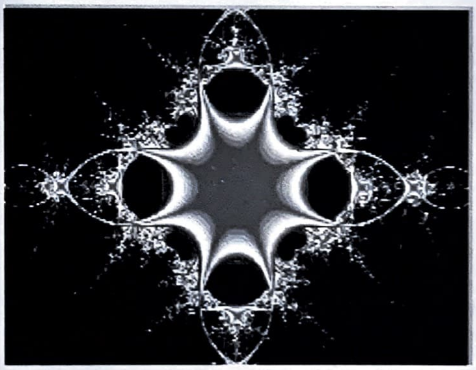
ŞUBAT 2002 CİLT 11 SAYI: 1 ISSN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR



MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Matematik Dünyası, 10. cildini tamamlayıp 11. cildine biraz gecikmeyle de olsa başladı. 10. cildin hatalarını ve dizin listesini gelecek sayımızda okurlarımıza ulaştıracağız. 10. cildin hazırlanmasında emeği geçen Yayın Kurulu, İYTE Matematik Bölümü elemanları; Hakan Kutucu, Tina Beşeri, Eylem Erdoğan ve Günnur Ufuktepe'ye teşekkür ediyoruz.

Matematik Dünyası'nın abone sayısını bir türlü istediğimiz sayılara ulaştıramadık. Bizler daha çok derginin içeriği, yazıların düzenlenmesi, baskısı, kısacası; elinize kaliteli bir derginin ulaşması ile uğraşıyoruz, dergi okurlarının sürekli ve artan bir fonksiyon olması için üniversitelerimizin matematik bölümleri ve liselerimizin desteğine ihtiyacımız var.

Bu sayımızda genel yayın ilkemizin sınırlarını biraz zorladık. Makalelerde 3-5 sayfa sınırlamasına rağmen gelen uzun makaleleri konu bütünlüğünün bozulmaması için bu sayıda okurlarımızın önerileri doğrultusunda iki bölüm halinde sunmadık. Sizlere keyifli okumalar diliyor, yaklaşan bahar mevsiminin dünyada barış ve huzurun başlangıcı olsun diyoruz.

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası
SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık
DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfınınn işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gun ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2002) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 12.000.000 TL; (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği' nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)Parakende satış fiyatı 3.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35437-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987569, 4987504 ve 4987519 ; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr/math@likya.iyte.edu.tr ; URL: http://galois.iyte.edu.tr/mdunyasi

EKMEKÜSTÜ MARGARİN PROBLEMİ VE ARA DEĞER TEOREMİ

Rafail Alizade
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçeköyü, Urla, İZMİR
e-mail: alizade@likya.iyte.edu.tr
Sedaget Mürvetova
Nesimi Bölgesi Eğitim Şubesi Matematik Bölümü, Bakü, AZERBAYCAN
Halide Sadıgova
247 sayılı okul, Nesimi Bölgesi, Bakü, AZERBAYCAN

Black and blue
And who knows which is which and who is who
Up and Down
And in the end it's only round and round and round
Pink Floyd, "The Dark Side of the Moon" albümünden

1. Giriş

Birçok bilimsel icatların ilginç tarihçelere sahip oldukları bilinmektedir (Arşimet'in banyo yaparken suyun kaldırma ilkesini bulması, Newton'un başına elma düşmesi ile yerçekimi kanununu ortaya çıkarması, Kepler'in, şarap fıçılarının hacminin hesaplanması için integrali icat etmesi v.s. gibi). Biz bu tarihçelerin gerçekleri ne kadar yansıttığını bilmiyoruz, sadece analizin en önemli sonuçlarından olan "Ara Değer Teorimi"nin, araştırıp sizlere sunduğumuz aşağıdaki öyküsünün yüzde yüz gerçek olduğunu söyleyebiliriz! Tarihi gerçeklerin ortaya çıkarılmasında bize yardımcı olan Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü araştırma görevlisi Engin Mermut'a teşekkür ederiz.

2. Karadeniz'den Fransa'ya

Yıl 1801... Reklamlardan etkilenen Temel ve İdris kardeşler, ekmeküstü margarini çok seviyorlardı. Fakat anneleri Fadime hanımın, üzerine margarin sürmüş olduğu kocaman Trabzon ekmeği dilimini bir türlü paylaşamıyorlardı. Çünkü ekmeği bıçakla tam yarıya böldüklerinde, birine daha az margarin geliyordu. Margarin kısımları tam eşit olacak şekilde böldüklerinde de, ekmek kısmı eşit olmuyordu. Babaları Dursun Bey "Bu problemi bir matematikçiye soralım" dedi. Fadime hanım, "Sorarsan sor" dedi, "Matematikçilerin söyledikleri hep doğru çıkar, ama bu doğrular kimsenin işine yaramaz." Dursun Bey, anası ve babası ile birlikte Ben de Niz'e[1] sattığı Dünya'nın[2] parası ile Fransa'nın yolunu tuttu. Hava limanında bir taraftan "Paris, Paris! Hemen kalkıyoruz" diye yolcu arayan, diğer taraftan da elindeki çift ekmekten yapılmış sandviçi bir an önce bitirmeye çalışan gözlüklü birisi dikkatini çekti. Sandviçini kimseyle paylaşmadığı için bir problem yaşamayan gözlüklü muavin Dursun Bey'i "Engin&Engin&Rough" şirketinin zaman makinesine götürdü. Makinenin arkasında "Allahım, ben niye mutlu olmadım!", "Bir sana, bir de sabah uykusuna doyamadım" gibi kamyon edebiyatı incileri yazılmıştı. İçeriye girince makinenin önünde "Bana baba diyebilirsiniz, hatta babaların babası da diyebilirsiniz, bunlar da benim evlatlarım sayılır" yazısını ve yazının da altında Süleyman Demirel'in, Müslüm Gürses'in ve Orhan Gencebay'ın resimlerini gördü. Bu arada görüntülü telefonla görüşen şoför Engin Baba, görüşmesini bitirdikten sonra "Patron aradı, bir saat sonra Gülbahçe'de olmam gerekiyor. Paris'e uğrayıp hemen dönelim" dedi. Sonra yolculara iyi yolculuklar, bol şanslar ve bol tümleyenler[3] dileyerek makineyi çalıştırdı. Dursun Bey yolculuk sırasında Türkiye'den dönen Fransa

---

[1] Ünlü Şarkıcı Ben Deniz'in atalarından.
[2] İlk elden edindiğimiz bilgilere göre bu yakınlarda dünyanın ana ve babası 200 senelik bir aradan sonra yeniden el değiştirmiştir.
[3] Modül Teorisinde bir terimdir: ingilizcesi: amply supplements.

heyetiyle tanıştı. Bunlar Fransa'nın Osmanlı Devleti'ne olan borçlarının ertelenmesi ve kapütalasyon uygulamasının bir az daha uzatılması için Osmanlı padişahına ricada bulunmak için Türkiye'ye gelmişlerdi ve padişahtan olumlu sinyaller aldıkları için çok mutlu görünüyorlardı. Fransa'ya gelince hemen Dursun Bey'i en ünlü matematikçilerinden Bolzano'ya götürdüler. Bolzano'nun manastırdaki yazıhanesine girince duvardaki bir yazı Dursun Bey'in dikkatini çekti: "Tanrının verdiğinin beşte birini bana ver, tanrı da bana verdiğinin iki mislini sana versin." Dursun Bey kısa bir hesaptan sonra "Amma da uyanık, tanrının verdiğinden %25 komisyon istiyor[4]" diye düşündü ve durumu Bolzano'ya anlattı. O da problemin matematik dilinde yorumunu yaptı:

Problem 1. *(Ekmeküstü Margarin Problemi)* Düzlem üzerinde verilen iki sınırlı bölgenin her birinin alanını tam yarıya bölen bir doğru bulunur mu?

Dursun Bey bundan bir şey anlamadı, sadece içinde: "Bu problem yorumla çözülebilseydi Mustafa abi'ye[5] götürürdüm: kendisi müzikte ve evlilik konusunda çok güzel yorumlar yapar" dedi.

Bolzano önce daha basit bir problemi çözmeye karar verdi:

Problem 2. Düzlem üzerinde verilen sınırlı bir bölgenin alanını tam yarıya bölen bir doğru bulunur mu?

Bunu Dursun Bey'e sordu:

- Sadece ekmek dilimi olsaydı ne yapardınız?

- Bundan kolay ne var ki?! Bıçağı ekmek dilimi üzerinde yavaş yavaş kaydırırız, ekmek tam yarıya bölündüğü anda keseriz.

Bundan sonra Dursun Bey Trabzon'a döndü. Bolzano da onun bu fikrini genelleştirerek aşağıdaki teoremi verdi.

Teorem 1. (*Ara Değer Teoremi*) Bir sürekli fonksiyon aldığı iki değer arasındaki tüm değerleri alır.

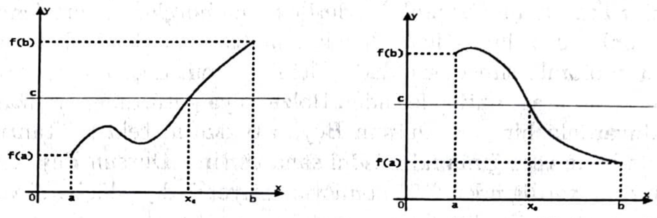
Başka bir deyişle, $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her c sayısı için $f(x_0) = c$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a,b]$ bulunur.

Sürekli fonksiyon kavramının ciddi tanımı ve bu teoremin kanıtı analiz kitaplarında bulunur (örneğin, [1], [2]), biz sadece teoremin (kanıtın değil) grafik üzerinde açıklamasını veriyoruz. Genç okurlarımıza Ara Değer Teoremi'nin kitaplardaki ispatını incelemelerini tavsiye ediyoruz. Sürekli fonksiyon, kabaca, değişkenin çok az bir değişiminde, çok az değişen fonksiyondur; grafiği, kalemi kağıttan ayırmadan çizilebilir bir fonksiyon olarak düşünülebilir (gerçi birçok sürekli fonksiyonların grafiğini çizmek bile imkansızdır, ama şimdilik bu konuya girmeyelim).

Aşağıdaki (Şekil 1) her iki grafikten de görüldüğü gibi $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından biri $y = c$ doğrusunun alt tarafında, diğeri de üst tarafında bulunduğundan bu noktaları birleştiren eğri ($y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği) $y = c$ doğrusunu bir $(x_0, f(x_0)) = (x_0, c)$ noktasında kesecek ve böylece $f(x_0) = c$ olacaktır.

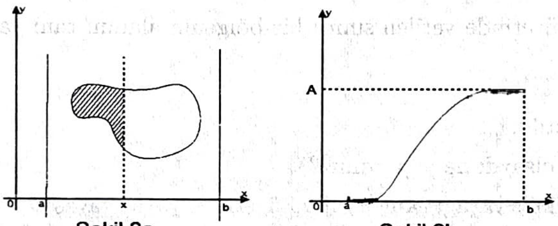
[4]Neden %20 değil de %25 olduğunu düşünün!

[5]Ünlü türkücü Mustafa Topaloğlunun atalarından.



Şekil 1

Problem 2'ye gelince, alanı A olan sınırlı bölgeyi xy düzlemine yerleştirelim. Bölge $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalacak şekilde, a ve b sayılarını alalım. Her $d \in [a, b]$ için bölgenin $x = d$ doğrusundan solda kalan kısmının alanını $f(d)$ ile gösterelim. O halde $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olacaktır (biz, bölgenin sınırlarının düzgün olduğunu kabul edeceğiz, gerçi "düzgün" kelimesinin de ciddi tanımlanması gerekmektedir[6]).



Şekil 2a Şekil 2b

Şekil 2'de $f(x)$ taralı alanı göstermektedir. $f(a) = 0$ ve $f(b) = A$ olduğundan, $0 < \frac{A}{2} < A$ için $f(x_0) = \frac{A}{2}$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a, b)$ bulunur. Böylece $x = x_0$ doğrusu bölgenin alanını tam yarıya bölecektir.

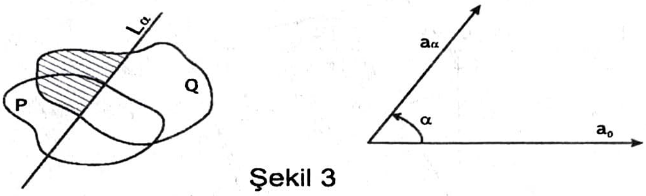
Problem 2'de koordinat sistemini istediğimiz şekilde seçebileceğimiz için aşağıdaki önermenin doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme. Düzlem üzerinde bir bölge ve bir l doğrusu verilmişse, bölgenin alanını yarıya bölen ve l'ye paralel olan bir l_1 doğrusu bulunur.

Şimdi Problem 1'e dönelim. Düzlem üzerinde P ve Q bölgeleri verilmiş olsun. Bir $\overrightarrow{a_0}$ vektörü alalım. $\overrightarrow{a_0}$ vektörüne paralel olan ve P'nin alanını tam yarıya bölen bir l_0 doğrusu bulunur. Q bölgesinin l_0 doğrusundan soldaki ($\overrightarrow{a_0}$ vektörü yönünde baktığımızda) kısmının alanı A_0 olsun. $\overrightarrow{a_0}$ vektörünü α açısı kadar saat yönüne ters yönde döndürerek elde ettiğimiz vektörü $\overrightarrow{a_\alpha}$ ile gösterelim. P'nin alanını tam yarıya bölen ve $\overrightarrow{a_\alpha}$' vektörüne paralel olan bir l_α doğrusu bulunacak. Q bölgesinin l_α doğrusundan solda kalan kısmının (Şekil 3'deki taralı bölgenin) alanını A_α ile gösterelim.

Şimdi her $\alpha \in [0, \pi]$ için $f(\alpha) = A_\alpha$ olarak tanımlanarak elde edilen f fonksiyonunun, α açısının ufak bir değişimi durumunda az bir değişime uğrayacağını görürüz, yani f sürekli bir fonksiyondur. Q bölgesinin alanı A ise, $f(\pi)$, Q bölgesinin taralı olmayan kısmının alanına eşit olacak, yani $f(\pi) = A - A_0$'dır. O halde $A_0 \leq \frac{A}{2} \leq A - A_0$ veya $A - A_0 \leq \frac{A}{2} \leq A_0$ olacak ve Ara Değer Teoreminden $f(\alpha_0) = \frac{A}{2}$ sağlanacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, \pi]$ bulunacak. Bu da l_{α_0} doğrusunun Q bölgesinin alanını tam yarıya böleceği anlamına gelir.

