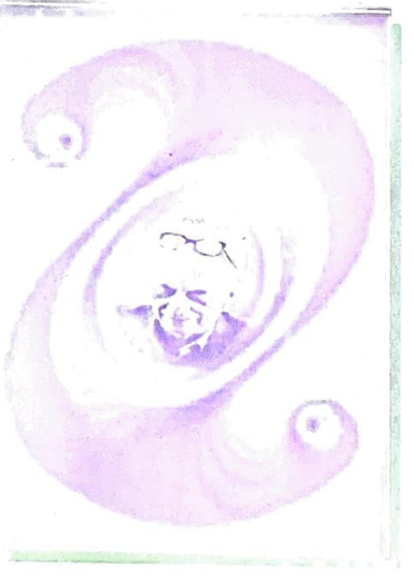
ARALIK 2001 CİLT 10 SAYI:5 ISNN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR



MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Ekonomik kriz ve şavaşın içice olduğu bir dönemde matematikte bir deha olmakla birlikte yaşamında toplumsal duyarlılığıyla da tanıdığımız Cahit Arf hocamızı saygıyla bir kez daha anıyoruz. Bilim ve Ütopya dergisine onunla yapılan söyleşiyi bizimle paylaştıkları için teşekür ediyoruz. Bir Matematik Hikayesinde bir matematikçinin yaşam öyküsünü zevkle okurken Tosun Terzioğlunu daha yakından tanıyacaksınız.

Matematik ve Sanat'ı demli bir çayla büyük bir keyifle okumanızı öneriyoruz. Matematik Bölümünde okuyan okurlarımıza bir bitirme tezi örneği olan Carmichael Sayıları dileriz iyi bir örnek olur.

10. Cildimizi bu sayımızla tamamlıyoruz. Abonelerimize aşağıdaki abone bilgileri veya dergi içindeki abone formu doğrultusunda aboneliklerini yenilemeleri gerektiğini hatırlatmakta yarar görüyoruz. 2002 de sayılarımızın düzenli ve zamanında çıkması bütünü ile sizlerin elinde. Barış dolu bir yıl dileğiyle bütün okurlarımızın yeni yılını Türk Matematik Derneği, Matematik Vakfı adına kutluyoruz...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası
SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Refail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan
DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gun ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2002) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 12.000.000 TL; (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği' nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)Parakende satış fiyatı 3.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35437-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987569, 4987504 ve 4987519 ; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr/math@likya.iyte.edu.tr

CAHİT ARF İLE SÖYLEŞİ

Bilim ve Ütopya, Sayı:13, Temmuz 1995

MATEMATİK NEDİR?

- *Matematik genelde öğrencilerin pek hoşuna gitmez. Neden "korkunç"tur matematik?*

- Belletmeye çalışırlar da onun için. Halbuki bellemek değil, anlamak gerek matematiği. Beyinde birtakım kavramların oluşması lazım. Kavramlar soyutlamalardır, birbirine benzeyen şeyleri tek bir kavram halinde ifade edersin. Dil de aynıdır. İnsanların birbirleriyle etkileşmeleri sözle oluyor. Sözde bu kavramlar kullanıyor, konuşurken muhtelif kavramların neden sonuç ilişkileriyle birbirleriyle etkileşmelerini, örgütlenmelerini yapıyoruz. Beynimizde örgütlü bir sistem oluşturuyoruz. Fakat bu sistemi oluştururken sözcükler yetmiyor. Biraz daha ileri gitmek gerekiyor. Matematik işte burada başlar. Doğa sırf sözcüklerle organize edilemeyecek kadar zengin. Bu nedenle insan beyni takip edemiyor oluşturduğu kavramları. Birtakım semboller kullanmak mecburiyetinde kalınıyor. Tabii aralarındaki ilişkilerle birlikte. Örneğin sayılar bu tür sembollerdir. Çarparsın, toplarsın. Matematikte doğrular, açılar, yüzeyler, hacimler var. Bütün bu sembolleri kullanmazsak, aralarındaki ilişkileri sözle anlatmakta çok zorlanırız. Beynimiz bu kadar geniş değil. İnsan, kavram oluşturabilen bir varlık. Kavram oluşturmanın nedeni, şeyleri beynimize girebilecek kadar azaltmak, algıyı o şekilde ifade etmek. Örneğin kitap. Yüzlerce kitap var. Hepsini aklımızda tutamayız. Ama kitap diye bir kavram oluşturunca hepsini ifade ediyorsun. Zamanla bu kavramlar da çoğalıyor. O zaman matematik devreye giriyor işte. Matematik, pratik gereksinimlerden doğan kavramlar arasındaki ilişkileri keşfetmek için bir araç. Esas itibarıyla bütün bilimler matematik modeller kulanılarak ifade edilebilir bence. Bugün yapılamıyor. Matematik modellerle yapılabilen bilim dalı fizik, biraz da kimya. Onun dışında biyoloji, sosyoloji, onlarca dal var. Bütün bunlar da matematik modellerle ifade edilecek bence, zamanla. Matematik esas olarak sabır olayıdır. "Akıllı adam, matematiğe aklı eriyor", bu yanlış. Zeka üstünlüğü değil, sabretmesini bilmek gerek. Sabırla neden-sonuç ilişkilerini takip edip, bunları sembollerle yazmak ve sonuç çıkarmak.

ÖKLİD TEOREMLERİNİ İSPAT EDEREK MATEMATİĞİ SEVDİM

-*Nasıl sevdirebiliriz matematiği?*

- Sevdirmekten ziyade tahammül etmesini öğretmek gerek ve başka bir yol da olmadığını. Bilgiyi kullanabilmek için matematiği öğrenmek gerek. Fakat bu işe matematikle başlamak hatalı olur. Ben kendi hesabıma ilkokul beşinci sınıfa kadar oldukça gelişmiş bir öğrenciydim. Ama matematikte değil, gramerde. Gramerde soyutlamalar yapılıyor. İsimdi, sıfattı, fiildi diye. Bunları çok iyi ayırt edebiliyordum. Beşinci sınıfa geldiğimde, İzmir yeni kurtarılmıştı, İzmir'e geldim. Bir öğretmen vardı. Meslekten de değildi. Dişçi olmak istiyordu, fakat para biriktirmesi gerekiyordu. Bu nedenle İzmir'de öğretmenlik yapıyordu. Adı Ferit'ti sanıyorum. Her şeyi merakla yapan bir adamdı. Gramer ve mantık yeteneğim dikkatini çekmiş. Bana Öklid geometrisinin bütün teoremlerini ispat ettirdi. Bana bir teorem verirdi. Bir hafta düşünürdüm ve bu teoremin ispatını yapardım. Ertesi hafta benim ispatıma bakardı. Nihayet bir tanesini yapamadım. Değişik yöntemler kullanmak gerekiyormuş. Bana kendisi ispat etti. Pisagor teoremiydi, o yapamadığım. O zamanlar kullandığımız tabirle "eşek davası." O öğretmen sayesinde matematikçi oldum diyebilirim. Bana matematiği sevdirdi. Daha sonra sürekli aynı yöntemi kullandım. Hiç bellemezdim. Kökenine inmeye, ispat etmeye çalışırdım. Arkadaşlarıma da aynı şeyi yapmalarını öğütlerdim. Bu benim için düşünce tembelliğinden kurtulmanın yolunu açtı. Bunu hayatın her alanına uygulamak gerek. Talimatla değil, kendi anlayarak, aklıyla karar vermeli insan.

MUCİT AMCANIN KATKISI

- *Öğrenim yaşamınız nasıl sürdü ilkokuldan sonra?*

- Düşünce yöntemimin gelişmesi konusunda bir anımı daha anlatmak isterim. Ezbercilikten kurtulmama yardımcı olan kişilerden biri de amcamdı. Evde kendi kendine ilginç aletler yapardı. Örneğin bildiğimiz bisikleti denizde yüzdürmek için bir düzenek geliştirmişti. Bisiklete üç tane kontraplak vidalamıştı. Arkasına da bir pervane monte etmişti. Dişliler ve kayışlar yardımıyla, pervane pedallara bağlanıyor, kontraplaklar sayesinde bisiklet suda yüzüyor. Ben çocuktum, bu aleti yaparken kendisine yardım ettim. Bir akşamüstü amcam eve sırılsıklam geldi. Vidalar gevşemiş, yerinden çıkmış, bisiklet dağılmış. Amcam suya düşmüş, ama bisiklet batmamış. Yoldan geçenler amcamı kurtarmışlar, bir arabaya atıp eve yollamışlar. Böyle bir adamdı amcam. Bir alet yapacağı zaman, "Neden böyle oluyor, bil bakalım" diye bana sorardı. Ben bellememeye, anlamaya çalışmaya onun katkılarıyla da alıştım. Ortaokulu bitirdiğimde matematikte, fizikte çok iyiydim. Bunun üzerine hocalarım olsun, babamın dostları olsun, babama beni bir fırsat bulursa dışarıya yollamasını tavsiye etmişler. O sırada bir fırsat çıktı, Fransız Frangı devalüe oldu. Babam bana iki sene yetecek kadar frank satın aldı ve beni Paris'e okumaya gönderdi. Fransa'da iki sene bir hazırlık lisesinde okudum. Fransız okullarında, birinci sınıf, ikinci sınıf yoktu. Yabancı Dil-1, Yunanca-Latince-1 veya 2 deniyordu. Ben bu sistemi anlamadım. Bütün bu sınıflara girecek miyim, diye gözüm korktu. Babamın verdiği para iki senelikti. Ben bu okulu iki senede bitiremem diye korktum. Beni koydukları ilk sınıfa hiç gitmedim. Bir üst sınıfa gitmeye kalktım. Orası için de dilim yeterli değildi, derslere gitmemeye başladım. Sürekli avluda dolaşıyorum, müdürün dikkatini çekti. Beni yanımı çağırdı. Müdüre, "Beni hazırlık sınıfına yollamayın, bir süre tanıyın, Fransızcayı iyice öğreneceğim, öğrenemezsem size bir şey söylemeden kendim çekip giderim" dedim. Bu imkanı bana tanıdılar. Fransız liselerinde sınav yoktu. Üç ayda bir kompozisyon adı altında yoklama niyetine bir sınav yaparlardı. Üç ay sonra bu sınava girdim, bütün sınıfta en iyi kağıt benimki çıktı. Halbuki beni bir alt sınıfa göndermek istiyorlardı. Böylece bir sene kazandım. Türkiye'de liseyi üç yılda bitirecekken, Fransa'da iki yılda bitirdim. Sabırla anlamaya çalışmamın büyük katkıları olmuştur öğrenim yaşamımda.

-Fransa'dan döndükten sonra?

- Türkiye'ye geldiğimde beni Galatasaray Lisesi'ne tayin ettiler. Ben, "Kastamonu'ya gideceğim diye" tutturdum. Fransa'da lise sonrası öğrenimimi devlet üstlenmişti. Kendimi ülkeme karşı borçlu bildim. "Galatasaray' da paşa çocukları okuyor, bana orada değil; Anadolu'da ihtiyaç var" dedim. Maarif'ten bir müsteşar geldi, eski bir tanıdıktı. Neden ille de Anadolu'ya gitmek istediğimi sordu. "Oradaki çocuklara sadece matematik değil, insanlık öğreteceğim" dedim. Anadolu çocuklarına bellemeyi değil kavramayı, kavramlar oluşturabilmeyi ve bunları organize edebilmeyi öğretmeyi istiyordum. "Öğrecilerimle arkadaş olacağım (Zaten yaşım da uygundu buna), onlara Karl Marx'ı da Nietzsche'de okutacağım" dedim. Şaşırdı. "Bunlar birbirinin zıddı" dedi. "İyi ya" dedim. "Ben onların eline iki karşıt düşünceyi de vereceğim. Kendileri düşünsünler, kendi kanaatlerini oluştursunlar, seçimlerini yapsınlar." Anlayışla karşıladı. Fakat Galatasaray Lisesi için ısrar etti. O sırada bir hoca Fransa'ya dönmüş, yerini dolduracak kimse yokmuş, onun yerine benim ders vermemi istedi. Sonunda kabul ettim ve Galatasaray'da hocalık yaptım. O sırada üniversite reformu yapıldı. Sanırım 1933 yılıydı. Üniversiteye çağırdılar, gittim. Doçent namzedi oldum. Bilimadamlığı böylece başladı.

-Günümüz Türkiye'sinde matematik çalışmalarını nasıl değerlendiriyorsunuz?

-İTÜ'de, Boğaziçi'nde, İstanbul Üniversitesi'nde, Bilkent'te birkaç tane iyi çalışmalar yapan matematikçi var. ODTÜ'de ise bütün bir bölüm. En zengin çalışmalar burada yapılıyor. Fakat istenilen düzeyde değil. Benim üniversiteye girdiğim dönemdeki durum değişti elbette. Daha ileri, fakat yine de üniversiteye gelenler, matematik bölümüne gelenler dahil, hep bellemek eğiliminde. Sabretmek, anlamak yok. Ben bir ders veya konferans dinlerken,"konuşmacı acaba şimdi ne söyleyecek" diye düşünürüm. Tahmin etmeye çalışırım. Çıkar veya çıkmaz, ama mühim olan buna gayret etmek.

KATKILAR AMİRDEN DEĞİL, İŞÇİDEN GELDİ

-Uzun yıllar TÜBİTAK'ta çalıştınız. Bilim Kurulu Başkanlığı yaptınız. O yılları anlatır mısınız? Bugünle de karşılaştırarak.

- Bundan korkuyorum. Politikacılar herşeye hakim. Bilim özgür değil. Örneğin TÜBİTAK kuruldu, Turgut Özal geldi, hem TÜBİTAK'ı hem de memleketi berbat etti. Bu ülkeye en büyük zarar veren kişilerden biridir Özal. TÜBİTAK'ta bir bilim kurulu vardı, 2-3 senede bir eski heyetin bir kısmı kurulu terk eder, geride kalanlar yenilerini seçerlerdi. Üniversiteler ve endüstri kurula namzet gösterirdi. Fakat bu seçimler de bozuk çıktı, etki altında kalındı. Şu anlamda, birçok kimse, aynen bugünkü gibi diploma meraklısı olup çıktı. Bütün işleri güçleri o cenabet kağıdı ele geçirmek. Bu yüzden bilim kurulu yeterince verimli çalışamadı. 7 sene (1964-71) Bilim Kurulu Başkanlığı yaptım. TÜBİTAK'ın hedeflerinden biri memleketin teknik ihtiyaçlarına cevap vermek, yeni bilimsel-teknolojik buluşları teşvik etmek idi. Bütün sanayi kuruluşlarına mektup yolladık. "Bütün teknik problemlerinizi bize bildirin, çözmeye çalışacağız" diye. Gelen cevaplar hep iş kanunundan bahsediyor, işçi ücretlerinin yüksekliğinden şikayet ediyor, falan. Teknik problemler bunlar mı şimdi? Anlatamadık dedik, bizzat kendimiz gitmeye karar verdik kuruluşlara. Zonguldak Demir-Çelik'e gittim. Aynı soruyu müdüre sorduk. "Biz hukukçu değiliz, teknik adamız, pozitif bilimciyiz, bu tür sorunlarınızı bize aktarın" dedik. "Yok öyle birşey" dedi. Karşıda yüksek fırınlar duruyor. "Bu fırınları zamanla temizlemek için durduruyorsunuz, değil mi?" diye sordum. "Evet, Almanya'dan gelen talimata göre şu kadar zamanda bir üretimi durdurup temizliyoruz" dedi. "Peki, her defasında birikmiş tortu buluyor musunuz?" dedim. "Hayır, çok kere sağlam çıkıyor" diye yanıt verdi. "O zaman boşu boşuna ocak duruyor, üretime zararı oluyor değil mi?" dedim. "Hem de nasıl" dedi. Şimdi bu teknik problem değil mi? "Bakın, enfraruj diye bir fotoğraf çekme tekniği var. Bu teknikle bacanın fotoğrafını çekersiniz. Sıcak yerler başka renk çıkar, soğuk yerler başka renk. Bir nevi harita elde edersiniz. Bu haritaya göre alırsınız bacanın ve fırının durumunu. Bunun hesaplarını size yapabiliriz" dedim. Sözünü ettiğim böyle problemler, ama müdür dahil kimse işin farkında değil. Buna mukabil, bir işçiden şöyle bir mektup aldık. "Biz kaynakçıyız" diyor. "İthal malı çubukla on kaynak yapabiliyoruz, bizim mamulümüz olan çubukla ancak bir kaynak yapıyoruz, çubuk kırılıyor" diye bir sorunu ortaya koyuyor, bize soruyor. Arkadaşlara ilettim. Bir kimyager çubukları tahlil etti. Meğer ithal çubuk içinde krom varmış, bizimki ise sadece demir. Türkiye'de hazır krom yok, krom kompozeleri var. Düşündük. Bizde de kobalt var. Demir çubuklara kobalt kattık. On kere değil ama beş kere daha iyi oldu. İşçinin ortaya attığı problem, teknik gelişme sağladı. Yine bir başka kişi vardı. O da amir değil, teknisyen bir arkadaş. "Çimentoyu daha ucuza ve daha çabuk elde etmenin yolunu buldum" diyor. O zamana dek bir silindirin içine taşları koyuyorlar. Silindir dönüyor, içinde de demir toplar var. Döndükçe taşlar eziliyor, toz haline gelene dek devam ediyor bu işlem. Oldukça zaman alıyor. Ayrıca demir toplar çok çabuk aşınıyor. Teknisyen şöyle bir proje yapmış. Demir toplardan kurtulmak istiyor. Büyük silindirin etrafına küçük silindirler koymuş. Büyük olan bir devir yapınca, küçükler 5-6 devir yapıyor. Büyük silindir, küçük dişliler yardımıyla döndürülüyor. Dönme esnasında taşlar merkezkaç kuvvetine maruz kalıyorlar ve daha çabuk kırılıyorlar. Demir kürelere gerek kalmıyor. Teknisyen arkadaş, bu projenin desteklenmesi için TÜBİTAK'a müracaat etmiş. Bizim mühendisler "olmaz böyle saçma şey" demişler. Bana getirdiler. Hesabını yaptık, bal gibi olur. Neyse kabul ettirdik. Bir modelini yaptılar. Şaşırıp kaldılar. Saatlerce dönme sonucu elde edilen çimento tozu, 5-10 dakikada elde edildi.

