

MAYIS 2002

CİLT 11

SAYI:2

ISSN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematiğin Gizli Örgütü

Tosun Terzioğlu

VII. Antalya Matematik Olimpiyadı

İlhan Aliyev - Doğan Çoker

Yoğun Kümelere İlişkin Bir Not

Nurettin Ergun - Cavit Hafızoğlu

İlginç Limit Problemleri

Simten Uyhan

Olasılık ve Olasılık Öğretimi Üzerine Bir Çalışma

Levent Özbek

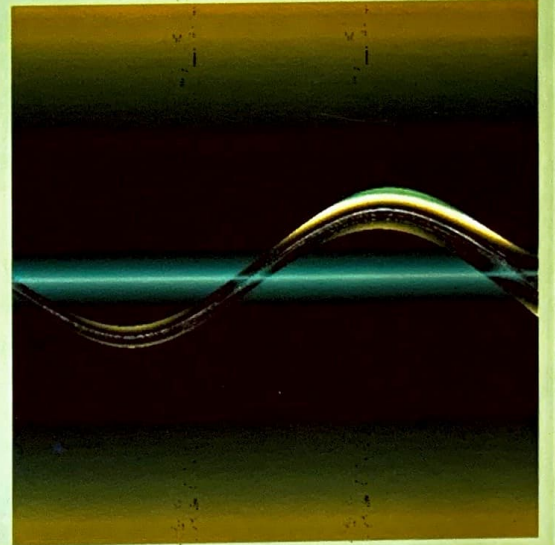
Teorem ve Bazı İspat Metotlarının Yorumu

Can A.İlhan

Futbol ve Pi Sayısı

Ogün Doğru

Problemler / Çözümler



CİLT 10 DİZİNİ

- Bilim ve Ütopya, Cahit Arf ile Söyleşi**, SAYI 5, 2-5.
- M.Cihan Girgintaş-Selim Özgen, Tam-sayıların Bölüntüsü için Cebirsel Özdeşlikler ve Algoritmalar**, SAYI 4, 2-9.
- Emre Alkan, Zayıf Asal Sayı Teoremi ve Bazı Sonuçları**, SAYI 1, 20-25.
- Engin Büyükaşık, Carmichael Sayıları**, SAYI 5, 24-28.
- Gonca Güngör Ayık, Otomoto ile tanışalım**, SAYI 4, 10-12.
- Görece Belediyesi, 1.Görece Uluslararası Matematik Yarışması**, SAYI 4, 13-15.
- İlham Aliyev-Doğan Çoker, VI. Antalya Matematik Olimpiyadı-2001**
2. Seçme Sınavı, SAYI 2, 8-13
- İlham Aliyev-Doğan Çoker, VI. Antalya Matematik Olimpiyadı-2001**,
SAYI 2, 2-7
- İsmail Aslan, Öklid Algoritmasının Bir Uygulaması**, SAYI 1, 26-27.
- İsmail Aslan, Sürekli Kesirler**, SAYI 2, 23-26.
- İsmail Aslan, Descartes İşaret Kuralı**, SAYI 3, 23-27.
- Lüdmila Kadets Moskova Matematik Bayramı**, SAYI 1, 28-28.
- Metehan Aydın, Polinomların Asal Bölenleri**, SAYI 3, 2-5.
- Nurettin Ergun, Bir Genişleme Teoremi (I)**, SAYI 1, 10-17.
- Nurettin Ergun, Bir Genişleme Teoremi (II)**, SAYI 2, 17-19.
- Nurhayat İspir, Bikompleks Sayılarla Tanışmak İstermisiniz?**, SAYI 3, 6-9.
- Ogün Doğru, Galileo Galilei'nin İlginç Bir Dizisi**, SAYI 1, 18-19.
- Ogün Öge, Eisenstein Kriterinin Bir Uygulaması**, SAYI 3, 10-14.
- Oktay Pashaev-Engin Büyükaşık, Karmaşık Sayılar ve İki Tamkare Teoremi**,
SAYI 1, 5-9.
- Oktay Pashaev-Engin Büyükaşık, Kuaterniyonlar ve Dört Tamkare Teoremi**,
SAYI 2, 14-13.
- Oktay Pashaev-Fatih Erman, Sekiz Tamkare Teoremi ve Cayley Sayıları**, SAYI 5, 17-20.
- Svetlana Gadestka-Halide Sadıgova, Dokuz Nokta Çemberi**, SAYI 2, 20-22.
- Şafak Alpay, Sürekli ve Türelenen Fonksiyonlar Üzerine**, SAYI 5, 21-23.
- Timur Karaçay, Mikrobilgisayarda Aritmetik I**, SAYI 3, 15-22.
- Timur Karaçay, Mikrobilgisayarda Aritmetik II**, SAYI 4, 16-20.
- Timur Karaçay, Matematik ve Sanat**, SAYI 5, 10-16.
- Tina Beşeri-S.Eylem Erdoğan, Matematik Etkinlikleri 2001'e Dair**,
SAYI 2, 28-28.
- Tosun Terzioğlu, Bir Matematik Hikayesi**, SAYI 5, 6-9.
- Ünal Ufuktepe, Limitin Öyküsü**, SAYI 4, 21-27.
- Yahya Gökmen Boyar, Öklid Düzleminde Geçen Bir Yaşam: FİKRİ GÖKDAL**,
SAYI 1, 2-4.
- Refail Alizade, Problemler ve Çözümleri**, SAYI 1, 29-32.
- Refail Alizade, Problemler ve Çözümleri**, SAYI 2, 29-32.
- Refail Alizade, Problemler ve Çözümleri**, SAYI 3, 28-31.
- Refail Alizade, Problemler ve Çözümleri**, SAYI 4, 28-31.
- Refail Alizade, Problemler ve Çözümleri**, SAYI 5, 29-32.
-

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Dergimizin zamanında basılıp abonelerimize ulaşamamasından dolayı özür diliyoruz. Yayın kurulu-
luna kısıtlı sayıda makale geliyor olması bu aksaklığın
temel nedeni.