[6]Örneğin sürekli kapalı bir eğri düzgün sayılabilir



Şekil 3

3. Sabit Nokta Teoremi, Derecesi Tek Olan Polinomlar ve Başka Uygulamalar

Tanım. $f : A \to A$ bir fonksiyon olsun. Bir $a \in A$ için $f(a) = a$ ise, a'ya f fonksiyonunun sabit noktası denir. Bazı A kümeleri ve f fonksiyonları için en az bir sabit noktanın var olması gösterilebilir, bu da matematikte birçok problemin çözümünde rol oynuyor. Böyle durumlardan biri aşağıda verilmiştir.

Teorem 2 *(Sabit Nokta Teoremi).* Her $a < b$ sayıları için her sürekli $f : [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası bulunur.

Kanıt. $f(x)$ sürekli olduğundan $g(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlanan $g : [a, b] \to R$ fonksiyonu da süreklidir. $a \leq f(a) \leq b$ ve $a \leq f(b) \leq b$ olduğundan, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ ve $g(b) = f(b) - b \leq 0$ dır. Ara Değer Teoreminden $g(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [a, b]$ bulunur. O halde $f(x_0) = x_0$'dır, yani x_0 bir sabit noktadır.

Not 1. (a, b) açık aralıkları için Sabit Nokta Teoremi geçerli değildir. Örneğin $f(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlanan sürekli $f : (0,1) \to (0,1)$ fonksiyonunun sabit noktası bulunmamaktadır, çünkü her $x \in (0,1)$ için $\frac{x}{2} \neq x$ dir.

Not 2. Sabit Nokta Teoremi kapalı daire, küre ve genellikle R^n de $(n-1)$ boyutlu kapalı küre için de doğrudur, fakat bunlar için bilinen kanıtlar cebirsel topoloji bilgilerine dayanmaktadır.

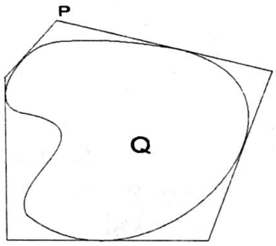
Ara Değer Teoreminin bir başka uygulaması da gerçel katsayılı tek dereceden polinomlarla ilgilidir.

Teorem 3. Katsayıları gerçel sayılar olan ve derecesi tek olan her polinomun en az bir gerçel kökü bulunur.

Kanıt. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, n tek bir pozitif tamsayı ve tüm a_i'ler $(i = 1, 2, ..., n)$ gerçel sayılar olsun. $a_n > 0$ olduğunu varsayalım ($a_n < 0$ durumu benzer şekilde incelenir). x değişkeni ∞'a giderken, x^n sayısı $x^{n-1}, ..., x$ e göre çok daha hızlı büyüdüğünden, yeterince büyük bir b sayısı için $p(b)$ sayısı $a_n x^n$ ile aynı işarete sahip olacak, yani $p(b) > 0$ olacaktır. Aynı şekilde, n tek sayı olduğundan yeterince küçük (mutlak değerce büyük) bir a sayısı için $p(a) < 0$ olacak. O halde Ara Değer Teoreminden $p(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a, b)$ bulunacak, yani x_0 sayısı $p(x)$ polinomunun bir köküdür.

Şimdi Ara Değer Teoreminin başka bir geometri problemine uygulamasını verelim.

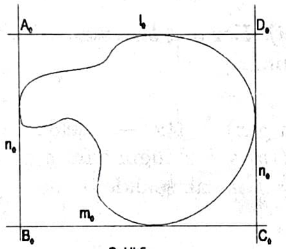
Tanım. Düzlem üzerinde verilen bir Q bölgesi bir P çokgeninin içerisinde ise ve P çokgeninin tüm kenarlarının Q bölgesi ile en az bir ortak noktası bulunuyorsa, P çokgenine Q bölgesinin çevrel çokgeni diyeceğiz (şekil 4)



Şekil 4

Problem 3. Düzlem üzerindeki her bölgenin bir çevrel karesi bulunur mu?

Çözüm. Bir $\vec{a_0}$ vektörü alalım. Öteleme yardımıyla $\vec{a_0}$ vektörüne paralel olan, Q bölgesi ile ortak noktaları bulunan ve Q bölgesini aralarına alan iki l_0 ve m_0 doğrularını bulabiliriz (şekil 5)



Şekil 5

Aynı şekilde $\vec{a_0}$ vektörüne dik olan, Q ile ortak noktaları bulunan ve Q bölgesini aralarına alan iki k_0 ve n_0 doğruları bulunur. Böylece Q bölgesinin bir çevrel $A_0B_0C_0D_0$ dikdörtgeni bulunur. Problem 1'in çözümündeki gibi $\vec{a_0}$ vektörünü α açısı kadar döndürerek elde ettiğimiz vektörü $\vec{a_\alpha}$ ile gösterelim. $\vec{a_0}$ yerine $\vec{a_\alpha}$ aldığımızda elde ettiğimiz çevrel dikdörtgeni $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ ile gösterelim. Her $\alpha \in [0, \frac{\Pi}{2}]$ için $f(\alpha) = |A_\alpha B_\alpha| - |B_\alpha C_\alpha|$ alarak sürekli bir $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to R$ fonksiyonu elde ederiz. $A_{\frac{\pi}{2}} = B_0$; $B_{\frac{\pi}{2}} = C_0$; $C_{\frac{\pi}{2}} = D_0$ olduğundan $f(\frac{\pi}{2}) = |B_0C_0| - |C_0D_0| = -f(0)$ elde ederiz. Dolayısıyla ya $f(\frac{\pi}{2}) \leq 0 \leq f(0)$ ya da $f(0) \leq 0 \leq f(\frac{\pi}{2})$'dir. O halde Ara Değer Teoreminden $f(\alpha_0) = 0$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ bulunur. Bu durumda $|A_{\alpha_0}B_{\alpha_0}| = |B_{\alpha_0}C_{\alpha_0}|$ olduğu ortaya çıkar. Yani $A_{\alpha_0}B_{\alpha_0}C_{\alpha_0}D_{\alpha_0}$ dikdörtgeni Q bölgesinin bir çevrel karesi olur.

V. TÜBİTAK Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavında (1997) çıkmış olan aşağıdaki sorunun çözümünde Ara Değer Teoremi kullanılmaktadır:

Soru. $x^3 - 7x + 1 = 0$ denkleminin varsa, pozitif köklerinin (çarpma işlemine göre) terslerinin toplamını S ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\frac{13}{2} < S < 7$ B) $7 < S < \frac{15}{2}$ C)$S = 7$ D)Denklemin pozitif kökü yoktur. E)Hiçbiri

Çözüm. Vieta Teoreminden köklerin çarpımı -1, toplamı 0 olduğundan, varsa iki pozitif, bir negatif kök bulunur. $p(x) = x^3 - 7x + 1$ polinomu için $p(0) > 0$, $p(1) < 0$; $p(3) > 0$; $p(-3) < 0$, $p(-2) > 0$ olduğundan Ara Değer Teoreminden dolayı $(0, 1)$; $(1, 3)$; $(-3, -2)$ aralıklarında birer kök bulunur. Kökleri $x_1 < x_2 < x_3$ ile gösterirsek,

$$S = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_3}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{7 - x_2x_3}{-1} = 7 + \frac{-1}{x_1}$$

elde ederiz. $x_1 < -2$ olduğundan, $7 < 7 - \frac{1}{x_1} < \frac{15}{2}$ elde edilir. Cevap B şıkkıdır.

4. Ekmeküstü Margarin Probleminin Son Çözümü

Dursun Bey Fransa'dan gelen çözüme ilk önce sevindiyse de, Fadime hanımın haklı olduğunu anladı, çünkü sadece çözümün varlığı kanıtlanmıştı, çözümün nasıl bulunacağı ise gösterilmiyordu. Dursun Bey ve çocukları, üzerine margarin sürülmüş olan ekmek dilimini alıp, Nasreddin Hocaya giderek durumu anlattı. Hoca herkesin haklı olduğunu belirttikten sonra bıçağı Temel'e verip ekmeği iki eşit parçaya bölmesini istedi. Sonra İdris'ten bu parçalardan birisini seçmesini istedi. Diğer parçayı da Temel'e verdi. Böyle olunca Temel dağıtımdan memnun kalmadığını söyleyemedi, çünkü seçimi kendisi yapmıştı. Böylece kardeşlerin uzun süren (ekmek) kavgası sona ermiş oldu.

5. Alıştırmalar

1. Problem 1'in çözümündeki P ve Q bölgeleri paralelkenar şeklinde ise, l_α doğrusu hakkında ne söylenebilir?

2. Çember üzerinde bulunan ve çemberin merkezine göre birbirine simetrik olan iki noktaya ***karşı noktalar*** diyelim. Her an dünya ekvatoru üzerinde, sıcaklıkların aynı olduğu iki karşı nokta bulunduğunu gösteriniz.

3. Düzlem üzerindeki bir bölgeyi, alanları birbirine eşit dört parçaya ayıran ve birbirine dik olan iki doğru bulunduğunu gösteriniz.

(İpucu: Bölgenin alanını yarıya bölen bir l doğrusu ve buna dik olup bölünmüş alanlardan birini yarıya bölen m doğrusu alarak, Problem 1'in çözümündeki gibi doğruları π açısı kadar döndürünüz).

4. Düzlem üzerindeki bir bölgenin hem alanını, hem de çevresini yarıya bölen bir doğru bulunduğunu gösteriniz.

5. Düz olmayan bir zemin üzerindeki dört ayaklı tabure döndürülerek tüm ayaklarının yere oturması sağlanabilir. Kanıtlayınız. (Bunu mutfaktaki tabureniz üzerinde deneyebilirsiniz).

6. $\mathbf{R}$ gerçel sayılar kümesi olmak üzere sürekli bir $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu için $f(x) = x$ denkleminin çözümü yoksa $f(f(x)) = x$ denkleminin de çözümünün bulunmadığını gösteriniz.

(İpucu: $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonuna Ara Değer Teoremini uygulayınız.)

7. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ açık dairesi için Sabit Nokta Teoreminin geçerli olmadığını, yani her $x \in D$ için $f(x) \neq x$ olacak şekilde sürekli bir $f : D \to D$ fonksiyonunun bulunduğunu gösteriniz.

8. Düzlem üzerindeki her bölgenin, dar açısı 30^o olan eşkenar dörtgenden oluşan bir çevrel çokgeni bulunduğunu gösteriniz.

KAYNAKLAR

[1] Chinn W.G., Steenrod N.E: First Concepts of Topology, New York, 1965.

[2] Spivak: Calculus, M ⊕ V yayınları, 1997.

[3] Edwards &Penney: Matematik Analiz ve Analitik Geometri, Çeviri:Ömer Akın,2001.

İKİNCİ ÇEŞİT STİRLİNG SAYILARI

Halil Oruç

Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Tınaztepe Kampüsü, 35160, Buca, İzmir

halil.oruc@deu.edu.tr

Bu yazıyla amaçlanan ikinci çeşit Stirling sayılarını tanıtmaktır. Dolayısıyla, bir takım yeni sonuçlardan bahsetmektense, Stirling sayılarının çeşitli konularda nasıl ortaya çıktığını veriyoruz. Yazıda bahsedilen tüm sonuçlar kaynaklarda verilen kitaplardan bulunabilir. Bu sayılar için, Fibonacci sayıları gibi bir cemiyeti, ya da bilimsel bir dergisi (Fibonacci Quarterly) olmasa da, kombinatorik analiz ve sayısal analiz gibi değişik alanlarda karşımıza çıkar. İkinci çeşit Stirling $S(n,k)$ sayısı şöyle tanımlanır: n-elemanlı bir kümenin k parçalı bölüntülerinin sayısı. Bir X kümesinin bölüntüsü, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ parçalarından oluşan öyle altkümeler topluluğudur ki X'in her elemanı bu altkümelerin sadece birinde yer alır:

$$X = X_1 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_k, \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \quad (i \neq j).$$

Bir örnek verecek olursak; $A = \{a,b,c,d\}$ dört elemanlı bir küme ve $k = 2$ parça, için bölüntüler şöyledir:

$$\{\{a,b\},\{c,d\}\}; \{\{a,c\},\{b,d\}\}; \{\{a,d\},\{b,c\}\}; \{\{a,b,c\},\{d\}\};$$

$$\{\{a,b,d\},\{c\}\}; \{\{a,c,d\},\{b\}\}; \{\{a\},\{b,c,d\}\}.$$

Yani $S(4,2) = 7$. Buna benzer özel sayılar için bir rekurans bağıntı bulmak, pratik hesaplamalar için oldukça önemlidir. Bu işlem genelde, kümenin bir elemanını ayırarak geri kalanları benzer biçimde saymayla ifade edilir. Yukarıdaki örnekte d elemanını bölüntülerden atarsak geriye kalanlar arasında $S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2)$ olduğunu görürüz.

Teorem 1.