BİLİM ADAMI TUTKULU OLMALI

- *Şu sıralar bilimler akademisi oluşturma girişimi var. Bu konuda ne düşünüyorsunuz?*

- Olabilir. Ama bence mevki hırsı yaratacak. Mevki hırsı yaratınca da insan bilim veya teknikle uğraşacağı yerde o hırsın politikasıyla uğraşır. Yani o kadar da iyi birşey değil. Batı'da bu akademiler faydalı olmuş. Ama onlar yüzyıllar önce başlamışlar bu işe, belli bir gelenek oluşmuş. Bizde bugün korkarım, o diploma merakına benzer hırsları arttırabilir böyle kurumlar.

- *Sizce bir bilimadamını motive edecek esas unsur nedir?*

- İlk başlarda belli ihtiyaçları karşılamak için teknoloji geliştirilmiş. Daha sonra bilgiler zenginleştikçe, kompleksleştikçe uzmanlaşma gerekmiş. Bilimadamı, alim denen kişiler ortaya çıkmış. Bir bilimadamı bir dereceye kadar menfaatini koruyacak, geçinmek için para kazanacak. Ama bence ikinci bir etken var ki daha önemli. Merak. Ben buna tutku diyorum. Yaşamım boyu bilgimi satmadım.

Öğretmenlik yaptım tabii, geçinmek için. Tabii bazı şeylerim olsun istiyorum, ama tutku daha ağır basıyor. İnsanların bazı zaafları var. Bazen çıkar duygusu tutkuyu bastırabiliyor. Bakın, Batı biliminin temelini atan bütün bilimciler bu tutkuya sahiptirler. Newton, Descartes hepsi. Galile'nin başı belaya girmiş, bu tutkudan dolayı. Anlamak istiyorlar, doğanın mekanizmalarını keşfetmek istiyorlar. Bilimi geliştiren bu tutkudur.

ORTAOKULDAN BERİ UĞRAŞILAN PROBLEM

- ***Bu ana kadarki yaşamınızın bir muhasebesini yapabilir misiniz? Amaçladığınız her şeye ulaşabildiniz mi?***

- Yoo. Hiçbir zaman söyleyemem böyle bir şeyi. Keşfetmek bitmez. Zaten herkese de bunu tavsiye ediyorum. Keşfederek öğrenmeye çalışın. Anlamanın sırrı burada. Anlattığım gibi ben ilkokul 5'ten beri böyle çalışıyorum. Benim hayat problemim hala açık. Ortaokulda edindim bu problemi. Öklid geometrisinden söz etmiştim. O zamandan beri cebimde pergeller, cetveller çizim yaparım. Pergel ve cetvel kullanarak üçgenleri çizmek problemi. Bazılarını çizerdim, bazılarını çizemezdim. Hep merak ederdim, neden çizemiyorum diye. Bugün hala çözülebilmiş değil bu problem. Bazıları çizilebiliyor pergel ve cetvelle, bazıları çizilemiyor, yani çizilemeyenler de var, bu biliniyor. Ama soru şu: Hangilerinin çizilebildiği, hangilerinin çizilemediğine dair genel bir teori, model oluşturulabilir mi? Fransız Galois, 21 yaşında bir düelloda öldürülen matematikçi, epey ilerleme sağlıyor, ama tam çözümü geliştiremiyor. Hala açıktır bu problem. Bütün ömrüm boyunca bu problemin peşinden koştum. Şimdi yeni yöntemler geliştiriyorum. Çizilemeyen hallerin karakterizasyonu üzerine. Bu haller için aletler geliştirmek. Kendim tamamlayamasam bile genç arkadaşlarıma "şu fikri takip edin" diye yollar bırakacağım herhalde. Yani ortaokuldan beri edindiğim bu amacıma ulaşabilmiş değilim henüz.

- ***Başka hangi konularda uğraşıyorsunuz şu günlerde?***

- Diferansiyel denklemleri biliyor musunuz? Tabiattaki bütün olaylar diferansiyel denklemlerle modellenebiliyor. Fizikçiler ve tatbiki matematikçiler mütamadiyen diferansiyel denklem çözerler. Fakat bazı türleri var bu denklemlerin, kısmi türevli denklemler, genel bir kuralı yok, algoritması yok. Her özel hal için ayrı yöntemler geliştirmek zorunda çözecek olan kişi. Oldukça zor ve sürekli keşif lazım. Şimdi benim fikrim şu: Elimizde bilgisayar var. Yavaş yavaş uğraşarak yaptığımız işlemleri bilgisayara yaptırabiliriz. Bize düşen bilgisayarı programlamak. Bu program için bir teknik geliştirmeye çalışıyorum. Yani sistematik bir biçimde kısmi türevli denklemleri çözmek için algoritma.

- ***Yapay zeka konusunda ne düşünüyorsunuz? İnsan zekası düzeyinde bilgisayarlar yapılabilir mi?***

- Çok eskiden Erzurum'da bir konferansta da sormuşlardı bu soruyu bana. O zaman hiçbir şekilde insan zekası düzeyine çıkamaz fikrindeydim. İnsanın avantajı sezgisi. Makinede sezgi oluşamaz. O sezgiye benzer şeyi ancak yine insan verebilir makineye. Bir program yaparsınız. "Şöyle bir algı geldiği zaman, şu yanıtı vereceksin" dersiniz. Yine makinenin insan zeksına ulaşamayacağına inanıyorum. Çünkü insan zekasında bir yaşam motivasyonu var.

MİLLET DEĞİL, İNSANLIK FİKRİ OLUŞMALI

-***Nasıl bir toplum özlüyorsunuz? Ütopyanız nedir?***

- İnsanların birbirlerine sevgiyle, faydalı olmak duygusuyla davranmalarını istiyorum. Çok temenni ediyorum bunu. Ceza olgusunun ortadan kaldırılmasını diliyorum. Adam bir suç işliyor, hapse atılıyor. Ceza onu tedavi etmiyor. Daha da beter yapıyor. İnsanlığa düşman kesiliyor. Yani yararı yok cezanın. Eğitmek lazım o suç işleyen kişiyi. Örneğin ben kendi hesabıma, bir şey istediğim zaman eğer başka birine zarar verecekse, vazgeçiyorum bu isteğimden. Herkes yapabilir bunu. Bir ütopyam daha var. Zamanla millet fikri kaybolacak, insanlık fikri gelecek yerine. Sınırlar ortadan kalkacak. Çok istiyorum bunu.

- ***Çok teşekkür ederiz Cahit Bey. Umarız yüzüncü yaş gününüzde bir söyleşi daha yaparız sizinle.***

BİR MATEMATİK HİKAYESİ

Tosun Terzioğlu
Sabancı Üniversitesi, İSTANBUL

İstanbul'da yayın yapan Açık Radyo için iki yıl süreyle bir dizi konuşma yaptım. Bu konuşmaların ilk bölümünü, "Matematik Hikâyeleri" diye adlandırmıştım. Bu konuşmalar, 2000 yılının Mayıs - Kasım ayları arasında her Çarşamba yayınlandı ve açıkçası benim de, Açık Radyo'nun da beklediğinden çok daha fazla ilgi gördü.

Bu ilgiden cesaret alarak, yine "Matematik Hikâyeleri" sayesinde tanıştığım Akın Yılmaz'la birlikte, biraz daha değişik bir yayın dizisi gerçekleştirmeye karar verdik. "Hayat Üstü Az Bilim" adını verdiğimiz bu yeni dizideki sohbetlerimizde, Akın Yılmaz -kendi deyişiyle- "Karagöz" rolünü üstlendi, ben de bir anlamda "Hacivat". 2000 yılı Kasım ayında başlayan ve bir yıl süren bu diziye şimdilik ara verdik.

Aşağıda okuyacağınız yazı, "Matematik Hikâyeleri" dizisinin, 13 Eylül 2000'de Açık Radyo'da yayınlanmış olan ondokuzuncu bölümüdür.

Bu hikâyede biraz kendimden bahsedeceğim: Matematikçi olmak nereden aklıma geldi? Nasıl böyle bir karara vardım?

Hem annem hem de babam üniversite öğretim üyesiydi - annem fizyolog, babamsa matematikçi. "Burada bu hikâye bitebilir" dersiniz belki ama babamın matematikçi olması, benim seçimimde tek etken olmamıştır.

Ben çocukken Lâleli'de otururduk. Evimiz İstanbul Üniversitesi'ne çok yakındı. Ailedeki tek çocuk bendim ve annemle babam, her ikisi de üniversitede çalışıyorlardı. Akşamları evde kendi aralarında da genellikle üniversite hakkında konuşurlardı.

İyi havalarda oyun oynayabileceğim tek yer Beyazıt'daki Üniversite Merkez Binası'nın bahçesiydi. Üniversite o yıllarda çok kalabalık değildi, ayrıca İstanbul'da çok fazla otomobil de yoktu, dolayısıyla bu bahçe benim için her bakımdan pek uygundu. Ayrıca susadığım zaman Merkez Binası'nda olan annemin Enstitüsü'ne girip buzdolabından soğuk su içme lüksüm bile vardı. Küçük lastik topla futbol oynamayı, iki tekerlekli bisiklete binmeyi hep bu bahçede öğrendim. İlkokul yıllarımda bile tatillerde ve iyi havalarda üniversitenin bahçesinde oynamayı, okulumun bahçesinde oynamaya tercih ederdim. Üniversitenin bahçesi hem çok daha büyüktü hem de bakımlıydı. Ayrıca okulumun bahçesindeki denetim de pek sıkıydı; örneğin futbol oynamak yasaktı.

Kısacası, annemin ve babamın öğretim üyesi olmasının yanısıra, Merkez Bina'nın bahçesi de benim akademik kariyeri seçmemde etkili oldu, sanırım.

Laleli'deki evimiz oldukça büyük ve eski bir apartman dairesiydi. İki odası vardı ki ben çocukken pek oraya giremezdim. Bunlardan bir tanesi salondu. Anlaşılan annemle babamın çok fazla parası yokmuş ki ancak misafir salonuna birtakım iyi eşyalar alabilmişlerdi. Öyle her dakika açılmazdı o salon; ancak önemli bir misafir geldiğinde açılmak üzere, kapalı tutulurdu. Bir de o salondan geçilen başka bir oda vardı ki, onu ben ancak kapı aralandığı zaman göz ucuyla görebilirdim. İşte orası, babamın çalışma odasıydı.

Misafir salonunun ve babamın çalışma odasının kapısının kapalı tutulmasının bir nedeni daha vardı: Ev büyüktü ama tek bir sobamız vardı. Bu tek kömür sobasıyla, herhalde pek de iyi kalitede olmayan kömür yakarak, ancak evin bir kısmını ısıtabiliyorduk. Öyle ki, soğuk geçen kış aylarında misafir odasını pekala buzdolabı olarak kullanabilirdik.

Babamın çalışma odasında çok güzel bir masa vardı -anlaşılan paraya kıymışlar güzel bir masa almışlar; bir de kütüphanede benim imrenerek baktığım fakat hiçbir şey anlamadığım, cilt cilt, rengarenk kitaplar. Bunlar, matematik kitaplarıydı.

İşte, ne yaptım ne ettim, bir gün babam evde yokken o odaya girdim. Müthiş bir şeydi benim için, çünkü masanın üstünde böyle çok parlak, bembeyaz kağıtlar, o kağıtlara çini mürekkebiyle çizilmiş birtakım şekiller, etrafta da bir pergel takımı vardı: Anlaşılan babam o tarihlerde bir geometri ders kitabı yazıyor ve şekillerini kendisi çini mürekkebiyle kuşe kağıdına çiziyordu.

Bu gizemli odada gördüklerimden çok etkilenmiştim. Herhalde üç-dört yaşlarında falandım; akşam ağzımdan kaçırdım:

"O odaya girdim ben," dedim, "orada böyle böyle şeyler var!"

"Peki!" dedi babam ve bir sefer, çini mürekkebiyle o şekilleri çizerken benim de seyretmeme izin verdi: Eline pergeli alıyor -pergelin mürekkepli, enteresan bir ucu var- ona çini mürekkebinden damlalık gibi bir şeyle biraz mürekkep döküyor, ondan sonra çizimlerini yapıyor. Farklı boyda cetvelleri var. Gönyeler, iletkiler ve daha başka neler, neler...

Sessizce seyrettim babamı. O yokken girmem gene de yasaktı o gizemli odaya. Ama şeytan dürttü: Bir gün -evde yine kimse yoktu anlaşılan! - o odaya girdim ve birşeyler çizmeye başladım. Artık ben de matematik yapıyordum!

Ancak matematik yapmam pek uzun sürmedi. Çünkü kendimi kaptırmış, heyecanla o enfes kuşe kağıtlarına birşeyler çiziktirirken, çini mürekkebi şişesini devirdim; o güzelim masanın üzerine simsiyah çini mürekkebi yayıldı... Kendimce temizlemeye çabaladım ama nafile... Kaçtım oradan! Geride bıraktığım kağıtlardaki şekiller hiç matematiğe benzemiyordu; olsa olsa psikologların kullandığı leke testlerini andırıyordu. Oldukça fazla miktarda da kuşe kağıt telef olmuştu ve çini mürekkebini de masa bir güzel emmişti...

Eve gelince babam odasına girdi ve vaziyeti anladı:

"Ne yaptın burada?" diye çıkıştı bana.

Boynumu büktüm:

"Matematik yaptım," dedim. Dört yaşındayken matematiğe yaptığım ilk katkılarımın pek de iyi karşılanmadığını itiraf etmeliyim!

Okul yıllarımı çok fazla anlatmayacağım ama bir itirafta bulunmak istiyorum: Okullarımı pek sevmedim, hatta zaman zaman okuldan nefret bile ettiğim oldu. Oysa oldukça iyi, yani başarılı bir öğrenciydim.

Gittiğim ilkokul, disipline herşeyden fazla önem veren müdürü ve bazı hocalarıyla tanınırdı. Sınıfımız kalabalıktı. Hele birinci sınıfta iki kişilik sırada üç kişi oturduğumuz için, hep sıranın kenarından düşmekten korkardım.

Ortaokul ve liseyi Robert Kolej'de okudum. Bu okuldaki atmosfer ve hocalar çok farklıydı tabii, ama gene de yaz tatilinin bitmesine yakın, içimi bir hüzün kaplardı; okulun ilk günündeyse ağlamaklı olurdum. Tatilden sonra okula başlamak, özgürlüğümün başkaları tarafından kısıtlanması gibi gelirdi. Laleli'den boğaza taşınmıştık. Üniversitenin bahçesi artık uzaktı ama deniz vardı. Küçük kayığımla balığa çıkmak, eski bostanda futbol oynamak ve özgürce okumak. Tatillerde yaptıklarımın özeti bundan ibaret.