11. Cilt'in ikinci sayısı her türden matematik se-
vere hitap eden oldukça zengin bir sayı oldu. To-
sun Terzioğlu matematik hikâyelerini zevkle bu sayıda
da sürdürüyor. Özellikle liseli okurlarımız dileriz
VII. Antalya Matematik Olimpiyadı 1. Aşama
Sınav Sorularının Çözümlerinden ve "Teorem ve Bazı
İspat Metodlarının Yorumu" adlı makaleden hoşnut
kalırlar. "Yoğun Kümelere İlişkin Bir Not" ve
"İlginç Limit Problemleri" ise ayrı bir keyifle oku-
nacak yazılar. Bu sayımızda Levent Özbek "Olasılık
ve Olasılık Öğretimi Üzerine Bir Çalışma" adlı
makalesiyle Matematik Dünyasında farklı bir esinti
uyandırıyor. Problemler ve Çözümleri bölümümüze
bir cilt boyunca en fazla doğru yanıtı gönderen
okurlarımıza süpriz hediyelerimiz olacak.

Yaz bitmeden tekrar sizlerle yazalım. Bizi İstanbul Türk
Matematik Derneğinden, Ankara Dost'dan, İzmir Ka-
bile ve İletişim'den sormayı unutmayın.

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Matematiğin Gizli Örgütü Tosun Terzioğlu	2
VII. Antalya Matematik Olimpiyadı I. Aşama Sınavı Çözümleri İlham Aliyev- Doğan Çoker	6
Yoğun Kümelere İlişkin Bir Not Nurettin Ergun- Cavit Hafızoğlu	12
İlginç Limit Problemleri Simten Uyhan	15
Olasılık ve Olasılık Öğretimi Üzerine Bir Çalışma Levent Özbek	19
Teorem ve Bazı İspat Metodlarının Yorumu Can A. İlhan	24
Futbol ve Pi Sayısı Oğün Doğru	28
Problemler ve Çözümleri Rafail Alizade	29

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : Doğan Çoker, Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık

DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki
ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş.
K.I. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2002) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 12.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına)
10.000.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511
no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası
Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.) Parakende satış fiyatı
3.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-
Urla 35435-İZMİR

Tel : 0 (232) 4987525 ve 4987541; Faks : 0.232.498.75.09 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

MATEMATİKÇİLERİN GİZLİ ÖRGÜTÜ

Tosun Terzioğlu

Sabancı Üniversitesi, İSTANBUL

Bazı ansiklopedilere bakarsanız, Nicolas Bourbaki'nin doğum tarihi, 1939 olarak verilir. Oysa gerçekte Bourbaki'nin doğumu 1935 yılına denk gelir. Nicolas Bourbaki, 20. yüzyılın belki de en çok matematik kitabı yazan yazarlarından birisidir. Üstelik de kitaplarına baktığınız zaman, bunlar matematik tarihinden analize, cebirsel topolojiden cebire bir çok matematik alanını içerir; ayrıca da bu kitaplar, bu teorilerin özgün birer sunuşudur.

Peki, nasıl oluyor da böyle tanımadığımız bir kişi matematiğin hemen her alanında temel birtakım yapıtlar yaratabiliyor?

Evet, kimdi Nicolas Bourbaki?

Esasında sorumuz yanlış, çünkü Nicolas Bourbaki diye bir kimse yok!

1930'ların başında bir grup genç Fransız matematikcisi Paris'te biraraya gelir; her biri o sırada Ecole Normale Supérieure'nin birer öğrencisidir. Bu genç grup, matematiğe yeni bir temel vermek gerektiğine ateşli bir şekilde inanmaktadır. Bu amaçla da zaman zaman biraraya gelirler, tartışır ve birtakım projeler üzerinde konuşup dururlar. Hangisinin aklına gelir bilinmez, ama sonuçta grup olarak kitap yazmaya karar verirler ve bir yazar ismi olarak da "Nicolas Bourbaki"yi seçerler. Dolayısıyla da Nicolas Bourbaki bir kişi değil, sadece bir takma isim. Bir gizli örgütün takma ismi diyebilirsiniz, isterseniz.

Evet, "gizli örgüt" diyoruz, çünkü bu örgütün kurucuları olduğu söylenen kişiler, her biri, kendi isimleriyle bilinen çok meşhur matematikçiler: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Andr Weil, Charles Ehresmann gibi.

Bu kurucular bile hiçbir zaman kendilerinin Bourbaki grubunun kurucusu olduğunu kabul etmediler; hikâyeleri ne doğruladılar, ne yalanladılar. Ama pek çok matematikçi Cartan'ın, Chevalley'in, Andr Weil'in ve daha sonra Laurent Schwartz'ın bu gruba dahil olduğunu, yani Bourbaki'cilerden olduğunu bilir.

Evet, Bourbaki böyle başladı; ilk kitap da 1939 yılında basıldı, dağıtıldı. Dolayısıyla Nicolas Bourbaki örgütü, doğum tarihini 1939 olarak etrafa duyurdu.

İş kimbilir, belki de bir öğrenci şakası gibi başlamıştı ama, sonunda bayağı ciddiye alınma aşamasına geldi. Gerçekten de 1930'larda başlayan bu olay, giderek 20. yüzyıla damgasını vuran bir matematik akımının ismi de oldu: "Bourbaki'ciler", "Bourbaki türü yaklaşım", "Bourbakizasyon" gibi terimler matematikçiler arasında giderek kullanılmaya başlandı.