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{1}$$

İspat. X, n-elemanlı bir küme, $S(n,k)$ da k parçalı bölüntülerinin sayısı olsun. Özel durumlar için, $n > 0$ iken $S(n,0) = 0, S(n,1) = 1, S(n,n) = 1$, (sırasıyla, boş olmayan kümenin boş küme bölüntüleri, kümenin kendisi ve elemanlarının teker teker yazılması) olduğu açıktır. $x \in X$ olsun. Her bölüntü şu iki özellikten yalnızca birini sağlar. **(i)** $\{x\}$ bir parça olarak yer alır, **(ii)** x tek başına değil de, yanında başka elemanlar da vardır. Birinci durumu saymak basit görünüyor. Çünkü $X \backslash \{x\}$ kümesini göz önüne alırsak, eleman sayımız bir azaldı, $n-1$ oldu ve parça sayısı da bir azaldı, $k-1$. Dolayısıyla $S(n-1,k-1)$ tane (i) durumda bölüntü var. Diğerini saymak biraz daha problemli. (ii) durumunda X'in bir P bölüntüsündeki parçalar $X_1, X_2, \ldots, X_k$ olsun. Buradan x elemanını atmak (j, P') gibi bir ikili belirlemek demektir. Öyleki P', $X \backslash \{x\}$ kümesinin bir bölüntüsü olur. Yani $n-1$ elemanlı $X \backslash \{x\}$ kümesinin P' bölüntüsü $\{X_1, X_2, \ldots, X_j \backslash \{x\}, X_{j+1}, \ldots, X_k\}$ biçimindedir. Burada j, k farklı değer alabilir ve parça sayısı değişmediğinden P gibi $kS(n-1,k)$ tane bölüntü vardır. Yani, $kS(n-1,k)$ tane (ii) türünden bölüntü olduğu bulunur. Böylece (1) ispatlanmış olur. Yukarıdaki rekurans bağıntısından yararlanarak aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

Tablo 1. İkinci çeşit Stirling sayıları

$S(n,k)$	$\downarrow k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	1			
$n=3$	1	3	1		
$n=4$	1	7	6	1	
$n=5$	1	15	25	10	1

Okuyucu $S(n,2)=2^{n-1}-1$, $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$ olduğunu birkaç yolla gösterebilir. Yine tablodan görüldüğü gibi her sabit n için, k değiştikçe $S(n,k)$ sayılarının düzgün bir şekilde artıp bir tepeye ulaştıkları ve düzgün biçimde azaldıkları görülüyor. Bir başka söyleyişle dizinin şekli hakkında bilgi veriyor. Bu tür diziler oldukça sık karşımıza çıkar. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dizisinde $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_r = \cdots = a_s \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$, sağlayan r, s indisleri varsa bu diziye ***tektepe***[1] (unimodal İng.) dizi diyeceğiz. En tanıdıkları binom sayılarıdır. Binom sayılarının ardışık terimlerinin oranını

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k},$$

1 ile karşılaştırırsak, bu sayıların tektepe dizi oldukları görülür. Genelde bu özelliği göstermek böyle kolayca olmaz. Bu tür problemlere el atmanın bir yolu, diziyi ***üreten fonksiyonun*** köklerini incelemektir. $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sonsuz bir dizi olsun. Bu dizinin üreten fonsiyonu $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibi bir seridir. ***Fibonacci sayılarının*** üreten fonsiyonunu bulma örneği ile başlayalım. Fibonacci sayıları, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1, \quad n \geq 2 \tag{2}$$

rekurans bağıntısı ile hesaplanır. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ veren bir $f(x)$ fonksiyonunu bulmak için (??) ifadesini x^n ile çarpalım ve $n \geq 1$ den itibaren toplayalım. Sol tarafı

$$f_2 x + f_3 x^2 + \cdots = \frac{1}{x}(f(x) - x),$$

sağ tarafı ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n = f(x) + x f(x).$$

Son iki denklemi eşitlersek, Fibonacci sayılarının üreten fonksiyonunu

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

olarak elde ederiz. Bu ifade pek fazla birşey anlatıyormuş gibi görünmüyor. Kesirli fonksiyon biçimine getirelim.

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{(1-g_+ x)} - \frac{1}{(1-g_- x)}\right), \quad g_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Denklemin sağ tarafını seriye açarsak

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_+^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} g_-^k x^k\right),$$

[1] Engin Mermut tarafından önerilen kelime.

f_n terimini

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

olarak buluruz. Metod üzerinde diğer ayrıntılar için bakınız Wilf [6]. Stirling sayılarının rekurans denklemine (??) bakarsak durum biraz daha karışık. Hem n, hem de k değişmekmektedir. Üreten fonksiyonu için muhtemel adaylar şunlardır:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k) x^k, \quad B_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) x^n.$$

Daha çok $A_n(x)$ ile ilgileneceğiz. Ancak, $B_k(x)$ in elde edilişi de oldukça ilginçtir. Wilf [6] kısaca şöyle yapar. Rekurans denklemi (??) x^n ile çarpıp, kaydıralım. Bulunan ifadeyi, parçalı kesir olarak yazın. Her terimi seriye açtıktan sonra elde edilen ifadenin x^n li teriminin katsayısı

$$S(n,k) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}. \tag{3}$$

Bu ifadeyi $k!/k!$ ile çarparsak

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n \tag{4}$$

bulunur. Şimdi, $k = n$ alırsak

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^n = n! \tag{5}$$

gibi oldukça etkileyici bir özdeşlik karşımıza çıkar. Bu özdeşlik Kaderoğlu [4] te "$n+1$ ***tane ardışık doğal sayının n'ninci kuvvetlerinin n'ninci farkları n! eşittir***" teoremi olarak verilmiştir. $S(n,k)$' nin başka bir yorumu da, (??) ifadesinin n-elemanlı bir kümeden k-elamanlı bir kümeye oluşturulan ***örten fonksiyonların*** sayısıdır (n tane eleman, k tane özdeş kutuya dağıtılıyor, hiçbir kutu boş kalmamak koşuluyla), bakınız Grimaldi [3], Brualdi [2] de Dahil-Hariç Kuralı (Principle of Inclusion and Exclusion, İng.) İnterpolasyon tekniklerine aşina olan okuyucuya (??) tanıdık gelecektir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0, x_1, \ldots, x_n$'deki $n+1$ farklı değeri verilsin. n'inci dereceden interpolasyon polinomu $p_n(x)$, $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ sağlar. Bu ise Newton formunda

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]\, \omega_k(x) \tag{6}$$

olarak bilinir. Bakınız Phillips [5]. Burada

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), & 1 \le k \le n \end{cases}$$

ve

$$f[x_0] = f(x_0), \quad f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

bölünmüş farklar olarak tanımlanır. İnterpolasyon noktaları eşit aralıklı ise, $x_k = x_0 + kh$, h adım ölçüsü, x_0 başlangıç noktası, yukarıdaki (??) özel bir hal alır. $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \Delta f(x_k)$ yazalım. Δ ileri farklar operatörüdür. Bölünmüş farkların rekurans bağıntısı da

$$\Delta^{j+1} f(x_k) = \Delta(\Delta^j f(x_k)) = \Delta^j f(x_{k+1}) - \Delta^j f(x_k)$$

ileri farklar bağıntısı olur. Bunu kullanarak

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k} \tag{7}$$

elde ederiz. Doğruluğunu tümevarımla gerçekleştirebileceğimiz, ileri farklar operatörünü açık bir şekilde yazabiliriz

$$\Delta^k f(x_0) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x_r). \tag{8}$$

Şimdi, $f(x) = x^n$ ve $x_r = r$, $r = 0, 1, \ldots, k$ için, (??), (??) ve (??) kullanarak

$$S(n,k) = f[0, 1, \ldots, k], \quad f(x) = x^n$$

bulunabilir. İnterpolasyon operatörü polinomlar uzayında bir ***yansıtma operatörü*** olduğundan, (bakını Phillips [5], interpolasyon hata formülünü kullanın) yani f bir polinomsa $f(x) = p_n(x)$, şu sonucu çıkarabiliriz:

Teorem 2.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x(x-1)\cdots(x-(k-1)). \tag{9}$$

Görüldüğü gibi $S(n,k)$ için, yeni bir üreten fonksiyon bulduk. Bu, tabiki tümevarımla da ispatlanabilir. (Sol tarafı x ile çarparken, sağ tarafı $(x - k + k)$ ile çarpın.) $S(n,k)$'yı $n \times n$ alt üçgen matrisin elemanları olarak düşünürsek, bu matris bize $[x, x^2, \ldots, x^n]$ molinomlar bazından, $[x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots(x-(n-1))]$ bazına geçiş matrisini temsil eder. Ancak hala $S(n,k)$ nin tektepe dizi olduğunu gösterme yolunda ip ucu elde etmiş değiliz. Bunun için daha kuvvetli bir özelliğe ihtiyacımız var, logaritmik içbükey, *log içbükey*. Önce bir fonksiyonun içbükeyliği ile başlayalım. Reel f fonksiyonunda her $x < y$ için $f((x+y)/2) \geq (f(x) + f(y))/2$ sağlanıyorsa f' ye içbükey denir. Geometrik olarak, f fonksiyonu üzerinde iki noktayı birleştiren çizgi o aralıkta f fonsiyonunun her zaman altında kalır. Benzer biçimde, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ pozitif sayılarından oluşan bir dizi

$$(\log c_{k-1} + \log c_{k+1})/2 \leq \log c_k$$

sağlıyorsa log içbükey denir. Bu tanımın her iki tarafını üstel fonksiyona çevirirsek şuna denktir:

$$c_{k-1} c_{k+1} \leq c_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Eğer bir dizi tektepe değilse, $c_{r-1} > c_r < c_{r+1}$ gibi ardışık terimleri vardır. Buradan görüldügü gibi $c_0, c_1, \ldots, c_n$ dizisi log içbükey olamaz. *O halde, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ dizisi log içbükey ise tektepedir.*

Teorem 3. *$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$, tüm kökleri reel ve negatif olan bir polinom olsun. O halde, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ dizisi log içbükeydir.*

Özünde Rolle Teoremi'ni polinomlar için ard arda kullanarak elde edilen sonuç oldukça kuvvetli, çarpıcı güzellikte. Bakınız Wilf [6]. Bunu kullanarak $S(n,k)$'nın tektepe dizisi olduğunu ispatlamak için, üreten fonsiyonun köklerinin reel ve negatif olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunun için $A_n(x)$'i ve (??) kullanacağız. Önce $D_x A_n(x)$ bakalım, D diferansiyel operatörü,

$$D_x A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k S(n-1,k) x^{k-1}.$$

Sabit $n > 0$ alalım ve (??)'i x^k ile çarpıp k değişkeninden toplayalım. Şu ifade çıkar;

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} S(n-1,k-1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kS(n-1,k)x^k \\ &= xA_{n-1}(x) + xD_x A_{n-1}(x), \quad A_0(x) = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

(??)'u kullanarak $A_n(x)$'i birkaç adım hesaplayalım.

$$A_1(x) = x,\ A_2(x) = x + x^2,\ A_3(x) = x + 3x^2 + x^3, \ldots$$

(??)'u düzenleyip e^x ile çarpımının sonucunu şöyle yazabiliriz

$$e^x A_n(x) = x(e^x A_{n-1}(x))' \tag{11}$$

Tümevarımla, her $n = 1, 2, \ldots,$ için $e^x A_n(x)$ fonksiyonunun n tane reel, negatif ($x = 0$ hariç) farklı kökünün olduğunu göstereceğiz. Bunun, $n-1$ için doğru olduğunu var sayalım. Temel analizden hatırlayacağımız Rolle Teoremi $(e^x A_{n-1}(x))'$ fonsiyonunun $n-2$ tane kökünün olduğunu verir. x ile çarpılması sonucunda, $e^x A_n(x)$ köklerinin sayısı $n-1$ oldu. Son bir tane ise şu gözlemle ortaya çıkar. $e^x A_{n-1}(x)$ fonksiyonu, $A_{n-1}(x)$ bir polinom oldugu için, $x \to -\infty$ gittikçe sıfıra doğru yaklaşır, $e^x A_{n-1}(x) \to 0$. Yine Rolle Teoremi'nden $e^x A_{n-1}(x)$ fonksiyonunun en solunda yer alan kökünün solunda bir tane kök vardır diyebiliriz. Böylece $e^x A_n(x)$ nin n tane kökünü bulduk. Şimdi şu sonucu söyleyebiliriz.

$S(n,k)$ sayıları log içbükey, dolayısıyla tektepedir.

Son olarak Teorem 3' ü tartışalım. Önce Rolle Teoremi'ni hatırlayalım. $f(x)$ fonksiyonu sürekli ve (a,b) aralığında diferansiyallenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $a < t < b$ gibi bir yerde $f'(t) = 0$. f'yi n'inci dereceden tüm kökleri reel olan bir polinom alalım. Rolle Teoremi' ni art arda uygularsak, f' nin türevlerinin kökleri de reel olması gerekir. Eğer x_0 da m tane çakışık kök varsa, $f'(x) = (x - x_0)^{m-1} g(x)$ biçiminde yazılabilir ve $g(x)$ in kökleri de reeldir. Bir başka gözlem de şudur:

$$f(x,y) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + c_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + c_n y^n, \quad y \neq 0 \tag{12}$$

gibi tüm kökleri reel, bir polinom olsun. Bunu

$$y^{-n} f(x,y) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \cdots + c_{n-1} t + c_n, \quad t = \frac{x}{y}$$

şekline getirebiliriz. Yani, kökleri x/y biçimindedir. Yukarıdaki gibi $f(x,y)$' nin türevlenmelerinden elde edilen $g(x,y)$ polinomunun kökleri de reeldir. Tüm bunlardan sonra (??)'de $f(x,y)$'ye $D_x^m D_y^{n-m-}$ diferansiyel operatörünü uygulayalım. Şu üç terim geriye kalır

$$\begin{aligned} c_{n-m-2}(n-m-2)!\,\frac{(m+2)!}{2}\,x^2 + c_{n-m-1}(n-m-1)!\,(m+1)!\,xy + \\ c_{n-m} m!\,\frac{(n-m)!}{2}\,y^2. \end{aligned}$$

Bu ifadeyi $(n-m-1)!(m+1) \cdots 3$'e bölümünden

$$c_{n-m-2}\frac{m+2}{n-m-1}x^2 + c_{n-m-1} 2xy + c_{n-m}\frac{n-m}{m+1}y^2$$

bulunur. Son çıkardığımız ifadede $c_j = \binom{n}{j}p_j$ yazalım,

$$\binom{n}{n-m-2}\frac{m+2}{n-m-1}p_{n-m-2}\,x^2+\binom{n}{n-m-1}2p_{n-m-1}\,xy+$$

$$\binom{n}{n-m}\frac{n-m}{m+1}p_{n-m}\,y^2.$$

Sadeleştirmeleri yapalım

$$\binom{n}{m+1}\{p_{n-m-2}\,x^2+2p_{n-m-1}\,xy+p_{n-m}\,y^2\}$$

Bu ikinci derece denklemin köklerini reel yapmamız gerekiyor. Yani diskriminantı negatif olmamalı. Dolayısıyla,

$$p_{n-m-1}^2 \geq p_{n-m-2}p_{n-m}.$$

Bu ise, p'lerin log içbükey dizi oldugunu gösterir. Şimdi de $p_j = \frac{1}{\binom{n}{j}}c_j$ yazalım ve gerekli sadeleştirmeler yapalım;

$$c_{n-m-1}^2 \geq \frac{(m+2)(n-m)}{(m+1)(n-m-1)}c_{n-m-2}c_{n-m} \geq c_{n-m-2}c_{n-m}.$$

Yani c'ler de log içbükey dizidir.