Kolejde de hep başarılı bir öğrenci oldum. Tatilden hemen sonraki ilk sınavların dışında, iyi notlar alırdım.

Lisenin son sınıfına başlarken meslek konusunda hala hiç bir kararım yoktu. Akademik kariyer yapma isteğim kesin gibiydi, ama hangi konuda? Aklımda gemi inşaat mühendisliği, arkeoloji, tarih gibi konular vardı. Annem bana tıp veya biyolojiyi yakıştırıyor, babamsa sanırım fizikçi olmamı istiyordu.

Dönem arasında artık karar vermem istendi. Aklımdaki konuları aktardım anneme ve babama. Bu listeye bir de matematiği ekledim, çünkü o dersten sıkılmıyordum. Ayrıca orta üçte kısa bir süre çok iyi bir matematik hocamız olmuştu ve Öklid geometrisini kullanarak bana bayağı bir matematik zevki aşılamaya başlamıştı. Ne yazık ki hastalanmış ve ders yılı ortasında Amerika'ya dönmek zorunda kalmıştı. Sanırım mesleğimi seçmede bu öğretmenin çok büyük rolü oldu. (Nitekim yıllar sonra Cahit Arf kendi hayatını anlatırken öğrendim ki onun da matematikçi olmasında iki matematik öğretmeninin çok etkisi olmuş. Babam da İstanbul'da liseye devam ederken sırf bir matematik öğretmeninin öğrencisi olmak için lisenin son yılını İzmir'de okumuş.)

Neyse, kararımı babama söyledim. Hiç de öyle beklediğim gibi, "Aferim aslanım, en doğru seçimi yaptın!" falan demedi. Sustu bir süre ve gözümün içine bakarak:

"Emin misin? İyice düşündün mü?" diye sordu.

Belki de salt ona hoş görünmek için matematik okumaya karar verdiğimi sanıyordu. İyice düşünmüş tüm ama açıkcası pek de emin değildim. Bunu ona söylemedim tabii, ama üniversitemi de belli bir özenle seçtim: Gerçi Newcastle Üniversitesi'nin Matematik Bölümü'ne kabul edilmiştim, ancak ilk yıl matematik, fizik ve kimya dersleri alacaktım ve bu yılın sonunda matematiğe devam etme hakkım olacaktı, ama istersem fizik veya kimyaya da geçebilecektim.

Newcastle şehri gemi tezgahlarıyla da ünlüydü ve üniversitenin gemi inşaat bölümü vardı. Kayıtlardan sonra danışmanım olan Prof. Harrop ile tanıştım. Neden matematiği seçtiğimi sorduğunda, düşünce ve tereddütlerimi ona da açıkladım. Hiç yadırgamadı ve yıl sonunu beklemeye karar verdik beraberce. Yıl sonunda artık emindim: Matematikçi olacaktım!

"Bir matematikçi hayatta ne yapar?" diye sorulduğunda, "düşünür" derim:

Matematikçi elbette ders verir, araştırma yapar, bunun için kitap okur, makale okur. Zaman zaman kağıt kalemle çalışır, hesap yapar... Ama esas yaptığı, bence, düşünmektir.

Ders verirken düşüncelerini aktarmaya çalışır. Matematikte araştırma, tutkuyla ve düşünerek yapılır. Tutkunun yıllar içinde azalması, yorulan beynin daha yavaş çalışması doğaldır. Matematik yaparken, ister araştırma ister ders anlatmak şeklinde olsun, ana işiniz düşünmektir.

Bazen tanıdıklarım beni eşime şikayet ederler, "bizi gördü ama selam vermedi", diye. Ben de selam verdiğimi söylerim hep. Eşime göre ben selam verdiğimi sanıyormuşum. Galiba matematik çalışırken, yani düşünmeye dalmışken gerçekten selam verdiğimi sanıyorum ama öyle algılanmıyorum ki şikayetler sürüyor.

Üniversite'de ve TÜBİTAK'ta yöneticilik yaparken matematikle uğraşmaya çok fazla zaman ayıran adım; tanıdıklarımın sayısı da arttı tabii. Arada sırada matematikle uğraştığım zaman karşılaştığım tanıdıklar zaman zaman sorarlardı, "hayrola, niye böyle düşünceli gözüküyorsun?" diye.

Doğru cevabım, "düşünceli gözüküyorum, çünkü düşünüyorum," olmalıydı kuşkusuz. Ama genelde "düşüncesiz görünmemek için düşünceli gözüküyorum. Yoksa kötü bir durum yok," falan gibisinden cevap verirdim. Aslında çalışan bir matematikçiye, "düşünceli görünüyorsun" demekle onbin metre yarışında koşan bir atlete "nefes nefese kalmışsın, çok terliyorsun" demek arasında bir fark yok. Kaldı ki düşünmenin insan sağlığına zararlı bir etkisi olduğunu iddia eden bir doktora, doğrusu, şimdiye kadar hiç rastlamadım!

Onbin metre koşan atletin terlemesine benzer şekilde, matematikçi de düşünür. Düşünerek çalışır. Sonra oturur zaman zaman, kalem kağıtla bir yerlere kaçar, hesaplar yapar veya düşündüğünü kontrol eder veya makalesini yazar, neyse o, işin çok daha basit kısmı. Ama düşünmek de kötü birşey değildir. Yani, "hayrola, düşünceli görünüyorsun" falan diye başkalarına sormayalım. "Aman ne güzel, düşünüyor,"diyelim. Çünkü düşünerek ancak insan bir yerlere gidebilir, birşeyler çözebilir.

Tabii, salt düşünmek de yetmiyor: Okumak, yapılan araştırmaları takip edebilmek ve yaptığınız bir araştırma sonucunda bulduğunuz sonucu birtakım yerlerde anlatmak, başka meslektaşlarınızın eleştirisine sunmak... Çünkü matematik açık bir eylemdir. Yaptığınız şeyi kendinize saklayıp da sağda solda, "ben neler yaptım neler, ama size anlatmam!" diye böbürlenirseniz, herkes sizden biraz kaçar veya size garip bir şekilde bakar, hatta, "bu adam hasta mı acaba?" diye sorar.

Matematikte yeni bir şey yaptığınız zaman, ispatınızı olanca açıklığıyla ya bir bilimsel toplantıda anlatacaksınız veya makale olarak yazacaksınız. Anlatırken veya makalenizi yazarken hiç birşey gizlemeyeceksiniz. Yaptığınız meslektaşlarınızca kontrol edilecek, doğru bulunacak, ondan sonra bu sizin yaptığınız şey matematik olarak, bir anlamda, tescil olmuş sayılacak.

Bulduğunuzu sandığınız sonucu gidip notere veya bir patent bürosuna tescil ettirmeye kalkışmanız hem anlamsız, hem de son derece gereksizdir. Bizim sanatımızda böyle şeyler yok .

Matematiğin tescil olması demek, meslektaşlarınızın, verdiğiniz ispatın doğru olduğu kanaatine varmaları, daha doğrusu, sizin onları, ispatınızın doğru olduğuna ikna etmeniz demektir. Eğer yaptığınızı bir makale haline getirip bir dergiye yollarsanız derginin hakemlerini ve editörünü de sizin yaptığınızın doğru olduğuna ikna etmeniz gerekir. Ama aslında bu bile yeterli sayılmaz: Yaptığınız doğru dahi olsa, makalenizin basılması için dergi editörünce beğenilmesi gerekir. Beğenilmesi demekten kastım editörün, makalenizin basılmaya değecek kadar önemli katkılar içerdiği düşüncesine varmasıdır.

Bütün bu süreçlerde yaptığınızı kabul etttirmek veya beğendirmek için ünvanınızı, pozisyonunuzu falan ortaya atmaktan kesinkes kaçınmalısınız. "Ben şöyle önemli bir kişiyim" veya "geçmişte ne kadar ödül aldım" gibi laflarla ortaya çıkarsanız matematik toplumunda pek komik, hatta acıklı bir duruma düşersiniz. Çünkü burada büyüteç altında olan siz değilsiniz; büyüteç altındaki, yaptığınız matematik. Matematikçiler kerameti matematikte ararlar, kişilerde değil!

Bana göre matematik, insanlığın tarihi boyunca küçük küçük taşları belki biraraya getirerek, zekasıyla inşa ettiği çok yüce bir anıt. Çağlar boyunca durmadan gelişen ve değişen bir anıt. Diyelim siz de makalenizi yayınlattınız ve bu anıta bir taş koydunuz; ümit edersiniz ki yıllar sonra o taşı oraya sizin koyduğunuz başkaları tarafından hatırlansın. Başka matematikçiler çıksın sizin koyduğunuz o taşın üzerine bir taş daha koysun. Bir matematikçinin en büyük ümidi veya düşü işte bundan ibarettir.

Matematik yorucu bir iştir... Matematik yaparken, özellikle araştırma yaparken insan kimi zaman hep aynı şeyleri düşünür durur. Başka birisinin yaptığı matematiği bile anlamak pek kolay değildir. Makaleler genellikle oldukça kısadır ama okurken hep düşünmek zorunda kalırsınız anlamak için. Öyle bir roman okur gibi okuyamazsınız matematik makalesini, hatta bir ders kitabını. Zaman zaman zorlanırsınız, yorulursunuz. "Neden istediğim sonucu alamıyorum?" diye sinirlenirsiniz. Kendinizi yıpratmaya başlarsınız. Yılgınlığa kapılmanız, matematiği bırakıp başka şeyle uğraşmayı düşünmeniz işten bile değildir.

Öyle durumlarda ben bırakırım düşündüğüm problemi, unuturum aylarca. Üzerinde çalıştığım problemi tamamen bir kenara attığım da çok olur. Ama bazen de, eğer şansım yaver gider ve ilham perisi bana gülerse, birden aklıma yepyeni bir fikir gelir; geri dönerim ve o problemi kolaylıkla çözebilirim. Herşey takır takır yerli yerine oturur. Kafanızda aylarca dönüp dolaşan bulanık fikirler, belirsizlikler bir düzene kavuşur. Toz duman yatışır ve ortaya küçücük de olsa yalın, duru bir mantık yürütme ve güzel bir teorem çıkar.

İşte o anda ufuk çizgisindesiniz. Kimsenin daha önce bakmadığı yerleri görmektesiniz. Etrafta başka bir ayak izi yok. Matematiğin gizemli bahçesinin bir köşesindesiniz tek başınıza. Sessiz ama yoğun bir sevinçle dolusunuz. Böyle anlar ne kadar kısa sürerse sürsün, ne kadar az sıklıkta yaşanırsa yaşansın, belki de en büyük ödüldür bir matematikçi için. Tüm yorgunluklara değen, yol boyunca karşılaşılan zorlukları ve hayal kırıklıklarını unutturan böyle anlar, sizi yeniler. Matematiği bırakmayı düşündüğünüz günleri hatırlayıp kendinize gülersiniz.

Ben matematikçi olmayı seçtim yıllar önce... İyi ki de öyle yapmışım!

MATEMATİK VE SANAT

Timur Karaçay
Başkent Üniversitesi, ANKARA

Matematikçiler Derneği, "Mayıs 2001 Matematik Etkinlikleri" için çağrılı bir konuşma yapmamı istedi. Genelde, çağrılı konuşmalar "protokol" 'a hitap eder. Konuşmacı, özel bir konuya girerse, o konuyla ilgisi olmayan dinleyicileri sıkar. Bundan çekinerek, açılışa gelecek kişilerin çoğunluğunu yormayacak bir konu seçmeyi düşündüm. Aklıma gelenler arasında, "matematiğin gelişimi ile bilimin ve uygarlıkların gelişimi arasındaki sıkı ilişki" önceliği almıştı. Bu zor işi hakkıyla yapabilir miydim, bilmiyorum... Ama düşünmeye ve konuşmanın kurgusunu yapmaya başlamıştım bile. Çin, mezopotamya, nil ve grek uygarlıklarını tarayarak modern zamanlara yaklaşıyordum. Newton'a gelince duraladım. Orta öğretim fizik derslerinde yerçekimi konusu çok güzel işlenir. Düşey, eğik ve yatay doğrultudaki hareket problemlerini "yer çekimini" hesaba katarak zarafetle çözdüğümüzü anımsıyorum. Ama yer çekimini yaratan nedeni ders kitapları söylemiyordu, biz de merak edip sormuyorduk. Biraz düşününce, bu gün bile yer çekiminin nedenini bilmediğimi gördüm. Elbette, biraz bilimsel magazin haberlerini okuyan herkes, gravitasyon konusunun fizikte esaslı bir problem olarak incelendiğini ve açıklamalar getirildiğini bilir. Ama, bu tür magazin haberiyle dinleyicilerin karşısına çıkmaya çekindim. Biraz tembellik ederek, konuyu bir fizikçi arkadaşıma sorup öğrenmeye karar verdim. Bu konuşmanın konusu, bu kararın beni karşılaştırdığı ilginç bir olayla başlayan bir düşünme sürecidir.

Hemen her üniversite yemekhanesinde akademisyenler masalarda gruplara ayrılırlar. Kalabalık yerlerde bu ayrım bölümlere göredir. Biyoloji bölümünün elemanları bir masadadır, fizik bölümünün elemanları başka bir masadadır, vb. Kalabalık olmayan yerlerde ise masalar yaş gruplarına göre ayrılır. En yaşlıların, orta yaşlıların ve gençlerin toplandığı masalar farklıdır. Böyle olması için kimse kural koymaz, sanırım bu ayrım, insan doğasında olan bir güdüyle kendiliğinden oluşuyor. Şimdi çalıştığım üniversite bu ikinci gruba girer. Masalarda yaş gruplarımıza göre otururuz. Soruyu soracağım fizikçi arkadaşım da bu masada yer alır. Bu masaya gençler hiç uğramaz.

Ertesi gün yemekte fizikçi arkadaşıma gravitasyon' un neden oluştuğunu sordum. O, Einstein'in görecelik kuramıyla konuyu açıklamaya başlarken, masamıza hiç beklenmedik anda çok cazip bir bayan oturdu. Açıklama kesildi. Alışkanlık olduğu üzere, hoş beşten sonra, ben konuyu kaldığı yerden başlatmak istiyordum. Masaya gelen cazip bayanı dışlamış gibi olmayayım diye soruyu ona yönelttim:

"Cazibe nedir?"

Yemin ederim ki aklımda yalnızca "yerçekimi" vardı. Ama o, bizim konuşmakta olduğumuz konuyu bilmiyordu. Dolayısıyla, sorumu "yer çekimi" ya da "gravitasyon" olarak algılamadı. Belki de "cazibe" nin "gravitasyon" anlamına geldiğini bilmiyordu. O yaştakiler için böyle olması doğaldır. Yüzüme baktı ve güldü, başka bir şey söylemeye gerek duymadı. Sanki içinden,

"Aptal, işte cazibe karşında!"

der gibiydi. Yaptığım yanlışı anladım, ama iş işten geçmişti.

O andan sonra, ben cazibenin "gravitasyon" anlamını bir kenara bırakıp, onun, insanları daha çok ilgilendiren öteki anlamını düşünmeye başladım. Cazibenin öteki anlamı estetikte, güzellikte, sanatta saklıdır. Bunların matematiksel bir açıklaması varmola?

Bu tür soruların yanıtlarını önce felsefede ararız. J.King 'in deyimiyle, felsefe derslerinde dört klasik sorunun yanıtı aranır:

Hakikat (truth) nedir?

Gerçeklik nedir?

Adalet nedir?

Güzellik nedir?

Hakikat, gerçeklik ve adalet ile ilgili sorular, klasik felsefede önemlidirler; dolayısıyla birinci sınıf konulardan sayılır. Bu nedenle, düşünce tarihi boyunca filozoflarca incelenegelmiştir. Ama estetik, klasik felsefede ikinci sınıf bir konu olarak kalmıştır. Bunun nedenlerini sorgulayan düşünürler de olmuştur. Genel kanı şudur:

"Güzellik ve sanat, titizlikle tanımlansalar bile, göreceli olarak ayrıntı sayılacak yüzeysel kavramlardır; ciddiyetle ele alınmaya değmezler."

