots)$ formunda birbirinden farklı parçalardan oluşan bir bölüntüdür. Ayrıca, bu ifadenini önünde yer alan $(-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots}$ değeri bölüntünün tek sayıda parçası varsa (-1) , çift sayıda parçası varsa (1) olmaktadır. $\sum_{a_i=0}^1 (i =$

1, 2, 3, ...) ifadesi herhangi bir parçanın bölüntüde en fazla bir kez yer alabileceğini gösterir. Teorem 1.3'den de faydalanılarak pentagonal sayıların katsayılarının (-1) ve (1) 'den biri; bunların dışında kalan sayıların katsayılarının ise (0) olacağı açıkça anlaşılmaktadır. (bkz.Yardımcı Teorem 1.2). Eşitliğin sol tarafındaki 1 değeri $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$ iken elde edilir.

Sonuç 1.1 (Algoritma I): $\forall n > 0$ için;

$$I. p(n) + (-1)^m p(n-1) + \dots + (-1)^m p(n - \frac{m(3m-1)}{2}) + (-1)^m p(n - \frac{m(3m+1)}{2}) + \dots = 0$$

($\forall M < 0$ için $p(M) = 0$ ve $p(0) = 1$ 'dir.)

İspat: I eşitliğinin sol tarafı a_n olsun.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[p(n) - p(n-1) + \dots + (-1)^m p(n - \frac{m(3m-1)}{2}) + (-1)^m p(n - \frac{m(3m+1)}{2}) + \dots \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n-1) q^n + \dots + (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n - \frac{m(3m-1)}{2}) q^n + \\ &\quad (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n - \frac{m(3m+1)}{2}) q^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n-1) q^n q + \dots + (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \\ &\quad (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n q^{\frac{m(3m+1)}{2}} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \left(1 - q + \dots + (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} (p_e(\Delta, r) - p_0(\Delta, r)) q^r \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} (1 + q^m) \right) \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n) = 1. \end{aligned}$$

Uyarı: Özellik 1'den $a_i = 0 (i = 1, 2, \dots)$ olur. Elde edilen 1 değeri $p(0) = 1$ eşitliğinden gelmektedir. Bu eşitlikten faydalanarak $p(n)$ 'in hesaplanmasında kullanılabilen Algoritma I elde edilir.

II. BÖLÜM

Tanım: H , pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. Bu durumda $p(^n H^n, m, n)$, n sayısının m tane parçadan oluşan bölüntülerinin sayısını ifade eder. Bu gösterimi iki değişkenli bir özel tanımlı fonksiyon şeklinde aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} f_s(z; q) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(^n H^n, m, n) z^m q^n \\ &= \sum_{\lambda \in H} z^{\#(\lambda)} q^{\sigma(\lambda)}. \quad (\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r), \#(\lambda) = r, \sigma(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r \text{ dir}). \end{aligned}$$

H pozitif tamsayılar kümesi ise $p(^n H^n, m, n)$; $p(\Omega, m, n)$ sembolüyle ifade edilir.

Yardımcı Teorem 2.1:

$$I. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(\Omega, m, n) z^m q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - zq^n)^{-1}$$

$$II. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(^n H^n (\leq d), m, n) z^m q^n = \prod_{n \in H} (1 - z^{d+1} q^{(d+1)n}) (1 - zq^n)^{-1}$$

İspat:

$$\begin{aligned} I. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - zq^n)^{-1} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + zq^n + zq^{2n} + \dots) \\ &= (1 + zq^{h_1} + zq^{2h_1} + \dots) \times (1 + zq^{h_2} + zq^{2h_2} + \dots) \times \dots \\ &= \sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \sum_{a_3 \geq 0} \dots z^{a_1 + a_2 + a_3 \dots} q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots} \end{aligned}$$

Uyarı: q 'nın kuvveti, $(h_1^{a_1} h_2^{a_2} \dots)$ bölüntüsü; z 'nin kuvveti ise bu bölüntüdeki parçaların sayısıdır.

Sonuç olarak aşağıdaki ifadede $z^M q^N$ değeri N 'nin parçaları H kümesinden alınmış M tane parçadan oluşan her farklı bölüntüsü için bir kez yer alacaktır. I için ispat biter.

II'nin ispatı sonsuz geometrik serinin sonlu geometrik seriyle yer değiştirmesi dışında I ile özdeştir.

Yardımcı Teorem 2.2:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})t^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

Özellikler 2:

i. $(a)_n = (a; q)_n = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})$, küçülecek

ii. $(a)_0 = 1$,

iii. Tüm n sayıları için $(a)_n = \frac{(a)_{\infty}}{(aq^n)_{\infty}}$.

İspat:

$$F(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \text{ olsun.}$$

Öyleyse;

$$(1-t)F(t) = (1-at) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)}, \quad \left(n=0, \frac{1-atq^n}{1-tq^n} = \frac{1-at}{1-t} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - at) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - atq^{n+1})}{(1 - tq^{n+1})} \\
&= (1 - at)F(tq) \quad \left(F(qt) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - a(tq)q^n}{1 - (tq)q^n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - atq^{n+1})}{(1 - tq^{n+1})} \right)
\end{aligned}$$

Uyarı: $A_0 = F(0) = 1$ olduğu açıktır. t^n 'li terimlerin katsayılarının eşitliğinden (bkn. özellikler 1.i) aşağıdaki özdeşlikler elde edilir:

$$(1 - t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = (1 - at) \sum_{n=0}^{\infty} A_n (tq)^n \Rightarrow A_{n-1} = q^n A_n - aq^{n-1} A_{n-1}.$$

Buradan;

$$A_n = \frac{(1 - aq^{n-1})}{(1 - q^n)} A_{n-1} = \frac{(1 - aq^{n-1})(1 - aq^{n-2}) \dots (1 - a) A_0}{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q)} = \frac{(a)_n}{(q)_n}$$

Teorem 2.1:

$$\text{I. } \prod_{n=0}^{\infty} (1 - tq^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}$$

$$\text{II. } \prod_{n=0}^{\infty} (1 + tq^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}.$$

İspat: I için Yardımcı teorem 2.2 ' de a yerine 0 yazılırsa istenilen ifade elde edilir. II için Yardımcı Teorem 2.2 'de aynı yöntem kullanılarak a yerine $\frac{a}{b}$; t yerine $b \cdot z$ yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{a}{b} q^{n-1})(1 - \frac{a}{b} q^{n-2}) \dots (1 - \frac{a}{b})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} b^n z^n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - a z q^n)}{(1 - b z q^n)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b - a q^{n-1})(b - a q^{n-2}) \dots (b - a) z^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}
\end{aligned}$$

Son ifadede $b = 0$ ve $a = -1$ atanır ve z yerine t yazılırsa ispat biter:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tq^n)$$

Teorem 2.2:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1}q^{2n+1}).$$

İspat: Teorem 2.3 II 'de t yerine zq ; q yerine q^2 yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(zq)^m (q^2)^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2m})}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m q^{\frac{m^2}{2}}}{(q^2; q^2)_m}, \quad (1.*)$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{(m^2)} (q^{2m+2}; q^2)_{\infty}. \quad (2.*)$$

Uyarı: (2.*) ifadesinde m 'in $(-\infty)$ ' dan gelmesi ifadenin değerinde herhangi bir değişikliğe neden olmamaktadır. Çünkü $\forall m < 0$ için çarpıma $(1 - q^0) = 0$ çarpanı gelecek ve ifadeyi 0 yapacaktır.

Not: (1.*)ifadesinde z yerine $(-q^{2m+1})$ yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + (-q^{2m+1})q^{2n+1}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-q^{2m+1})^r q^{(r^2)}}{(q^2; q^2)_r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (q^{r^2+2mr+r})}{(q^2; q^2)_r}.$$

Ayrıca;

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + (-q^{2m+1})q^{2n+1}) = (1 - q^{2m+2})(1 - q^{2m+4}) \dots = (q^{2m+2}; q^2)_{\infty}$$

olduğundan

$$(q^{2m+2}; q^2)_{\infty} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (q^{r^2+2mr+r})}{(q^2; q^2)_r}.$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade (2.*)' da yerine konursa,

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) &= \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{(m^2)} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (q^{r^2+2mr+r})}{(q^2; q^2)_r} \right). \\ \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) &= \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^r z^{-r}}{(q^2; q^2)_r} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{(m+r)^2} z^{(m+r)} \right) \\ &= \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-q}{z}\right)^r}{(q^2; q^2)_r} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m \right) \end{aligned}$$

Teorem 2.1 de t yerine $\frac{-q}{z}$, q yerine q^2 yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - z^{-1} q^{2n+1})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-q}{z}\right)^n}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2n})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-q}{z}\right)^r}{(q^2; q^2)_r}$$

Bu eşitlikten faydalanarak,

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - z^{-1} q^{2n+1})^{-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m \right)$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m &= (q^2; q^2)_{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) (1 - z^{-1} q^{2n+1}) \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2}) (1 + zq^{2n+1}) (1 + z^{-1} q^{2n+1}). \end{aligned}$$

Sonuç 2.1 (Algoritma II :)

$$p(4n) \equiv p(n) + p(n-7) + p(n-9) + \dots + p(n-\alpha_m) + \dots \pmod{2},$$

$$p(4n+1) \equiv p(n) + p(n-5) + p(n-11) + \dots + p(n-\beta_m) + \dots \pmod{2},$$

$$p(4n+3) \equiv p(n) + p(n-3) + p(n-13) + \dots + p(n-\gamma_m) + \dots \pmod{2},$$

$$p(4n+6) \equiv p(n) + p(n-1) + p(n-15) + \dots + p(n-\delta_m) + \dots \pmod{2}.$$

Not: Kongruans sisteminde denkleğin sağ tarafındaki ifadelerde seri, parantez içindeki değer negatif olana dek sürecektir. Öte yandan $\alpha_m = m(8m \pm 1)$, $\beta_m = m(8m \pm 3)$, $\gamma_m = m(8m \pm 5)$, $\delta_m = m(8m \pm 7)$, ($m = 0, 1, \dots$) formunda sayılardır.

Özellik 3: İspatlarda kullanılacak olan kongruanslar p^k ($k = 0, 1, \dots$) lı terimin katsayıları arasında kullanılmaktadır. Bir örnekle ifade edilecek olursa;

$$(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5,$$

$$(1-x)^5 = 1 + 5(-x + 2x^2 - 2x^3 + x^4) - x^5,$$

$$\equiv 1 - x^5 \pmod{5}.$$

TEŞEKKÜR

Projemizin başından itibaren çalışmamızın gelişiminde ve kaynak tespitinde bize destek olan Prof.Dr. Oktay PASHAEV'e teşekkürü bir borç biliriz.