Kombinatorik özdeşliklere, rekurans bağıntılarına daha genel bakmanın yollarından biri ***simetrik fonksiyonlardır***. Buraya kadar yapılanlar hoşunuza gittiyse Brenti [1] nin sonuçları ve çözülmemiş problemlerinden de hoşlanacaksınız.

Uzman bir problem çözücü birbiriyle bağdaşmaz iki özelliğe sahip olmalıdır; dur durak bilmeyen bir düş gücü ve sabırlı bir ısrarcılık.

Howard W. Eves

KAYNAKLAR

[1] Brenti, F., *The Applications of Total Positivity to Combinatorics, and Conversely*, Total Positivity and Its Applications, M. Gasca, C.A. Michelli edt. 451–473, Kluwer Academic Publ., 1996.

[2] Brualdi, R., Introductory Combinatorics, Prentice-Hall Inc, 2nd ed. 1992.

[3] Grimaldi, R.P., Discrete and Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley Longman Inc., 4th. ed. 1999.

[4] Kaderoğlu, B., Akıldan çarpma Tekniği, 3. baskı, İzmir 1992.

[5] Phillips, G.M., Two Millennia of Mathematics From Archimedes to Gauss, Springer Verlag, New York, 2000.

[6] Wilf, H.S., Generatingfunctionology, Academic Press, London, 2nd ed., 1994.

FRAKTAL GEOMETRİ'DEN BİR KESİT

Ünal Ufuktepe - İsmail Aslan
e-posta: ufuktepe@likya.iyte.edu.tr, iaslan@likya.iyte.edu.tr
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

Matematiksel gerçekler veya doğruların niteliğinde var olan kesinliğin özünde aksiyomatik yapılar vardır. Öklit geometrisi, matematik tarihinde bunun önde gelen örneğidir. Matematiksel doğruların, çıkartılmış oldukları postulatlara bağlı olması koşullu bir doğruluğu gerektirmektedir. Hiperbolik, eliptik ve Riemann 'ın kurduğu Öklitçi olmayan geometriler ise matematikte postulatların doğruluğu ileri sürülerek işe başlanmadığını bizlere gösterdi. Evrenin yapısını tanımlamada kullanılan geometri kuramı, eliptik geometrinin bir genellemesi olabilir. Riemann bunu soyut matematik aracılığıyla oluşturmuştu. Fakat bu Einstein için bir süre sonra görecelik kuramının kurulmasında kavramsal bir araç olmuştu.

1924'de Varşova'da dünyaya gelen matematikçi Benoit Mandelbrot (gerçi bazı matematikçiler onun için "O bizden değildir" diyorlarsa da biz bu yargıyı bilim tarihçilerine bırakıyoruz), Amerika 'ya yerleşip IBM firmasında çalışmaya başladıktan sonra bilgisayar kullanarak göze hitap eden yeni bir matematiği keşfetmeye başladı. Mandelbrot'dan önce de bu konuda çalışmaların yapılmış olduğunu belirtmekte yarar var: Cantor kümesi, Peano eğrisi (1890), Hilbert eğrisi (1891), Koch eğrisi (1904), Sierpinski contası (1915) gibi.

Bir bağıntıyı formüle edip tanım kümesini belirledikten sonra o bağıntının grafiğini çizmek pek zor değildir. Fakat formülünü oluşturamadığımız dağların, bulutların, ağaçların ve bunlar gibi daha bir çok nesnenin resmini bilgisayarda gerçeğe çok yakın bir şekilde çizdirmek olanaklı mıdır? Mandelbrot bu konuda yaklaşık üç bin yıldır süregelen Öklit geometrisinin yetersiz kaldığını görür: "Bulutlar küre değildir, dağlar da koni değildir" diye itirazda bulunur. Doğadaki bu nesneleri matematiksel eğriler ile; daire, dörtgen, elips, silindir, küre, sinüs dalgaları gibi düzgün geometrik şekillerle göstermek pek gerçekçi değildir. Bu tür şekillerde ısrar edildiğinde ortaya soğuk bir yapı çıkar. Mandelbrot'un "fraktal geometri" diye tanımladığı geometrinin yansıttığı evren ise pütürlü ve pürüzlü bir evrendir: "Aklın gözüne göre, bir fraktal sonsuzu görebilmenin bir yoludur". Fraktal geometri girintili çıkıntılı, kırık, karmaşık, düğümlenmiş, bükülmüş nesnelerin, şekillerin geometrisidir. Nedir bu yeni geometrinin bizim bildik yaklaşık üç bin yıllık bir geçmişi olan Öklit geometrisinden farkı?

* Geleneksel değil, modern bir geometridir.
* Öklit geometrisindeki şekillerin belirli karakteristik büyüklükleri (dairenin yarıçapı, küpün ayrıtı gibi) vardır. Fraktallerin ise karakteristik bir çok büyüklüğü vardır.
* Fraktal şekiller kendine benzer şekillerdir; ölçek ya da büyüklükten bağımsızdırlar. Bir fraktal şekle ne kadar yakından bakarsanız bakın yine bütüne benzer bir şekil görürsünüz. Öklit geometrisindeki şekillerde ise durum böyle değildir.
* Öklit geometrisi, insanların yarattıkları nesnelerin tanımlanmasında kullanılır. Doğadaki nesnelerin ifade edilmesinde ise fraktaller kullanılır.
* Öklit geometrisinin cebirsel formüllerle ifade edilmesine karşın fraktaller algoritmik bir yapı ile elde edilir.

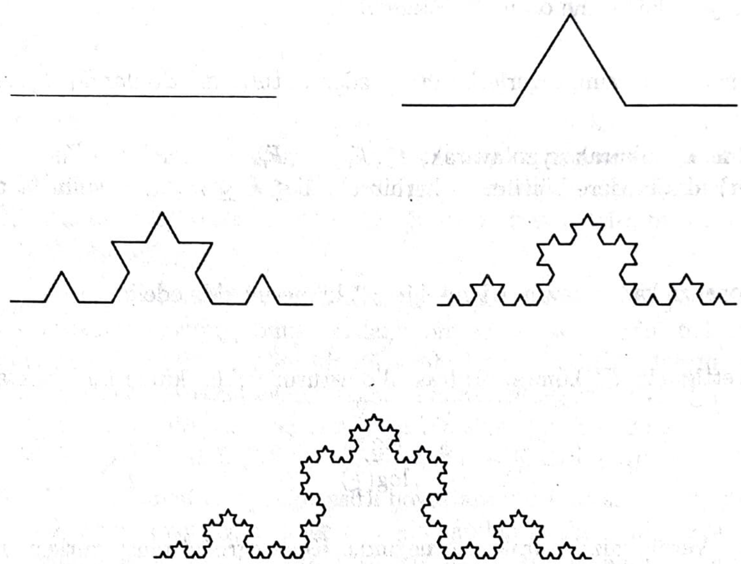
Evrenin karmaşıklığını anlamak için, her şeyden önce, bunun sadece gelişigüzellikten oluşmadığı konusunda şüphe duymak gerekir. Fraktal geometrinin tuhaf şekillerinin de bir anlamı vardır. Gelin, birlikte aşağıdaki algoritmayı, uzunluğu 9 birim olan bir doğru parçasına uygulayalım:

A_1 : Doğru parçasını üç eşit parçaya böl, ortadaki parça üzerine eşkenar üçgen kur.

A_2 : A_1'de elde edilen ortadaki parçayı sil.

A_3 : Oluşan her yeni doğru parçasına A_1 ve A_2'yi uygula.

Algoritmanın işletilmesi sonucu aşağıdaki şekilleri elde ederiz.



İşlemin başında doğru parçasının uzunluğu 9 birimdir. Birinci döngüde kırık çizginin toplam uzunluğu 12 birim, üçüncü döngüde 16 birim olur; ve kırık çizginin toplam uzunluğu böylece artarak devam eder. (Döngü sayısı arttıkça uzunluğun büyüdüğüne dikkat edin.) Peki bu artış hangi oranda olmaktadır? Kırık çizgilerin uzunlukları; ortak katı 4/3 ve genel terimi $9.(\frac{4}{3})^n$ olan bir geometrik dizi oluştururlar. Böylece, $n \to \infty$ için $9.(\frac{4}{3})^n \to \infty$ olduğundan, sonsuz uzunlukta bir eğri elde edilir(oysa, sabit uzunlukla işe başlamıştık!). Sonsuzuncu adımda(deyim yerindeyse) elde edilen şekil bir fraktal örneğidir. Bu arada, Koch eğrisi olarak isimlendirilen bu fraktalın boyutunun da $\frac{\log 4}{\log 3}$ olarak tanımlandığını belirtmek ilgi çekici olsa gerek. Yukarıda verdiğimiz örnekten de görüldüğü gibi, fraktallerin göz kamaştırıcı iki önemli özelliği;

- *Kendine-benzerlik*

  (Fraktale hangi ölçekte bakarsak bakalım, harhangi bir parçasını mercek altına alıp büyüttüğümü yine kendisini görürüz.)

- *Kesirli boyut*

  (Verdiğimiz örnekte olduğu gibi, Koch eğrisinin boyutu $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2618$ kesiridir.)

kavramlarıdır. Bu gözlem, eminiz, bir çoğunuzun kafasında değişik sorular uyandırıyordur: Türkiye sahil şeridinin uzunluğunu hesaplamak olanaklı mıdır? Ölçümlerin önce uydular aracılığıyla, sonra değişik açıklıklardaki pergel ile yapıldığını varsayalım. Öklit tarzı ölçümlerin (uzunluk, derinlik, kalınlık gibi), düzensiz şekillerin özünü yakalamakta yetersiz kaldıklarını görüyoruz. Yukarıdaki algoritma mantığı bize Cantor kümelerini hatırlatıyor. Benzer bir mantıkla Sierpinski contaları ve halıları elde edilmiştir. Başka örneklere geçmeden önce, fraktal oluşturmada kullanılabilecek bir yöntemden söz edelim.

Daha genel olarak, düzlemde ya da 3-boyutlu uzayda, bir F^* kümesini başka bir F kümesinden aşağıdaki adımları uygulayarak oluşturalım:

1. Bir F kümesini, herbiri F nın küçültülmüş kopyası olmak üzere, n tane konguruent(benzer) altkümelere bölelim. Ayrıca r sayısı da, oluşturulan altkümenin boyutunun F nın boyutuna olan oranını, yani küçültme oranını göstersin.

2. Altkümelerden m tanesini, diğerlerini ihmal ederek, tutalım. Bunlar $F_1, F_2, \ldots, F_m$ olsun.

3. Benzer şekilde, aynı kuralı uygulayarak, $F_1, F_2, \ldots, F_m$ altkümelerinin herbirini n tane konguruent(benzer) altkümelere bölelim ve herbir F_k, $1 \leq k \leq m$, kümesinin m tane alt kümesini tutalım.

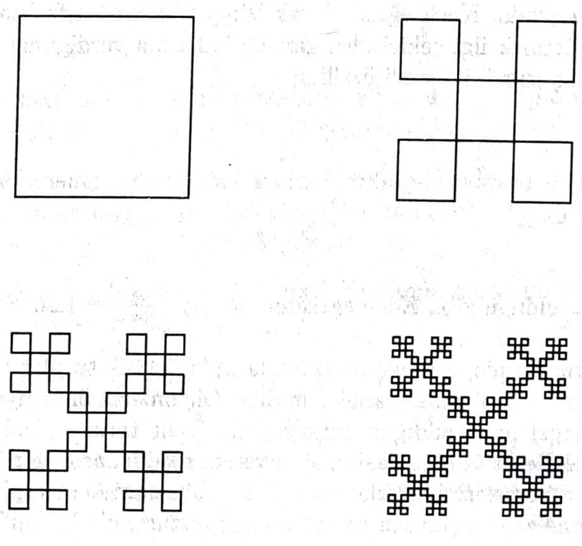
4. Bu işleme sonsuza kadar devam ederek bir F^* kümesini elde edelim.

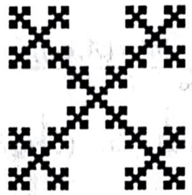
İşte bu yolla elde ettiğimiz F^* kümesi bir fraktal oluşturur ve F^* kümesinin fraktal boyutu da

$$\frac{\log m}{\log(\frac{1}{r})}$$

olarak tanımlanır. Verdiğimiz ilk fraktal örneğinde, Koch eğrisini oluştururken, $m = 4$ ve $r = \frac{1}{3}$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi bir fraktal örneği daha verelim.

F kümesini kenar uzunluğu 1 birim olan kare olarak alalım. Birinci adımda, kareyi 9 tane konguruent altkarelere bölerek, köşelerdeki 4 kareyi ve ortadaki 1 kareyi tutalım(diğerlerini atalım). Yaptığımız bu işlemi kalan karelere de ayrı ayrı uygulayarak, bu süreci sonsuz bir şekilde devam ettirdiğimizi varsayalım. Sonsuz adımda elde edilen kümeyi de F^* ile gösterecek olursak aşağıdaki şekilleri elde ederiz:





İlk adımda 1 kare, ikinci adımda 5 kare, üçüncü adımda toplam 25 kare,...,elde edilir. Sonsuz adımda elde edilen şekil ise bir fraktaldır. Elbette bu resmi elle çizmek olanaksızdır. Bu tür yinelemeli işlemlerle elde edilen şekillerin yakınsadığı şekil ya da bunların topolojisi üzerine bugün matematikçiler ciddi bir şekilde çalışmaktadırlar. Türettiğimiz bu fraktal için, $m = 5$ ve $r = \frac{1}{3}$ olduğundan, F^* ın boyutu $\frac{\log 5}{\log 3} \approx 1.4649$ dır.