Düşünce dünyasından, bu görüşü destekleyen ilginç sözler seçebiliriz:

"Estetik, bir konunun var olmadığı yerde bir konu yaratma çabasıdır." Arthur Berger (D.W.Prall'ın Aesthetic Analysis' in önsözü)

"Estetiğin sevimsizliği, birçoğumuzun gizliden paylaştığı bir tavırdır." Arthur Berger

Felsefe, çaresizliğini ilan eder:

"Estetiği bilime dönüştürme girişimlerine karşın o hala spekülatif felsefenin bir koludur. Felsefenin bütün kolları içinde belki de en az etkili ve en az hareketli olanı odur." Thomas Munro (Toward Science in Aesthetics)

Bununla da yetinmez, felsefe aczini itiraf eder:

(*)"Matematik içeren bir estetik teori olamaz." tezini biraz daha

ileriye götürüp,

(**) "Kabul edilebilir bir estetik teori yoktur."

der. Bu tezler, Kurt Gödel'in,

"Bir sistemin tutarlılığı o sistem içinde ispat edilemez."

ya da

"Bir belitsel sistem, kendi kendisinin tutarlılığını kanıtlayamaz."

diyen ünlü Kararsızlık (Undecidability) [Tutarsızlık (Inconsistency)] İlkesi'ne benzer. (*) ya da (**) tezlerini savunanlar, bir estetik teorinin olamayacağını değil, olsa olsa, o teorinin doğruluğunun kendi içinde ispat edilemeyeceğini söylüyor olmalıdırlar. Bu durum, yalnız estetik teori için değil, diğer bütün teoriler için geçerlidir. O halde, estetik teori(ler)in yaratılmasına mantıksal engel yoktur. Bunu, matematikteki örneklerle açıklamak mümkündür.

Gödel'in sonuçları ortaya atılmadan önce, Bertrand Russell, bütün matematiğin tutarlı olduğunu; yani çelişki içermediğini kanıtlamak için çok uğraşmıştı. David Hilbert ise, aritmetiğin tutarlı ve her problemin çözülebilir olduğuna inanıyor ve ispat etmeye uğraşıyordu. Dolayısıyla Tutarsızlık İlkesi'nin ortaya çıkışının, onlarla birlikte bir çok matematikçiyi hayal kırıklığına uğrattığı bir gerçektir. Ancak, bilmemiz gereken başka bir gerçek de şudur: Bir matematiksel sistemde, belitlerden (axiom) hareket edilerek mantık kurallarıyla elde edilen bütün teoremler doğrudur. Russell'in 1902'de "The Study of Mathematics" adlı eserinde yazdığı gibi, varolan herhangi bir matematiksel sonuç, geriye doğru izlenerek, en başta kabul edilen belitlerden çıkarılabilir. Gödel'in kararsızlık ilkesi, ispatı varolan teoremleri inkâr etmemizi gerektirmez.

Öte yandan, bir kadının "Ben güzelim" demesi gerçeği ne kadar yansıtırsa, bir belitsel sistemin "Ben tutarlıyım" demesi de gerçeği o kadar yansıtır. Söz konusu kadının güzel olduğuna kendisi değil, başkası karar vermelidir. Ama o başkası, evrensel estetik değerlere sahip olmayabilir. Dolayısıyla, onun kararının doğruluğuna gene bir başkası karar vermelidir. O bir başkasının kararının doğruluğuna, gene bir başkası karar vermelidir. Bu adımlar sonsuza dek yineleneceğinden bitirilemez. Demek ki söz konusu kadının güzel olduğuna karar verilemez.

Benzer usa vurmayla, bir estetik teorinin tutarlılığına (doğruluğuna) da karar verilemeyeceği ortaya çıkar. Bir estetik teorinin tutarlılığına o sistemin kendisi değil, bir başka sistem karar vermelidir. O başka sistemin kararının doğruluğuna, gene bir başka sistem karar vermelidir. Bu süreç sonsuza dek uzayacağı için, bir estetik teorinin tutarlılığına asla karar verilemez.

Gödel'in kararsızlık ilkesi, ispatı varolan teoremleri inkâr etmemizi gerektirmez. O ilke, sistemin bütünü içindir. Bir benzetme yapmak gerekirse, evrenin yapısını bilmiyoruz diye dünya hakkında bildiklerimizden vazgeçemeyiz.

Öte yandan, estetik matematik içermez ise, hele hele bir estetik teori yoksa, iki sanat yapıtını nasıl mukayese ediyoruz. Güzeli çirkinden nasıl ayırıyoruz? Örneğin, "Selimiye camii, Süleymaniye camiinden daha güzeldir." derken matematik kullanmıyor muyuz? Elbette kullanıyoruz. Mukayese kavramı matematiğin özüdür. Tutarlılığı kendi içinde kanıtlanabilen bir estetik teori elbette olamaz, ama bir estetik teori ve hatta estetik teoriler var olabilir. Tıpkı aritmetiğin varoluşu, geometrinin varoluşu, topolojonin varoluşu gibi...

Estetik, kimin hangi sanattan zevk aldığı ya da neden zevk aldığı gibi göreceli olarak basit sayılacak bir konu olmayı çok aşar. İnsanları, "güzellik için ve yalnızca güzellik için zor işler yapmaya iten nedenler" ile "insanları zor ama zarif matematiksel düşünceler yaratmaya iten nedenler" arasında büyük bir benzerlik vardır. Bu nedenler araştırılmaya değer. Bunu yapabilmek için sanatın, güzelliğin, estetiğin ne olduğunu ortaya koymaya çabalamalıyız.

Tabii, felsefenin yapması gereken bu zor işi yapmayı amaçlıyor değiliz. Onun yerine kolay bir işe girişerek, matematik ile sanat arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları ele alacağız. Bir matematikçi için ilk iş, düşünmeye başladığı kavramı tanımlamaktır. Kesin tanımlar, ileride doğacak kavram kargaşasını önler, düşüncelerimize doğru yol çizer. Sanatın, güzelliğin, estetiğin ne anlama geldiklerini belirleyecek tanımlarla yola çıkmalıyız. Bunun için, şimdilik felsefe bize yardımcı olamıyor. O nedenle, daha alt basamaklara inmeliyiz. Ansiklopedilere ve sözlüklere başvurabiliriz. Bütün bu başvuru kaynakları, TDK Sözlüğündeki şu bilgilerin benzerlerini verirler:

Sanat (ad) 1.Bir duygunun, tasarının ya da güzelliğin anlatımında kullanılan yöntemlerin tümü ya da bu anlatım sonucunda ortaya çıkan üstün yaratıcılık: Selimiye Camii yüksek bir sanat yapıtıdır. 2. Belli bir uygarlığın anlayış ve beğeni ölçülerine uygun olarak yaratılmış anlatım: Türk sanatı. Yunan sanatı.

Güzellik (ad) 1. Estetik bir beğeni, coşku, hoşlanma duygusu uyandıran nitelik, hüsun. 2. Ahlaksal ve düşünsel nitelikleriyle hayranlık uyandıran şey.

Estetik (ad) Sanatsal yaratının genel yasalarıyla, sanatta ve yaşamda güzelliğin kuramsal bilimi, güzelduyu, bediiyat. 2. Güzelliği ve güzelliğin insan belleğindeki ve duygularındaki etkilerini konu olarak ele alan felsefe kolu, güzelduyu.

Dikkatle bakınca, bu ifadelerden biri ötekini gerektiriyor; kısır döngüye girilmiştir. Başka sözlüklerin ve ansiklopedilerin sanat için verdikleri tanımlar da bundan farklı değildir. Öte yandan, matematiksel varlıkların estetik olup olmadıklarını söyleyebilmek için, estetiğin tanımına uyup uymadıklarına bakmak gerekir. Ama, öyle görünüyor ki, ne felsefe ne de sanat, estetiği iyi tanımlamıştır. Burada iyi tanımlı olmak, matematiksel bir deyimdir ve çok önem taşır. Bir kümenin iyi tanımlı olması demek, o kümenin bütün öğelerinin eksiksiz belirlenmesi ama o kümeye hiç bir yabancı öğenin karışamaması demektir. Bunu çok özlü anlatan Osmanlıca bir deyim vardır. İyi tanım, "efradını cami, ayarını mani" olan tanımdır.

Bazı kavramların iyi tanımlarını yapmak zordur. Bu durumlarda, bilim adamları, tanım yerine betimleme yapmayı yeğlerler. Örneğin, fizikçiler gravitasyonu tanımlamaya çalışmazlar, onu betimlemenin, onun ne yaptığını açıklamanın daha doğru olduğuna inanırlar.

Biz de burada ele alacağımız "matematik" ve "sanat" kavramları için bu kolay yolu izleyeceğiz.

Matematikçi Gözüyle Bir Sanat Yapıtının Nitelikleri

Bir sanat yapıtı aşağıdakilerden birini ya da bir kaçını yapabilir. Bu nitelikler nesnel olabileceği gibi, kavramsal da olabilir.

1. Doğadaki bir varlığı taklit eder ya da onun bazı niteliklerini ifade eder.
2. Doğaya yeni bir şey ekler.
3. Doğada olan bir şeyi değiştirir.
4. Doğada olan bazı şeyleri ayrıştırır ya da birleştirir.
5. Doğada olan bir şeyle etkileşime girer.

Örneğin, bir portre, bir fotoğraf, bir heykel doğanın birer taklididirler. Bir tablo doğadaki cisimleri, ışıkları ve renkleri birleştirir. Bir melodi, doğadaki sesleri ayrıştırır ve yeniden başka türlü birleştirir. Bir şiir, bir roman doğada (insanda) var olan dili ayrıştırır, birleştirir ve doğadaki varlıkla (insanla) etkileşime girer.

Peki bunları yapan her şey bir sanat mıdır? Teknolojinin son harikası diye piyasaya sürülen bir otomobil, doğada bir şeyler ayrıştırılarak, birleştirilerek yapılmıştır. Üstelik insanla ve hatta toplumla etkileşim içindedir. Ama, çoğu insan, hele hele sanatla ilgisi olanlar, bir otomobili asla bir sanat yapıtı olarak görmezler. Bunun yerine, bir parka konulmuş bir kağnı tekeri bir sanat yapıtı sayılabilir. O halde, sanat yapıtına yeni nitelikler eklemeliyiz:

6. Sanat yapıtı biriciktir; bir eşi daha yoktur.

Mısırdaki Büyük Piramit, çoğu kişiye göre bir sanat harikasıdır. Ama Manhattan'daki gökdelenlerin hiç birisi sanat yapıtı bile sayılmaz. Büyük Piramit de Empire State Building de biriciktirler. Büyük Piramit zor yapılmıştır. O günün koşullarını yeniden oluşturup Büyük Piramit'in bir benzerini yapmak olanaksızdır. Ama, Empire State Building' in aynısı her zaman ve kolayca yapılabilir. Öyleyse, sanat yapıtına şu niteliği de ekleyebiliriz:

7. Sanat yapıtının bir eşi yaratılamaz.

Erciyes dağı biriciktir; doğa onun aynısını bir daha yaratamaz. Ama onun bir sanat yapıtı olduğunu söylemiyoruz. O halde, listemiz biraz daha uzayacaktır:

8. Sanat yapıtını yaratan insandır.

Bir başka örneğe geçelim. Salvador Dali'nin "S.Antonio'nun Baştan Çıkması" adlı tablosunu herkes yaratamaz. Bunu yaratmak için, yapımcısının özel yetilerinin olması gerekiyor. Acaba, Michelangelo "Davud" heykelini bir daha yapabilir miydi? Mozart'ın "Saraydan Kız Kaçırma" operasını bir başkası da besteleyebilir miydi? Yanıtımız hayır olduğuna göre, listemize bir nitelik daha ekleyelim:

9. Sanat eserini, özel yetisi olan yapımcısından başkası yaratamaz.

Yapımcısı da onu bir daha yaratamaz. Eğitimli herhangi bir kişi Dolmabahçe Sarayı'nı bir sanat yapıtı sayarken, aynı şansı Ankara'daki Milli Kütüphane binasına vermez. Çünkü birincisi çevresiyle uyumlu bir güzellik duyumsatır, ama ikincisi bu duyguyu vermez. Demek ki, listemiz daha bitmedi:

10. Sanat yapıtı estetiktir.

Listemize sonuncu olan ama belki de hepsinden önemli olan bir nitelik daha ekleyeceğiz. Hemen hemen hiçbir sanatçının ilk yapıtları sanat dünyasına hemen kabul edilmemiştir. Ancak, sanatçı sanat dünyasına kabul edildikten sonra, o kabul görmeyen ilk yapıtları da sonrakiler kadar sanat değeri taşımaya başlar. Demek ki, bir yapıtın sanat yapıtı olup olmadığına karar verilirken, o yapıtın yukarıdaki on niteliğin çoğuna sahip olması yetmez. Yapıtın özünde olmayan bir nitelik daha gerekiyor.

11. Sanat yapıtı ya da yaratıcısı sanat dünyasına tanıtılmış olmalıdır.

Bir sanat yapıtını betimlerken, yukarıda sıralananlara yenileri eklenebilir ya da bazılarının birbirlerinden bağımsız olmadığı söylenerek liste azaltılabilir. Peşinde olduğumuz amaca ulaşmak için, bunlar şu anda çok önem taşımıyor.

Matematiğin Nitelikleri

Sanat ile matematik arasındaki ilişkiyi ortaya koyabilmek için, sanat için açıkladığımız niteliklerden hangilerinin "matematik" için de geçerli olduğunu araştırmalıyız.

Matematiksel teorilerin, yukarıda sıralanan niteliklerden çoğuna sahip olduğunu savunabilir ve hatta kanıtlayabiliriz. Dolayısıyla, matematiksel teorilerin birer sanat yapıtı olduğunu söylemek mümkündüı Ama bu kadarı yetmez. Onun sanatta olmayan başka nitelikleri de vardır.

Matematiğin sözlüklerde ve ansiklopedilerde değişik tanımlarını bir araya getirirsek, onun işlevlerini ortaya çıkarabiliriz.

1. Matematik insanlığın biricik ortak dilidir,
2. Matematik bilimdir,
3. Matematik bilimin vazgeçilmez aracıdır,
4. Matematik sanattır.

Doğanın Dili: Matematik

Matematiğin, insanlığın ortak dili olduğu yadsınamaz. Her insan saymayı, mukayese yapmayı bilir. Biraz eğitimli olanlar aritmetik işlemleri yapabilir. Parayla alış-veriş yapar, para üstünü alabilir. Tren tarifesi gibi tabloları okuyup anlayabilir. Bütün bu işlerin, her ülkede, her dilde yapılışı aynıdır. Bu anlamda, günlük yaşamda kullanılan matematik, insanlığın ortak dilidir.

Gelmiş geçmiş bütün uygarlıklar matematiğe neredeyse birincil önem vermiştir. Hemen her ülkenin eğitim sisteminde matematik öğretimi anadil öğretimi kadar önem taşır. Bunun nedeni, yalnızca, matematiğin "günlük işlere yarayan bir araç" olması değildir. Günlük yaşamın gerektirdiği matematiği sade bir yurttaşa öğretmek için, bu kadar uzun ve zahmetli bir uğraşa gerekseme olmadığını rahatlıkla savunabiliriz. Kuşkusuz, matematik, günlük yaşamı kolaylaştırmanın çok ötesine geçer; insanlar onun farkına varsa da varmasa da o kendi başına vardır. Bilim denilen şeyi, bütün görkemiyle özünde bulundurur.

Matematiği bilimin bir aracı olarak düşünüp;

> "Doğa'nın büyük kitabı yalnızca onun yazıldığı dili bilenler tarafından okunabilir; o dil matematiktir."

diyen Galileo'ya hak vermeliyiz. Bunu hakettiren pek çok örnek gösterilerek, "Matematik doğanın esas dilidir." tezi inançla savunulabilir:

> "Matematiğin bilim için çok değerli olmasının nedeni, bilimsel yasa ve teorilerin en güzel, belki de yegane tam ifadelerinin matematiksel formüller biçiminde olmasıdır. Bir bilimsel teorinin matematiksel teori ile ifade edilmesindeki kesinlik ölçüsü, o bilimin durumunun bir ölçüsüdür." L.T.Moore

Matematiksel Varlıklar Keşfediliyor mu? Yaratılıyor mu?

Matematiksel varlıkların, fiziksel varlıklar gibi, insan düşüncesinden bağımsız olarak var oldukları düşüncesi Platon'a kadar gider. O görüşe göre, matematiksel varlıklar keşfedilirler. Örneğin, sayılar doğada zaten vardı ve keşfedilmeyi bekliyorlardı. Birileri onları keşfedince, bilgi dünyamıza katılmış oldular.