KAYNAKÇA :

- [1] G. E. Andrews: The Theory Of Partition, 1976
 - [2] F. V. Vainshtein: Partitions Of Integers in KVANT SELECTRA, Algebra and Analysis , 1999
 - [3] Partitions Chapter XIX, Number Theory, Oxford Press.
-

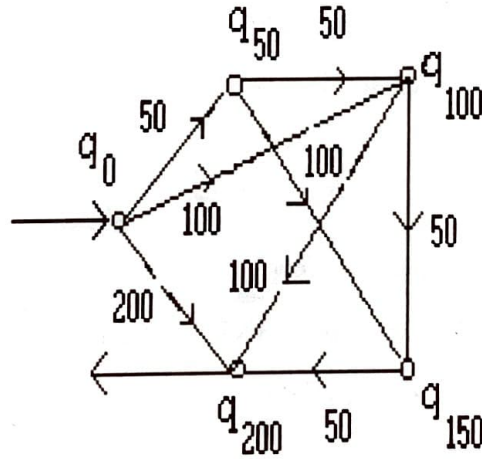
OTOMOTO İLE TANIŞALIM

Gonca Güngör Ayık

Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ADANA

Otomoto kelimesinin İngilizcesi 'automata' dır. Bunu Türkçeye çevirip otomata demek daha doğru olabilirdi fakat söyleyişte dile yatkınlık olarak otomoto demeyi tercih ediyorum. Evet, gerçekten matematikte hesaplama (computation), mantık (logic) ve çizge teori (graph theory) gibi pek çok dalı bir araya getiren bir çalışma alanı. Yalnızca matematikçilerin değil bilgisayar bilimlerinde çalışan insanların ilgisini çeken bir konudur. Benim otomoto ile tanışmam oldukça yeni. Bu teori, yarıgruplar ve otomatiklik yapıları arasında ilişki kurulduğundan dolayı ilgimi çekmeye başladı. Otomoto nasıl bir şey? Anlatmaya bir örnekle başlamak en doğrusu. Genelde biz matematikçilere sorarlar "Buluyorsunuz bir şeyler ama bunu günlük hayatta nerede kullanacağız?" Evet belki bugün kullanılmıyor gibi görülebilir fakat birgün hiç ummadık bir yerde yıllar önce bulunmuş teoriler kullanılır. Kola makinalarını bir düşünün. Şimdi bununla otomotonun ne alakası var demeyin. Bu makineye istediğinizi yaptırmak için makineye anlayacağı dilden yaptıracağımız şeyleri açıklamanız gerekir. Bu yüzden otomoto kullanılıyor.

Elimizde 50, 100, 200 TL. lık bozuk paralar olsun. Makinamız da 200 TL'ye bize kola veriyor olsun. Bu durumda makineye kaç liralık bozuk paralardan kaç tane atarsak makine bize kola verir? Yanıt gayet kolay. (50, 50, 50, 50), (50, 100, 50), (50, 50, 100), (100, 50, 50), (100, 100), (200) olmak üzere altı değişik biçimde makineye para atabilirim. Şimdi bunu şekle dökelim:



Bu şeklin köşeleri durumları, kenarları da makinenin kabul ettiği bozuk paraları temsil ediyor. Parayı atmaya başladığımız anı q_0 köşesi temsil etsin, kola aldığımız anı q_{200} köşesi temsil etsin. İçeride doğru okla para atmaya başlamayı, dışarı doğru okla kola aldığımız anı gösterelim. İçeride doğru okla başlayarak gittiğimiz tüm yollardaki paraları toplayarak dışarı doğru oka ulaşmaya çalışalım. Yukarıda yazdığımız paraların tüm dizisini elde ediyorsunuz değil mi?

İşte yukarıdaki etiketli diagrama bir otomotonun *durum diagramı* denir. Tüm köşelerin kümesi, Q ile göstereceğimiz otomotonun *durumlarının kümesidir*. Kenarların üzerinde kullandığımız tüm etiketlerin kümesi A ile göstereceğimiz otomotonun *alfabesidir*. Tüm yolları tarif eden φ dönüşümü otomotonumuzun *geçiş fonksiyonudur*. q_0 durumuna otomotonun *başlangıç durumu*, q_{200} durumuna otomotonun *bitiş durumu* diyeceğiz. O halde genel olarak Q ve A iki sonlu küme,

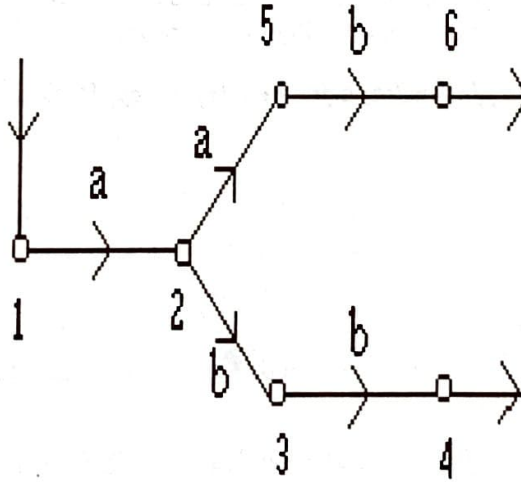
$$\varphi : Q \times A \rightarrow Q$$

geçiş fonksiyonu, i başlangıç durumu ve T bitiş durumları olmak üzere bir $\mathcal{A}$ otomotosu (Q, A, φ, i, T) şeklinde bir beşlidir. Bir otomotoda kenarların herhangi bir dizisine *patika* denir. Bir patikadaki tüm kenarların temsil ettiği semboller ard arda yazarak oluşan ifadeye bu *patikanın etiketi* denir.

$$q_0 \xrightarrow{50} q_{50} \xrightarrow{100} q_{150} \xrightarrow{50} q_{200}$$

ifadesi q_0 başlangıç durumu ile başlayarak q_{200} bitiş durumuna ulaştığımız bir kenarların dizisidir. Kenarların böyle bir dizisine *başarılı patika* diyeceğiz. Bu başarılı patikanın etiketi 5010050 dir. Tüm başarılı patikaların etiketlerinin kümesine de $\mathcal{A}$ otomotosu tarafından tanınan *lisan* denir ve $L(\mathcal{A})$ ile gösterilir. Yukarıda şekli verilen otomotonun tanıdığı lisan

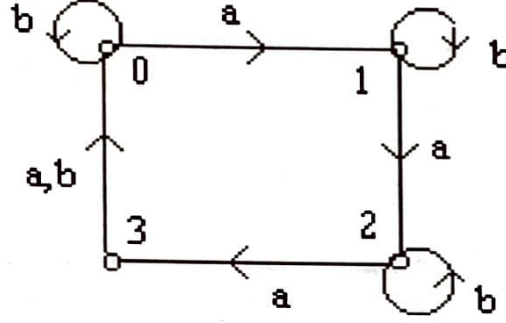
$$L(\mathcal{A}) = \{200, 100100, 5010050, 1005050, 5050100, 50505050\}$$



dir. Örneğin durum diagramı yukarıdaki gibi olan bir otomoto tarafından tanınan lisan $\{a^2b, ab^2\}$ dir. Bir $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi, i, T)$ otomotosunda her $q \in Q$ ve her $a \in A$ için $\varphi(q, a)$ tek şekilde tanımlı ise $\mathcal{A}$ otomotosuna *deterministik otomoto* denir. Bir otomoto deterministik değil ise o otomotonun tanıdığı lisanı tanıyan yeni bir deterministik otomoto bulabiliyoruz. Bununla ilgili bilgileri [2] nolu kaynakta bulabilirsiniz.

Evet konu gerçekten güzel ama yıllardır çözüm bekleyen açık problemleri de çok. Matematik Dünyası okuyucularına Cern's conjecture olarak adlandırılan problemten bahsetmek istiyorum. $|Q| = n$ olan

deterministik bir $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi)$ otomotosunu düşünelim. Problem için başlangıç ve bitiş durumları önemsiz olduğundan otomotoyu yazarken bunlara yer vermedim. Her $q \in Q$ için $qw = \text{olacak şekilde}$ $p \in Q$ varsa w etiketine $\mathcal{A}$ da *senkronizedir* denir. Eğer bir $\mathcal{A}$ otomotosunda bir senkronize etiketli patika varsa $\mathcal{A}$ otomotosuna *senkronize* denir. Aşağıda durum diagramı verilen otomoto $|Q| = 4$ duruma sahip bir senkronize otomotodur.



Çünkü ba^3ba^3b etiketi için $0.ba^3ba^3b = 1.ba^3ba^3b = 2.ba^3ba^3b = 3.ba^3ba^3b = 0$ dir. Cern's conjecture bir n durumlu otomoto senkronize ise $(n - 1)^2$ uzunluğunda bir senkronize etiketli patikanın var olduğunu söyler. Fakat bu henüz ispatlanamamıştır. Gerçekten de bizim örneğimize bakacak olursak $ba^3ba^3b (= baaabaaab)$ etiketinin uzunluğu $9 = (4-1)^2$ dir. Evet soru gayet kolay gibi gözükse de doğru olduğunu gösteren bir ispat bulunmamakla birlikte aksini söyleyen bir örneğe de rastlanamadığından hala yanıt bekliyor. İlgi duyanlar, otomoto ile ilgili açık problemlerin bir kısmına

<http://www.liafa.jussieu.fr/~jep/Problemes>

Web sayfasından ulaşabilirler.

KAYNAKÇA :

- [1] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, Addison-Wesley, 1978
- [2] J. M. Howie: Automata and Languages, Clarendon Press-Oxford, 1991

1. GÖRECE ULUSLARARASI MATEMATİK YARIŞMASI-2001 (SORULAR VE ÇÖZÜMLER)

Menderes İlçesi-Görece Belediye Başkanlığı, İZMİR

Bu sayımızda, İzmir'in Menderes ilçesi Görece Belediye Başkanlığı tarafından 26-29 Ekim 2001 tarihleri arasında matematik dalında ilk defa gerçekleştirilen 1. Görece Bilgi Yarışmasına yer vermek istiyoruz. Bu yarışmanın düzenleniş amacı "Elit bir bilim dalı ve tüm akademik branşların vazgeçilmez parçası olan matematik alanında yetenekli olan öğrencilerin rekabet güçlerinin arttırılması, matematik dalının sevdirmesi ve özendirilmesi ile komşu ülkelerin öğrencileriyle ülkemiz öğrencileri arasında kardeşlik ve dostluk bağlarının geliştirilmesidir". Yarışmada ilk üçe giren okulların sıralaması aşağıdaki gibi sonuçlanmıştır:

- Sofia Amerikan Koleji (105 puan)
- Özel Türk Fen Lisesi (103 puan)
- Turgutlu Fen Lisesi (95 puan)
- Özel Fatih Fen Lisesi (95 puan)

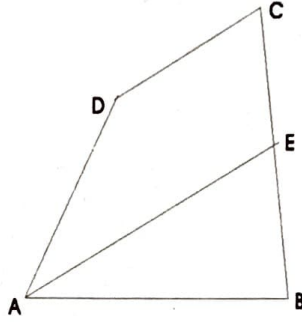
Yarışmada ilk üçe giren öğrenci sıralaması da şu şekilde gerçekleşmiştir:

- Venelin Gornishki (64 puan)
- Ekin Uzun (57 puan)
- Fırat Kiyak (50 puan)
- Hüsnü Erdöşemeci (50 puan)

Dereceye giren okullar ve öğrencilere çeşitli ödüller verilmiştir. Matematik Dünyası olarak dereceye giren katılımcıları kutluyoruz. Ayrıca, Görece Belediyesi'ne, Yarışma Yürütme Kurulu'na ve Yarışma Komisyonu'na matematiğe olan duyarlılıklarından ve böyle bir etkinlikte bulunduklarından dolayı teşekkürlerimizi iletiriz. Yarışma hakkında daha fazla bilgi için Görece Belediye'sinin Telefon ve Faks numaraları: Tel(0.232.781 1244 ve 0.232.781 0967), Faks(0.232.781 1253). Şimdi de yarışma sorularına göz atalım:

YARIŞMA SORULARI

1. a, b, c ikişer ikişer aralarında asal tamsayılar olmak üzere $2a = 3b + c$, $2a^3 = 3b^3 + c^3$ denklem sistemi veriliyor. Buna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?
2. x , gerçel sayı olmak üzere; $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-2001)^2$ olduğuna göre $f(x)$ in alabileceği en küçük değeri bulunuz.
3. Aşağıdaki şekilde $[AE]$ kenarı $[CD]$ kenarına paraleldir. Ayrıca kenarlar arasında $|AD| = |AE| = |AB| = |BC|$ ve $|BE| = |CD|$ dir. Buna göre $\widehat{ADC}$ açısının ölçüsü kaç derecedir?