Bourbaki kitapları, -sayıları kırka yaklaşıyor; dediğim gibi, her konuda kitapları var, matematik tarihi dahil- oldukça kuru bir dille yazılmış, hiçbir şeyi açıkta bırakmayan, bilinenden farklı yaklaşımlarla bir teoriyi kuran kitaplardır; o teori ister harmonik analiz, ister diferansiyel geometri, ister cebirsel sayılar teorisi, ister analiz olsun.

Gerçekten de bu kitaplar, sanki birer ders kitabıdır - ama çok zor birer ders kitabı. Yani bir matematik öğrencisine bu kitabı verip, "al sana bir lineer cebir kitabı, bunu oku, lineer cebir öğren" diyemezsiniz - ama havası, bir ders kitabı gibidir. Hatta her bölümün arkasında alıştırma da vardır. O alıştırma biraz bakarsanız, onların esasında başka matematikçilerin makalelerinde ispat ettikleri teoremler olduğunu görürsünüz. O teorem, orada bir alıştırma haline getirilmiş, gayet masumane, sanki o bölümde öğretilen konunun sıradan bir alıştırmasıymış gibi öğrenciye sunulmaktadır ve oldukça da zor alıştırmalardır.

Peki bu kitapların her birini kim yazdı? "Bourbakici" olduğunu bildiğimiz Henri Cartan mı, Chevalley mi, Andr Weil mi, Laurent Schwartz mı, daha sonra gruba katılan Dieudonné mi, bilemeyiz. Esasında

bir kitabı bunlardan hiçbirini tek başına yazmadı.

Bourbaki grubunun çalışmaları gizli tutulmasına rağmen, anladığımız kadarıyla, çalışma biçimleri şöyleydi:

Yılda 2-3 defa grup, Fransa'da genelde üçra bir tatil yöresinde biraraya geliyordu. Burada bir projeyi uzun boylu tartışıyorlar ve sonuçta bu projenin ilk taslağını yazma ve projeyi bir kitap halinde dönüştürme görevini, gruptan birisine veriyorlardı. Görevlendirilen kişi, ilk taslağı yazdıktan sonra o taslağı diğer üyelere dağıtıyordu ve bir dahaki toplantıda aralarında tekrar bir tartışma oluyordu. Bazı kitapların 7 kez yazıldıktan, yani 7 taslaktan sonra ortaya çıktığını biliyoruz. Öyle ki bu grup içerisindeki tartışmalardan sonra, normalde her biri kendi ismiyle matematik araştırması neşreden Bourbaki üyelerinin stili, ortaklaşa Bourbaki kitabı yazdıkları zaman farklı olmaya başladı.

Arada bir de küçük şakalar yapmaktan kaçınmıyorlardı. Mesela şunu biliyoruz:

Jean Dieudonn, 1930'larda "Bourbaki" ismini kullanarak küçük bir araştırma notu yazdı ve neşretti. Daha sonra, yine Jean Dieudonn bu kez kendi ismini kullanarak o makededeki bir yanlış düzelten, "Mösyö Bourbaki'nin Bir Hatası Üzerine" başlıklı bir makale yazdı. Böylelikle sanki kendi hatasını değil de, takma ismini kullandığı Bourbaki'nin hatasını düzeltiyordu!

Bourbaki'ciler, Bourbaki kitaplarından oldukça iyi telif ücreti aldılar; bu gelirin de hepsini Bourbaki toplantılarını yapmakta, yani ortak amaçları için kullandılar. Dolayısıyla bir anlamda Bourbaki, bir kurumsal isim de olmaya başladı.

Peki, diyebilirsiniz ki, "neden Bourbaki ismi?" Bir de şunu söyleyeyim, Bourbaki'nin ilk makalesi, "Nicolas Bourbaki" ismiyle çıktı, adres olarak da, "Poldavya Kraliyet Akademisi Üyesi, şu anda Nancy'de yaşamakta" denmekteydi. Tabii ki Poldavya diye bir ülke yok, hiçbir zaman da olmadı; Poldavya Krallığı da yok, yani "Poldavya Akademisi" veya "Poldavya Kraliyet Akademisi" de uyduruk birer isim.

Neden Nancy? Nancy şehri, Fransa'da. Evet, Bourbaki kurucu üyeleri olan Bourbaki'cilerin bir çoğu, liseyi Nancy'de okumuşlardı. Bu arada Nancy'nin bir meydanında bir generalin heykeli vardır. Bu generalin ismini belki birçok Fransız bile bilmez: O generalin ismi "Bourbaki" idi.

Evet; General Bourbaki, Yunan asıllı, 19. yüzyılda yaşamış bir Fransız askeri. Denir ki kendisine Yunan tahtı bile sunulmuş, ancak kendisi kabul etmemiş. İlginç bir generalmiş ki, Fransız-Prusya Harbi sırasında ordusunun bir kısmıyla İsviçre'ye sığınmış, yani savaş alanını terketmiş. İsviçre'de intihar etmeye çalışmış, ancak herhalde başarılı olmamış ki epeyce uzun yaşadığını biliyoruz.

Evet, General Bourbaki hakkında bildiğimiz, üç aşağı, beş yukarı, bundan ibaret.

Kim bilir, demek ki belki de o zaman daha henüz delikanlılık yıllarındaki bu genç Fransız matematikçileri, isim ararken, Nancy'de okudukları sırada pek anlam veremedikleri bu heykele ve bu heykelin anısına dikildiği General'in ismini seçmeyi uygun gördüler.

Kim bilir, belki de başka düşünceleri vardı. Ama kendileri, yarattıkları bu isimle gerçekte General Bourbaki'nin çok ötesine geçtiler -matematik tarihinde tabii ki.