Mandelbrot fraktal geometri kuramını ortaya koyunca boyut fikrine de yöneldi. Ona göre "Bizler üç boyutlu bir dünyada yaşıyoruz, bunun anlamı bir noktanın adresini belirlemek için üç sayıya ihtiyaç duymamız demektir. Buna göre bir düzlemin boyutu iki, bir doğrununki bir ve noktanın boyutu sıfırdır. Bu mantık bize Öklit geometrisinden miras kalmıştır" Ona bir iplik yumağının boyutu sorulduğunda, yanıtı: "Bu sizin bakış açınıza bağlı bir olay" şeklinde olmuştur. Mandelbrot burada sanki fizikçilere kendi geometrisini görücüye çıkartmak istediğini duyurmak istemektedir.

Bizleri bugün $0, 1, 2, 3, \cdots$ boyutlarını aşıp kesirli boyutlara yönelten sistem içinde, bir ölçüde kavram cambazlığı vardır. Kesirli boyut, açıklaması zorlukla yapılan ya da yapılamayan nitelikleri ölçmenin tanımlamanın bir yolu haline gelmiştir. Yeri gelmişken fraktal boyut tanımını verelim. Ancak, matematik bilginiz, aşağıdaki vereceğimiz kavramları anlamanıza yetmezse, bu bölümü atlayabilirsiniz.

X uzayı soyut bir uzay olsun (örneğin reel sayılar kümesi; $C[0,1]$, $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi; $[0,1]$ kapalı aralığı ve benzeri gibi), ayrıca $d : X \times X \to \mathbf{R}$ ise "metrik" adını verdiğmiz pozitif bir fonksiyon (örneğin $\mathbf{R}$ üzerinde bildiğimiz uzaklık fonksiyonu gibi) olsun. Bu durumda (X, d) sıralı ikilisi bir "metrik uzay"ı olur. Buna ek olarak X içindeki her bir "Cauchy dizisi" yakınsak olsun; başka bir deyişle (X, d) metrik uzayı "tam" olsun. X 'in boş olmayan bütün "kompakt" ("tıkız") altkümelerinin uzayını da $H(X)$ ile gösterelim. Fraktallerimiz $H(X)$ uzayında tanımlanacaktır. Bir $\epsilon > 0$ sayısı için ϵ yarıçaplı, x_n merkezli bir yuvar $B(x_n, \epsilon)$ ve bir $A \in H(X)$ için $N(A, \epsilon) =$ en küçük pozitif M tamsayısı öyle ki

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{M} B(x_n, \epsilon)$$

olsun.

Tanım: $A \in H(X)$ ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her bir $\epsilon > 0$ için $N(A, \epsilon)$, yarıçapı ϵ olan ve bileşimleri A 'yı örten yuvarların sayısının en küçüğü olmak üzere

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{ln(N(A, \epsilon))}{ln(\frac{1}{\epsilon})} = D$$

limiti varsa, bu değere A kümesinin **fraktal boyutu** denir.

Bu tanımın ışığı altında aşağıdaki teoremleri ispatsız veriyoruz (bak. "Fractals Everywhere", Michail F. Bornsiey, 1993, Sayfa:171):

Teorem 1. (X,d) bir tam metrik uzay ve $A \in H(X)$, $C > 0$ ve $0 < r < 1$ için $\epsilon_n = Cr^n$, $n = 1, 2, \cdots$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(N(A,\epsilon_n))}{ln(\frac{1}{\epsilon_n})} = D$$

limiti varsa, A kümesinin fraktal boyutu D 'dir. (Gerçekte bu teoremin ispatını sizler de yapabilirsiniz!)

Teorem 2. (Kare Sayma Teoremi) A, $H(\mathbf{R}^m)$ 'nin bir öğesi ve A, bir kenarı $\frac{1}{2^n}$ olan kapalı kare biçimli kutularla örtülmüş olsün. $N_n(A)$, A 'yı örten ve bir ayrıtı $\frac{1}{2^n}$ olan kutuların sayısının en küçüğünü göstersin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(N_n(A))}{ln(2^n)} = D$$

limiti varsa, A 'nın fraktal boyutu D 'dir.

Örnek 1. $A = \square \subseteq \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^2$ 'de herhangi bir kare) olsun: $N_1(\square) = 4, N_2(\square) = 16, \cdots, N_n(\square) = 4^n$ ise, Teorem 2 gereğince,

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(N_n(\square)}{ln(2^n)} = 2$$

'dir.

Örnek 2. $A =$ Sierpinski üçgeni olsun; yani bir üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştiriliyor, ortaya 4 üçgen çıkıyor, ortadaki üçgen atılıyor ve bu işlem diğer 3 üçgen için tekrar ediliyor ve bu döngü sürüp gidiyor. Buna göre,

$$N_1(\Delta) = 3, N_2(\Delta) = 9, \cdots, N_n(\Delta) = 3^n$$

ve

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(3^n)}{ln(2^n)} = \frac{ln3}{ln2}$$

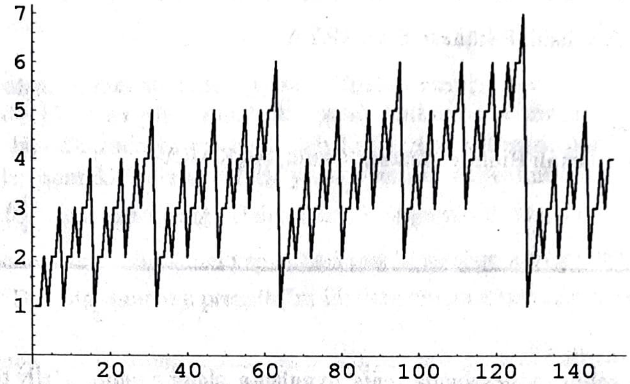
'dir.

Bu arada, Mondelbrot'un şu sözlerine kulak verelim:

"Ben bu oyuna dahil olduğumda sezginin tamamen eksik olduğunu farkettim. Sezginin sıfırdan başlayıp yaratılması gerekiyordu. Alışılagelmiş araçlarla - el, cetvel ve kalem gibi - eğitimi yapılan sezgi, bu şekillerin canavarca bir görünüme ve patolojik niteliğe sahip olduğunu keşfetmiştir. Eski sezgi insanı tamamen yanlış yola götürmekteydi."

Yazımızı tamamlamadan önce, fraktallere duyduğumuz heyecanımıza yenilerek, *Matehematica* paket programı ile oluşturduğumuz bir fraktal daha sunmak istiyoruz. Bunun için, 10 tabanlı bir n sayısının $b > 1$ tabanlı sayıtlama dizgesini düşünelim. Bilindiği gibi bu dizgenin sayakları(digit); $d_i = 0, 1, 2, \ldots, b-1$ olmak üzere, $n = (d_i)_b$ şeklinde bir gösterim kullanılır. Örneğin, 19 sayısının 2 tabanına göre açılımı, $19 = 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$ olduğundan, bu durum $19 = (10011)_2$ ile gösterilir. Şimdi bir f fonksiyonunu; n sayısının b tabanına göre açılımındaki d_i sayağının sayısı olarak tanımlayalım. Bunu da, $f[n, b, d_i]$:="$n = (d_i)_b$ gösterimindeki d_i sayağının sayısı" olarak formülize edelim. Örnek vermek gerekirse, $f[19, 2, 0] = 2$ ve $f[19, 2, 1] = 3$ olacaktır. Tanımlamış olduğumuz bu f fonksiyonu, **Sayak Sayma Fonksiyonu** olarak isimlendirilmiş olup, *Mathematica*'da, n verilen bir sayı, b taban ve d sayak olmak üzere **DigitCount[n, b, d]** komutu ile işletilmektedir. Artık aşağıdaki komutu işletmek için hazırız demektir. Kendine-benzerlik özelliğine sahip bir fraktal elde ettiğimize dikkat edelim:

```
In[1]:= ListPlot[Table[DigitCount[n, 2, 1], {n,150}], PlotJoined - > True]
```




```
Out[1]:= -Graphics-
```

Sonuç olarak, bugün birçok bilim dalında, fraktal, kırıklı, kesikli ve parçalı şekilleri, kar tanelerinin eğrilerinden galaksilerin kesintili tozlarına kadar düşünebileceğiniz bütün şekilleri tanımlamak, hesapla mak ve düşünmek için kullanılan bir araç durumuna gelmiştir.

Alıştırmalar:

(1) Modern Kümeler Teorisinin babası olarak anılan George Cantor (1845-1918)'un adıyla anılan bir Cantor kümesi oluşturalım: [0,1] kapalı aralığını üç eşit parçaya bölüp, ortadaki $(1/3, 2/3)$ açık aralığını atalım. Geriye kalan $[0, 1/3]$ ve $[2/3, 1]$ aralıklarını da ayrı ayrı üçe bölüp, ortadaki açık aralıkları atalım. Geriye, $[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]$ aralıkları kalacaktır. Aynı işlemi tekrarlı olarak sonsuza kadar devam ettirdiğimizi varsayarak, sonuçta elde ettiğimiz fraktalin boyutunu bulunuz. Ayrıca, L_n, n-inci adımda elde edilen aralıkların toplam uzunluğunu göstermek üzere, $n \to \infty$ için L_n nin limitini bulunuz.

(2) Sierpinski (1882-1969) halısı şu şekilde elde edilir: Düzlemde kenar uzunluğu 1 birim olan karesel bir S bölgesini göz önüne alalım. Bu bölgeyi, eşit alanlı, 9 tane karesel altbölgelere ayırıp, ortadaki bölgenin içini(sınırları kalacak) atalım. Aynı işlemi, kalan (8 tane) altkarelere uygulayarak, geriye (64 tane) küçük karelerden oluşan bir bölge edelim. Bu süreci, herbir alkareye uygulayarak, sonsuza kadar devam ettirdiğimizi düşünürsek, sonuçta bir S^* fraktalı (Sierpinski halısı) elde ederiz. S^* in fraktal boyutunu bulunuz. Ayrıca, S_n, n-inci adımda elde edilen bölgenin toplam alanını göstermek üzere, $n \to \infty$ için S_n nin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz (Sierpinski halısı pozitif alana sahip olamaz!).

KAYNAKÇA :

[1] F. Bornsiey : Fractals Everywhere, 1993

[2] Mathematica 4: Wolfram Research, 1988-1999

HELLY TEOREMİ VE İLGİLİ PROBLEMLER

İsmihan Yusubov
Sakarya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, SAKARYA
iyusubov@sakarya.edu.tr

Afet Golayoğlu Fatullayev
Başkent Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Yüksek Okulu, ANKARA
afet@başkent.edu.tr

Bu yazıda geometri ve kombinator hesabında geniş uygulama alanına sahip, Helly teoremi ve onun bazı uygulamalarının tanıtımı amaçlanmıştır. Eduard Helly'nin zorluk ve serüven dolu hayatının kısa özetinden başlayalım.

1. Eduard Helly'nin kısa özgeçmişi

Eduard Helly, 01.06.1884'de Viyana'da doğdu. Viyana Üniversitesinde okudu ve Wirtinger'le Merten'in danışmanlığında Fredholm denklemleri ile bağıntılı bitirme tezini yazdıktan sonra, 1907 'de doktoraya Gettingen'de başladı. O zamanlar Gettingen Üniversitesi dünya matematikçilerinin Mekkesi gibi ünlü bir ada sahip idi. Burada, o, Hilbert, Klein, Minkovski ve Runge gibi dünyaca ünlü matematikçilerden iki sene (1907-1908) boyunca ders aldı.

Geri döndüğünde Üniversitede bir makam tutmağa çaba göstermeden, yaşamını sürdürmek için farklı bir yol seçti. Gimnazyumda ders verdi ve matematikten çözümlü problemleri olan klavuz kitapları yazdı. Bu arada matematikte yaranmakta olan yepyeni bir alana- Fonksiyonel Analiz'e girişimlerde bulundu ve 1912 de Hahn-Banach teoremini ispatladı. Bu ispat Hahn'ın aşağı-yukarı aynı ispatından 15 sene, Banach'ın bu teoreme modern bir şekil vermesinden ise tam 20 sene önce yapılmıştır.

I. Dünya savaşının başlamasıyla (1914) Helly orduya alındı. Teğmen olarak hizmet verdiği sırada, 1915 in Eylülünde ağır şekilde yaralandı. Mermi onun akciğerini delerek sağlamlığını ciddi bir şekilde tahrip etti ve hayatı boyunca, o, bir daha evvelki sağlamlığına kavuşamadı. Yaralandıktan sonra Rusların esiri olarak yıllarını hospitallerde ve Sibirya'nın esir kamplarında geçirdi. Bütün bunlara rağmen, o, kendisinde 1. Dünya savaşının 1918 de son bulmasını göre bilmek için güç bulmayı başardı. Bundan sonra onu serbest bıraktılar. Fakat Rusya'da artık iç savaş başlamıştı ve buradan kurtuluş çok zor olacaktı. Ve onun 1918 de Rusya'dan ayrıldıktan sonra 1920 de Vyana'da tamamlanacak tehlike ve serüvenlerle dolu olan yolu Japonya, Uzak Doğu, Mısır ve Orta Doğudan geçmiştir. 1921 de Helly kendisi ile eşzamanlı doktora yapmış ve Vyana'dan olan Elise Bloch'la evlenir. Aynı yılda o habilitation(doctor of science) tezini savundu ve üniversitede ders vermek için hak kazandı. 1921 de Vyana Üniversitesine atandı, fakat ücretsiz olarak. Eşinin tahminine göre bu profesörlerin bir oyunu idi.(Kısmen Helly yahudi olduğu için ve hem üniversitede kürsüsü olan Hahn onun daha üstün olacağını düşündüğüne göre).

Helly, yaşamlarını sürdürmek için bir bankada çalışmaya başladı, fakat bu banka da 1929 da iflas etti. Daha sonra, o, kendine bir sigorta şirketinde iş buldu, fakat 1938 de burada da işinden oldu. 12 Mart 1938 de Hitler alman ordusunun başında Avusturya'ya girdi ve Naziler yönetime el koydular. Helly de bir çokları gibi, yahudi olduğu için işinden atıldı ve onun, ailesini daha kötü tehlikelerden korumak için Avusturya'dan kaçmaktan başka yolu kalmadı. Helly bu yolu gerçekleştirerek, muhacir olarak ABD ye sığındı. Helly ve ailesi için yaşam Birleşik Devletlerde de ağır olarak kalmaktaydı. İlk olarak, o, çok yıllar önce Vyanada olduğu gibi özel öğretmen olarak iş bulmaya teşebbüs etti ve 1939 da Einstein'in özel desteği ile New Jersey de olan Monmouth Gençler lisesinde çalışmaya başladı.