Bunun karşıtı olan görüş ise, matematiksel varlıkların düşünceyle yaratıldığını savunur. Matematiksel varlıklar, insan düşüncesinden bağımsız varlıklar değildir. Örneğin, 5 sayısı doğada var olan fiziksel bir nesne değildir. 5 elmayı, 5 armutu, 5 sandalyeyi algılamamızı sağlayan soyut bir kavramdır. Sayılardan kümeler oluştururuz, kümeler üzerinde işlemler ve giderek yapılar (uzaylar) kurarız. Uzaylar arasında fonksiyonlar tanımlarız. Birinden ötekine dönüşümler yaparız. Bunların fiziksel uzayda karşılıkları yoktur; ya da, matematikçi bunları yaparken fiziksel karşılığının olup olmadığı sorusuyla ilgilenmez..

Bu ve benzeri örnekleri göstererek, matematiksel varlıkların zaten doğada var olduklarını ve zamanı gelince keşfedildiklerini söyleyenlere hak vermek mümkündür. Daha ileri giderek şunu sorabiliriz: Başka bir gezegende, dünyamıza benzer yaşam koşulları ve bize benzeyen canlılar varsa, acaba onların matematiği de bizimki gibi midir? Bu tür sorulara yanıt aramak, belki safsatayla uğraşmaktır. "Safsata" deyimi çok yerinde sayılmıyorsa, o soruya bu gün felsefenin ya da bilimin yanıt veremediğini söyleyebiliriz. Her iki görüşü destekleyen ya da yadsıyan örnekler bulmak zor değildir.

Kaçınılmazlık

Matematiksel bir varlığın (matematiksel bir kavram, tanım, önerme), yukarıda sanat için sayılan on bir özelikten bazılarını sağladığını söyledik. Ama, onun yanında, matematiksel yapılarda bir kaçınılmazlık, başka biçimde olamazlık vardır. Örneğin, üçgen'i doğada zaten var olan bir varlık olarak düşünenler olabileceği gibi, onu doğaya eklenen yeni bir varlık olarak da düşünenler olabilir. Hangisini kabul ederseniz edin, "Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir" diyen önermenin doğaya katılan bir varlık (kavram) olduğunu kabul edeceksiniz. Bu keşfi ya da buluşu bir başkası bir başka zamanda yapmış olsaydı, üçgen gene o üçgen ve açıları toplamı gene 180 derece olacaktı.

1,2,3,4,5,... diye saydığımız Doğal Sayılar'ı ortaya koyan bir kişiden sözetmek (ki bunu ilk kez tanımlayan İtalyan matematikçisi Guiseppe Peano (1858-1932)'dur) olanağı varsa, o kişi olmasaydı, bir başkasının doğal sayıları ortaya koyacağı tartışmasız kabul edilir. Kimilerine göre, Doğal Sayılar, zaten doğada var olan varlıklardı; insan onu sadece keşfetmiştir, tıpkı Amerika'nın keşfedilmesi ya da röntgen ışınının keşfedilmesi gibi... Öyleyse, Peano olmasaydı, bir başkası onu zaten keşfedecekti. Doğal Sayıların yaratıldığını savunanlar da şunu söylerler: O günkü bilgi (bilim) sınırı Doğal Sayılar'ın ortaya çıkmasını gerektiren bir yere ulaşmıştı. İnsanlar böyle bir alete şiddetle gerekseme duyuyordu. Dolayısıyla, Doğal Sayılar'ın yaratılması kaçınılmaz hale gelmişti. Peano olmasaydı, Doğal Sayılar'ı zaten bir başkası yaratacaktı. Doğal Sayılar'ı ister yaratılmış sayın, ister keşfedilmiş sayın, onu yaratan ya da keşfeden kişi başka birisi olsaydı bile, Doğal Sayılar bu günkü gibi olacaktı.

Öte yandan, "Selimiye Camii'ni Mimar Sinan olmasaydı bir başkası yaratabilir miydi?" sorusuna yukarıdaki gibi yanıt veremeyiz. Büyük olasılıkla, bir başkasının yaratacağı cami, Mimar Sinan'ın yaptığına benzemeyecekti.

Teklik

Matematiğin yarattığı ya da keşfettiği her şey biriciktir. Örneğin, dik üçgenlerin kenarları arasındaki bağıntıyı veren ünlü Pisagor Teoremi biriciktir. "Doğal Sayı" kavramı (varlığı) biriciktir. "Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir" önermesinin bir eşi daha yaratılamaz. Çünkü bu özeliği ifade eden her şey bu önermeyle özdeş olur. "Doğal Sayı" kavramı (varlığı) bir daha yaratılamaz; çünkü doğal sayıların niteliklerini taşıyan her varlık da onunla özdeş olur. Bu iş, bir sanat yapıtının kopyaları gibi yorumlanabilir mi? Peano'nun ne yaptığını bilen birisi Doğal Sayılar'ı yeniden keşfediyorsa, yaptığı iş bir kopyadır. Peano'yu bilmeden Doğal Sayıları yeniden yaratacak kişi, Amerigo Vespucci'yi (isterseniz Christoforo Columbus deyin) bilmeden Amerikayı yeniden keşfedecek acemi bir gemiciye benzer.

Matematik, Sanatın İleri ve Çok İşlevli Bir Aşamasıdır

Şimdi, konuya başka bir açıdan bakalım. Bütün insanlara doğanın yasalarını öğretmeyi amaçlamadığın göre, matematik öğretiminin bu denli yaygın oluşuna başka gerekçeler aramalıyız.

Bertrand Russell, insanın neden matematik öğrenmesi gerektiğini ciddi olarak incelemiş ve

> "... arzu edilen şeyin sadece yaşamak olgusu olmayıp, yüce şeyler üzerinde düşünerek yaşamak sanatı olduğunun hatırlanmasında yarar vardır."

demiştir. Eğitim ve kültür sistemlerimiz, insanların resimden, müzikten, şiirden, heykelden; kısaca sanattan zevk almasını istiyor. Bu istek, Russell'in söylediği yüce şeyler kapsamına girer.

Matematiği de bu kapsamda saymak gerektiği apaçıktır. Matematiğin, bütün insanların biricik ortak dili olduğu, günlük yaşam için yararlı olduğu, doğa olaylarını açıklayan bir dil olduğu ve kendi kendisine yeten bir bilim olduğu yadsınamaz. Ama bütün bunların ötesinde, Russell'in yüce şeyler'i arasındadır:

> "Matematik bir sanattır."

Çünkü, bir sanat dalında arayacağınız her yüce şey matematikte vardır. Ona ek olarak, liberal sanatların sahip olamadığı üstün niteliklere de sahiptir. O halde, o, sanatın ileri bir aşamasıdır.

SEKİZ TAMKARE TEOREMİ VE CAYLEY SAYILARI

Oktay K. Pashaev - Fatih Erman
İYTE, Fen Fakültesi, Urla, İZMİR

Daha önceki sayılarımızda [1, 2] iki ve dört tamkare özdeşliklerini, ilgili teorem ve bağıntıları kompleks sayılar ve kuaterniyonlar yardımıyla incelemiştik. Bu özdeşlikler kompleks sayılar ve kuaterniyonların çarpımlarının normları yardımıyla yorumlanmıştı. Buradan, doğal olarak şöyle bir soru sorulabilir: İki n-tamkarenin toplamlarının çarpımı, bir n-tamkarenin toplamına eşit olabilir mi? Daha doğrusu, n'nin hangi değerleri için aşağıdaki özdeşlik sağlanır?

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)\,(b_1^2 + ... + b_n^2) = A_1^2 + ... + A_n^2 \tag{1}$$

Burada A_i' ler $(i = 1, 2, ..., n)$ a ve b' lerin bilineer formu olarak verilmiştir. (Örnegin, $a_1 b_1 + 9a_1 b_2 - 3a_3 b_5 + 4a_3 b_4$ ifadesi bilineer bir formdur) Gördüğümüz gibi $n = 2$ olduğunda , $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ ve (A_1, A_2) ikilileri kompleks sayıları temsil eder : $(z_1, z_2) \leftrightarrow z_1 + i z_2$

$n = 4$ olduğunda da $(a_1, ..., a_4)$, $(b_1, ..., b_4)$ ve $(A_1, ..., A_4)$ sayı dörtlüleri, Hamilton'un kuaterniyonlarını temsil eder: $(q_1, ..., q_4) \leftrightarrow q_1 + q_2\, i + q_3\, j + q_4\, k$

Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden kısa bir süre sonra Arthur Cayley, problemin $n = 8$ değeri için bir çözümü olduğunu gösterdi ve Hamilton'un birimlerinin bir genelleştirilmesi olan 8 birimi(units) aşağıdaki çarpım bağıntılarını sağlayacak şekilde

$$i_1^2 = -1, ..., i_7^2 = -1 \quad ; \quad i_1 i_2 = i_4 = -i_2 i_1 \quad ; \quad i_2 i_3 = i_5 = -i_3 i_2 \quad ; \quad i_1 i_3 = i_7 = -i_3 i_1$$

ve benzer çarpım bağıntılarını da aşağıdaki çarpım tablosuna göre tanımladı.

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	i_4	i_7	$-i_2$	$-i_6$	$-i_5$	$-i_3$
i_2	$-i_4$	-1	i_5	i_1	$-i_3$	i_7	$-i_6$
i_3	$-i_7$	$-i_5$	-1	i_6	i_2	$-i_4$	$-i_1$
i_4	i_2	$-i_1$	$-i_6$	-1	i_7	i_3	$-i_5$
i_5	$-i_6$	i_3	$-i_2$	$-i_7$	-1	i_1	i_4
i_6	i_5	$-i_7$	i_4	$-i_3$	$-i_1$	-1	i_2
i_7	i_3	i_6	$-i_1$	i_5	$-i_4$	$-i_2$	-1

(Burada çarpımın sonucu i. satırdaki elemanla j. sütundaki elemanın çarpımıdır) Oktonyanlar olarak da adlandırılan Cayley sayıları, $x_0, x_1, ..., x_7 \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x = x_0 + x_1\, i_1 + ... + x_7\, i_7 \tag{2}$$

Bir oktonyanın eşleniğini de aşağıdaki şekilde tanımlamak uygun olacaktır:

$$\overline{x} = x_0 - x_1\, i_1 - ... - x_7\, i_7 \tag{3}$$

Buradan x ve $\overline{x}$ çarpımı

$$x\,\overline{x} = \overline{x}\,x = x_0^2 + ... + x_7^2 \tag{4}$$

oktonyanın normunun karesini veren gerçel bir sayi olur.

Herhangi sıfırdan farklı bir oktonyanın tersi

$$x^{-1} = (x\,\overline{x})^{-1}\,\overline{x} \qquad (5)$$

olarak verilir ve burada $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$ dir. Bundan daha önceki sayılarımızda kuaterniyonların çarpımının yerdeğiştirme özelliğine sahip olmadıklarını görmüştük. Tablodan da görüleceği üzere Cayley sayılarının çarpımının yerdeğiştirme özelliğine sahip olmamalarının yanında, ayrıca birleşme özelliğine de sahip olmadıkları görülür. Örneğin,

$$i_1\,(i_2\,i_3) = i_1\,i_5 = i_6 \quad , \quad (i_1\,i_2)\,i_3 = i_4\,i_3 = -i_6$$

$$i_1\,(i_2\,i_3) \neq (i_1\,i_2)\,i_3 \qquad (6)$$

Cayley sayıları genel bir birleşme özelliğine sahip olmamalarına karşın, birleşme özelliğinin özel bir formunu sağlar. x, y oktonyanları için

$$x\,(y\,y) = (x\,y)\,y \quad , \quad (x\,x)\,y = x\,(x\,y) \qquad (7)$$

dir. x ve y gibi iki oktonyanın çarpımının

$$(x_0 + x_1\,i_1 + ... + x_7\,i_7)\,(y_0 + y_1\,i_1 + ... + y_7\,i_7) = z_0 + z_1\,i_1 + ... + z_7\,i_7 \qquad (8)$$

gibi yazılabileceği tablodan kolaylıkla görülebilir. Burada,

$$\begin{array}{ll} z_0 = x_0\,y_0 - x_1\,y_1 - ... - x_7\,y_7 & z_1 = 2\,3 + 4\,5 + 7\,6 + \overline{0\,1} \\ z_2 = 3\,1 + 4\,6 + 5\,7 + \overline{0\,2} & z_3 = 1\,2 + 6\,5 + 4\,7 + \overline{0\,3} \\ z_4 = 5\,1 + 6\,2 + 7\,3 + \overline{0\,4} & z_5 = 1\,4 + 3\,6 + 7\,2 + \overline{0\,5} \\ z_6 = 2\,4 + 5\,3 + 1\,7 + \overline{0\,6} & z_7 = 2\,5 + 3\,4 + 6\,1 + \overline{0\,7} \end{array} \qquad (9)$$

ve $j\,k = x_j\,y_k - x_k\,y_j$, $\overline{0\,j} = x_0\,y_j + x_j\,y_0$ 'dır. Bu çarpım formülünden sekiz tamkare özdeşliğini sağlayan normların karelerinin çarpımını

$$(x_0^2 + x_1^2 + ... + x_7^2)\,(y_0^2 + y_1^2 + ... + y_7^2) = (z_0^2 + z_1^2 + ... + z_7^2) \qquad (10)$$

olarak bulabiliriz. Fakat biz bunun yerine daha farklı bir yöntem izleyeceğiz. Cayley-Dickson ikilemesi (doubling) olarak bilinen bu yöntem kuaterniyonları ikilemenin bir sonucudur[3]. Göreceğimiz üzere bu yöntem sadece kuaterniyonlardan Cayley sayılarını elde etmek için değil, aynı zamanda kompleks sayılardan kuaterniyonları ve gerçel sayılardan da kompleks sayıları elde etmek için kullanılır.
a) İlk olarak, daha basit bir örnek olan dört tamkare özdeşliğini ve kuaterniyonları inceleyelim. Herhangi bir kuaterniyon $q \in \mathcal{H}$,

$$q = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k \qquad (11)$$

olarak ifade edilir. Aynı zamanda eğer i ve j birimlerinin çarpım özelliğini kullanırsak $(i\,j = k)$ q' yu

$$q = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,i\,j = (x_0 + x_1\,i) + (x_2 + x_3\,i)\,j \qquad (12)$$

şeklinde temsil edebiliriz.