Bourbaki, kitaptan başka, ayrıca küçük araştırma notları, kitap eleştirileri de yazdı. Elbette bunlar hep, "Bourbaki" takma adı altında yazılıyordu.

Evet, Bourbaki ilk yıllarında, "Poldavya Kraliyet Akademisi Eski Üyesi" sıfatını kendine layık görmüştü. Ama sonraları Nicolas Bourbaki, giderek kendi adresi olarak "Nancago Üniversitesi"ni kullanmaya başladı. Tabii, ne "Nancago" diye bir şehir var, ne de Nancago Üniversitesi diye bir üniversite. Anlaşılan, burada "Nancy" ile "Chicago"nun esin kaynağı olduğu bir takma isim yine söz konusu: "Nancy" ve "Chicago" adlarından, "Nancago" adı türetilmiş. Neden Chicago? Çünkü Bourbaki'nin kurucu üyelerinden Andr Weil, İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra artık Chicago'da çalışmaya başlamıştı.

Bourbaki kitaplarının bir başka özelliği daha vardır: Zaman zaman bir matematik metninde, bir ispatta, böyle, okuyucuya masum görünen, ama iyi anlaşılamazsa ileride belâlara yol açabilecek satırlar bulunur. İşte, öyle yerlere gelindiğinde, dikkat çekmek için Bourbaki kitaplarının marjinde, yani

tekstin hemen dışında, "tehlikeli viraj" işaretinin aynısı olan bir işaret kullanılır. Bourbaki'nin bu buluşu, başka yazarlar tarafından da sonraları başka kitaplarda kullanılmaya başlandı.

Bourbaki'nin kitaplarının -kuru stillerinin yanı sıra- konulara temelden başlaması, ele alınan teoremin bütünü sonuna kadar geliştirmesi, sistematik olması, çok özen gösterilen şeylerdir. Bourbaki'cilerin sayısının 10 il 20 arasında olduğunu biliyoruz. Yani küçük bir gizli örgüt.

Hemen hepsi de Fransızdı. "Hemen hepsi" diyorum, çünkü içlerinden bir tanesi, Samuel Eilenberg, esasında Polonya asıllı bir Amerikalı. Ancak Eilenberg'in de sonradan girdiği bu derneğe, çok iyi Fransızca bilmesi ve Fransız kültürüne çok aşina olması nedeniyle kabul edildiği biliniyor. Tabii, ayrıca çok da tanınmış bir matematikçi.

Bourbaki'cilerin aralarına sadece Fransız almalarının basit, pratik bir nedeni var: Bourbaki'cilerin kapalı toplantılarında, yani gizli örgüt biraraya geldiği zaman, nerede olursa olsun, son derecede hızlı, Paris öğrenci argosu kokan bir Fransızca kullanılıyor. Yani bir yabancı çok iyi Fransızca da bilse, bunu kolayca takip edemeyecek, bu konuşmalara katkıda bulunamayacak. İşte, bu korkuyla Eilenberg'in dışında Fransız olmayan hiç kimseyi Bourbaki'ciler kendi aralarına katmamışlar.

Bir de Bourbaki hep genç kalmak istiyor. Dolayısıyla denir ki, 50 yaşına gelen bir Bourbaki üyesi, artık Bourbaki üyesi değildir. Yani 50, maksimum yaştır, Bourbaki üyesi olmak için, dolayısıyla Bourbakiler daima bir anlamda gençliği, yeniliği temsil ederler. Bunu yapmak için de zorunlu olarak gerçekten de bir 50 yaş sınırını kendi kendilerine kabul etmişler ve uygulamışlar.

Bourbaki'ciler, şakadan hoşlanan insanlar, anlaşılır. Çünkü 1950'lerde, dünyanın en büyük matematik derneği olan Amerikan Matematik Derneği, Prof. Nicolas Bourbaki'nin üyelik isteğini taşıyan bir mektup alır. Nicolas Bourbaki, kendisinin yazdığı matematik kitaplarını art arda sıraladıktan sonra, kendisinin Nancago Üniversitesi'nde çalıştığını ve Amerikan Matematik Derneği'ne üye olmak istediğini belirtiyor, üstelik üyelik aidatını da hemen ödüyor.

Tabii, ilk başta bu başvuruyu alanlar, belki de yeni bir üye kazanmanın hoş tarafını düşünerek durumu önceleri pek farketmiyorlar; ama tabii, bir de, dernekte çalışan matematikçiler var - bunlar, Nicolas Bourbaki'nin bir takma isimden ibaret olduğunu biliyorlar.

Amerikan Matematik Derneği, Bourbaki'nin üyelik başvurusunu reddediyor. Bunun üzerine Nicolas Bourbaki imzasıyla birçok matematik dergisinde, Amerikan Matematik Derneği'nin kendisini üyeliğe kabul etmediğine dair şikayet mektupları çıkmaya başlıyor!

Bunun üzerine ne yapsınlar? Amerikan Matematik Derneği'nin yayın organlarından bir tanesinin editörü -ve aynı zamanda tanınmış bir matematikçi- olan Ralph Boas da, tutup gene bir matematik dergisinde, biraz Bourbaki hikayesini anlatıyor ve Bourbaki'nin, bir matematikçinin değil, bir grup matematikçinin ismi olduğunu, bunun bir takma isim olduğunu belirtiyor. Diyor ki, "Bourbaki bir kişi olarak yoktur, bir takma isimdir, biz ise Amerikan Matematik Derneği'ne ancak kişileri üye yapıyoruz, dolayısıyla Bourbaki isimli bir üye kaydedemeyiz."