4. Kenar uzunlukları 1, x , x^2 olan bir üçgen için x gerçel sayılarının değer aralığını bulunuz.
5. $a \cdot b \cdot c \neq 0$ olmak üzere $a + b + c = 0$ ise $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ oranının değeri kaçtır?
6. $S = 10^{10^1} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$ sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?
7. 7 yolcu, 3 vagonlardan oluşan boş bir trene rastgele birer vagon seçerek binerler. Birinci vagona tam olarak 2 yolcu bulunması olasılığı kaçtır?

ÇÖZÜMLER

Çözüm 1. Birinci denklemin heriki tarafına a eklersek

$$2a + a = 3b + c + a \Rightarrow 3(a - b) = a + c \quad (1)$$

ve ikinci denklemin heriki tarafına da a^3 eklersek

$$2a^3 + a^3 = 3b^3 + c^3 + a^3 \Rightarrow 3(a^3 - b^3) = c^3 + a^3 \quad (2)$$

elde ederiz. Şimdi (1) ve (2) eşitliklerini düzenleyerek

$$3(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a + c)(a^2 - ac + c^2)$$

$$3(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 3(a - b)(a^2 - ac + c^2)$$

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 - ac + c^2$$

$$ab + ac = c^2 - b^2$$

$$a(b + c) = (c - b)(c + b)$$

$$c = a + b$$

elde edilir. Bu ifadeyi birinci denklemde yerine yazarsak, $2a = 3b + c = 3b + a + b \Rightarrow a = 4b$, bulunur. Diğer yandan a ve b nin aralarında asal olması için $b = 1$ ve $a = 4$ olması gerekir. Bu da $c = 5$ olacağını gösterir. O halde, $a + b + c = 10$, elde edilir.

Çözüm 2. Parantezleri açarak gerekli düzenleme yapılırsa

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2.2x + 2^2) + \dots + (x^2 - 2.2001x + 2001^2)$$

$$f(x) = 2001x^2 - 2(1 + 2 + \dots + 2001)x + (1^2 + 2^2 + \dots + 2001^2)$$

$$f(x) = 2001x^2 - 2001.2002x + \frac{2001.2002.4003}{6}$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün minimum değeri tepe noktasının ordinatıdır. O halde, $a = 2001$, $b = -2001.2002$, ve $c = \frac{2001.2002.4003}{6}$ olmak üzere, $f(x)$ in enküçük değeri $\frac{4ac-b^2}{4a} = 667667000$ olacaktır.

Çözüm 3. D ile B yi birleştirelim. $[AE]$ kenarı $[DC]$ kenarına paralel olduğundan

$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{AEB})$ dir. Ayrıca, $|DC| = |EB|$ ve $|CB| = |EA|$ oldukları da göz önüne alınırsa, $\triangle DCB \cong \triangle BEA$ bulunur. Buradan da $|DB| = |AB|$ olacaktır. Yani, $\triangle ABD$ eşkenar üçgen, $\triangle DBC$ ikizkenar üçgen olur. Şimdi, $m(\widehat{DBC}) = \alpha$, dersek, $m(\widehat{ABE}) = 60 + \alpha = m(\widehat{AEB})$ olur. Diğer yandan, $\triangle DCB \cong \triangle BEA$, olduğundan, $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{CBD}) = \alpha$, olacaktır. Sonuç olarak, $60 + \alpha + 60 + \alpha + \alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 20^\circ \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 80^\circ \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 140^\circ$ elde edilir.

Çözüm 4. Üçgen eşitsizliğini kullanarak $x^2 - x < 1 < x^2 + x$ yazabiliriz. O halde

$$x^2 - x - 1 < 0$$

$$x^2 + x - 1 > 0$$

$$x > 0$$

eşitsizlik sistemini çözmeliyiz. (Diğer kenarlar için de aynı eşitsizlik sistemi elde edilir.) Bu sistemin çözümünün $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğu kolayca elde edilir.

Çözüm 5. Çözüm için $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ özdeşliğinden yararlanacağız. O halde

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + [3ab(a+b+c) + 3ac(a+b+c) + 3bc(b+c)]$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + [3ab(a+b+c) + 3ac(a+b+c) - 3abc]$$

Diğer yandan $a+b+c = 0$ olduğundan, son eşitlik kullanılarak, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ bulunacaktır. Buradan da $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = 3$ sonucu çıkar.

Çözüm 6. $10 \equiv 3 \pmod{7}$ olduğundan, bu sorunun yanıtı için

$$3^{10^1} + 3^{10^2} + \dots + 3^{10^{10}} \equiv x \pmod{7}$$

olacak şekilde x değerini arıyoruz. Şimdi, $3^1 \equiv 3 \pmod{7}$, $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$, $3^3 \equiv 6 \pmod{7}$, $3^4 \equiv 4 \pmod{7}$, $3^5 \equiv 5 \pmod{7}$, $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, olduğu için, $10^1, 10^2, \dots, 10^{10}$ sayılarının $\pmod{6}$ deki değerlerini bulalım. Her $n > 1$ tamsayısı için $10^n \equiv 4 \pmod{6}$ dir. O halde, $3^{10^1} \equiv 3^4 \pmod{7}$, $3^{10^2} \equiv 3^4 \pmod{7}$, $\dots$, $3^{10^{10}} \equiv 3^4 \pmod{7}$ olacaktır. Buradan da $3^4 + 3^4 + \dots + 3^4 = 3^4 \cdot 10 \equiv 4 \cdot 3 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{7}$ bulunur.

Çözüm 7. Yanıt $\binom{7}{2} \cdot 2^5/3^7 = 21 \cdot 2^5/3^7 = \frac{224}{729}$ dir.

MİKROBİLGİSAYARDA ARİTMETİK (II)

Timur Karaçay
Başkent Üniversitesi, ANKARA

(Geçen sayıdan devam)

Örnekler:

Sayı	Birler Tümleyen	İkiler Tümleyeni
0101	1010	1011
101010	010101	1100
1010100	0101011	0101111

Çarpma işlemi ardışık toplamalarla, bölme işlemi ise ardışık çıkarmalarla yapılabilir. Bu işleri hızlı yapmak için, almaçtaki basamakların sola ya da sağa kaydırılması pratik bir uygulamadır. Yerimiz elvermediği için, bu ayrıntılara burada giremeyeceğiz. Aritmetik ve mantık işlemlerini yapmak için, özel devreli chiplerin yapıldığını da söylemek gerekir. Tabii, bütün bu tasarımlar ikili sayıtlama dizgesindeki aritmetiğe, yani matematiğe dayalıdır.

8-bitlik yazmaca (register) sahip bir mikroilgisayarda işaretli sayıların nasıl yazıldığını inceleyelim.
8-bitlik bir yazmaçta (register), haneler sağdan sola doğru

7	6	5	4	3	2	1	0

diye numaralanır. 7-inci hane işaret hanesidir. Pozitif sayılar için 0, negatif sayılar için 1 değerini alır. Buna göre, 8-bitlik bir yazmaca sığabilecek en büyük pozitif tamsayı

$$0111\ 1111 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = +127$$

dir. İşaretli sayıların 8-bitlik bir yazmaçta temsil edilme biçimleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Pozitif sayılar olduğu gibi yazılır, negatif sayılar ise ikilere tümleyen biçimleriyle yazılır.

Decimal	Yazmaçtaki Temsili	Açıklama	
+127	0111 1111	İkili Temsil	
+126	0111 1110	İkili Temsil	
...	...	...	
+8	0000 1000	İkili Temsil	
+7	0000 0111	İkili Temsil	
+6	0000 0110	İkili Temsil	
+5	0000 0101	İkili Temsil	
+4	0000 0100	İkili Temsil	
+3	0000 0011	İkili Temsil	
+2	0000 0010	İkili Temsil	
+1	0000 0001	İkili Temsil	
+0	0000 0000	İkili Temsil	
-1	1111 1111	İkilere Tümleyeni	
-2	1111 1110	İkilere Tümleyeni	
-3	1111 1101	İkilere Tümleyeni	
-4	1111 1100	İkilere Tümleyeni	
-5	1111 1011	İkilere Tümleyeni	

-6	1111 1010	İkilere Tümleyeni	
-7	1111 1001	İkilere Tümleyeni	
-8	1111 1000	İkilere Tümleyeni	
...	...	...	
-127	1000 0001	İkilere Tümleyeni	
-128	1000 0000	İkilere Tümleyeni	

Bu tabloyu kullanarak, çıkarma işlemini, çıkan sayının ikilere tümleyeniyle toplama işlemine dönüştürebiliriz. Böylece, çıkarma işlemini yapan devrenin olmayışının yarattığı eksiklik kolayca giderilmiş olur.

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +5 \\
 +3 \\
 \hline
 +8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0000\ 0101 \\
 0000\ 0011 \\
 \hline
 0000\ 1000
 \end{array}$$

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +7 \\
 -3 \\
 \hline
 +4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0000\ 0111 \\
 1111\ 1101 \\
 \hline
 1\ 0000\ 0100
 \end{array}$$

İkili temsilde yazmacı taşan en soldaki 1 sayacı atılır.

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +3 \\
 -8 \\
 \hline
 -5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0000\ 0011 \\
 1111\ 1000 \\
 \hline
 1111\ 1011
 \end{array}$$

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 -2 \\
 -5 \\
 \hline
 -7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1111\ 1110 \\
 1111\ 1011 \\
 \hline
 1\ 1111\ 1001
 \end{array}$$

İkili temsilde yazmacı taşan en soldaki 1 sayacı atılır.