Bu ifade herhangi bir kuaterniyonun $x_0 + x_1\,i$ ve $x_2 + x_3\,i$ gibi bir kompleks sayı çifti ile temsil edilebileceğini gösterir. Buradan, q ve r gibi iki kuaterniyon aşağıdaki biçimde tanımlanırsa,

$$q = (x_0 + x_1\,i) + (x_2 + x_3\,i)\,j = v + V\,j \quad ve \quad r = (y_0 + y_1\,i) + (y_2 + y_3\,i)\,j = w + W\,j \qquad (13)$$

çarpımları

$$q\,r = (v + V\,j)\,(w + W\,j) = (v\,w - V\,\overline{W}) + (v\,W + V\,\overline{w})\,j \qquad (14)$$

şeklinde olacaktır. Son ifade kuaterniyon çarpımını (Hamilton'unkine eşdeğer)kompleks sayı ikililerinin çarpımı şeklinde tanımlayabilmemize sağlar:

$$(v,V)\,(w,W) = (v\,w - V\,\overline{W}, v\,W + V\,\overline{w}) \tag{15}$$

Buradan 4 tam kare özdeşliğini, kompleks iki tam kare özdeşliğini kullanarak doğrudan ispatlayabiliriz:

$$\begin{aligned} |q\,r|^2 &= |v\,w - V\,\overline{W}|^2 + |v\,W + W\,\overline{w}|^2 \\ &= |v|^2\,(|w|^2 + |W|^2) + |V|^2\,(|w|^2 + |W|^2) \\ &= (|v|^2 + |V|^2)\,(|w|^2 + |W|^2) \\ &= |q|^2\,|r|^2 \end{aligned} \tag{16}$$

b)Benzer bir yolla herhangi bir oktonyon, kuaterniyonlar ikilileri ile temsil edilebilir. Burada $1, i_1, i_2, i_3$ birimleri, kuaterniyonların birimleri arasındaki bağıntıları sağladığından , bunları $1, i, j, k$ olarak değiştirebiliriz. Diğer kalan dört birim ise $e = i_4$, $i\,e = i_5$, $j\,e = i_6$ *ve* $k\,e = i_7$ olarak alalım. Bu takdirde, herhangi bir Cayley sayısı $x = x_0 + x_1\,i_1 + ... + x_7\,i_7$, $q + Qe$ biçiminde yazılır. Burada,

$$q = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k \qquad Q = x_4 + x_5\,i + x_6\,j + x_7\,k \tag{17}$$

olarak belirlenen kuaterniyonlardır. Dolayısıyla $(q + Q\,e)$ ve $(r + R\,e)$ gibi iki oktonyonun çarpımı

$$(q + Q\,e)\,(r + Re) = q\,r - \overline{R}\,Q + (R\,q + Q\,\overline{r})\,e \tag{18}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Burada q, Q, r ve R kuaterniyonlardır. Bu formül oktonyon çarpımını kuaterniyon sayı ikililerinin çarpımı olarak tanımlar:

$$(q,Q)\,(r,R) = (q\,r - \overline{R}Q, Rq + Q\,\overline{r}) \tag{19}$$

Bu şekilde $\overline{q}$ kuaterniyonu, q' nun eşleniği olmak üzere , $x = q{+}Q\,e$ oktonyonunun eşleniğini $\overline{x} = \overline{q}{-}Q\,e$ olarak tanımlayabileceğimiz açıktır. Şimdi, herhangi bir Cayley sayısı x ile onun eşleniği $\overline{x}$'in çarpımı,

$$\begin{aligned} x\,\overline{x} = (q + Q\,e)\,(\overline{q} - Q\,e) &= (q\,\overline{q} + \overline{Q}\,Q) + (-Q\,q + Q\,q)\,e \\ &= q\,\overline{q} + Q\,\overline{Q} \end{aligned} \tag{20}$$

olur ve kuaterniyonlar için $q\,\overline{q} = \overline{q}\,q = |q|^2$ olduğundan,

$$|x|^2 = \sum_{i=0}^{7} x_i^2 = x\,\overline{x} = |q|^2 + |Q|^2 \tag{21}$$

olarak yazılabilir. Buradan, iki Cayley sayısının çarpımının mutlak değerleri, bu iki Cayley sayısının mutlak değerlerinin çarpımı olduğu kolayca ispatlanabilir($|x\,y|^2 = |x|^2|y|^2$). İki oktonyonun çarpımı

$$x\,y = (q + Q\,e)\,(r + R\,e) = (q\,r - \overline{R}\,Q)\,(\overline{q\,r - \overline{R}\,Q}) + (R\,q + Q\,\overline{r})\,(\overline{R\,q + Q\,\overline{r}}) \tag{22}$$

dır. Kuaterniyonların eşleniğinin özelliğinden,

$$|x\,y|^2 = (q\,r - \overline{R}\,Q)\,(\overline{r}\,\overline{q} - \overline{Q}\,R) + (R\,q + Q\,\overline{r})\,(\overline{q}\,\overline{R} + r\,\overline{Q}) \tag{23}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Diğer yandan,

$$|x|^2\,|y|^2 = (q\,\overline{q} + Q\,\overline{Q})\,(r\,\overline{r} + R\,\overline{R}) \tag{24}$$

olur. Son iki ifadenin farkı alınırsa,

$$S = |x\,y|^2 - |x|^2\,|y|^2 = R\,q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q}\,\overline{R} - q\,r\,\overline{Q}\,R - \overline{R}\,Q\,\overline{r}\,\overline{q} \tag{25}$$

olur. Şimdi, herhangi q,Q,r,R gibi dört kuaterniyon için S' nin sıfır olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak eğer R gerçel bir kuaterniyon ise ($R = R_0 + 0\,i + 0\,j + 0\,k$), S' nin sıfır olacağı açıktır (kuaterniyonların değişme özelliğine sahip olmayıp, birleşme özelliğine sahip olduğu hatırlanmalıdır). Öte yandan, R sadece sanal kuaterniyon ise ($R = 0 + R_1\,i + R_2\,j + R_3\,k$) , $\overline{R} = -R$ ve $S = R(q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q}) - (q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q})R$ olur. Parantezdeki ifadeler $q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q}$ iki eşlenik kuaterniyonun toplamıdır. Dolayısıyla, sonuç bir C gerçel sayısına eşit olur. Buradan,

$$S = R\,C - C\,R = 0 \tag{26}$$

olur. Eğer S , $R = a$ ve $R = b$ için sıfır oluyorsa $R = a + b$ için de sıfır olacaktır. Tüm kuaterniyonlar bir gerçel sayı ve sanal kuaterniyonun toplamından oluştuğu için ve de bunların her biri için S sıfır olduğundan, S her zaman sıfır olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Şimdi, elde ettiğimiz bu özdeşliği bileşenleri cinsinden yazarsak

$$(x_0^2 + x_1^2 + ... + x_7^2)(y_0^2 + y_1^2 + ... + y_7^2) = (z_0^2 + z_1^2 + ... + z_7^2) \tag{27}$$

sonucuna varırız. Burada $x\,y = z_0 + z_1\,i_1 + ... + z_7\,i_7$, $x = x_0 + x_1\,i_1 + ... + x_7\,i_7$ ve $y = y_0 + y_1\,i_1 + ... + y_7\,i_7$. Ayrıca z_i , x_i ve y_i'ler cinsinden (9)'da verilmiştir. Bu ulaştığımız sonuç, sekiz tam kare özdeşliğinden başka bir şey değildir. Buradan bazı diğer n değerleri için de n tam kare özdeşliği probleminin çözümü olduğunu düşünebilirsiniz[5]. Aslında bu fikir ilk olarak 1844 yılında oktonyonları Hamilton'la yazışmalarında ortaya atan John T.Graves'e aittir. Fakat bu yazışmalar 1847 yılına kadar yayımlanmadı ve daha sonra Cayley tarafından tekrar keşfedildi. Dolayısıyla Graves genel bir teori olarak $n = 2^m$-yonlar ($n = 2^m$-ions) ve $n = 2^m$ özdeşlikleri fikrini düşündü. Fakat 1896 yılında Alman matematikçi A.Hurwits'in çalışmaları bu özdeşliklerin sadece $n = 1, 2, 4$ ve 8 için varolabileceğini gösterdi. Bu özdeşlikleri sağlayan sayı sistemleri de gerçel sayılar $\mathcal{R}$, kompleks sayılar $\mathcal{C}$, kuaterniyonlar $\mathcal{H}$ ve de oktonyanlar $\mathcal{O}$ dır. Tam sayıların, kompleks, kuaterniyon ve oktonyonlar tamsayılarına genelleştirilmesi ve bunların geometrik yorumu doğal bir sorudur[6]. Gaussian tamsayıları $Z[i] = \{n + m\,i\,|n, m \in \mathcal{Z}\}$ ve Minkowski tamsayıları $Z[i,j,k] = \{n + m\,i + l\,j + p\,k\,|n, m, l, p \in \mathcal{Z}\}$ iki ve dört boyutlu polihedronların örgüleri ile ilgilidir. Tam kuaterniyonların dört boyutta sıkı paketleme ile ilgili olmasına benzer olarak, tam Cayley sayılarıda sekiz boyutta kürelerin sıkı paketlenmesinden sorumludur. Kuaterniyonlar ve oktonyanların ayrıcalıklı özellikleri ve de bunların gerçek dünya ile ilişkileri doğadaki temel etkileşimleri "süpersimetri" , "sicim teorisi" ve çokboyutlu uzaylar yardımıyla birleştiren modern fizik teorilerinde farkedilmiştir. Bu konuya Türk bilim adamımız Feza Gürsey önemli katkılarda bulunmuştur[4].

KAYNAKLAR

[1] O.K. Pashaev, E. Büyükaşık, Karmaşık Sayılarda İki Tamkare Teoremi, Matematik Dünyası, Cilt:10, Sayı:1

[2] O.K. Pashaev, E. Büyükaşık, Kuaterniyonlar Dört Tamkare Teoremi, Matematik Dünyası, Cilt:10, Sayı:2

[3] I.L.Kantor, A.S.Solodovnikov, "Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebras", Springer 1989

[4] F.Gürsey, Chia-Hsiung Tze, "On The Role Of Division, Jordan And Related Algebras in Particle Physics" W.S.1996

[5] C.W.Curtis "The Four And Eight Square Problem And Division Algebras"

[6] H.S.M.Coxeter "Integral Cayley Numbers" Am.Math.Monthly, 53(1946)136

SÜREKLİ VE TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Şafak Alpay
ODTÜ, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ANKARA

Gerçel sayıların $[a,b]$ kapalı aralığından gerçel sayılarda değerler alan bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $x_0\in[a,b]$ noktasındaki türevlenebilirliği

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad a\le x\le b,\ x\ne x_0 \tag{1}$$

limitinin varlığı ile ifade edilen ve f fonksiyonunun x_0 noktasındaki yerel bir özelliğidir. Limitin değerine, türevin x_0 noktasındaki değeri denir ve $f'(x_0)$ ile gösterilir. Bu şekilde yine $[a,b]$ aralığından, gerçel sayılarda değer alan yeni bir f' fonksiyonu tanımlanabilir. Eğer f' fonksiyonunun tanım kümesi $[a,b]$ ise f, $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir denir.

Bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevlenebilirliği onun x_0 da (yine yerel bir özellik olan) sürekliliği gerektirir. Ancak bu önermenin tersi doğru değildir.

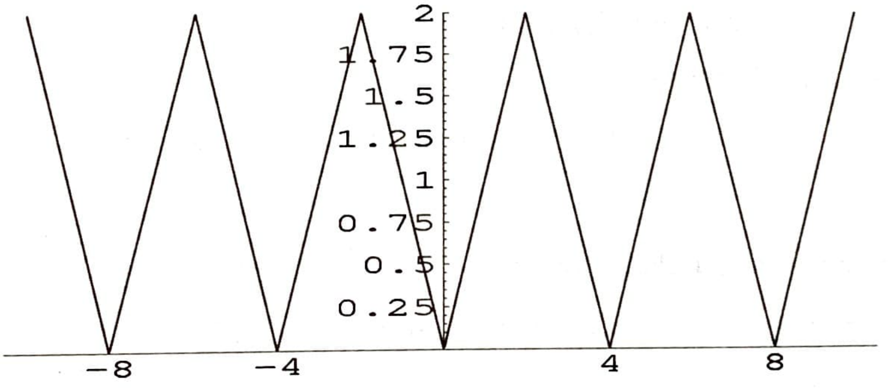
Örneğin, $f(x)=|x|$, mutlak değer fonksiyonu, sürekliliğin türevlenebilirliği gerektirmediğini gösterir. Gerçekten bu fonksiyon $x=0$ noktasında sürekli iken (1) deki limitte sağdan limit

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

iken, soldan, yani sıfıra negatif değerler ile yaklaşıldığında,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

olduğundan (1) deki limit yoktur. $f(x)=|x|$ fonksiyonu ile oynayarak sürekli ancak sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta noktada türevlenebilir olmayan fonksiyonlar üretebilirsiniz. 19.y.y. başlarında matematikçiler sürekli fonksiyonların hatırı sayılır bir kümede türevlenebilir olduğundan kuşkulanıyorl



Bu konuda ilk işe koyulan A.M. Ampére oldu. 1806'da Ampére, sürekli olsun, olmasın her fonksiyonun, ihmal edilebilir, bir küme dışında türevlenebileceğini ileri sürmüştü.

Ampére, bu konuda başarısız oldu. Bu konudaki çalışmalara Weierstrass (1815-1897), 18 Temmuz 1872'de Berlin Akademisine sunduğu çalışması ile nokta koydu. Weierstrass, her noktada sürekli ancak hiçbir noktada türevi olmayan fonksiyon örneklemişti. O'nun örneği ilk kez 1875'de Du Bois-Reymond tarafından yazıldı. Bu örnek, a'nın tek ve tamsayı, b'nin de $0 < b < 1$ ve $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ sağlayan gerçel bir sayı seçilerek tanımlanan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} b^k \cos(a^k \pi x)$$

fonksiyonu idi. Avusturyalı B. Bolzano (1781-1848)'nun 1830'da benzeri bir örnek inşa ettiği biliniyor. Ancak Bolzano'nun yazısı 1920'de ele geçiyor ve yazıldıktan 100 yıl sonra, 1936'da basılabiliyor.

Weierstrass'tan bu yana böylesi bir çok fonksiyon örnekleniyor. Ancak 1960'da, F.A. Behrend tarafından üretilen örnek, bu örnekler içinden en kolay anlaşılır olanlardan biri.

Gerçel sayılar, $\mathbb{R}$'den, yine $\mathbb{R}$'de değerler alan heryerde sürekli ancak hiçbir yerde türevlenebilir olmayan fonksiyon örneği olarak $\varphi = \varphi(x)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın:

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x| & , \quad |x| \leq 2 \\ \varphi(x + 4n) & , \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

φ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır.

1. φ süreklidir
2. $0 \leq \varphi(x) \leq 2$ ve $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2$
3. Her x ve y için $-1 \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq 1$
4. Her c gerçel sayısı için $|c - x_0| = 1$ ve $|\varphi(c) - \varphi(x_0)| = |c - x_0|$ koşullarını sağlayan x_0 vardır
5. $a > 0$ ve $b > 0$ için $\varphi_n(x) = a^n \varphi(b^n x)$; $n = 0, 1, 2, \cdots$ ile tanımlanırsa, φ_n sürekli bir fonksiyondur
6. $0 \leq \varphi_n(x) \leq 2a^n$, $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq 2a^n$
7. $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq a^n b^n |x - y|$
8. Her c için, $|c - x_n| = \frac{1}{b^n}$ koşulunu sağlayan x_n vardırki bu x_n, $|\varphi_n(c) - \varphi_n(x_n)| = a^n b^n |c - x_n|$ eşitliğini sağlar

Şimdi, a sayısını $0 < a < 1$ olarak seçelim ve $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ olarak tanımlıyalım. (6) özelliği ve fonksiyon serileri için kullanılan Weierstrass M-ölçütü ile $f(x)$ fonksiyonunu betimleyen serinin düzgün yakınsadığını buluruz. Düzgün yakınsayan sürekli fonksiyonların limiti olarak tanımlanan bir fonksiyon sürekli olacağından, f fonksiyonu süreklidir.

f fonksiyonunun türevlenebilir olmadığını görmek için $ab > 1$ ve c için $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ olan bir (x_n) dizisi seçelim.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(c)-f(x_n}{c-x_n}\right| &= \left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varphi_j(c)-\varphi_j(x_n)}{c-x_n}\right| \\
&\geq \left|\frac{\varphi_n(c)-\varphi_n(x_n)}{c-x_n}\right| - \sum_{j=0,j\neq n}^{\infty}\left|\frac{\varphi_j(c)-\varphi_j(x_n)}{c-x_n}\right| \\
&\geq (ab)^n - \sum_{j=0}^{n-1}(ab)^j - 2b^n\sum_{j=n+1}^{\infty}a^j \\
&= (ab)^n - \frac{(ab)^n-1}{ab-1} - \frac{2a(ab)^n}{1-a} \\
&> (ab)^n\left(1-\frac{1}{ab-1}-\frac{2a}{1-a}\right)
\end{aligned}$$

Buradan $d = 1 - \frac{1}{ab-1} - \frac{2a}{1-a} > 0$ ise

$$\lim\left|\frac{f(c)-f(x_n)}{c-x_n}\right| > \lim(ab)^n d = \infty$$

olacağından, c noktasında, türevlenebilirliği tanımlayan limit yoktur ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebilir değildir.

Günümüzde Baire Kategori teoremi olarak bilinen bir teorem sayesinde birçok sürekli fonksiyonun türevlenebilir olmadığını biliyoruz. Bir anlamda türevlenebilir (sürekli) fonksiyonlar sürekli fonksiyon içinde çok azdır[2].

KAYNAKLAR

[1] Behrend, F.A: Crinkly Curves and Choppy Surfaces AMM, 67 (971-973), 1960

[2] Boas R.P: A Primer of Real Functions, Math. Asc. U.S.A, 1972

Matematik, insan zekâsının en güzel çocuğudur. Bu çocuğu tanımak, anlamak ve büyütmek, insanlığın insanlığa doğru sonsuz bir seri halinde açılması demektir.