Bourbaki bu cevabı aldıktan sonra, tabii boş durmuyor: Bu kez de bir Fransız dergisinde şöyle bir makale çıkıyor: "Ralph Boas isimli bir matematikçi aslında yoktur, bunlar bir grup genç Amerikalı matematikçinin kullandığı takma isimdir, anonim bir isimdir, Boas'ın yaptığı bütün matematik, esasında bu yirmi kişilik grup tarafından yapılmıştır." Evet, bunu ciddi ciddi yazıyorlar!

Ve buna inananlar bile çıkıyor! Unutmayın ki 1950'lerde, iletişim bugünkü gibi hızlı değil. Boas'ın, olayı düzeltmek için yaptığı açıklamanın karşılığında, Bourbaki bir bakıma ondan intikamını almış oluyor.

Bourbaki'ciler gerçekten ilginç insanlar olmuş olmalı. Dediğim gibi, her biri kendi alanında zaten araştırmalarıyla meşhur birer matematikçi; her biri de Bourbaki kitaplarına, Bourbaki araştırma notlarına, Bourbaki kitap eleştirilerine katkıda bulunmuş kişiler.

Bunlardan Dieudonn, gerçekten öbürlerinden biraz daha da farklı. Dieudonn, Türkçe'ye tercüme edersek, "Allah verdi" veya "Hüda verdi" anlamına geliyor, çünkü Jean Dieudonn, 1906'da, bir kilisenin avlusunda bulunmuş bir bebek ve o bebek tabii bizim Türkiye'deki Darüşşafaka gibi birtakım

kurumlar tarafından yetiştirilmiş, sonuçta çok meşhur bir matematikçi olmuş. Ama Jean Dieudonn, dinlemesi gerçekten çok zevkli Fransızcasıyla ve çok zevkli ders anlatımıyla, dünyanın her tarafına çağırılan bir kişiydi.

Kendisi 1998'de 92 yaşında öldü. Jean Dieudonn, Bourbaki kitaplarının çoğunu en son kaleme alan kişisi olarak bilinir. Ama bir kitabı vardır ki, analize dair, hiçbir zaman Bourbakiciler tarafından kabul edilmemiştir ve o kitap, Bourbaki adı altında yazılmamıştır. Onun üzerine Jean Dieudonn, "Analizin Temelleri" ismini taşıyan birkaç ciltlik analiz kitabında, kendi, Jean Dieudonn ismi altında neşretmiştir. Keza, Claude Chevalley, Henri Cartan, Andr Weil, daha sonra Laurent Schwartz, ve daha sonra Grothendieck gibi matematikçilerin, her biri kendi isimleriyle meşhurdur. Ama Bourbaki belki bir ekolün, bir kurumun adı olarak kendi üyesi olan bütün matematikçilerin toplamından daha da meşhur, daha da fazla katkıda bulunan bir isim -kişi değil- 20. Yüzyıl matematiğine... İşte 1930'ların başında bir grup genç, afacan, Paris'li matematikçinin -kimbilir nerede? bir kafede mi? bir şarap kadehinin başında mı?- akıllarına gelen fikir, büyüdü, büyüdü ve sonuçta birçok matematikçinin "Bourbaki ekolü" diye adlandırdıkları bir olay, bir matematik hikâyesi ortaya çıktı.

...MATEMATİK SEVERLER İÇİN KİTAPLAR...

Matematik Yalan Söylemez, VAHŞİ SAYILAR, Çeviri: Gökçen Ezber, Güncel Yayıncılık, 2001

Kuşaklar boyu matematikçilerin kafasını meşgul eden Vahşi Sayılar Problemi çözülebilecek mi? Genç matematikçi Isaac, ölümsüz matematikçiler arasına girmeyi başaracak mı? Vahşi Sayılar Problemi'nin çözümü bankacılık ve diğer elektronik ortamda kullanılan şifreleri çözebilecek mi gerçekten? Deha ve delilik arasındaki o çok ince çizgide gezinen Vahşi Sayılar, bizi dehaların ve delilerin baş döndürücü dünyasına götürüyor. Matematik ve felsefe öğrenimi gören Philibert Schogt'un kaleminden matematiğin yaratıcı sınırlarını zorlayan bir kitap... Düşünen beyinler için...

MANTIK VE OLASILIK HİKAYELERİ, Çeviri: Murat Sağlam, Güncel Yayıncılık, 2001

Yanlış kararlar yüzünden para ve zaman kaybetmek istemiyorsanız Sherlock Holmes emrinizde... Matematiğin günlük yaşamla kaçınılmaz ilişkisini gözler önüne seren bu kitap, karar verme yöntemlerini tamamen değiştirecek... Sherlock Holmes ve sadık asistanı Watson'un olayları nasıl çözdüğünü okuyanlar, onların zekalarının evrene yayıldıklarını hisedebilecekler. Matematik paradoksları konusunda uzman olan Colin Bruce, mantık, matematik ve olasılık konularındaki gizemleri çözmekten çok hoşlanıyor. Bir fizikçi ve bilim yazarı olan Burce'ın "Einstein Paradoksu" adlı bir kitabı da var. "... Polisiye romanın hazlarını, aydınlatıcı bilimsel metinlerle birleştiren eşsiz bir kitap... Gerçek bir zevk... şiddetle okumanızı öneriyoruz..." -*New York Times Books Review*

VII. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ

İlham Aliyev-Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

1. $\sqrt{2000^{2002}}$ sayısının onluk sayı sisteminde yazılışında sağdan sıfırdan farklı ilk rakam nedir?

- A) 4 **B) 2** C) 8 D) 6 E) 5

Çözüm. $\sqrt{2000^{2002}} = 2000^{1001} = 2^{1001} \cdot 1000^{1001}$, $2^{1001} = 2 \cdot 2^{1000} = 2 \cdot 16^{250}$ ve 16'nın her pozitif tamsayı kuvvetinin son rakamı 6 olduğundan, $2 \cdot 16^{250}$ 'nin son rakamı 2'dir.