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +8 \\
 -5 \\
 \hline
 +3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0000\ 1000 \\
 1111\ 1011 \\
 \hline
 1\ 0000\ 0011
 \end{array}$$

İkili temsilde yazmacı taşan en soldaki 1 sayacı atılır.

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +2 \\
 -6 \\
 \hline
 -4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0000\ 0010 \\
 1111\ 1010 \\
 \hline
 1\ 1111\ 1100
 \end{array}$$

İkili temsilde yazmacı taşan en soldaki 1 sayacı atılır.

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +89 \\
 -46 \\
 \hline
 +4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0101\ 1001 \\
 1101\ 0010 \\
 \hline
 1\ 0010\ 1011
 \end{array}$$

İkili temsilde yazmacı taşan en soldaki 1 sayacı atılır.

Örnek :

$$\begin{array}{r}
 +20 \\
 -60 \\
 \hline
 -40
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0001\ 0100 \\
 1100\ 0100 \\
 \hline
 1\ 1101\ 1000
 \end{array}$$

İkili temsilde yazmacı taşan en soldaki 1 sayacı atılır.

Aşağıdaki tabloda sayıtlama dizgelerinin sayakları listelenmiştir.

Hexadecimal	Decimal	Octal	Binary
0	0	0	0000
1	1	1	0001
2	2	2	0010
3	3	3	0011
4	4	4	0100
5	5	5	0101
6	6	6	0110
7	7	7	0111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
A	10	12	1010
B	11	13	1011
C	12	14	1100
D	13	15	1101
E	14	16	1110
F	15	17	1111

Sayıtlama Dizgelerinin Karşılaştırılması

Octal ve hexadecimal sayıları binary gösterimlerinde kolay okuyup yazmak için onları, sırasıyla 3'erli ve 4'erli gruplara ayırmak uygun olur.

Örnek :

Octal dizgedeki $(6754)_8$ sayısının binary temsili 110111101100 dir. Bunu kolay yazmak için, binary temsilini, sağdan başlayarak 3'erli gruplara ayıralım.

110	111	101	100	=	6754_8
6	7	5	4		

olur.

Örnek :

Hexadecimal dizgedeki $(DEC)_{16}$ sayısının binary temsili 110111101100 dir. Bunu kolay yazmak için, binary temsilini, sağdan başlayarak 4'erli gruplara ayıralım.

1101	1110	1100	=	DEC_{16}
D	E	C		

olur.

Sekizli (octal) ve onaltılı (hexadecimal) sayıların gösterimi

$2^3 = 8$ ve $2^4 = 16$ olduğu ve ana bellekte adres büyüklükleri 8 ya da 16 bit'ten oluştuğu zaman, sekizli ve onaltılı sayıların ikiliye dönüşümü ve ikiliden bunlara dönüşüm pratik bir rol oynar. Bu dönüşümü kolaylaştırmak için, sayıların ikili gösterimlerini, sırasıyla, 3'erli ve 4'erli hanelere ayırmak uygun olur.

Örnek:

$(26153.7406)_8 = (10\ 110\ 001\ 101\ 011\ 111\ 100\ 000\ 110)_2$
2 6 1 5 3 7 4 0 6

Örnek: İkiliden onaltılıya dönüşüm.

$(10\ 1100\ 0110\ 1011\ 1111\ 0010)_2 = (2C6B.F2)_{16}$
2 C 6 B . F 2

Örnek: Sekizliden ikiliye dönüşüm.

$(673.124)_8 = (110\ 111\ 011\ 001\ 001\ 010\ 100)_2$
6 7 3 1 . 1 2 4

Örnek: Onaltılıdan ikiliye dönüşüm.

$(306.D)_{16} = (0011\ 0000\ 0110\ 1101)_2$
3 0 6 . D

BCD Sayıları

Dönüşüm kolaylığı nedeniyle, binary sayılar, çoğu kez, hexadecimal dizgede temsil edilirler. Binary temsilden decimal temsile dönüşüm uzun işlemler gerektirir. Bu nedenle, dönüşümü kolaylaştıran bir kodlama dizgesi kullanılır. Adına BCD (Binary Coded Decimal) denilen bu dönüşüm tablosu aşağıda verilmiştir. En yaygın kullanılanı 8421 BCD Kodlama Tablosudur.

8421 BCD Kodlama Tablosu

Decimal	BCD			
	8 ler	4 ler	2 ler	1 ler
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Örnek:

Yukarıdaki tabloyu kullanarak 3691 sayısını decimalden BCD ye dönüştürünüz.

3 6 9 1
0011 0110 1001 0001

Örnek:

Yukarıdaki tabloyu kullanarak 1000 0000 0111 0010 sayısını BCD den decimale dönüştürünüz.

1000 0000 0111 0010
8 0 7 2

Alıştırmalar

- Aşağıda 10-lu dizgeden BCD ye yapılan dönüşümlerin doğruluğunu sağlayınız.
 - 39 = 0011 1001
 - 40 = 0100 0000
 - 82 = 1000 0010
 - 65 = 0110 0101
 - 17 = 0001 0111
 - 99 = 1001 1001
- Aşağıda BCD den 10-lu dizgeye yapılan dönüşümlerin doğruluğunu sağlayınız.
 - 1000 0000 = 80
 - 1001 0010 = 92
 - 0100 0011 = 43
 - 0000 0001 = 1
 - 0111 0110 = 76
 - 0101 0101 = 55

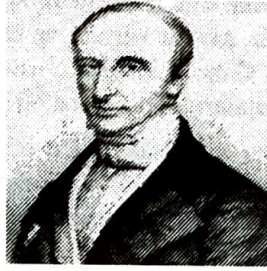
LİMİTİN ÖYKÜSÜ

Ünal Ufuktepe

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

e-posta: ufuktepe@likya.iyte.edu.tr

Augustin Louis Cauchy'nin (1789-1857) yaşadığı dönem, Fransa'da toplumsal kargaşaların, savaş ve ihtilallerin yoğun olduğu bir dönemdir. Buna karşın matematikte getirdiği tanımlar, detaylar üzerindeki son derece titiz tutumu ve düşüncelerini alabildiğine sade ve düzgün bir şekilde formüle edişi onu çağdaşlarından farklı kılmaktadır.



21 Ağustos 1789'da Paris'te doğan Cauchy bir ihtilal çocuğudur. Siyasi ve ekonomik krizler yüzünden çocukluğu yoksulluk içinde geçmiş olmasına karşın matematik dünyasına kazandırdığı kavramlar büsbütün devrimcidir. Onun yazdığı herşeyde bir önsezi, genelleme ve son derece profesyonel bir sınıflama duygusu vardır. Cauchy'nin 789 yayımlanmış makalesi vardır. Bu makalelerinin bazıları üçyüz sayfayı geçmektedir. Onun bu uzun makalelerinden dolayı baskı maliyetleri artan dergiler makalelere 4 sayfa sınırını getirmiştir. Bu gelenek bu dergilerin bir çoğunda hala devam etmektedir.

İhtilal nedeniyle okulların kapalı, giyotinlerin açık olduğu bir dönemde Cauchy köyünde en saf ve duru duygularıyla şiirler yazmış, matematik çalışmıştır. Temel eğitimi evde babasından almış olan Cauchy 13 yaşına kadar okula gitmemiştir. Onun matematik yeteneğini ilk Laplace ve Polytechnique'de profesör olan Lagrange keşfetmiştir. Lagrange, Laplace'ın da bulunduğu bir toplantıda arkadaşlarına "Bu genç bir gün hepimizi geçecek" dediğinde belki Laplace dışında kimse onu ciddiye almamıştı. Bir toplantıda Laplace, Cauchy'nin serilerin yakınsaklığı üzerine konuşmasını dinlerken gök mekaniği üzerine özenle kurduğu kuramların biran yıkılacağını sanmıştır. Evine gidip serilerin yakınsaklığını bir kez de Cauchy'nin yöntemleriyle kontrol ettiğinde rahat bir nefes almıştır.

Cauchy 1816 da bir zamanlar öğrenci olduğu Polytechnique'de matematik profesörü olur ve o dönemin en büyük görevlerinden biri olan Bilimler Akademisine seçilir. 1820 lerde yazdığı önemli eseri "Cours d'Analyse" de gelecek yüzyılın matematik eğitiminin standartlarını belirlemiştir. Bu kitabın kalkülüse verdiği biçim hala geçerlidir. Kalkülüs'un Cauchy'si 18. yüzyılın küçüklüklerine sırtını çevirmiş biridir. Ama toplumun kendisi hakkındaki ön yargısı, "bağnaz katolik matematikçi" tanımlaması canını çok sıkımsı olmalı ki bu tanımlamanın isim babası diye düşündüğü genç Abel'in makalesini uzun süre elinde tutmuş Abel'in ölüm gününe kadar yayımlatmamıştır. Cauchy yeni kurulan hükümete bağlılık yemini etmediği için 1830'da İtalya'nın Tülin kentine yerleşmiş, burada uzun süre matematiksel fizik profesörlüğü yapmıştır. 1838 de Paris'e geri döndüğünde yemin konusundaki tutumunu değiştirmedeği için devlet kurumlarında görev alamamış ve uzun süre dini okullarda ders vermek zorunda kalmıştır. 1848 de yemin koşulu kaldırılınca eski görevine dönmüş ve ömrünün sonuna kadar Sarbonne'da çalışmıştır.

Çağdaş matematiğin hemen hemen her yerinde; teoremlerde, tanımlarda, sağlam ve doğru olan kanıtlarda onun izleri vardır. Onun büyük tanımları, temel olarak onun eseri olan bir limit kavramı, içinde parıltılı dişli çarkları bulunan dönemin büyüleyici İsviçre saatlerinden daha güzel ve gizemlidir. Herşeyin bir patlamayla başladığı; uzay ve zamanın parlak bir yay gibi eğildiği; ve sonsuz zaman geçtiğinde büyük yıldızların söndüğü ve arkalarında madde ve ışığın kontrolsüz bir biçimde içine doğru ilerlediği sonrada yok olduğu kara delikler bıraktığı söylenir. Bunun ne kadar doğru, ne kadar büyüleyici olduğunu bilmiyorum ama modern kosmolojinin ortaya çıkmasından uzunca bir süre önce, kalkülüs, sıradan kavramların hiç de sıradan olmadığı inanılmaz bir uyum ile göstermeye yarar, ve basit hız sonsuzluğun sınırlarında bir kavram olarak görünür. Ama yinede en ilginç olanı, uzaydaki şu kara deliklerden daha ilginç olanı Cauchy'nin önerdiği dünyanın paradoksların hızlarını netleştirmeye yeterli olduğu şeklineki sözleridir.