Anonim

CARMICHAEL SAYILARI

Engin Büyükaşık
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

Fermat'ın küçük teoremine göre; n asal bir sayı ise her $a \in Z$ için $a^n \equiv a \pmod n$ ya da $n|(a^n - a)$ dir [2]. Doğal olarak asal sayılar dışında bu kongüransı sağlayan tamsayılar bulunup bulunmadığı sorulabilir. Bu soruyu ilk olarak 1910 yılında R. D. Carmichael adlı bir matematikçi yanıtlamış ve her $a \in Z$ için;

$$561(= 3 \cdot 13 \cdot 17)|(a^{561} - a)$$

olduğunu göstermiştir. Daha sonra 1912 yılında "$a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$ kongüransını sağlayan P bileşik sayıları üzerine" adlı makalesinde bu sayıların bazı özelliklerini tanıtmıştır. Bundan dolayı bu kongüransı sağlayan bileşik sayılara ***Carmichael sayıları*** denmektedir.
Bu sayıların özelliklerini incelemeden önce bazı tanım ve teoremleri görelim.

$n \in N$, $n \geq 2$ olmak üzere

$$Z_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

kümesini ele alalım. $x, y \in Z_n$ için $x + y$, xy ve n ye Z içinde bölme algoritmasını uygulayalım:

$$x + y = an + r \quad , a \in Z, \quad r \in Z_n$$

$$xy = bn + s \quad , b \in Z, \quad s \in Z_n$$

Bu durumda r ve s, sırasıyla, $x + y$ ve xy sayıları n ile bölündüğünde elde edilen en küçük negatif tamsayılar olup tek türlü belirli olduklarından,
$x \oplus y = r$ ve $x \otimes y = s$ tanımlanırsa, Z_n içinde $\oplus$ ve $\otimes$ ikili işlemleri elde edilir.
Z_n nin n ile aralarında asal olan elemanlarının oluşturduğu kümeyi Z_n^* ile gösterelim:

$$Z_n^* = \{k \in Z_n : (k, n) = 1\}.$$

Bu durumda Z_n ve Z_n^* nın sırasıyla $\oplus$, $\otimes$ işlemlerine göre birer grup oldukları kolayca gösterilebilir. Z_n^* nın mertebesi (eleman sayısı) $\phi(n)$ ile gösterilir. Şu halde, $n \geq 2$ için, $\phi(n) = |Z_n^*|$ =(n den küçük ve n ile aralarında asal olan doğal sayıların sayısı) dır.

Bir G grubu ve $x \in G$ için

$$G = \{x^n : n \in Z\} = < x >$$

ise G ye bir ***devirli grup***, x elemanına da G nin bir ***üreteci*** denir.

Teorem 1 $n \geq 2$ şeklinde bir pozitif tamsayı ve $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t}$ ise,

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{t} [p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)] = n \prod (1 - \frac{1}{p_i})$$

dir.

Kanıt: [2]

Teorem 2 (Euler) m pozitif bir tamsayı ve $(a, m) = 1$ ise $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ dir.

Kanıt: m den küçük ve m ile aralarında asal olan tamsayılar kümesi $\{x_1, ..., x_k\}$ olsun. Diğer taraftan $(a, m) = 1$ olan bir a pozitif tamsayısı için $\{ax_1, ..., ax_k\}$ kümesini ele alalım. Bu kümenin her bir elemanının m ile aralarında asal olduğu açıktır. Bu takdirde her iki kümenin m modülüne göre denk olduklarını söyleyebiliriz. Buradan da $ax_1 \cdots ax_k \equiv x_1 \cdots x_k \pmod m \Rightarrow a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ elde edilir.

Teorem 3. (Çin Kalan Teoremi) $n_1, ..., n_r$ ikişer ikişer aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a_1, ..., a_r$ herhangi tamsayılar ise,

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{n_r} \end{aligned}$$

olacak biçimde bir x tamsayısı vardır. Ayrıca sözkonusu x tamsayısı $n_1 \cdots n_r$ modülüne göre tek türlü belirlidir.

Kanıt : [2]

Tanım: n bileşik bir tamsayı ve $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ kongüransı $\forall b \in Z_n^*$ için sağlanırsa n bir *Carmichael sayısı*'dır denir.

Teorem 4. n tek ve bileşik bir tamsayı olsun. Eğer n'nin 1'den büyük bir tamkare böleni varsa n Carmichael sayısı olamaz.

Kanıt: p asal ve $p^2|n$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, $\phi(p^2) = p(p-1)$ olduğundan Teorem 2'den

$$g^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

olacak şekilde bir $g \in Z$ olduğunu söyleyebiliriz.
m : p dışında n'yi bölen asal sayıların sayısı olsun. Şu halde $(p^2, m) = 1$ ve Teorem 3'den dolayı

$$\begin{aligned} x &\equiv g \pmod{p^2} \\ x &\equiv 1 \pmod{m} \end{aligned}$$

sistemini sağlayan $x = b$ tamsayısı vardır.
Diğer taraftan $(b, n) = 1$ ve $b^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$ olduğundan b tamsayısı $Z_{p^2}^*$'nin bir üreteci olur.
Şimdi $b^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ olduğunu gösterirsek, Carmichael sayısı tanımından n'nin bir Carmichael sayısı olamayacağını söyleyebiliriz.
Kabul edelim ki $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} b^{n-1} &\equiv 1 \pmod{p^2} \\ b^{p(p-1)} &\equiv 1 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} &p(p-1)|(n-1) \\ &\Rightarrow n-1 = p(p-1)s \\ &\Rightarrow n-1 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $p|n$ olduğundan bir çelişkidir. Sonuç olarak bir p asal sayısı için $p^2|n$ ise n Carmichael sayısı olamaz.

Teorem 5 (Korselt kriteri) n tamsayısının Carmichael sayısı olması için gerek ve yeter koşul her $p|n$ asal sayısı için $(p-1)|(n-1)$ olmasıdır.

Kanıt: $\Rightarrow$ n bir Carmichael sayısı olsun. Bu durumda her $b \in Z_n^*$ için;

$$b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

sağlanır. $p|n$ için $((p-1) \not| (n-1)$ olduğunu varsayalım.
g, Z_p^*'nin bir üreteci olsun bu durumda $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olur. Bu durumda Teorem 3'e göre

$$b \equiv g \pmod{p}$$

$$b \equiv 1 \pmod{\frac{n}{p}}$$

kongüranslarını sağlayan bir $b \in Z$ vardır. Buradan da $(b, n) = 1$ ve $b^{n-1} \equiv g^{n-1} \pmod{n}$

$$\Rightarrow g^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

$$\Rightarrow (p-1)|(n-1)$$

bu ise varsayımla çelişir. O halde $(p-1)|(n-1)$ olmalıdır.
$\Leftarrow$: $p|n$ ve $a \in Z_n^*$ olsun. Fermat'ın küçük teoremine göre $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ dir. Hipoteze göre $(p-1)|(n-1)$ olduğundan;

$$a^{n-1} = a^{(p-1)k} \equiv 1 \pmod{p}$$

ve dolayısıyla

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

elde edilir. Böylece n tamsayısının bir Carmichael sayısı olduğu görülür.

Teorem 6 Her Carmichael sayısı en az üç farklı asal sayının çarpımıdır.

Kanıt: Teorem 4'e göre her Carmichael sayısı farklı asal sayıların çarpımıdı şeklindedir. Bu nedenle kanıtı tamamlamak için; n bir Carmichael sayısı ve p, q asal olmak üzere $n = qp$ biçiminde olamayacağını göstermek yeterlidir.
Kabul edelim ki $n = qp$, $p > q$ ve n bir Carmichael sayısı olsun. Bu durumda Teorem 5'e göre $(p-1)|(qp-1)$ dir. Buradan da bir $k \in Z$ için $(p-1)k = qp - 1$. Böylece

$$k = \frac{qp-1}{p-1} = q + \frac{q-1}{p-1}$$

elde edilir bu ise $(p-1) \nmid (q-1)$ olduğundan bir çelişkidir.

Teorem 7 (Chernick) Eğer $6m+1$, $12m+1$, $18m+1$ sayıları bir $m \in Z$ için asal ise

$$n = (6m+1)(12m+1)(18m+1)$$

sayısı bir Carmichael sayısıdır.

Kanıt: Corselt kriterine göre her $p|n$ için $(p-1)|(n-1)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$n = (6m+1)(12m+1)(18m+1)$$

$$= 6 \cdot 12 \cdot 18m^3 + (6 \cdot 12 + 6 \cdot 18 + 12 \cdot 18)m^2 + 36m + 1$$

ve

$$p = 6m+1, \; q = 12m+1, \; r = 18m+1$$

asal olmak üzere;

$$(p-1)|(n-1), \; (q-1)|(n-1), \; (r-1)|(n-1)$$

olduğu açıktır. O halde n bir Carmichael sayısıdır.

Örnek : $m = 1$ için

$$p = 6 \cdot 1 + 1 = 7$$

$$q = 12 \cdot 1 + 1 = 13$$

$$r = 18 \cdot 1 + 1 = 19$$

p, q, r asal olduğundan $n = 7 \cdot 13 \cdot 19$ sayısı bir Carmichael sayısıdır.

Teorem 8 (Duparc) m, q ve r asal sayılar ve $n = m \cdot q \cdot r$ bir Carmichael sayısı ise $q < r$ için, $q < 2m^2$ ve $r < m^3$ dir.

Kanıt: n bir Carmichael sayısı olduğundan "Corselt kriteri" nden $(r-1)|(n-1)$ ve $(q-1)|(n-1)$'dir. Buna göre

$$1 \equiv n = m \cdot q \cdot r \equiv m \cdot q \pmod{(r-1)}$$

$$1 \equiv n = m \cdot q \cdot r \equiv m \cdot r \pmod{(r-1)}$$

denkliklerini yazabiliriz. Şimdi

$$C = \frac{m \cdot q - 1}{r - 1} \quad D = \frac{m \cdot r - 1}{q - 1}$$

olsun. Bu durumda $1 \leq C < m < D$ olduğu açıktır. Buradan

$$D \cdot (q-1) = m \cdot r - 1 = m \cdot (\frac{m \cdot q - 1}{C} + 1) - 1$$

$$(C \cdot D - m^2)(q-1) = m^2 - m + m \cdot C - C = (m + C)(m-1) > 0$$

buradan da

$$(q-1) \leq (m+C)(m-1) < m^2 + (C-1)m \pmod{n_1}$$

elde edilir. Diğer taraftan $C < m$ olduğundan; $q - 1 < 2m^2$ ve dolayısıyla $q < 2m^3$ bulunur. Şimdi (1)'den,

$$r - 1 = \frac{m \cdot q - 1}{C} < \frac{m^3 + (C-1) \cdot m^2}{C} \leq m^3$$

buradan da $r < m^3$ elde edilir.

Bu teorem E. Pinch adlı bir matematikçi tarafından 10^{15}'e kadar olan Carmichael sayılarının bulunmasında kullanılmış. E. Pinch bu sayıya kadar 105212 tane Carmichael sayısı bulunduğunu göstermiştir.

Carmichael sayılarının sonsuz sayıda olduğu bu sayıların keşfedilmesinden yaklaşık bir asır sonra ispatlanabilmiştir. Sözkonusu ispat 1994'de W. R. Alford, Andrew Granwille ve Carl Pomerance tarafından yapılmış ve ispat *"Sonsuz çoklukta Carmichael sayısı vardır"* adlı makalede tanıtılmıştır. Sözkonusu makalede, yeterince büyük x tamsayıları için x e kadar olan Carmichael sayılarının sayısının $x^{2/7}$ den büyük olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] H. İbrahim Karakaş: Soyut Cebire Giriş, M⊕V yayınları, 1998

[2] J. A. Anderson & J. M. Bell: Number Theory With Applications, Prentice Hall, 1997

[3] W. R. Alford, A. Granville & C. Pomerance: "There are Infinitely Many Carmichael Numbers," Ann. Math., Volume 140, 703-722, 1994

EĞLENCELİK...

KİMLER NASIL FİL AVLAR

Matematikçiler

Fil avlamak için Afrika'ya gider, fil olmayan herşeyi dışarı atıp kalanları avlarlar.

Deneyimli Matematikçiler

Matematikçilerin
yaptığı işe girişmeden önce Afrika'da en az bir filin bulunduğunu kanıtlarlar.

Matematik Profesörleri

Afrika'da en az bir filin varlığını kanıtlarlar ve onun bulunup yakalanması için de Yüksek Lisans öğrencilerine ödev verirler.

Bilgisayar Mühendisleri

- Afrika'ya giderler.
- Ümit Burnu'ndan başlayarak düzenli bir şekilde tüm kıtayı tarayarak kuzeye doğru ilerlerler.
- Bu esnada her arama anında;
  - Görülen tüm hayvanları avlarlar.
  - Her yakalanan hayvanı bilinen bir fille karşılaştırırlar.
  - Bulunca o hayvanı yakalarlar.

İstatistikçiler

Ardışık olarak "n" kez karşılaştıkları hayvana "fil" adını verip onu avlarlar.

****

HATA NEREDE

Öncelikle, $a \neq 1$ pozitif sabit bir sayı, x pozitif bir sayı ve c herhangi bir sayı olmak üzere

$$\log_a(x^c) = c.\log_a x$$

formülünü anımsayalım. Şimdi de şu gözlemi yapalım:

$$0 = \log(1) = \log((-1)^2) = 2.\log(-1)$$

O halde, $2.\log(-1) = 0$ olup buradan da $\log(-1) = 0$ elde ederiz (mi acaba?)

****

İLGİNÇ TEOREM

Bütün pozitif tamsayılar ilginçtir.

İspat: Karşıtını kabul edelim. Yani, ilginç olmayan enaz bir pozitif tamsayı bulunsun. O halde ilginç olmayan enküçük bir pozitif tamsayı vardır. Fakat, bir saniye, bu oldukça ilginç! Çelişki.

****

- En kısa matematik şakası: $\varepsilon < 0$ olsun.
- Yeteri kadar büyük 1'ler için $1 + 1 = 3$ tür.
- Einstein ve Pisagor buluşlarının kombinasyonu:

$$E = mc^2 = m(a^2 + b^2)$$

- $\lim_{3\to4} 3^2 = 16$

****

Yanlış aranan telefon numarası için santraldan alınan yanıt:

"Sanal bir sayıyı tuşladınız. Lütfen telefonunuzu 90° çevirerek yeniden deneyiniz."

****

Çılgın bir matematikçi otobüse biner ve bütün yolcuları tehdit etmeye başlar."İntegralini alacağım, türevini alacağım" Otobüsteki herkes korkup kaçar ama sadece nazik bir kadın kalır. Adam kadına yaklaşır ve "Korkmuyor musun! Senin de integralini alacağım, türevini alacağım" Kadın sâkin bir ses tonuyla adamı yanıtlar."Hayır korkmuyorum, çünkü ben e^x im."

****

π NEDİR

Fizikçinin yanıtı: π eşittir 3.141592 ± 0.0000007

Mühendisin yanıtı: π? yaklaşık olarak 3

Matematikçinin yanıtı: π, bir çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranı ile elde edilen sabit bir sayıdır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLER

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla-İzmir adresine 31 Ocak 2002 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.246. n pozitif tamsayısı 3'ün katı değilse, her birinin basamakları toplamı n'e bölünen iki ardışık pozitif tamsayı bulunduğunu gösteriniz.

A.247. ABC üçgeninin kenarları üzerinde dışa yönelik $ABMN$, $BCKL$, $ACPQ$ kareleri çizilmiştir. $[QN]$ ve $[KP]$ doğru parçaları üzerinde $QNTZ$ ve $KPXY$ kareleri çizilmiştir. $ABMN$ ve $BCKL$ karelerinin alanları farkı d ise $QNTZ$ ve $KPXY$ karelerinin alanları farkını bulunuz.

A.248. Kutuda mavi ve kırmızı olmak üzere toplam 30 tane bilye bulunur. Herhangi 12 tane bilyeden enaz biri mavidir, herhangi 20 bilyeden enaz biri kırmızıdır. Sepetteki mavi ve kırmızı bilyelerin sayısını bulunuz.

A.249. Liseden birkaç kişi ayrıldıktan ve birkaç kişi liseye katıldıktan sonra öğrenci sayısı %10 azaldı, erkek öğrencilerin sayısı %50 'den %55 'e çıktı. Erkek öğrenci sayısı arttı mı , azaldı mı?