2. $a, b, c = a + b + c$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için $a^2 + b^2 + c^2$ toplamı neye eşittir? (Burada a, b ifadesi " a tam onda b " kesrini belirtmektedir.)

- A) 55 B) 70 **C) 65** D) 60 E) 75

Çözüm. Verilen eşitliği

$$10ac + bc = 10(a + b + c) \Rightarrow bc = 10(a + b + c - ac)$$

şeklinde yazalım. Buradan b ve c 'den birinin 5, diğerinin bir çift sayı olduğu görülür. $c = 5$ ise, $b = 8a - 10$ eşitliğinden $b = 6$, $a = 2$ olur. $b = 5$ ise, $c = \frac{2a+10}{2a-1} = 1 + \frac{11}{2a-1}$ eşitliğinden $2a - 1 = 11 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c = 2$ olur. Her iki durumda da $a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 + 2^2 + 6^2 = 65$ olur.

3. İki (farklı veya eşit) asal sayının çarpımı biçiminde gösterilebilen her sayıya "iyi sayı" diyelim. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n + 1, n + 2, \dots, n + k$ sayılarının her biri "iyi sayı" ise, k en fazla kaç olabilir?

- A) 4 **B) 3** C) 2 D) 5 E) Sonsuz

Çözüm. Dört tane ardışık sayının her biri "iyi sayı" olamaz. Çünkü dört ardışık sayıdan biri 4'e bölüneceğinden $4k$ biçimindedir. $k = 1$ için

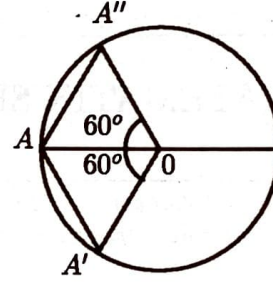
4, 5, 6, 7 dörtlüsünden sadece ikisi "iyidir". $k > 1$ için $4k = 2 \cdot 2 \cdot k$ sayısının en az 3 (eşit veya farklı) asal çarpanı olduğundan, bu sayı "iyi" değildir. Dolayısıyla, ardışık "iyi" sayıların sayısı 3'ten fazla olamaz. 3 tane ardışık iyi sayıya bir örnek gösterelim:

$$33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17, \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

4. Bir çember üzerinde sabit bir A noktası alalım. Çember üzerinde alınan bir B noktası için, AB kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{1}{3}$ **D) $\frac{2}{3}$** E) $\frac{5}{6}$

Çözüm.



Şekilden görüldüğü gibi, B noktası $\widehat{A'AA''}$ yayı üzerinde yürüdüğü zaman AB kirişinin uzunluğu yarıçap uzunluğundan küçük olur. Bu yayın uzunluğu çember uzunluğunun $\frac{1}{3}$ 'üdür. Bundan dolayı, AB kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 'tür.

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(f(y))^2 = \frac{1}{2}[f(x+y^2) - f(x)]$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(1) \neq 0$ olduğuna göre, $f(2002)$ sayısı kaçtır?

- A) 1000 B) 2001 **C) 1001**
D) 2000 E) 2002

Çözüm. $x = y = 0$ koyarsak, $f(0) = 0$ olur. $x = 0, y = 1$ koyarsak, $f(1) = 2f^2(1)$ ve $f(1) \neq 0$ olduğundan, $f(1) = \frac{1}{2}$ olur. Şimdi, $y = 1$ koyarsak, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) \Rightarrow f(x+1) - f(x) =$

$\frac{1}{2}$ elde ederiz.

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= \frac{1}{2} \\ f(3) - f(2) &= \frac{1}{2} \\ \dots \\ f(2002) - f(2001) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$f(2002) = 1001$$

olur.

6. $4^{2002} + 6^{2002}$ sayısının 25 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?

A) 4 B) 18 C) 12 D) 24 **E) 2**

Çözüm.

1.Çözüm: ϕ Euler fonksiyonu olmak üzere, $\phi(25) = 20$ 'dir. O halde, Euler Teoremine göre,

$$4^{20} = 4^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25},$$

$$6^{20} = 6^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25}$$

ve buradan da,

$$4^{2002} = 4^2 \cdot 4^{2000} = 16 \cdot 4^{20 \cdot 100} \equiv 16 \pmod{25},$$

$$6^{2002} = 4^2 \cdot 4^{20 \cdot 100} \equiv 36 \pmod{25} \equiv 11 \pmod{25}.$$

Bu ikisinden $4^{2002} + 6^{2002} \equiv 16 + 11 \pmod{25} \equiv 2 \pmod{25}$ elde edilir.

2.Çözüm: $4^{2002} + 6^{2002} = (5-1)^{2002} + (5+1)^{2002} = \dots$ (Binom Formülünü kullanıyoruz) $\dots = 25 \cdot A - \binom{2002}{2001} \cdot 5 \cdot 1 + 1 = 25 \cdot B + \binom{2002}{2001} \cdot 5 \cdot 1 + 1 = 25 \cdot (A+B) + 2$. Sonuncu toplam 25 ile bölününce kalan 2 'dir.