Cauchy'nin matematiğe katkılarını bu yazıya sığdırmak mümkün değildir, ama okuyucunun okuduğun da ders kitaplarından çağrışım yapacağını düşündüğümüz katkılarından bazılarını yazmakta yarar var; serilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı üzerine testler (oran ve kök testi gibi), süreklilik ve türevin limit kavramı ile tanımlanması, determinatlar, sayılar kuramı ve karmaşık sayılar üzerine eşsiz çalışmalar. Karmaşık analizde onun adı ile anılan Cauchy integral formülü, Cauchy integral teoremi, Cauchy-Riemann denklemleri onun özgün çalışmalarından sadece bir kaçıdır.

Cauchy ile birlikte sonsuza kadar küçülen ve sonsuza kadar büyüyen sayılar kuramı "limit kuramı" na yerini bırakır. Bu kavram duru ve basit olmasına karşın tanımı karmaşıktır. Kavram sonuç itibarıyla bir şeye gittikçe yaklaşma fikrinden daha gizemli başka bir şeyi içermemektedir. Bu kavram, insanoğlunun diğer bir çabaya yaklaşması için başka bir çabanın var olmasını gerektirdiğini ileri sürer: matematikte olduğu gibi sevgide de silinmeyen şey ne yazık ki mesafenin azaldığıdır, ve çoğunlukla geçmişte nasılsa hep öyle kalır, yani umutsuzca hüznünlü, umutsuzca sonsuzdur.

LİMİT KURAMI

Tanım kümesi doğal sayılar olan bir fonksiyona dizi denir. Lise öğrencileri ise buna kabaca belirli bir özelliğe sahip sayılar kümesi derler. Aşağıdaki kümenin elemanları sonsuza kadar gider. Örneğin

$$\{a_n\}_1^\infty = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

ifadesinde, $\{a_n\}$, dizinin ismidir. a_2 , dizinin 2. elemanı demektir, yani $1/2$ dir. Bu durumda $a_7 = 1/7$ ve $a_n = 1/n$ ise genel bir kural olup, bir çeşit reçetedir yani dizinin genel terimidir. Üçgensel sayıların dizisini de $\{b_n\}$ dizisiyle gösterelim,

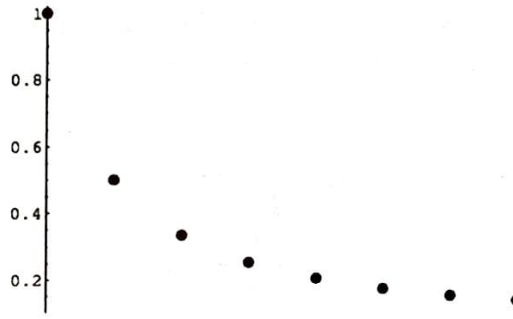
$$\{b_n\}_1^\infty = \{1, 3, 6, 10, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots\}$$

$\{a_n\}$ dizisi gibi $\{b_n\}$ dizisinin elemanları da sonsuza gitmektedir. Ancak bu diziler arasında oldukça hissedilir bir fark vardır. Şimdi iki diziyi de birlikte yazalım

$$\{a_n\}_1^\infty = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

$$\{b_n\}_1^\infty = \{1, 3, 6, 10, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots\}$$

Birinci dizi 1'den keskince aşağıya doğru inerken, ikinci dizi monoton bir şekilde büyüyen bir dizidir. Bunların ötesinde açık olan bir başka gerçek birinci dizinin elemanlarının yaklaştığı bir değer vardır başka bir ifadeyle belirlenmiş bir hedefi vardır. Bu şu demektir, dizinin elemanları devam ettikçe bunlar belirlenmiş bir değere yaklaşıırken dizinin terimleri bir birbirlerine çok yaklaşıyor. Yukarıdaki örneğimizdeki $\{a_n\}$ dizisi 0 değerine yaklaşıyor. Bu dizinin elemanlarının grafiğine baktığımızda



dizinin elemanlarının sıfıra yaklaştığını görürüz. Bu dizinin elemanlarının yaklaştığı bir değer olduğunu sembolik olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

şekilde ifade ediyoruz. Bu sembolün anlamı ise şudur; n sayısı sonsuza yaklaştıkça $\{a_n\}$ dizisi 0 limit değerine yakınsar. Bu dizinin elemanları uzadıkça, limit değeriyle elemanları arasındaki fark küçülür. Örneğin dizinin 100. terimi ile limit değeri arasındaki fark $1/100 = 0.01$ iken 4. terimi arasındaki fark 0.25 dir. Sonuç olarak dizi uzadıkça ardışık terimler arasındaki farklar küçülmektedir. Bu matematiksel işlemlerle böylece limit tanımına yaklaşmış oluruz. Limit'in bu gün kullandığımız $\epsilon - \delta$ tanımını ise ilk olarak alman matematikçisi Karl Weierstrass (1815-1897) vermiştir:

Tanım: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $N > 0$ doğal sayısı vardır ki her $n \geq N$ için $|a_n - L| < \epsilon$ ise L sayısına $\{a_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ şeklinde ifade edilir.

Bir A noktasından B noktasına olan mesafe 1 metre olsun. Zeno, bir kişinin bir noktadan diğer noktaya ulaşması için önce yolun yarısını katedeceğini, sonra kalan yolun yarısını, ve bu işlemin bu şekilde sürüp gideceğini sonuç olarak sonsuz bölünmeden dolayı kişinin diğer noktaya hiç bir şekilde ulaşamayacağını ileri sürer:

Şimdi bu yolculukta alınan toplam mesafe mutlaka bireysel adımların toplamından daha farklı bir şey değildir. Sembolik olarak bunu

$$|AB| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Madem bu değer terimlerin sonsuz sayıda toplanması üzerinde kurulmuştur öyleyse sonuçta sonsuz olmalıdır. Böylelikle Zeno'nun aceleci ama doğal sonucuna göre, katedilen mesafe sonsuz olacağından A dan B ye asla ulaşamaz. Bu paradoks 2000 yıldan fazla var olduğundan Zeno da ortaöğretim ve yüksek öğretim kitaplarında hep var olmuştur. Deneyim ve gözlemler göstermiştir ki sonlu bir çok sayı toplandığında toplam anlamlı olur. Oysa deney ve gözlemlerle açığa çıkartılan dünyanın ötesinde, bir diğer dünya(lar) vardır ki bu dünya tanımlarla açığa çıkartılmış bir dünyadır. Bu problemde var olan limit kavramı sonsuz toplamı mümkün kılar ve bu kavram ilginç bir şekilde gerçek dünyada yerini alır. Temel fikir basit ve gözalcıdır, keşvedici ve yaratıcıdır. Bu kavram sayesinde matematikçi sonlu bir miktara ulaşmak için sonsuz bir çok sayıyla mücadele etme gücünü

elde etmiştir. Dizideki ilk terim serinin ilk terimine (birinci adımda alınan mesafe), ikinci terim ikinci adım sonunda alınan toplam mesafeye, n . terim n . adımla alınan toplam mesafeye karşılık gelen $\{s_n\}$ dizisinin katılımlıyla sonsuz toplamayı yapmak mümkün olabilir.

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$$

⋮

$$s_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474$$

Dizi devam ettikçe, kısmi toplamların 1 sayısına yaklaştığı ortaya çıkar, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$$

dir. Bu sonuçta düşsel bir sıçramadır. $\{s_n\}$ dizisinin limiti, n sonsuza yaklaştığında, matematikçi sonsuz serilere yönelir. Anlamsız gözükten şeyleri anlamlı kılmaya yönelir. Limit kavramı sayesinde matematikçilere paradokslara karşı manevra yapmak için bir alan yaratılmıştır. Sonuç olarak bu kavram sayesinde matematikçiler görülmeyen ve yasak şeyleri görmeye başlamıştır.

Bu yazıyı limit ve sonsuz seri toplamına dair bir soru ile noktalyalım artık:

SORU: Aralarındaki uzaklık 300 km olan iki araba tek yönlü bir yolda bir birlerine doğru saatte 100 km hızla hareket etmeye başladıkları anda bu arabaların birinin ön camında üzerinde bulunan bir arı arabalarının hareketiyle birlikte saatte 200 km hızla karşıdan gelen arabayı uyarmak için uçmaya başlar, arabaya ulaşır ulaşmaz hiç durmaksızın bu sefer diğer arabaya doğru uçmaya başlar, arı bu uçuşuna facianın olduğu ana kadar devam eder. Bu zavallı arının toplam olarak kaç km uçtuğunu sonsuz seri toplamı olarak ifade ediniz? (Zeno gibi bu arabaların çarpışması ya da arının karşı arabaya ulaşması mümkün değildir deme hakkınız yok.)

KAYNAKÇA

- [1] E. Bell: Büyük Matematikçiler Cilt I, Çeviri: Ömer İnönü, İ.İşmen, C.Akova, Z.Demirgüç, MEB Yayınları, 255-275, 1945
- [2] D.E.Smith: History of Mathematics, Dover Pub., 1951
- [3] B. Belhoste, A.L.Cauchy: A Biography, New York, 1991
- [4] Thomas & Finney: Calculus, 9th Edition, Addison Wesley, 1996

OKUR KÖŞESİ...

EMEKLİ BİR MATEMATİK ÖĞRETMENİN KATKISI NE OLUR

Ali YILMAZ, Emekli Matematik Öğretmeni, İzmir

(yilmazemo@hotmail.com)

Gençler için Matematik Dünyası(MD)'nin önemi nedir, bilemem. Ama yetmiş yaşını geçmiş, okullardan ve çocuklardan uzaklaşmış, telefonu bile olmadan, bir köy evinde yalnız matematik ve bir e-posta adresi aracılığıyla yaşamla bağ kuran emekli bir matematik öğretmeni için MD en büyük dost. Bu nedenle Temmuz sayısının Ekimde çıkması, "dergimizin normal süresinde çıkmamasındaki temel sorununuz, mevcut ekonomik krizin yansıması ve bize ulaşan makale sayısının azlığı" denmesi bu emekli matematik öğretmeni(EMÖ)'ni çok üzüyor. EMÖ'ni sevindiren konu ise derginin abone sayısının artması ve yeterli sayıda makale gelmesi durumunda MD'nin sürekli yaşatılacağını bilmek.