A.250. Bir aile gece köprüye yaklaştı. Baba köprüyü 1 dakikada , anne 2 dakikada , çocuk 5 dakikada , büyükanne 10 dakikada geçebilir. Köprüden aynı anda en fazla 2 kişi geçebilir ve ailenin tek bir lambası bulunmaktadır. Aile 17 dakikada köprüyü nasıl geçebilir? (Köprüyü lambasız geçmek mümkün değil ve köprü uzaktan aydınlatılamaz.)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.246. $A, 2A, 3A, ..., 500000A$ sayılarından hiçbirisinin son 6 basamağı birbirine eşit (yani *aaaaaa* şeklinde) olmayacak biçimde bir altı basamaklı A sayısı bulunur mu?

Y247. $ABCDEF$ dışbükey altıgeninin AB, BC, CD, DE, EF, FA kenarlarının orta noktaları sırasıyla A', B', C', D', E', F' olsun. ABC',BCD',CDE',DEF',EFA',FAB' üçgenlerinin alanları toplamı S ise $ABCDEF$ altıgeninin alanını bulunuz.

Y.248. 10 bankacı bir masa etrafında oturmuşlar ve herbir bankacının hesabında bir gerçel sayı yazılmıştır. Bu sayılar pozitif ve negatif olabilir. Bankacılar sırasıyla geriye kalan 9 kişinin herbirinin hesabına (işlemlerden önceki) kendi sayısının $\frac{1}{9}$'unu ekliyor, kendisine ise 0 yazıyor. Onuncu işlemden sonra bankacıların sayılarının ilk baştaki duruma gelemeyeceğini gösteriniz.

Y.249. $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ olmak üzere $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$ eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ gerçel sayıları verilmiştir. $a_1 \leq b_1$ ise $a_3 \leq b_3$ olduğunu gösteriniz.

Y.250. Bir dışbükey n-gende, her köşegen en fazla bir başka köşegenle kesişecek şekilde en fazla kaç köşegen çizilebilir? (Köşegenler aynı köşeden çıkıyorsa, bu köşe kesişim noktası olarak kabul edilmiyor.)

ÇÖZÜMLER

A.236. 347777743 sayısı asal mıdır?

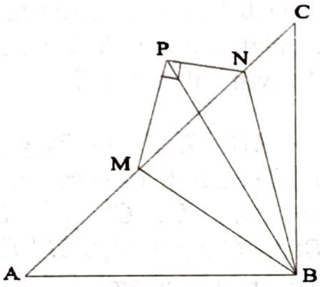
Çözüm. 347777743 sayısını 333333300+11111110+3333333 şeklinde yazarak, 11111111 sayısına bölündüğünü ve dolayısıyla asal olmadığını görürüz.

A.237. ABC ikizkenar dik üçgeninin AC hipotenüsü üzerinde, $s(\widehat{MBN}) = 45°$ olacak şekilde M ve N noktaları alınmıştır.

$$|AM|^2 + |NC|^2 = |MN|^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $s(\widehat{MBP}) = s(\widehat{ABM})$ ve $|PB| = |AB| = |BC|$ olacak şekilde bir P noktası alalım

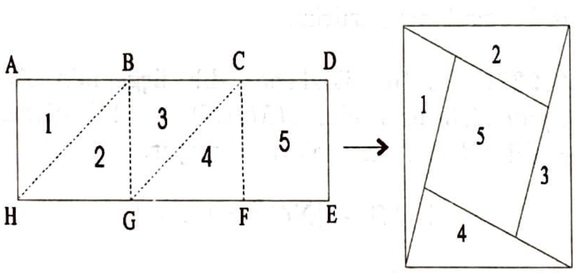


Şekil 1

$|AB| = |BC|$ olacak şekilde bir P noktası alalım (Şekil 1). O halde $\overset{\triangle}{ABM}$ ve $\overset{\triangle}{MBP}$ üçgenlerinin eşitliğinden $|AM| = |PM|$ elde ederiz. Diğer taraftan $s(\widehat{PBN}) = 45° - s(\widehat{PBM}) = 45° - s(\widehat{ABM}) = 90° - s(\widehat{MBN}) - s(\widehat{ABM}) = s(\widehat{NBC})$ olduğundan, $\overset{\triangle}{PBN}=\overset{\triangle}{NBC}$'dir. Dolayısıyla $|PN| = |NC|$'dir. $s(\widehat{MPN}) + s(\widehat{NCB}) = 90°$ olduğundan, $|MA|^2 + |NC|^2 = |PN|^2 + |PN|^2 = |MN|^2$ elde ederiz.

A.238. 1x5 boyutlu dikdörtgeni öyle 5 parçaya ayırın ki, bunlar birleştirilerek bir kare oluşturulabilsin.

Çözüm. Elde edeceğimiz karenin kenar uzunluğunun $\sqrt{5}$ olacağı açıktır. Aşağıda karenin oluşturulma süreci verilmiştir ($|AB| = |BC| = |HG| = |GF| = 2; |CD| = |DE| = |FE| = 1$'dir).



Şekil 2

A.239.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{21}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklemin sağ tarafını

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{21}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}-1-\frac{1}{2}-...-$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}...+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}...+\frac{1}{20}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}...+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}...+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}...-\frac{1}{20}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{20}+\frac{1}{21}$$

şeklinde yazarak $x = 10$ sayısının bir çözüm olduğunu görürüz. $f(x) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}$ fonksiyonu azalan olduğundan ($f(1) > f(2) > f(3) > ...$), çözüm tektir.

A.240. 20 kişinin katıldığı bir satranç turnuvasında herkes birbiriyle birer maç yaptı. Sonuçta katılanlardan her birinin kazandığı ve berabere kaldığı maçların sayısı aynı olabilir mi?

Çözüm. i. katılan kişinin ($i = 1, 2, ...20$) kazandığı maç sayısı n_i, kaybettiği maç sayısıda m_i olsun. Her katılanın berabere kaldığı maç sayısı kazandığı maç sayısına eşit olursa, her $i = 1, 2, ..., 20$ için $2n_i + m_i = 19$ olur. Bir kişinin kazandığı maçı diğeri kaybetmiş (ve tersine) olduğundan

$$\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20} m_i$$

olacak. O halde

$$20\cdot19=\sum_{i=1}^{20}(2n_i+m_i)=2\sum_{i=1}^{20}n_i+\sum_{i=1}^{20}m_i=3\sum_{i=1}^{20}n$$

eşitliği elde edilir. $20 \cdot 19$ çarpımı 3'e bölünmediğinden, çelişki elde etmiş oluruz. Böylece problemde bahsedilen durum mümkün değildir.

Y.236. Sonsuz sayıda n pozitif tam sayısı için, n'nin iki tam sayının kareleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini; $n-1$ ve $n+1$ sayılarının ise bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

$n+1$ sayısının basamakları toplamı 3'tür, dolayısıyla $n+1$,3'e bölünür, 9'a bölünmez. O halde $n+1=k^2+m^2$ şeklinde gösterilebilirse, k ve m, 3'e bölünecek, dolayısıyla k^2+m^2 sayısı 9'a bölünecek. Çelişki!

Y.237. M dışbukey çokgeni bir nokta etrafında $90°$ dönme sonucu kendisine dönüşüyor. Birisi M'yi içeren, diğeri de M'nin içinde bulunan ve yarıçapları biri diğerinin $\sqrt{2}$ katı olan iki daire bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. M çokgeninin O noktası etrafında 90 derece dönmesi sonucu kendisine dönüştüğünü varsayalım. Çokgenin O noktasından en uzak olan köşesini (ve ya bunlardan birini) A_1 ile gösterelim.90 derece dönme sonucu A_1'in dönüştüğü köşe A_2, A_2'nin dönüştüğü köşe A_3 , A_3'ün dönüştüğü köşe A_4 olsun. O halde A_4 de A_1'e dönüşecek.Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4$, merkezi O noktası olan bir karedir. Bu karenin çevrel çemberi M çokgeninin tüm köşelerini ve dolayısıyla tüm kenarlarını içerecektir. Diğer taraftan M dışbükey olduğundan, tüm kenarları $A_1A_2A_3A_4$ karesinin iç teğet çemberinin dışında bulunacak. Böylece bu iki çemberden biri M'yi içerecek, diğeri de M'nin içinde bulunacaktır. Bu çemberlerin yarıçapları oranının $\sqrt{2}$ olduğu açıktır.

Y.238. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$ sayılarından oluşan ve çift sayıda eleman içeren tüm kümeler alınıyor ve her kümedeki sayıların çarpımı hesaplanıyor. Tüm çarpımların toplamını bulunuz.

Çözüm. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$ sayılarından çift sayıda alınarak oluşturulan tüm çarpımlarının toplamı Ç ile, tek sayıda alınarak oluşturulan tüm çarpımların toplamı T ile gösterelim. O halde

$$Ç+T=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdot ...\cdot(1+\frac{1}{100})-1$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot ...\cdot\frac{101}{100}-1=\frac{101}{2}-1=\frac{99}{2}$$

ve

$$Ç-T=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdot ...\cdot(1-\frac{1}{100})-1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot ...\cdot\frac{99}{100}-1=\frac{1}{100}-1=-\frac{99}{100}$$

olacak. Dolayısıyla $Ç=\frac{1}{2}(\frac{99}{2}-\frac{99}{100})=\frac{99\cdot 49}{200}$ elde ederiz.

Y.239. $a<b<c$ sayıları $x^2-3x+1=0$ denkleminin çözümleridir. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ toplamını bulunuz.

Çözüm. Vieta Teoreminden $a+b+c=0; ab+bc+ac=-3$ ve $abc=-1$ elde ederiz. $u=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ve $v=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ alalim. O halde

$$u+v=\frac{a^2c+ab^2+bc^2+ac^2+a^2b+b^2c}{abc}$$

$$=\frac{ac(a+c)+ab(a+b)+bc(b+c)}{-1}$$

$$=-[ac(-b)+ab(-c)+bc(-a)]=-3$$

ve

$$uv=3+\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}{a^2b^2c^2}$$

elde ederiz. $a^3-3a+1=0, b^3-3b+1=0$ ve $c^3-3c+1=0$ esitliklerini kullanarak $a^3+b^3+c^3=3(a+b+c)-3=-3$ ve $a^3b^3+b^3c^3a^3c^3=9(ab+bc+ac)-3(a+b+c)+3=2^4$, buradan da $uv=-18$ elde ederiz. O halde $u=-6, v=3$ veya $u=3, v=-6$'dır. $a<b<c$ olduğundan $u-v=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}<0$ elde edilir. Dolayısıyla $u=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=-6$' dır.

Y.240. Her $n>1$ tam sayısı için,

$$x_1^n+x_2^n+...+x_n^n=M$$

denkleminin negatif olmayan tam sayılardan oluşan $x_1, x_2, ..., x_n$ kökünün bulunmamasını sağlayan sonsuz sayıda M sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $n>1$ sayısını sabit tutarak, herhangi $k\le n$ pozitif tamsayısı için, k^n-1 sayısından büyük olmayan ve $x_1^n+...+x_n^n$ şeklinde yazılabilen sayıların sayısını değerlendirelim. $0\le x_1\le x_2\le ...\le x_n\le k-1$ olduğunu kabul edebiliriz. $x_1=m, 0\le m\le k-1$ ise, $x_2, x_3, ..., x_n$ sayılarından herbiri en fazla $k-m$ tane değer alabilir, dolayısıyla mümkün $(x_1, ..., x_n)$' lerin sayısı $(k-m)^{n-1}$'i geçmez. Tüm m'lere göre aldığımızda, böyle n'lerin sayısı $\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)^{n-1}$ toplamını geçmez. O halde $m\le k^n-1$ eşitsizliğini sağlayan ve $x_1^n+...+x_n^n$ şeklinde gösterilemeyen m'lerin sayısı

$$k^n-1-\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)^{n-1}\ge k^n-1-(k-1)k^{n-1}$$

$$=k^{n-1}-2$$

sayısından küçük değildir. Bu her $k \geq n$ için doğru olduğundan k'yı büyüterek $k^{n-1}-2$ sayısını istediğimiz kadar büyütebiliriz.

KİTAPLAR ... KİTAPLAR

MATEMATİĞİN TEMELLERİ

(sayı sistemleri ve cebirsel yapılar)

İ.Halil Karakaş, METU Press, 2001

MATEMATİK ANALİZ VE ANALİTİK GEOMETRİ

(Fen-Mühendislik Fakülteleri ve Yüksek Okul Öğrencileri İçin)

Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2001

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

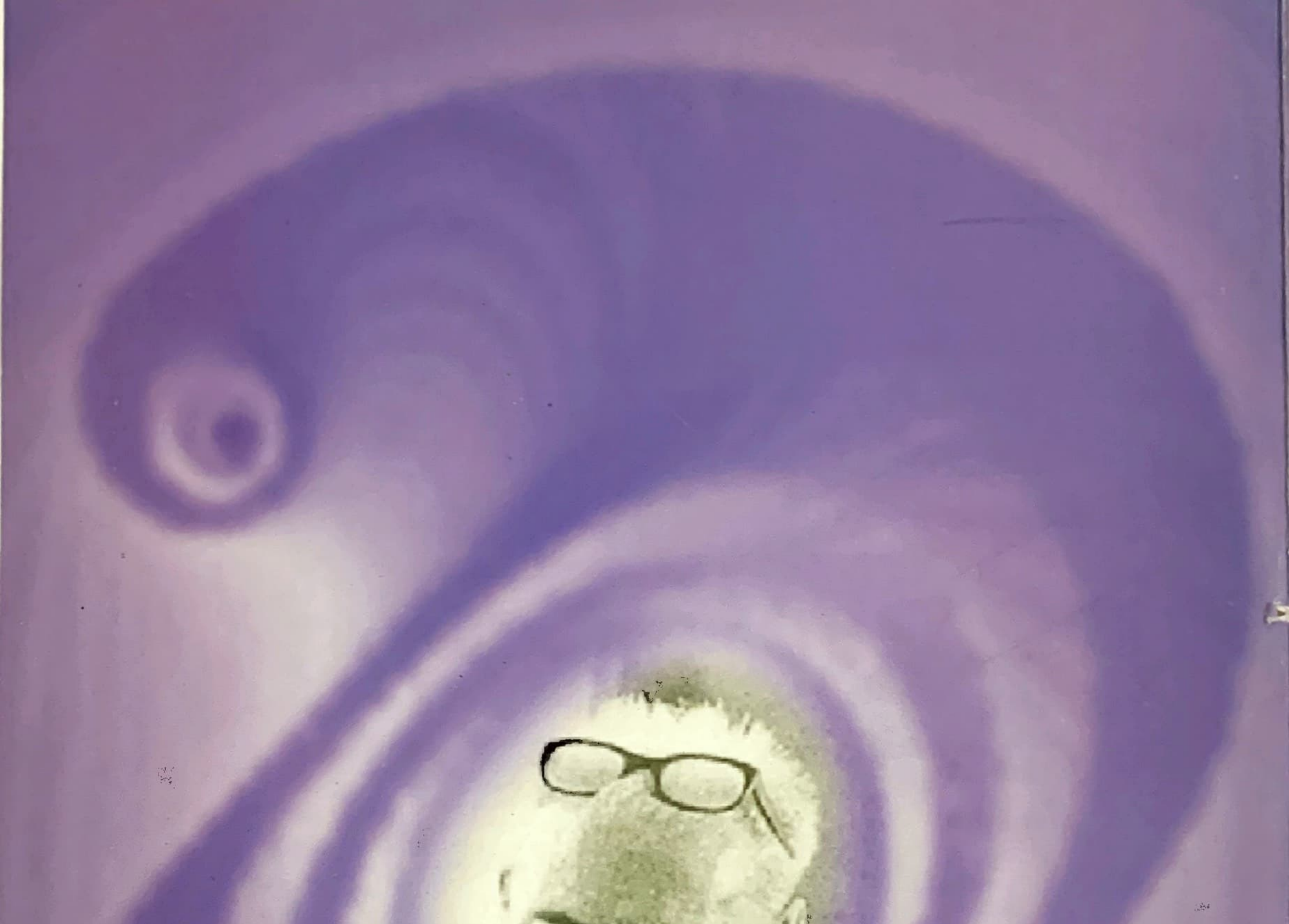
* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.

PEKER MATBAACILIK ve TİCARET Tel&Fax: 0.232.483 89 80



...(Bilim adamları) rekabet edecekler; kayda kuyda sahip olmayacaklar; emir almayacakalar; kendilerini özgür hissedecekler; bakkal çakkala ihtiyaçları olmayacak...

Cahit ARF (1910-1997)