7. 50 sayfalı bir kitabın sayfaları 1, 2, 3, ..., 99, 100 sayıları ile numaralandırılmıştır. Bu kitaptan bir kaç yaprak koparılıp atıldıktan sonra, geriye kalan sayfaların numaralar toplamı 4946 olmuştur. Bu durumda, en fazla kaç yaprak koparılmıştır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 7 E) 6

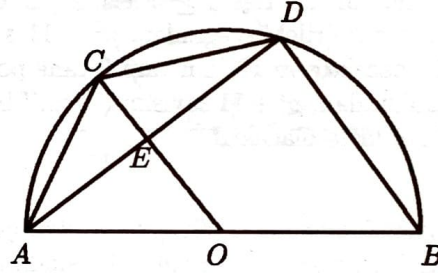
Çözüm. Koparılmış sayfaların numaralar toplamı $5050 - 4946 = 104$ 'tür. n numaralı yaprağın sayfa numaralarının toplamı $(2n-1) + 2n = 4n-1$ 'dir. Bundan dolayı, k tane yaprak

koparılmışsa, onların sayfa numaraları toplamı, $(4n_1-1) + (4n_2-1) + \dots + (4n_k-1) = 4(n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k$ olur. $4 \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = 104$ eşitliğinden, k 'nın 4 'e bölündüğünü söyleyebiliriz. Yani, $k = 4, 8, \dots$ olabilir. $k \geq 8$ olamaz, çünkü $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) - 8 = 4 \cdot 36 - 8 = 136 > 104$ 'tür. $k = 4$ durumuna bir örnek verelim: 1., 2., 3. ve 21. yaprak koparılmışsa, sayfa numaraları toplamı $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 41 + 42 = 104$ olur.

8. $[AB]$ doğru parçası çap olmak üzere, bir yarım çember çizilmiş ve bu yarım çember üzerinde C ve D noktaları $|AC| = |CD| = 2$ olacak biçimde alınmıştır. $|AB| = 5$ olduğuna göre, BD kirişinin uzunluğu kaçtır?

A) 3,3 B) 3,2 C) 3,1 **D) 3,4** E) 3,5

Çözüm.



$\angle ADB = 90^\circ$ olduğundan, Pisagor Teoreminden $|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = 25 - |AD|^2$ 'dir. $|AD|$ uzunluğunu bulalım. Çemberin merkezine O ve CO ile AD 'nin kesişim noktasına E diyelim. $CE \perp AD$ olduğu açıktır. $\angle CDE$ ve $\angle CBA$ aynı $\widehat{AC}$ yayını gören açılar olarak eşitler. Buna göre de $\triangle DCE$ ve $\triangle CAB$ dik üçgenleri benzer üçgenlerdir.

Buradan, $\frac{|DE|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow$

$$|DE| = |DC| \cdot \frac{|BC|}{|BA|} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5^2 - 2^2}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5} \Rightarrow$$

$$|AD| = 2|DE| = \frac{4}{5}\sqrt{21}$$

Sonuçta, $|BD| = \sqrt{25 - |AD|^2} = \frac{17}{5} = 3,4$ çıkar.

9. Aşağıdaki denklemin gerçel sayılarda çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

$$\left\| \frac{6x+5}{8} \right\| = \frac{15x-7}{5}$$

(Burada, $\| \cdot \|$, tamdeğer fonksiyonudur.)

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm. $\frac{15x-7}{5} = n$, ($n \in \mathbb{Z}$) diyelim. Buradan $x = \frac{5n+7}{15}$ bulunur ve denklemde yerine konulursa, $\left\lfloor \frac{10n+39}{40} \right\rfloor = n$ olur. Tamdeğer fonksiyonunun tanımından, $0 \leq \frac{10n+39}{40} - n < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{40} < n \leq 1,3 \Rightarrow n = 0$ veya $n = 1$. $n = 0$ için $x_1 = \frac{7}{15}$ ve $n = 1$ için $x_2 = \frac{4}{5}$ çözümleri elde edilir.

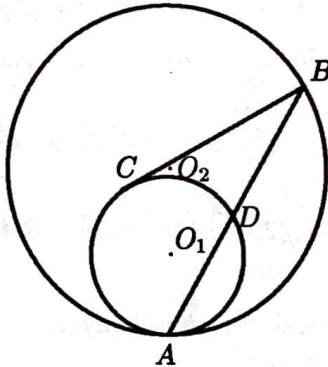
10. Kaç tane p asal sayısı için $p^2 + 11$ sayısının tam 6 tane farklı pozitif böleni vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 12 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm. $p = 2$ için $p^2 + 11 = 15$ sayısının 4 pozitif böleni vardır. $p = 3$ için $p^2 + 11 = 20$ sayısının 6 pozitif böleni vardır. Her $p \geq 5$ asal sayısı $6k \mp 1$ biçiminde gösterilebileceğinden, $p^2 + 11$ sayısı 12'ye bölünecektir ve 12'nin tam 6 tane pozitif böleni olduğundan, $p^2 + 11$ sayısının pozitif bölen sayısı 6'dan fazla olacaktır.

11. Yarıçapı 5 birim olan bir çember, yarıçapı 9 birim olan bir başka çembere A noktasında içten teğettir. Büyük çember üzerinde, $|AB| = 12$ birim olacak şekilde seçilen bir B noktasından küçük çembere çizilen teğet parçasının uzunluğu nedir?

- A) 11 B) 8 C) 9 D) 10 E) 7
Çözüm.



AB 'nin küçük çemberle kesişim noktasına D diyelim. Küçük çemberin merkezine O_1 ve büyüğüne de O_2 dersek, $\triangle AO_1D$ ve $\triangle AO_2B$

üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{5}{9} \Rightarrow |AD| = \frac{5}{9} \cdot |AB| = \frac{5}{9} \cdot 12 = \frac{20}{3}$. Buradan, $|BD| = |AB| - |AD| = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$. Şimdi, $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |BA|} = \sqrt{12 \cdot \frac{16}{3}} = \sqrt{12 \cdot \frac{16}{3}} = 8$ olur.

12. 0, 1, 2, ..., 9999 sayıları içinde 7 ve 8 rakamlarının ikisinin de kullanıldığı kaç tane sayı vardır?