Şimdi kendisine soruyor: Dergi nasıl çok satar? Bir EMÖ'nin buna katkısı ne olur? MD'yi çok beğendiği ve kendisinin de addettiği için -belki sınırını da aşarak- bu soruları yanıtlamaya çalışıyor. EMÖ köy enstitüleri döneminde okumuş, geometrinin en önemli ders olduğu, devlet ortaokul sınavlarında az ama zor matematik sorularının sorulduğu bir dönemde matematik öğretmeni olmuş biri. Öğretmen olarak cebir ve geometriyi ayrı okutmuş, İTÜ'nün yayınladığı MFK [matematik-fizik-kimya] dergilerinden, Coronet, Papalier, Petersen, vb. lerinin yazdığı geometri kitaplarının çevirilerinden yararlanmış biri. Matematiği daha iyi öğrenebilmek, daha iyi öğretebilmek için almanca öğretmeni arkadaşının da yardımıyla kendi başına almanca öğrenmiş biri. Bir soruyu çözmek için -ÖSS sınav sorularındaki gibi bir dakika değil, saatler, günlerce çabalayan biri. Bunlara rağmen bazı MD makalelerini anlamada güçlük çeken, bazı MD sorularını çözmeye başarılı olamayan biri. Kullanılan bir çok terimi anlamıyor, "Acaba bunlar yalnızca fakültelerin matematik öğrencilerine mi sesleniyor?" diye düşünen biri. Halbuki ülkemizde çok geniş bir öğrenci kitlesi için matematik büyük bir sorun. Acaba MD'miz bu sorunu çözmeye önderlik edemez mi? Bu soruna, sorunu benimseyerek, en baştan başlayıp sabırla ve özenle ilerleyerek doğru çözümler üreterek çare bulamaz mı? Derginin yarısını "ilginç matematik" diğer yarısını da "uygulamalı matematik" ve onun sorunlarına ayıramaz mı? Bu durumda okuyucu sayısı hızla artmaz mı? Bir EMÖ'nin -belki birçok EMÖ'nin- katkısı da bu noktada olur.

- İlköğretim ve ortaöğretiminde-somut örnekleriyle-matematik nasıl öğretilmeli?
- Üniversite giriş sınavına akıllıca nasıl hazırlanılır?
- Bir mühendis, bir ekonomist, ve diğer meslek dalları matematiğin hangi dallarını öğrenirler?
- Diğer derslerde matematiğin yeri nedir?
- Dil öğreniminde matematik etkili midir?

EMÖ, bu ilk yazısında somut bir konuyu sunmak ve tartışmaya açmak istiyor. Matematik öğretiminin en genel, en temel sorunu:

ÇÖZÜM EZBERLEMEK x ÇÖZMEYİ ÖĞRENMEK

Çözüm ezberlemek başlangıçta bir çok öğrenciye kolay gelir. Bir ilkokul öğrencisine şöyle bir soru sormak mümkün; "Bir kümesteki tavşan ve ördeklerin bacakları toplamı 80 dir. Bu kümesteki tavşanlar ördeklerden 5 fazla ise kümeste kaç ördek, kaç tavşan vardır?" Bir çok öğrenciniz bu soruyu çözebilir. Nasıl? (a1) önce toplam bacak sayısından, fazla olan tavşanların toplam bacak sayısı çıkartılır: $80 - 5 \times 4 = 60$. (a2) şimdi tavşan ve ördek sayısı aynı; bunları çift çift düşünürsek bir çiftin $4 + 2 = 6$ bacağı var. (a3) kalan bacakları buna bölersek: $60 / 6 = 10$ çift, yani ördek, (a4) $10 + 5 = 15$ tavşan var, diye açıklarsınız. (a5) ama en ezbere yakın öğrenciler -düzeneksel öğrenenler- bunu "Büyük sayıdan küçük sayının, tavşan fazlaysa 4 katını; ördek fazlaysa 2 katını çıkar. Kalanı 6 ya böl, az olanı bul. Fazlasını topla, çok olanı bul" diye ezberlerler. (a6)

Bu tür düşünme sistemine alışanlar sonuçta karmaşıklığa yenilirler. Bir süre sonra da cebirsel çözümleri anlayamaz ve matematikten nefret etmeye başlarlar. Almanyadaki ilköğretim matematik kitaplarının adı Nussknacker (fındıkkıran) dır. İlkokul üçüncü sınıfta "otoparkta üst katta 179 araba, alt katta 20 araba daha az varsa toplam araba sayısı nedir?" diye iki işlemli bir soru en zor sorudur. Sonuçta ise Nobel bilim ödülleri bu çocuklar paylaşır. Çünkü küçük yaşta yorulmamış, ezilmemiştir. Öğrenme ve araştırma süreçleri ileri yaşlara kadar sürdürülmüştür. Orta öğretimde de benzer ezberci yaklaşım vardır. Üniversitelerde durum nedir bilemiyorum, bunun açıklamasını konuyu bilenlere bırakıyorum.

Çözmeyi öğrenmek ve çözmeyi öğretmek de başlangıçta zordur. Öğrenme ve öğretme teknikleri bir biriyle tam tanışık olmadıkları için sorun yaşanır. Öğretmen öncelikle konuyu özümlemiş olmalıdır. Ancak bu sayade çözümlenmeyi, düşünmeyi öğretme sürecinde her tekniği deneyebilir. Bir konuyu sabırla, özenle, tane tane sunmalı. Öğrenci de sorgulamayı, soru sormayı, analiz etmeyi, problem çözümlenmeyi öğrenmelidir. Ama şunu da itiraf etmeliyiz ki başlangıçta bir çok terim ve tanımlar öğrenci ezberlemek durumundadır. "Matematik ezber dersi değil!" diyenlerin kulakları çınlasın. Sorun öğrencinin mevcut bilgiyi seçerek kullanabilmesidir.

"ÇÖZMEYİ NASIL ÖĞRENECEĞİZ?" i de başka MD'lerimize bırakalım. Yaşlı, emekli bir matematik öğretmeninden tüm gençlere saygılarla, "büyüklerimi saymak, küçüklerimi korumak" ne yanlış değil mi?

YAŞLI BİR MATEMATİK ÖĞRETMENİNİN YAKARIŞI

Mustafa Saka, Emekli Matematik Öğretmeni, İzmir

Elli yıldır matematik öğrenenlere yardımcı olmaya çalışan bir öğretmen neden bugün acı duyuyor? Bunu ruhsal bir yapı bozukluğu ile açıklayabilir miyiz? Gelin bu sorunu birlikte çözümlemeye çalışalım:

1) Kurtuluş Savaşında özgürlüğümüzü kazandığımızda nüfusumuz 14 000 000, sanayi işçimiz 1600, okur-yazarımız ... imiş. Ayrıca acaba kaç kişi basit bir hesaba yapabiliyormuş? Basit bir cebir-geometri bilgisini anlatabilecek kaç öğretmenimiz varmış? "Büyük Osmanlı İmparatorluğu'nun medreseleri" matematik olarak ne öğretiyormuş? Yeni Türk ABC'sinin hazırlanmasında birçok aydınla birlikte çalışan M.K.Atatürk neden yalnız başına "Geometri Kılavuzu" nu yazmış? Bkz. Cumhuriyet Gazetesi'nin kültür hizmeti "Yazı Devriminin Öyküsü"-S.N. Özerdim, "Atatürk ve Harf Devrimi"-M.Ş. Ülkütaşır, "Atatürk'ün yazdığı Geometri Kılavuzu"-N. Uğurlu adlı kitaplar.

Türk halkının aydınlanmasında büyük emeği olan, bu amaçla Dünya Klasikleri'nin yayınlanmasına, Köy Enstitülerinin kurulmasına önderlik eden, Milli Eğitim Eski Bakanı Hasan Ali Yücel, neden Mantık ve Felsefe kitabı yazmış? Bu klasiklerden Bkz. Descartes, 'in "Aklın İdaresi İçin Kurallar" ve "Metod Üzerine Konuşma" kitapları, Poincare'nin "Bilim ve Varsayım" kitabı.

Köy Enstitüleri ve buralarda verilen eğitimle hiç ilgilendiniz mi? Köy Enstitülerinin Tonguç Babası, İsmail Hakkı Tonguç'un "Canlandırılacak Köy" kitabını mutlaka okumalısınız.

2) Çifteler Köy Enstitüsü ve Hasanoğlu Yüksek Köy Enstitüsü Müdürü Rauf İnan neden birçok matematik kitabı da yazmış? Neden "Hayat İçin ve Çocuğa Göre Hesap" kitabının adına böyle bir sıfat eklemiş? Rauf İnan'ın kitaplarını kitapçılarda bulmak mümkün mü?

3) Neden İTÜ de "Tasarı Geometri" öğretmenlerinin adları Lagland, Andre Reüs, Horniger? Bugün hangi üniversitemizde tasarı geometri ne kadar öğretiliyor? (Yoksa Monge'u anmamıza gerek yok mu?)

4) 1944'te Ortaöğretim Öğrencileri İçin MFK(Matematik-Fizik-Kimya) dergisi çıkarılmaya, buna ek bazı kitaplar çevrilmeye, 1974'te tüm dünyadan çeviri bazı küçük kitapçıklar yayınlanmaya başlanmıştı. Bunlar yok artık?

5) 65 000 000'luk bir ülkede biricik olan Matematik Dünyamız neden el değiştirip duruyor? Neden yayın hayatı yer yer kesintiye uğruyor?

6) Orta öğretim kitaplarına baktığımızda birçok çeviriyle, düzensizlikle, özensizlikle, bilgisizlikle sonuç olarak olumsuzluklarla karşılaşmıyor muyuz?

A. "Matematik-Geometri-Analitik Geometri" ayrımı bile bir çelişki, bir özensizlik örneği değil mi? Bağımsız

matematik dallarının, Mantık-Küme Bilgisi-Aritmetik-Cebir-Analiz-Geometri olduğunu Analitik Geometri-Grafik Çizimi-Trigonometri-Metrik'in bir eşleme olduğunu [Geometri-ACA(Aritmetik-Cebir-Analiz) eşlemesi] sistemli bir biçimde bağımsızca öğretilmesi gerektiğini kaç matematik öğretmenimiz görebiliyor?

B. (örnek olarak bir Lise1 kitabı alsak) "bunlar neden öğretiliyor?" sorusuna mantıklı

(yani matematiksel) bir yanıtımız var mı? (Ayrıntılı eleştiride bulunmasak bile)

a) Bu bir "yarı ispatlı matematik" değil mi?

b) Önce mantık ve kümelerde bol bol kullanıp, sonra (ilişki kurmadan) "bağıntı ne?", "işlem ne?", "bunların özellikleri ne?" diye anlatmak ezberci eğitim değil mi?

c) Bağıntı-Fonksiyon-İşlem'in bu en genel anlatımı "Soyut Matematik" yani üniversite konusu değil mi? Bu, kümeler ve bağıntı okları kullanımıyla somutlaşmış olur mu?

d) "Halka" ve "cisim" in en genel tanımları farklı bir bölümde "Rasyonel Sayılar" altında mı verilir?

e) Modüler Aritmetik' i Gauss apayrı bir kitap halinde sunmuyor mu? Burada tamsayılarla, rasyonel sayılar arasında doğru yerde mi?

f) Üs, doğal sayılarda bölüm içinde, gerçel sayılarda iki ayrı bölümde verilince mi daha iyi öğrenilir?

g) Öğrencilerin matematik alanında başarı oranının düşük oluşunda matematik öğretmenlerinin ve okutulan matematik ders kitaplarının payı yok mu?

7) Üniversitelerimizde okutulan (örneğin) topoloji'yi Poincare ve Brouwer görse ne der? (Cebirsel Topoloji'nin kurucuları bunlar değil mi?)