Sonraki yıllarda Helly ve eşi Chicago'daki "Signal Corps" da matematikçi olarak çalıştılar. Helly tekrar üniversiteye hazırlananlar için matematikten el kitapları (Handbooks) yazıyor, eşi ise matematik dersi veriyordu. Çikago'da "Signal Corps"da çalıştığı sıralarda ilk kalp krizi geçirdi. O bu krizi atlattı ve işler iyiye gediyor gibi görülmeye başladı. Bu arada İllinoys Teknoloji Enstitüsü'nün Matematik bölüm başkanlığına atanma teklifini aldı. Maalesef, o, bu teklifi değerlendirmeye fırsat bulamadı. Kısa bir süre sonra, 28 Kasım 1943 yılında ikinci kalp krizi sonucu Helly vefat etti.

Helly 1912 de yayımlanmış makalesinde bir takım önemli sonuçlara imza atmıştır. Onlardan birincisi "Helly'nin seçim prensibi" dir ki, buna göre sınırlı değişmeli fonksiyonlar dizisi noktada düzgün sınırlı ve düzgün sınırlı değişmeli ise, bu dizisinin sınırlı değişmeli fonksiyona yakınsak olan bir alt dizisi vardır. Bu makalede olan diğer sonuçlar sonraki yıllarda Helly'ye matematik dünyasında hak ettiği yüksek makamı kazandırmıştır. Onun $C[a,b]$ için ispatladığı Hahn-Banach teoreminin yardımıyla Rietz'in daha önceler ispatladığı $C[a,b]$'de lineer fonksiyonelin genel yapısı hakkındeki meşhur teoremi daha basit ve doğal ispatını bulmuştur. O, aynı zamanda "Düzgün sınırlılık prensibi"ni ilk defa ortaya atan kişi olarak da tarihe geçmiştir.

Helly'nin 1923 yılında "Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinshaftiches Punkten" adı altında yayımlanan iki sayfalık bir teoremi, Kombinator Hesabı ve Geometride en çok baş vurulan ve çok sayıda uygulamaları bulunan bir teorem haline geldi. "Helly teoremi" diye adlanan bu teoremin, kolay anlaşılır olması açısından, basit versiyonlarından başlayalım.

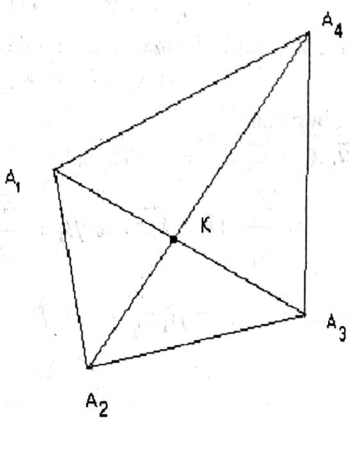
2. Helly teoremleri

Teorem 1. Düzlemde dört tane konveks kümeden her üçlüsünün ortak noktası varsa, hepsinin de ortak noktası vardır.(Özel durumda Helly teoremi)

İspat: Verilen kümeler C_1, C_2 C_3 ve C_4 olsunlar ve K_i $(i=1,2,3,4)$ bu kümelerin C_i dışındaki üçlüsünün arakesiti olsun. Teoremin koşuluna göre K_i ler boş değildir. $A_i \in K_i$ olmak üzere dört nokta alalım. Burada iki olanak vardır.

1) A_4 noktası A_1, A_2, A_3 noktalarının belirlediği üçgenin noktasıdır. A_1, A_2, A_3 noktaları sırasıyla $C_2 \cap C_3 \cap C_4 = K_1$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4 = K_2$, ve $C_1 \cap C_2 \cap C_4 = K_3$ arakesit noktaları olduklarından hepsi bu arakesitlerin ortak kümesi olan C_4 ün noktalarıdır. C_4 konveks olduğundan dolayı $\overset{\Delta}{A_1A_2A_3}$ üçgeni ve sonuç olarak onun içinde bulunan A_4 noktası da C_4 ün elemanıdır. Öte yandan $A_4 \in K_4 = C_1 \cap C_2 \cap C_3$ olduğundan, A_4 aynı zamanda C_1, C_2 ve C_3 ün ortak elemanı olmakta, yani $A_4 \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = K_0$ ve dört kümenin arakesiti boş değildir.

2) $A_1A_2A_3A_4$ konveks bir dörtgen olsun. Bu dörtgenin köşegenleri olan $[A_1A_3]$ ve $[A_2A_4]$ ün arakesiti $K = [A_1A_3] \cap [A_2A_4]$ noktasının $C_i (i=1,2,3,4)$ kümelerinin hepsinin ortak noktası olduğunu gösterelim. Gerçekten A_1 ve A_3 noktaları $C_2 \cap C_4$ konveks kümesinde olduklarına göre $[A_1A_3] \subset C_2 \cap C_4$. Aynı şekilde $[A_2A_4] \subset C_1 \cap C_3$. O halde onların arakesiti olan K noktası hem $C_1 \cap C_3$, hem de $C_2 \cap C_4$ ün elemanı olmakta. Yani $K_0 = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ noktası C_i lerin hepsinin ortak noktası olacaktır.



Şekil 1.

Teorem 2. Düzlemde n tane konveks figürden her üçlüsünün ortak noktası varsa, hepsinin de ortak noktası vardır.(Düzlem için Helly teoremi)

İspat: İspatı tümevarım prensibi ile yapalım. $n \geq 4$ için önermenin doğruluğunu varsayalım ve $n+1$ tane figür için de doğru olduğunu kanıtlayalım. $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_{n+1}$ gibi n+1 tane konveks figür ve bu figürlerin her üçlüsünün boş olmayan arakesiti olduğu verilmiş olsun. $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n \cap C_{n+1}$ olmak üzere n tane küme alalım. Bu figürler de konvekstir ve son kümenin bulunmadığı üçlü arakesitler boş değildir. Fakat Teorem 1'e göre $C_i \cap C_j \cap (C_n \cap C_{n+1})$ biçimindeki üçlü arakesit, Teorem 1'in koşullarını sağlayan dört kümenin arakesiti olduğundan boş değildir. O halde varsayıma göre,

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap (C_n \cap C_{n+1}) = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \cap C_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} C_k$$

kümesi boş değildir.

Teorem 3. m boyutlu uzayda n tane $(n \geq m+1)$ konveks kümenin her $m+1$ tanesinin arakesiti boş değilse onların tümünün arakesiti de boş değildir. (m boyutlu Helly teoremi)

İspat: Tümevarım prensibini kullanalım. Konveks kümeler $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1} (C_k \subset R^m)$ olsun. Teoremin koşullarında bunların her n tanesinin arakesitinin boş olmadığını varsayarak(tümevarım) hepsinin ortak noktaya sahip olduklarını gösterelim. Bu kümelerin C_k hariç geri kalan, n tanesinin arakesiti Q_k olsun. $X_k \in Q_k$, $(X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}))$ alalım. $k = \overline{1, m+1}$ ve $a_k \in R$ ler için aşağıdaki homojen sistemi yazalım

$$\begin{cases} a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \ldots + a_{n+1} x_{n+1,1} = 0 \\ a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \ldots + a_{n+1} x_{n+1,2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 x_{1m} + a_2 x_{2m} + \ldots + a_{n+1} x_{n+1,m} = 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemde $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ değişkenlerinin sayısı $n+1$, denklem sayısı $m+1$' den fazla olduğuna göre sistemin her zaman sıfırdan farklı çözümü vardır. Bu çözümlerden birisi $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n+1})$ ve bu çözümün negatif olmayan koordinatları $\overline{a}_{i_1}, \overline{a}_{i_2}, \ldots, \overline{a}_{i_s}$, ötekiler ise $\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}, \ldots, \overline{a}_{j_t}$ olsun. O halde (1) 'in son denkleminden

$$A_+ = \overline{a}_{i_1} + \overline{a}_{i_2} + \ldots + \overline{a}_{i_s} = -(\overline{a}_{j_1} + \overline{a}_{j_2} + \ldots + \overline{a}_{j_t}) = -A_- \qquad (2)$$

olduğu açık. (5) sisteminin ilk m denklemini de vektör biçiminde

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = 0 \qquad (3)$$

olarak alırsak, buradan

$$\overline{a}_{i_1} x_{i_1} + \overline{a}_{i_2} x_{i_2} + \ldots + \overline{a}_{i_s} x_{i_s} = -(\overline{a}_{j_1} x_{j_1} + \overline{a}_{j_2} x_{j_2} + \ldots + \overline{a}_{j_t} x_{j_s}) \qquad (4)$$

yazabiliriz. $\alpha_k = \dfrac{\overline{a}_{i_k}}{A_+}$ $(k = \overline{1, s})$ ve $\beta_k = \dfrac{\overline{a}_{j_k}}{A_-}$ $(k = \overline{1, t})$ alırsak, (2) ve (4)'e göre

$$x_0 = \alpha_1 x_{i_1} + \ldots + \alpha_s x_{i_s} = \beta_1 x_{j_1} + \ldots + \beta_t x_{j_t}, \ \alpha_k \geq 0, \beta_k > 0, \ \sum_{k=1}^{s} \beta_k = 1, \ (s+t = n+1) \qquad (5)$$

olduğunu tespit ederiz. (5)' a göre x_0 noktası $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}$ noktalarını içeren en küçük konveks kümeye, $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\}$ 'in konveks örtüsü $Co\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\}$'ne ait ve aynı zamanda $x_0 \in Co\{x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_t}\}$, yani $x_0 \in C_{j_1} \cap ... \cap C_{j_t}$ ve $x_0 \in C_{i_1} \cap ... \cap C_{i_s}$. Bu nedenle $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{m+1} C_k$ olacaktır.

3. Helly teoreminin bazı uygulamaları

Problem 1. *Düzlemde her üçlüsünü, yarıçapı 1 olan daire ile örtmek mümkün olan n tane $M_1, M_2, ..., M_n$, $(n \geq 3)$ noktaları verilmiştir. Bu noktaların tümünü örten birim dairenin olduğunu ispatlayınız.*

İspat: M merkezli birim dairenin $M_1, M_2, ..., M_n$ noktalarını içermesi (örtmesi) için, merkezleri $M_1, M_2, ..., M_n$' de olan birim dairelerin M noktasını içermesi hem gerekli hem de yeterlidir. O halde bu problem aşağıdaki gibi ifade edilebilinir.

"Düzlemde merkezleri $M_1, M_2, ..., M_n$' de olan birim dairelerin üçer-üçer arakesitleri boş değilse, onların hepsinin arakesitinin boş olmadığını gösteriniz." Bu ise Helly teoreminden başka bir şey değildir. Daireleri $D_1, D_2, ..., D_n$ olarak işaretlersek, $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n \neq \varnothing$ ve her $M \in D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$ merkezli birim D dairesi, $M_1, M_2, ..., M_n$ noktalarının hepsini içerecektir.

Problem 2. (TÜBİTAK BAYG Problem Semineri 96/6, Problem 3) *$n > 2$ olmak üzere, düzlemde n tane farklı $M_1, M_2, ..., M_n$ noktaları verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer- ikişer birbirinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D, en küçüğüne ise d diyelim. Bu durumda $D > \frac{\sqrt{3}}{2} d(\sqrt{n} - 1)$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm.

Bu noktaların her birini merkez alarak, n tane $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ yarıçaplı daireler çizelim. Bu dairelerin her üçlüsünün en azından bir kesişme noktası vardır. Helly teoremine göre bu dairelerin hepsinin en az bir ortak noktası olacaktır. Bu ortak nokta merkez alınarak çizilen $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ yarıçaplı C dairesi n tane noktanın tümünü örtecektir. n tane noktanın her birini merkez alarak $\frac{d}{2}$ yarıçaplı daireler çizelim. Bu dairelerin birbirlerini örtmezler ve alanları toplamı $n\pi(\frac{d}{2})^2$ dir. $\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2}$ yarıçaplı ve merkezi C dairesi merkezi ile çakışık olan bir daire ise bu dairelerin hepsini örtecektir. Buna göre de, $\pi(\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2})^2 > n\pi(\frac{d}{2})^2$ ve $\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2} > \sqrt{n} \frac{d}{2}$ ve buradan $D > \frac{\sqrt{3}}{2} d(\sqrt{n} - 1)$ elde edilir.

Problem 3. *$n > 2$ olmak üzere, uzayda n tane $M_1, M_2, ..., M_n$ farklı noktaları verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer- ikişer birbirinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D, en küçüğüne ise d diyelim. Bu durumda $D > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d(\sqrt[3]{n} - 1)$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. Her ikilisi arasında mesafe D olan dört noktadan (düzgün dörtyüzlünün tepelerinden) geçen sferanın yarıçapı $R=\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olduğundan, merkezleri verilen noktalarda ve yarıçapları $R=\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olan kürelerin dörder-dörder arakesitleri boş olmayacaktır. O halde üç boyutlu Helly teoremine göre bu kürelerin hepsinin en azından ortak bir M noktası var. O halde merkezi M de ve yarıçapı $R=\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olan küre $M_1, M_2, ..., M_n$ noktalarının hepsini örtecektir. Merkezleri M_k $(k=\overline{1,n})$ noktalarında ve yarıçapları $\dfrac{d}{2}$ olan küreler biri-birini örtmezler ve toplam hacimleri $n\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^3=\dfrac{n\pi d^3}{6}$ olacaktır. Öte yandan merkezi M de ve yarıçapı $\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{d}{2}$ olan bir küre bu küçük kürelerin hepsini içerdiğinden $\dfrac{4}{3}\pi\left[\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{d}{2}\right]^3>\dfrac{n\pi d^3}{6}$ ve ya $D>\dfrac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{n}-1)$ olduğu elde edilir.

Helly teoreminin bir sonraki uygulamasını söylememiz için bazı yardımcı önermelere ihtiyacımız var.

Önerme 1. Çember üzerinde her noktadan düzgün kirişler üçgeninin tepesine kadar olan büyük mesafe küçük mesafelerin toplamına eşittir.