8) Kitap yazarken (Mustafa İnan'ın örneğini izleyip) konuyu özümleyip, bölümleri planlayıp, özgün bir biçimde mi yazıyoruz yoksa birkaç yabancı kitaptan (tam anlamadan) aktarma mı yapıyoruz? Mustafa İnan, çocukluğundan beri iyi bir öğretmenmiş. Ona bile neler yaptığımızı öğrenmek isterseniz Oğuz Atay'ın "Bir Bilim Adamının Romanı" nı okuyun. Ne olur, gelin (yukarıdaki soruları da yanıtlayarak) durumumuzu gerçekçi değerlendirelim! Öğretmen-öğrenci el ele vererek 1940 lardaki coşkuyu tekrarlayalım. Matematiğimizi tekrar "yaşam için ve öğrenciye göre" yapalım. "Matematik Dünyamız" ı buna öncü kılalım. Gerekirse baştan başlayalım. Ama okurlarımız için, öğrencilerimiz için yazalım. Onları "bir dakikalık" üniversite sınav kabusundan uzaklaştıralım. (ÖSS ve ÖYS de Türkiye birincisi olup sonra üniversitede başarılı olamayıp bırakan çocuklarımızın sayısını arttırmayalım.) Gerekirse baştan başlayalım. Ama önce konumuzu iyice özümleyelim, bu konuda hiçbir şey bilmeyenlere bile anlatabilir hale getirelim. Yazmış olmak için değil, yararlı olmak için yazalım. Ne dersiniz, bu istekler ruhsal bozukluk sonucu mu, yaşlı bir öğretmenin gerçekçi gözlemleri ve toplumcu dilekleri mi? Umarım, yayın kurulunun değerlendirmesi olumlu olur ve bu yakarış yayınlanır. Umarım, okurlarımız (olumlu-olumsuz) tepki gösterir ve tartışma başlar. "tez x antitez sentez" e ulaşırız. Umarım, Matematik Dünyamız'ın bazı sayıları matematik eğitiminin temel sorunlarına ayrılır. Umarım, dergi sayesinde öğrencisinden, öğretmenine kadar büyük bir matematik camiyasına seslenebilir ve onların da katılımını sağlayabiliriz. Umarım, Matematik Dünyamız yine el değiştirmez, uzun yıllar gelişerek yayın hayatını sürdürür. Saygılarımla.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla-İzmir adresine 31 Aralık 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.241. $a^2 + 2cd + b^2$ ve $c^2 + 2ab + d^2$ sayıları, tam sayıların kareleri olacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tamsayıları bulunuz.

A.242. Kareli kağıt üzerinde, köşeleri karelerin köşelerinde bulunan ve iki kenarortayı birbirine dik olan bir üçgen çiziniz.

A.243. Doğru üzerinde bir kaç nokta alındı. Sonra her iki komşu nokta arasında bir nokta daha alındı. Bu işlem iki kez daha yapıldı (toplam üç kez). Sonuçta doğru üzerinde 113 nokta olduğuna göre başlangıçta kaç nokta alınmıştır?

A.244. Kesrin payı ve paydası, toplamı 101 olan pozitif tam sayılardır. Kesrin $\frac{1}{3}$ 'ten büyük olmadığı biliniyor. Bu kesir en fazla kaç olabilir?

A.245. $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$ ise, $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ ve $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ denklemlerinden hiç değilse birinin reel kökünün bulunduğunu gösteriniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.241. a, b, c pozitif tam sayıları için

$$a \cdot b + b \cdot c = c \cdot a$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$OKEK(a, b) = OKEK(b, c) = OKEK(c, a)$$

olduğunu gösteriniz.

Y.242. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine diktir, AB ve CD kenarları da paralel değildir. AB ve CD kenarlarının orta dikmeleri, $ABCD$ dörtgeninin içerisindeki bir P noktasında kesişmektedir. $ABCD$ 'nin bir kirişler dörtgeni olması için ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olmasının gerek ve yeterli olduğunu gösteriniz.

Y.243. İki kişi şöyle bir oyun oynuyorlar: 1. kişi soldan sağa doğru A ve B harflerinden istediğini yazıyor (her hamlede bir harf). İkinci de her hamlesinde ya herhangi iki harfin yerini değiştiriyor, ya da hiç bir şey yapmıyor. İkinci kişi 2001'er hamleden sonra elde edilen kelimenin soldan sağa ve sağan sola okunduğunda aynı olmasını sağlayabilir mi?

Y.244. Pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı olan $f(n)$ fonksiyonu

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & n \text{ çift ise} \\ 2n + 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(2001)$ değerini bulunuz.

Y.245. İki yaya sabah aynı anda, biri A 'dan B 'ye, diğeri B 'den A 'ya sabit hızla yola çıktı. Öğle saatinde (saat 12 : 00'de) bunlar karşılaştılar ve yollarına devam ettiler 1. yaya akşam saat 4 : 00'da B 'ye, 2. yaya akşam saat 9 : 00'da A 'ya ulaştı. Yayalar sabah saat kaçta yola çıktılar?

ÇÖZÜMLER

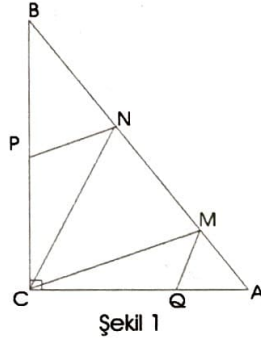
A.231. 1'den bir $n > 1$ pozitif tam sayısına kadar olan sayıların art arda yazılmasından elde edilen sayıya "seri" diyelim (örneğin, 1234, 12345678910111213 v.s.). İki serinin çarpımının seri olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. Bir seri n basamaklı ise, $12 \cdot 10^{n-2}$ ile $13 \cdot 10^{n-2}$ sayıları arasındadır. O halde iki serinin çarpımı $144 \cdot 10^m$ ve $169 \cdot 10^m$ şeklinde olan iki sayı arasında bulunacak. Dolayısıyla çarpımın soldan ikinci basamağı 4, 5 veya 6 olabilir, böyle bir sayı da seri olamaz.

A.232. ABC dik üçgeninin AB hipotenüsünde, $|BM| = |BC|$ ve $|AN| = |AC|$ olacak şekilde, M ve N noktaları alınmıştır. Sonra $|BP| = |BN|$ ve $|AQ| = |AM|$ olacak şekilde, BC

ve AC kenarları üzerinde sırasıyla P ve Q noktaları alındılar. C, Q, M, N, P noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. BPN ve BCM ikizkenar üçgenleri



Şekil 1

benzer olduğundan $|PN| = |CM|$ 'dir. $|PC| = |NM|$ olduğundan $CMNP$, bir ikizkenar yamuktur ve dolayısıyla bir kirisler dörtgenidir, yani C, M, N, P noktalarını içeren bir çember bulunur. Benzer şekilde $CNMQ$ de bir ikizkenar yamuktur ve C, N, M, Q noktaları bir çember üzerinde bulunur. Bu çemberlerin ikisi de C, N, M noktalarını içerdiğinden, çakışır. Böylece C, Q, M, N, P noktaları bir çember üzerinde bulunacaktır.

A.233. $a_1, a_2, \dots, a_{200}$ sayılarından bir kısmı mavi kalemle, geriye kalanları kırmızı kalemle yazılmıştır. Kırmızı sayıları silerseniz, geriye 1'den 100'e kadar olan tüm tam sayılar (artan sırayla) kalacak. Mavi sayıları silerseniz, geriye 100'den 1'e kadar tüm tam sayılar (azalan sırayla) kalacak. $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ sayıları arasında 12'den 100'e kadar olan tüm tam sayıların bulunduğunu ispat ediniz.

Çözüm. $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ sayılarından k tanesi mavi, $100 - k$ tanesi de kırmızı olsun. Kırmızı sayıları sildiğimizde geriye 1'den 100'e kadar olan tüm (mavi) sayılar artan sırayla kaldığından, $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ sayıları arasında yer alan k tane mavi sayı $1, 2, \dots, k$ sayıları olacak. Aynı şekilde ilk 100 sayı arasından yer alan $100 - k$ tane kırmızı sayı $100, 99, \dots, k + 1$ sayıları olacak. Böylece ilk 100 sayı $1, 2, \dots, 100$ sayılarından oluşacak.

A.234. Her n pozitif tam sayısı için

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \dots + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}$$

olduğunu gösteriniz (Burada $\{x\} = x - [x]$, x sayısının kesir değerini göstermektedir).

Çözüm. $n = 1$ için eşitsizlik $0 = 0$ eşitliğine dönüşür. $n > 1$ olsun. Her m pozitif tam sayısı ve pozitif x sayısı için $\sqrt{m^2 + x} \leq m + \frac{x}{2m}$ eşitliğinin doğru olduğu kolayca kontrol edilir, dolayısıyla $0 \leq a \leq m$ olmak üzere her a tam sayısı için

$$\sqrt{m^2 + a} + \sqrt{m^2 + 2m - a} \leq 2m + 1$$

eşitsizliği geçekleşir.

$$[\sqrt{m^2 + a}] = [\sqrt{m^2 + 2m - a}] = m$$

olduğundan buradan

$$\{\sqrt{m^2 + a}\} + \{\sqrt{m^2 + 2m - a}\} \leq 1$$

eşitsizliğini elde edriz. $a = m$ özel durumunda ise

$$\{\sqrt{m^2 + m}\} \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla her m pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \{\sqrt{k}\} &= \sum_{a=0}^{2m} \{\sqrt{m^2 + a}\} \\ &= \sum_{a=0}^{m-1} \{\sqrt{m^2 + a}\} + \sum_{a=0}^{m-1} \{m^2 + 2m - a\} + \{\sqrt{m^2 + m}\} \\ &\leq \sum_{a=0}^{m-1} (\{\sqrt{m^2 + a}\} + \{m^2 + 2m - a\}) + \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{2m + 1}{2} \end{aligned}$$

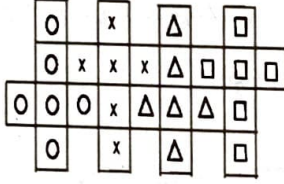
eşitsizliğini elde ederiz. $\{\sqrt{n^2}\} = 0$ eşitliğini de göz önünde bulundurursak,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n^2} \{\sqrt{t}\} &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \{\sqrt{k}\} + \{\sqrt{n^2}\} \\ &\leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2m + 1}{2} = \frac{n^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

A.235. $2 \times 2 \times 2$ boyutlu kübün dört tane $1 \times 1 \times 1$ boyutlu kübün açılımı ile kapatmak mümkün müdür?

Çözüm. Şekil 2'deki 4 tane $1 \times 1 \times 1$ boyutlu küpe



Şekil 2

kapatılmış olan çokgen kolayca bir $2 \times 2 \times 2$ boyutlu küpe dönüştürülebilir.

Y.231. Her $n > 2$ tam sayısı için

$$a_n = 2^{2^n-1} - 2^n - 1$$

sayısının bileşik olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $b_n = 2a_n = 2^{2^n} - 2^{n+1} - 2$ sayısının 1'den ve a_n 'den farklı bir tek sayıya bölündüğünü göstermemiz yeterlidir. n çiftse ($n = 2t$),

$$b_n = 4^{2^n-1} - 2 \cdot 4^t - 2 = 1 - 2 - 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

olduğundan b_n bileşiktir. n tek sayı olsun. O halde $n = 2^k(2m-1) - 1$ olacak şekilde k ve m pozitif tam sayıları bulunur. $(2^{2^k} + 1) | b_n$ olduğunu gösterelim. $2^k | 2^{2^k(2m-1)-2}$ olduğundan

$$(2^{2^k} + 1) | (2^{2^k(2m-1)} + 1) = 2^{n+1} + 1$$

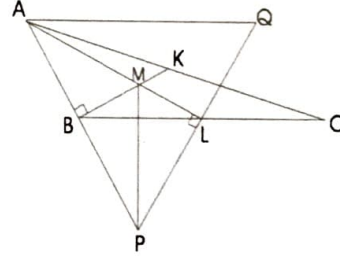
elde edilir. Ayrıca, $n > 2$ olduğundan $k = m = 1$ olamaz, dolayısıyla $k \leq 2^k(2m-1) - 2$ eşitsizliği sağlanır. O halde $2^k | [2^k(2m-1)]$ ve buradan da

$$(2^{2^k} + 1) | (2^{2^k(2m-1)-2} + 1) = 2^{2^n-1} + 1$$

elde edilir. Şimdi $b_n = 2^{2^n} - 1 - (2^{n+1} + 1) = (2^{2^n-1} - 1)(2^{2^n-1} + 1) - (2^{n+1} + 1)$ eşitliğinden $(2^{2^k} + 1) | b_n$, buradan da a_n 'in bileşik olduğu elde edilir ($2^{2^k} + 1 < a_n$ olduğu kolayca kontrol edilir).

Y.232. İkizkenar olmayan ABC üçgeninde AK ve BL kenarortaylardır. $\widehat{BAK} = \widehat{CBL} = 30^\circ$ ise, ABC üçgeninin iç açılarının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm.



Şekil 3

P noktası AB doğrusu üzerinde olmak üzere bir kenarortayı AK olan APQ eşkenar üçgeni çizelim (Şekil 3). $|AM| : |MK| = 2 : 1$ olduğundan, M noktası APQ üçgeninde ağırlık merkezidir. O halde $s(\widehat{KPM}) = 30^\circ = s(\widehat{KBM})$, dolayısıyla $KMBP$ bir kirişler dörtgenidir. $s(\widehat{MKP}) = 90^\circ$ olduğundan, $s(\widehat{MBP}) = 90^\circ$ olacak, dolayısıyla $|AB| = |BP|$ 'dir. $|AB| = a$ olsun. AKP dik üçgeninden $|BK| = |AB| = a$ ve buradan da $|BC| = 2a$ 'dır. $\cos(\widehat{ABC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 'dir. Kosinüs teoreminin $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\widehat{ABC}) = a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot (-\frac{1}{2}) = 7a^2$ 'dir. Yine kosinüs teoreminin $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{a^2 + 7a^2 - 4a^2}{2 \cdot a \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ ve $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{7a^2 + 4a^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot \sqrt{7} \cdot 2a} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ elde ederiz.

Y.233. Bir ülkede N tane havayolu şirketi var ve her kentten tüm şirketlerin birer uçuşu bulunur. Herhangi iki kentten birinden diğerine uçakla gitmek mümkündür (doğrudan veya birkaç uçak değiştirerek). Ekonomik krizden dolayı $N-1$ tane uçuş iptal edildi, fakat hiçbir şirketin birden fazla uçuşu iptal edilmedi. Yine de herhangi kentten diğerine uçakla ulaşmanın mümkün olduğunu gösteriniz.

Çözüm. A ve B kentleri arasında bir X şirketinin uçuşu iptal edilmişse, A 'dan B 'ye başka bir yolla ulaşılabilirliğini göstermemiz yeterlidir. Koşullardan $N-1$ şirketin birer uçuşunun iptal edildiği, bir Y şirketinin de hiçbir uçuşunun iptal edilmediği anlaşılır. Y şirketinin A kentinden

bir A_1 kentine uçuşu bulunur. $A_1 = B$ ise A 'dan B 'ye bu uçuşla ulaşırız. $A_1 \neq B$ ise, A_1 'den X şirketinin bir A_2 kentine uçuşu bulunur, çünkü X şirketinin sadece bir uçuşu iptal edilmişti. A_2 kenti A ve B kentlerinden farklıdır, çünkü X şirketinin her kentten sadece bir uçuşu bulunur. Şimdi Y şirketinin A_2 kentinden bir A_3 kentine uçuşu bulunur. A_3 kenti A ve A_1 'den farklıdır, çünkü her kentten Y şirketinin sadece bir uçuşu bulunur. Böyle devam ederek $A_i \neq B$ olduğu sürece, $A_4, A_5, \dots$ kentlerine ulaşabiliriz. Kent sayısı sonlu olduğundan bir n için $A_n = B$ elde edeceğiz. Böylece sırayla X ve Y şirketlerinin uçuşlarını kullanarak A 'dan B 'ye ulaşacağız (Y şirketi ile başlayıp, Y ile bitireceğimiz açıktır).

Y.234. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen tüm $f : R \rightarrow R$ sürekli fonksiyonları bulunuz.

- a-) Her $x \in R$ için $f(x) = x + f(x - f(x))$
- b-) $f(0) = 0$

Çözüm. $g(x) = x - f(x)$ fonksiyonu için koşuldan $-g(x) = f(g(x))$ eşitliğini elde ederiz. Ohalde $g(x)$ sürekli; $g(0) = 0$ 'dır ve her x için $g(g(x)) = g(x) - f(g(x)) = 2.g(x)$ eşitliği sağlanır. dolayısıyla $g(x)$ ' in bir pozitif değeri bulunursa, g yi bir kaç kez uygulayarak $g(x)$ 'in istediğimiz kadar büyük değerini elde ederiz. $g(x)$ sürekli olduğundan, bu durumda $g(x)$ 'in negatif olmayan tüm değerleri aldığını görürüz. Benzer şekilde, $g(x)$ 'in herhangi negatif değeri varsa, tüm negatif değerleri alacak. Böylece aşağıdaki 4 durum olabilir:

1. Her x için $g(x) = 0$ 'dır. Bu durumda $f(x) = x$ 'dir.
2. $g(x)$ tüm negatif olmayan değerleri ve sadece bunları alıyor. Her $x \geq 0$ sayısı $x = g(y)$ şeklinde yazılabildiğinden $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$ olacak. $x < 0$ için $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$. Bu iki koşulu sağlayan tüm $f(x)$ sürekli fonksiyonlarının bir çözüm olduğunu gösterelim. $x \geq 0$ ise, $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(2x) + x + x = 0$. $x < 0$ ise, $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(x) - x + x - f(x) = 0$ olacak çünkü $x - f(x) \geq 0$ 'dır.
3. $g(x)$ pozitif olmayan tüm değerleri ve sadece bunları alıyor. 2. duruma benzer şekilde $x \leq 0$ için $f(x) = -x$ ve $x > 0$ için $f(x) \geq x$ koşullarını sağlayan fonksiyonların ve sadece bunların olduğunu elde ederiz.

4. $g(x)$ tüm reel değerleri alıyor. Bu durumda her $x \in R$ sayısı $x = g(x)$ şeklinde yazılabilir, dolayısıyla $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$ elde edilir.

Y.235. Pozitif tam sayılar kümesi birbiriyle kesismeyen iki sonsuz kümeye ayrılmıştır. Her iki kümede toplamaları birbirine eşit olan 100'er sayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Kümeler A ve B olsun: $N = A \cup B$. Kümeler sonsuz olduğundan, $n \in A$ ve $n + 1 \in B$ olacak şekilde sonsuz sayıda $(n, n + 1)$ çifti bulunur. Aynı şekilde $m \in B$ ve $m + 1 \in A$ olacak şekilde sonsuz sayıda $(m, m + 1)$ çifti bulunur. Alacağımız tüm 200 sayı birbirinden farklı olacak şekilde 50 tane birinci tür çift ve 50 tane de ikinci tür çift alabiliriz. Böylece A ve B kümelerinde 100'er tane sayı almış olacağız ve bunların toplamalarının eşit olduğu açıktır.

KİTAP TANITIMI

Herkes İçin Matematik
(John Allen Paulos)
Çeviri: Beyaz Yayınları

Yetersiz matematik eğitimi, matematikle ilgili psikolojik engeller ve hayal, algılar insanların çoğunu sayı cahili yapmaktadır. Eğer reklamcıların yanlış iddialarına, şarlatan doktorlara ve sahte bilimadamlarına direneceksek, içimizde istatistik konusunda sağlıklı bir kuşkuculuk geliştirmeliyiz. Bu canlı ve esprili kitabında John Allen Paulos matematiğin gücünü gösteren birçok ilginç örneği biraraya getiriyor. Birçok insan sayıların matematikçilerin uğraşı alanına girdiği kanısındadır. Oysa günlük yaşamında matematiği kullanan her insan, bunun yararını görecektir. Borsa stratejileri, eş seçimi,

fal, diyet ve tıbbi iddialar, terörizm riski, astroloji, spor rekorları, seçimler, cins ayrımcılığı, UFO'lar, parapsikoloji, piyangolar ve ilaç testleri gibi güncel konulara matematik açıdan bakmak onları algılayışımızı değiştirecektir. *Herkes İçin Matematik*'i okumak matematik ve sayılardan hoşlanmayanlar için olduğu kadar matematik meraklıları için de ufuk açıcı olacaktır.

Büyük Çekişmeler
(Hal Hellman)
Çeviri: Füsün Baytok, TÜBİTAK

Bilimsel buluş süreci duygularla doludur. Bilim adamı yeni bir düşünce ortaya attığında çoğu kez başkalarının kuramlarını çiğnemiş olacaktır. Eski fikirlerin sahipleri ise kolay kolay pes etmeyecektir. Bilim adamları arasında bu tür anlaşmazlıklar olmuştur. Bu anlaşmazlıklar bilim için yararlıdır. Tıpkı büyüklerin kavgaları ile küçüklerin gürültülerinin düşünce özgürlüğü ve eğitimin gelişmesi için zorunlu olması gibi. Kıskançlık, çekememezlik, rekabet, hırs, bilim adamları arasında da görülür. Kitap, bu konuda bilim tarihinden seçilmiş on tartışmayı okura sunmayı amaçlamaktadır.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Dergimize gönderilen makalelerin yayınlanıp yayınlanamayacağına Yayın Kurulu karar verir, yayınlanan makalelerde sunulan görüşler tamamen yazar(lar)a aittir. Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbağçe-Urla, İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da
mdunyasi@galois.iyte.edu.tr adresine elektronik
posta ile gönderilmelidir.



"Tanrının zar attığına beni kimse inandıramaz."

A.Einstein



PEKER

MATBAACILIK ve TİCARET Tel&Fax: 0.232.483 89 80