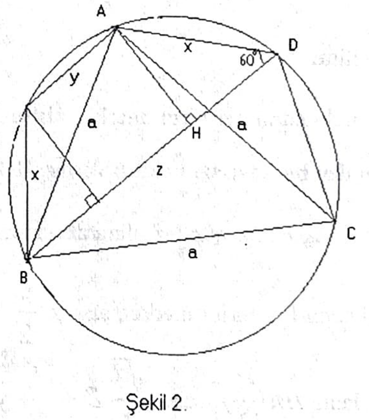
İspat. Şekil 2 ' ye göre

$z=x+y$ (6)

olduğunu gösterelim.

$|BD_1|=x, |AD_1|=y$ $[AH]\perp[AD]$ çizdikten sonra

$z=y+2x\cos 60^\circ=y+x$ olduğu açık.



Şekil 2.

Önerme 2. Bir açısı 120° olan üçgende küçük kenarların x, y uzunlukları ve büyük kenarın a uzunluğu arasında

$$x+y\le\frac{2}{\sqrt{3}}a \qquad (7)$$

bağıntısı vardır.

İspat: Önerme 1'e göre $x+y=z$ ve $z\le 2R=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ olduğundan, $x+y\le\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ olur. Burada R, kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgenin çevrel çemberinin yarıçapıdır.

Önerme 3. Düzlemde $[A_1B_1]$, $[A_2, B_2]$ ve $[A_3B_3]$ üç doğru parçası üç noktada kesişiyor ise, düzlemde öyle bir M noktası var ki,

$$\begin{cases} |A_1M| + |MB_1| \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}|A_1B_1| \\ |A_2M| + |MB_2| \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}|A_2B_2| \\ |A_3M| + |MB_3| \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}|A_3B_3| \end{cases} \quad (8)$$

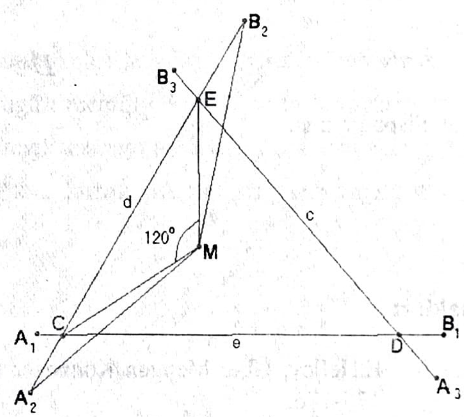
eşitsizlikler sistemini sağlıyor.

İspat: Kesişme noktaları C, D, E olsun. O halde $\overset{\Delta}{CDE}$ üçgeni içerisinde bir M noktası var ki, bu noktadan üçgen kenarları 120^o li açı altında görünmektedir. M'in aranan nokta olduğunu gösterelim. Önerme 2'ye göre, örneğin

$$|EM| + |MC| \le \frac{2d}{\sqrt{3}}$$

O halde

$$|A_2M| + |MB_2| \le$$
$$\le |A_2C| + |CM| + |ME| + |EB_2| \le$$
$$\le \frac{2}{\sqrt{3}}|A_2C| + \frac{2}{\sqrt{3}}d + \frac{2}{\sqrt{3}}|EB_2| =$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}(|A_2C| + d + |EB_2|)$$



Şekil 3.

Sonuç olarak $|A_2M| + |MB_2| \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}|A_2B_2|$ olmakla (8) 'in ikinci eşitsizliği kanıtlanmış oldu. Öteki eşitsizlikler de aynı şekilde doğrulanır.

Problem 4. Düzlemde n tane $[A_k, B_k]$ parçalarından her üçlüsü farklı üç noktada kesişiyor ise, bu düzlemde tüm $[A_kB_k]$ parçaları için

$$|A_kM| + |MB_k| \le \frac{2}{\sqrt{3}}|A_kB_k|, \quad k = \overline{1,n} \quad (9)$$

eşitsizlikler sistemini sağlayan bir M noktası vardır.

İspat: Düzlemde $|A_kX|+|XB_k|\leq\frac{2}{\sqrt{3}}|A_kB_k|$ eşitsizliğini sağlayan $X\in R^2$ noktaları, odak noktaları A_k,B_k büyük çapı $\frac{2}{\sqrt{3}}|A_kB_k|$ olan bir elipsin noktasıdır. Önerme 3' e göre problemin koşullarında bu elipslerinden keyfi üç tanesinin ortak noktası var. O halde Helly teoremine göre bunların hepsinin de ortak bir M noktası var ki, bu nokta her $k=\overline{1,n}$ için (9) eşitsizliğini sağlayacaktır.

Bu yazıyı Helly teoremi ile bağlantılı aşağıdaki problemlerle sonlandıralım.

Problem 5. Uzayda n tane $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}$ yarıçaplı küreler verilmiş ve öyle bir düzlem var ki, kürelerin bu düzlem üzerindeki izdüşümlerinin her üçlüsü ortak noktaya sahiptir. Bu kürelerin hepsini aynı anda kesen bir doğru olduğunu gösteriniz ve bu kürelerin hepsini içine alan en küçük yarıçaplı silindiri bulunuz.

Problem 6. n boyutlu Öklit uzayında $s>n$ olmak üzere s tane $M_1,M_2,...,M_s$ noktaları veriliyor. Bu noktaların ikişer-ikişer bir-birinde olan uzaklıklarının en küçüğü d, en büyüğü D ise

$$D>d\sqrt{\frac{n+1}{2n}}(\sqrt[n]{s}-1)$$

olduğunu ispatlayınız.

Kaynaklar:

1. E.Helley, Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinschaftliches Punkten. *Jber.DMV* 32(1923), 175-176.
2. V.Klee, B. Grünbaum and L. Danzer , Helly's teorem and its relatives, 1963.
3. O.Kallenberg, Foundation of Modern Probablity, Springer, 1997.
4. A.Brieden, P.Gritzman. On Helly's theorem: Algorithms and extensions" Discrete &Computational Geometry, 17,(1997), 393-410.
5. D.Avis and M.E.Houle, Computational aspects of Helly's theorem and its relatives. Proc. 2nd Canadian Conf. On Computational Geometry. Ottava, Kanada, Aug. 1990, 20-23
6. V.V.Prosalov. Zadachi po planimetrii, Cilt 2, Nauka, Moskova, 1986
7. http://www.nrich.maths.org/mathsf/journalf/aams/971.html/
8. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Helly.htm

...*MATE*(**RO**)*MA*(**N**)*TİK*...

MATEMATİK

Matematik bir umman, uçsuz bucaksız deniz.
Sayılar nerde başlar, nerde biter bilmeyiz.
Bir ömrü dolu dolu yaşasak da onunla,
Noktayı biraz geçer, çizgiye gelemeyiz.

$(a_n) \to a$, $AÇI/3 = ?$

Limite epsilonla yaklaştık gelemedik.
Sıfırı anladık da, sonsuzu bilemedik.
Bir açıyı ikiye, dörde, sekize böldük,
Pergel ve cetvelle üç eşe bölemedik.

π, e

Dairenin gizemi bilinir ki (π) dedir.
Daireyi kareye çevirmezse (π) nedir?
Birisi bir gün çıkıp, belki şöyle diyecek:
Matematiğin sırrı ne (π) de, ne (e) dedir.

$2, 3, 5, \ldots, 19, \ldots 1999, \ldots$

Bunlar nasıl sayılar, her biri birer sorun,
Bugün formül çıkmadı belki bulurlar yarın (!)
Hangi tek sayı asal, hangi tek sayı değil,
Yoksa, kuralı yok mu bu garip sayıların.

FERMAT

a, b, c tamsayıysa a^3 ile b^3 ün
Toplamını c^3 e eşitlemek ne mümkün
On yedinci yüzyılda kendisi çözmüş müydü?
Fermat'ın teoremi hala ortada bugün.

(Bu dörtlükler, matematik öğretmeni Mustafa Töngemen tarafından hazırlanan PROBLEM PROBLEMLER adlı kitapçıktan uyarlanmıştır.)

PROBLEM PROBLEMLER

Mustafa Töngemen

Matematik Öğretmeni

Her şey iç içe girdi: denklemler, teoremler...
Teğetini yitirdi, yarıçapsız bir çember.
Yelkensiz bir sandalla, bir liman arar gibi,
Beynimde dolaşıyor, PROBLEM PROBLEMLER.

1.

$$\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(Hazırlayan: Hintli matematikçi RAMANUJAN)

2.

$$\left[\frac{a(2a^3-b^3)}{a^3+b^3}\right]^3-\left[\frac{a(2b^3-a^3)}{a^3+b^3}\right]^3=a^3-b^3$$

özdeşliğini kanıtlayınız.

(Hazırlayan: Pierre de FERMAT (1601-1665))

3.

$$5x^2-6xy+81y^2=2000$$

eşitliğini sağlayan (x,y) tamsayı ikililerini bulunuz.

4.

$$(3x+7)(3x+8)(3x+10)(3x+11)+9(x+3)^2=0$$

denkleminin köklerini bulunuz.

5.

$$\frac{\sin(130-x)^\circ}{\sin x^\circ}=2\cos 10^\circ$$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki köklerini bulunuz.

(Hazırlayan: Uğurcan GÜMÜŞ)

6.

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+\ldots+(x-n)^2$$

fonksiyonunun, x gerçel sayı ve n sayma sayısı olmak üzere, alabileceği en küçük değeri n cinsinden bulunuz.

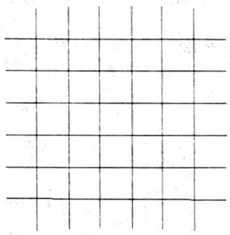
7.

$$p(x)=x^{243}+x^2+1$$

polinomunun x^3+x^2+x+1 ile bölümünden kalanı bulunuz.

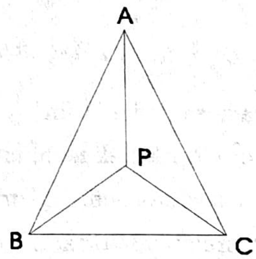
(Hazırlayan: Uğurcan GÜMÜŞ)

8.



Şekilde $n \geq p \geq 2$ olmak üzere n tane dikey ve p tane yatay paralel doğru vardır. Her doğru kendisine en yakın paralel doğrudan 1 cm uzaklıktaır. Bu şekilde küçüklü büyüklü en çok kaç tane kare vardır?

9.



Şekilde, P noktası ABC eşkenar üçgeninin içinde bir noktadır. $|PA|=4$ cm, $|PB|=2\sqrt{3}$ cm, $|PC|=2$ cm dir. Buna göre $|BC|$ kaç cm dir?

10.

$$3x^4-2x^3-15x^2-2x+3=0$$

denkleminin köklerini bulunuz.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 15 Nisan 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama: Yarışma Sorularının doğru cözümlerini gönderenlerin isimleri dergide belirtilecektir.

- 2002 senesi boyunca en fazla doğru çözüm gönderenler arasından en az ilk 3 kişiye ödül olarak Matematik Dünyası 2003 yılı aboneliği ve yazarların imzası ile Matematik kitapları verilecektir.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.251. 2002^{2002} sayısının son iki basamağını bulunuz.

A.252. $ABCD$ paralelkenarında AC köşegeni BD köşegeninden daha uzundur. $BCDM$ bir kirişler dörtgeni olacak şekilde AC köşegeni üzerinde bir M noktası alınmıştır. BD doğrusunun, ABM ve ADM üçgenlerinin çevrel çemberlerine teğet olduğunu kanıtlayınız.

A.253. 4x4 boyutlu bir satranç tahtasının karelerine, hepsi aynı zamanda 0 olmayacak şekilde öyle sayılar yazınız ki, her sayı komşusundaki sayıların toplamına eşit olsun (bir ortak kenara sahip karelere komşu denir).

A.254. Her a, b, c pozitif sayıları için

$$a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}abc$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

A.255. 1997-2001 yıllarında inceleme yapan bir meteoroloji uzmanı her günü soğuk, serin veya sıcak diye kaydetmiş. Bu yılların birinde serin günler soğuk günlerden, sıcak günler de serin günlerden aynı sayı kadar fazla olmuş. Bu hangi yıldı?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.251. n ve b pozitif tam sayıları için $V(n,b)$ ile n sayısının, her çarpan b'den büyük olacak şekilde çarpanlara ayrılma sayısını gösterelim. (örneğin, $48 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 8$ olduğundan $V(48,2) = 5$'dir). Her n ve b pozitif tam sayıları için $V(n,b) < \frac{n}{b}$ olduğunu gösteriniz.

Y.252. $ABCD$ dikdörtgeninin AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde sırasıyla K, L, M, N noktaları verilmiştir. $KL||MN$ ve $KM \perp LN$ olduğu bilinir. KM ve LN doğru parçalarının kesişim noktasının BD köşegeni üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Y.253. Ağırlıklarına göre sıralanmış 100 tane gümüş parçası ve yine ağırlıklarına göre sıralanmış 101 tane altın parçası verilmiştir. Bütün parçaların ağırlıkları farklıdır. Çift kollu teraziyi kullanarak en az kaç tartıyla ağırlığına göre 101. sırada bulunan parça bulunur?

Y.254. Her $a > 1$ ve $b > 1$ sayıları için

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Y.255. 1'den farklı ve 2002'den küçük ve ikişer ikişer aralarında asal olan 15 tane pozitif tam sayıdan en az birinin asal olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.241. $a^2 + 2cd + b^2$ ve $c^2 + 2ab + d^2$ sayıları tam sayıların kareleri olacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tamsayıları bulunuz.

Çözüm. $ab = cd$ ise,

$$a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

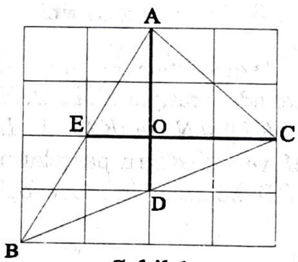
ve

$$c^2 + 2ab + d^2 = (c+d)^2$$

Böylece $ab = cd$ olacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d sayılarını bulmamız yeterlidir. Örneğin $a = 2; b = 6; c = 3; d = 4$ alabiliriz.

A.242. Kareli kağıt üzerinde, köşeleri karelerin köşelerinde bulunan ve iki kenarortayı birbirine dik olan bir üçgen çiziniz.

Çözüm. Önce $|AO| = 2|OD|; |OC| = 2|OE|$ ve $AD \perp EC$ alıyoruz. AE ile CD'nin kesişim noktasını B ile göstererek ABC üçgenini elde ederiz (bkz. Şekil 1).



Şekil 1

A.243. Doğru üzerinde bir kaç nokta alındı Sonra her iki komşu nokta arasında bir nokta daha alındı. Bu işlem iki kez daha yapıldı (toplam üç kez). Sonuçta doğru üzerinde 113 nokta olduğuna göre başlangıçta kaç nokta alınmıştır?

Çözüm. Başlangıçtaki nokta sayısı x ise, birinci işlemden sonra nokta sayısı $x + x - 1 = 2x - 1$, ikinci işlemden sonra $2(2x-1)-1 = 4x-3$, üçüncü işlemden sonra $2(4x - 3) - 1 = 8x - 7$ olacak. $8x - 7 = 113$ denkleminden $x = 15$ elde ederiz.

A.244. Kesrin payı ve paydası, toplamları 101 olan pozitif tam sayılardır. Kesrin $\frac{1}{3}$' ten büyük olmadığı biliniyor. Bu kesir en fazla kaç olabilir?

Çözüm. Kesrin payı n olsun. $\frac{n}{101-n} \leq \frac{1}{3}$ eşitsizliğinden $n \leq 25$ elde ederiz. Dolayısıyla, kesir en fazla $\frac{25}{76}$ olabilir.

A.245. $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$ ise ; $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ ve $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ denklemlerinden hiç değilse birinin reel kökünün bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu 2. dereceden polinomların diskriminantlarını Δ_1 ve Δ_2 ile gösterirsek,

$$\Delta_1 + \Delta_2 = p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geq$$

$$2p_1p_2 - 4(q_1 + q_2) = 0$$

olduğundan Δ_1 ve Δ_2 sayıların en az biri negatif değildir. O halde uygun polinomun kökü bulunur.

Y.241. a, b, c pozitif tam sayıları için $a.b + b.c = c.a$ eşitliği sağlanır.

$$OKEK(a,b) = OKEK(b,c) = OKEK(c,a)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Sayılardan her birinin (diyelim, c'nin) diğer ikisinin (a ve b'nin) OKEK'ini böldüğünü göstermemiz yeterlidir. c'nin herhangi bir p asal bölenini alalım. $OBEB(c_1, p) = 1$ olacak şekilde $c = p^m c_1$ olsun. p^m'nin $OKEK(a,b)$ sayısını böldüğünü göstermemiz yeterli olacaktır.

$$OBEB(a_1, p) = OBEB(b_1, p) = 1$$

olacak şekilde $a = p^n a_1$ ve $b = p^k b_1$ alalım. $k \geq n$ olsun ($k < n$ durumu benzer şekilde incelenir). $p^n|(a - b)$ elde ederiz. $ab = p^{n+k}a_1b_1$ ve $OBEB(a_1b_1, p) = 1$ olduğundan $n + m \leq n + k$, buradan da $m \leq k$ elde ederiz. O halde $p^m|b$ ve $p^m|OKEK(a,b)$'dir.

Y.242. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine diktir, AB ve CD kenarları da paralel değildir. AB ve CD kenarlarının orta dikmeleri, $ABCD$ dörtgeninin içerisindeki bir P noktasında kesişmektedir. $ABCD$ ' nin bir kirişler dörtgeni olması için ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olmasının gerek ve yeterli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $ABCD$ bir kirişler dörtgeni olsun. O halde P noktası çevrel çemberin merkezi ve $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$ olacak (Şekil 2).

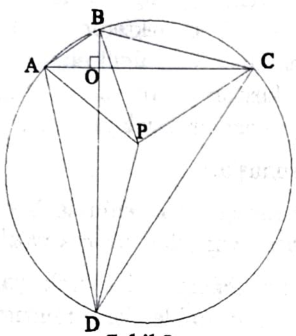
$$s(\widehat{APB}) + s(\widehat{CPD}) = s(\breve{AB}) + s(\breve{CD}) =$$

$$2s(\widehat{ADB}) = 180° \text{ olduğundan}$$

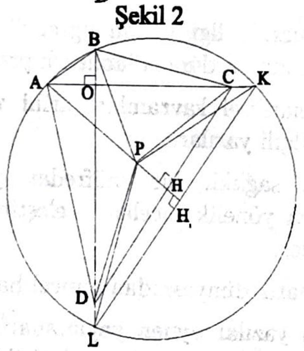
$$A(\overset{\triangle}{APB}) = \frac{1}{2}|PA| \cdot |PB| \cdot \sin(\widehat{APB})$$

$$= \frac{1}{2}|PC| \cdot |PD| \cdot \sin(\widehat{CPD}) = A(\overset{\triangle}{CPD})$$

elde edilir. Şimdi $A(\overset{\triangle}{APB}) = A(\overset{\triangle}{CPD})$ olduğu halde, $ABCD$'nin kirişler dörtheni olmadığını varsayalım. Genelliği kaybetmeden $|PA| = |PB| > |PC| = |PD|$ olduğunu kabul edebiliriz. Merkezi P noktasında bulunan ve yarıçapı



Şekil 2



Şekil 3

$|PA|$'ya eşit olan çemberle AC'nin uzantısının kesişim noktasını K, BD'nin uzantısının aynı çemberle kesişim noktasını L ile gösterelim (Şekil 3). PH ve PH_1, sırasıyla DPC ve LPK üçgenlerinin yükseklikleri olsun. PH_1 ile CD'nin kesişim noktasını N ile gösterelim. $|PH_1| > |PN| \geq |PH|$ ve $|KL| > |CD|$ olduğundan

$$A(\overset{\triangle}{KPL}) = \frac{1}{2}|PH_1| \cdot |CD| = A(CPD)$$

elde ederiz. Bu, bir çelişki oluşturduğundan $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$ eşitliğini, buradan da $ABCD$'nin bir kirişler dörtgeni olduğunu elde ederiz.

Y.243. İki kişi şöyle bir oyun oynuyorlar: Birinci kişi soldan sağa doğru A ve B harflerinden istediğini yazıyor (her hamlede bir harf). İkinci de her hamlesinde ya herhangi iki harfin yerini değiştiriyor, ya da hiçbir şey yapmıyor. İkinci kişi 2001 'er hamleden sonra elde edilen kelimenin soldan sağa ve sağdan sola okunduğunda aynı olmasını sağlayabilir mi?

Çözüm. Sağlayabilir: bunun için aşağıdaki stratejiyi izliyor. İlk 1000 hamlede hiç bir şey yapmıyor. Her $n > 1000$ için n. hamlede n. ve $(200 - n)$. harfler aynı ise, hiçbir şey yapmıyor. Bu harfler birbirinden farklı ise, bunlardan biri 1000. harften farklıdır. İkinci kişi bu harfle 1000. harfin yerlerini değişiyor.

Y.244. Pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı olan $f(n)$ fonksiyonu

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ çift ise} \\ 2n+1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(2001)$ 'i bulunuz.

Çözüm. $f(f(n))$'in anlamlı olması için $f(n)$ pozitif tam sayı olmalıdır. Koşulu $n = 1$ ve $n = 2$ için yazalım.

$$f(f(1)) + f(1) = 3$$

$$f(f(2)) + f(2) = 3$$

Buradan $f(1) = 1$ veya $f(1) = 2$ olabilir. Birinci durumda birinci denklemden $f(2) = 1$ elde edilir. Bu değerler eşitliklerini ikisini de sağlar. Şimdi tümevarımla her pozitif tam n için

$$f(2n-1) = 2n$$

$$f(2n) = 2n - 1$$

olduğunu gösterelim. Tüm $n \leq k$ değerleri için bu eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $n = k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Koşuldan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$f(f(2k+1)) + f(2k+1) = 4k+3$$

$$f(f(2k+2)) + f(2k+2) = 4k+3$$

$$f(2k+1) \leq 2k+1 \text{ olursa,}$$

$$f(f(2k+1)) + f(2k+1) \leq 2(2k+1) < 4k+3$$

elde edilir, dolayısyla $f(2k+1) \geq 2k+2$'dir. $t = f(2k+1) > 2k+2$ olursa, $f(t) + t = 4k+3$ eşitliğinden $f(t) < 2k+1$ elde edilir. Koşuldan

$$f(f(t)) + f(t) \geq 2t - 1 > 2(2k+2) - 1 = 4k+3$$

diğer taraftan da

$$f(f(t)) + f(t) < f(t) + 1 + 2k + 1 <$$

$$2k+1+1+2k+1=4k+3$$

elde edilir. Böylece, f(2001)=2002'dir.

Y.245. İki yaya sabah aynı anda , biri A 'dan B 'ye , diğeri B 'den A 'ya sabit hızla yola çıktı. Öğle saatinde (saat 12 : 00'de) bunlar karşılaştılar ve yollarına devam ettiler 1. yaya akşam saat 4 : 00'da B 'ye , 2. yaya akşam saat 9 : 00'da A 'ya ulaştı. Yayalar sabah saat kaçta yola çıktılar?

Çözüm. Yayalar saat x'de yola çıkmış olsun. A'dan çıkan 1. yayanın hızını u, B'den çıkan 2. yayanın hızını da v ile gösterelim. Karşılaşana kadar 1. yayanın gittiği yol $(12-x)u$, 2. yayanın gittiği yol da $(12-x)v$ olacak. Bundan sonra 1. yaya $(12-x)v$ uzunluğundaki yolu 4 saatte, 2. yaya da $(12-x)u$ uzunluğundaki yolu 9 saatte gitmiştir. O halde aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\frac{(12-x)v}{u}=4$$
$$\frac{(12-x)u}{v}=9$$

Denklemleri taraf-tarafa çarparsak, $(12-x)^2=36$, buradan da $x=6$ elde ederiz. Böylece yayalar sabah saat 6'da yola çıkmışlar.

SİNEMA DÜNYASINDAN...

Drama dalında en iyi film ödülü (Altın Küre), **A BEATIFUL MIND** isimli filme verildi ve Oskar'a aday gösterildi. Sylvia Nasar'ın aynı adlı kitabından uyarlanan filmin konusu, 1994 yılında Oyun Teorisinde kullanılan "Nash Denklemleri" ile Ekonomi Bilimine yaptığı katkılardan dolayı Nobel Ekonomi ödülü alan deha matematikçi John Forbes Nashin dramatik hayatı. Matematikseverlere bu filmi izlemelerini ve ayrıca, Nash'in çalışmaları hakkında bilgi edinmek için de "Notices of AMS, volume 45, Number 10, page 1329" deki yazıyı okumalarını tavsiye ediyoruz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

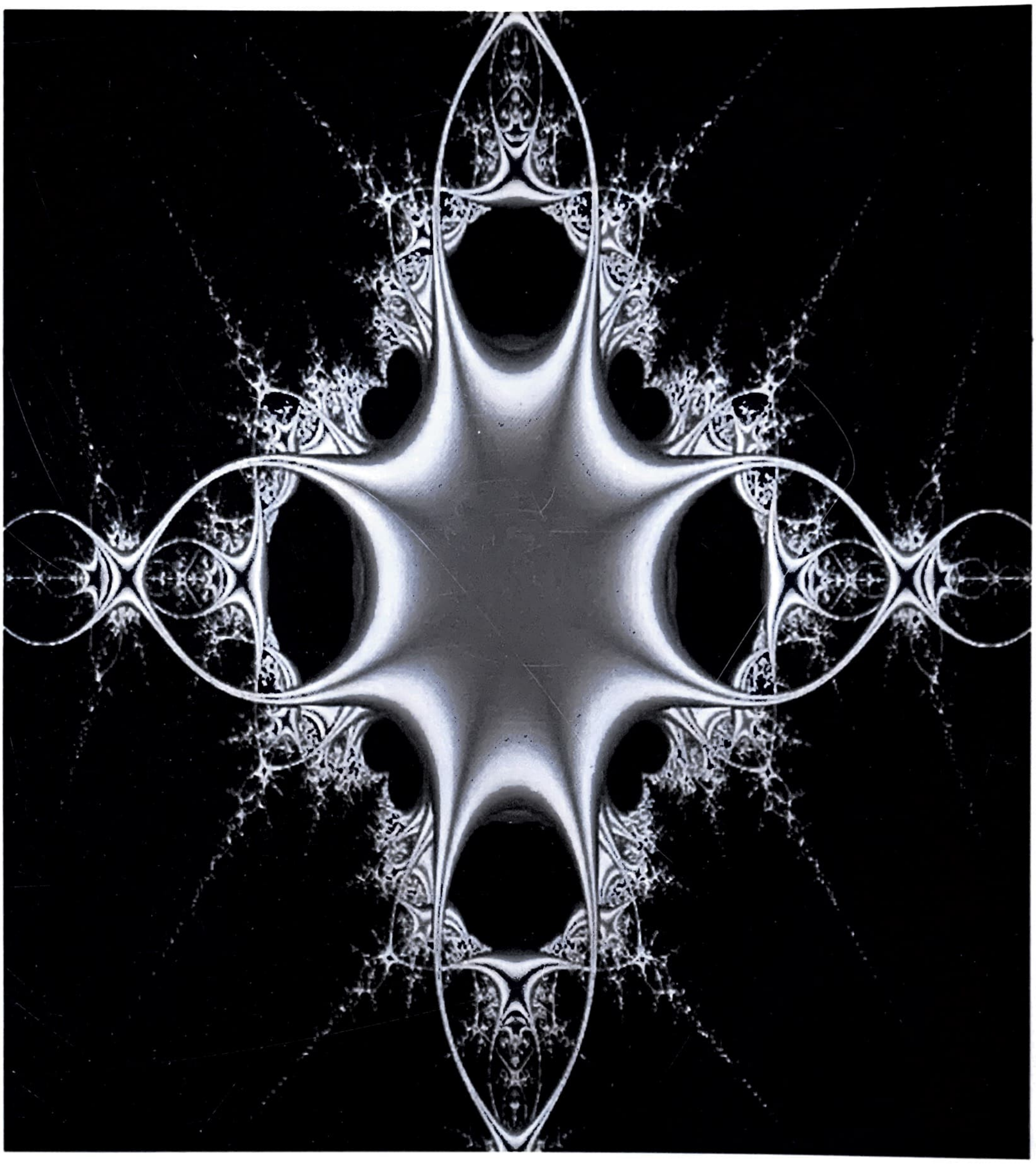
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.



"Evren her an gözlerimize açıktır ;
ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri
öğrenmeden ve kavramadan , o anlaşılamaz.
Evren matematik diliyle yazılmıştır. "

Galilei Galileo