- A) 982 B) 964 C) 972
D) 974 E) 962

Çözüm. $A = \{\text{yazılımlarında 7 kullanılan sayılar}\}$, $B = \{\text{yazılımlarında 8 kullanılan sayılar}\}$ kümelerini tanımlayalım. Biz $s(A \cap B)$ sayısını bulmak istiyoruz.

$$s(A \cap B) = s(A) + s(B) - s(A \cup B) \quad (1)$$

formülünden yararlanacağız.

Sayıların hepsini, gerektiğinde önüne sıfırlar koymakla, dört basamaklı düşünelim. Örneğin, $0 = 0000$, $1 = 0001$, $219 = 0219$ vs. O halde,

$$s(A) = s(B) = 10^4 - 9^4 \quad (2)$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Öte yandan, C' ile C kümesinin tümleyenini gösterirsek,

$$s(A \cup B) = 10^4 - s((A \cup B)') = 10^4 - 8^4 \quad (3)$$

olur. (2) ve (3)'ü (1)'de koyarsak, $s(A \cap B) = 10^4 - 2 \cdot 9^4 + 8^4 = 974$ elde ederiz.

13. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ olmak üzere,

$$\frac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

- A) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Çözüm. Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^4 + z^4 \\ &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^4 \cdot y^8 \cdot z^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{2}}xy^2z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

çıkar. Eşitlik durumu,

$$x^4 = \frac{1}{2}y^4 = z^4 \Rightarrow y = t > 0, x = z = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}t$$

için elde edilir.

14. $\triangle ABC$ üçgeninin AC kenarı üzerinde bir M noktası ve BC kenarı üzerinde bir N noktası alınmıştır. $[AN]$ ve $[BM]$ doğru parçalarının kesişim noktası O olsun.

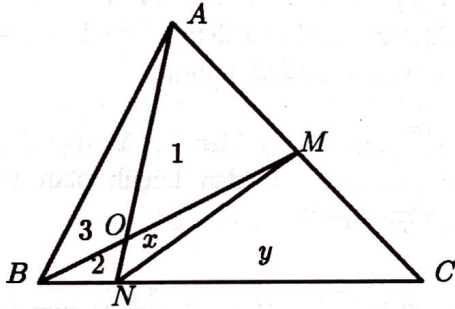
$$\text{Alan}(\triangle OMA) = 1, \text{Alan}(\triangle OBN) = 2 \text{ ve}$$

$$\text{Alan}(\triangle OAB) = 3$$

olduğuna göre, $\text{Alan}(\triangle MNC)$ nedir?

- A) 2 **B) $\frac{40}{21}$** C) $\frac{20}{11}$ D) 3 E) $\frac{60}{31}$

Çözüm.



Şekilde, $\text{Alan}(\triangle ONM) = x$ ve $\text{Alan}(\triangle MNC) = y$ diyelim. $3x = 1 \cdot 2$ eşitliğinden $x = \frac{2}{3}$ bulunur. Biz y 'yi bulmak istiyoruz.

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\text{Alan}(\triangle ABM)}{\text{Alan}(\triangle MBC)} = \frac{3+1}{2+x+y} = \frac{4}{2+\frac{2}{3}+y},$$

ve

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\text{Alan}(\triangle ANM)}{\text{Alan}(\triangle MNC)} = \frac{1+x}{y} = \frac{1+\frac{2}{3}}{y}.$$

Bu iki eşitlikten

$$\frac{4}{2+\frac{2}{3}+y} = \frac{1+\frac{2}{3}}{y} \Rightarrow y = \frac{40}{21}$$

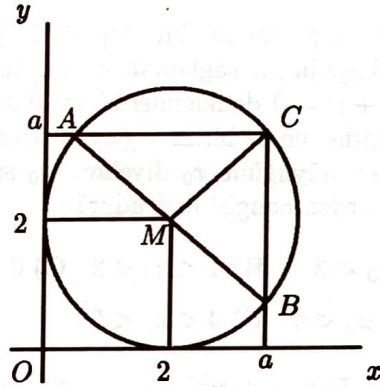
elde edilir.

15. Yarıçapı 2 birim olan bir çember, bir karenin iki komşu kenarına içten teğet olup, karenin sadece bir köşesinden geçmektedir. Buna göre, karenin kenar uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2 + \sqrt{2}$** B) 3 C) $2\sqrt{2}$

- D) $\sqrt{5}$ E) $4 - \sqrt{2}$

Çözüm.



Kareyi, şekildeki gibi, Descartes koordinat sisteminde yerleştirelim. Çemberin merkezine M ve çemberin karenin kenarları ile kesiştiği noktalara da A ve B denirse, M 'nin $[AB]$ üzerinde olduğu açıktır.

Karenin kenar uzunluğuna a diyelim. O halde C 'nin koordinatları (a,a) ve M 'nin koordinatları da $(2,2)$ olduğundan,

$$2 = |CM| = \sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2}(a-2)$$

çıkar. Buradan, $a = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$ bulunur.

16. 1, 2, ..., 999, 1000 sayıları verilsin. Bu sayılardan azalan aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane sayı üçlüsü seçilebilir? (Örneğin, 3, 2, 1 ve 9, 6, 3 birer azalan aritmetik dizidir.)

- A) 245500 B) $\frac{1}{3} \binom{500}{3}$ C) 247500

- D) $\frac{1}{3!} \binom{1000}{3}$ **E) 249500**

Çözüm. Azalan aritmetik dizi sayısı, artan aritmetik dizi sayısına eşit olduğundan, artan ar-

aritmetik dizi sayısını bulalım. a dizinin ilk terimi ve d de dizi farkı olursa, $a \geq 1$, $d \geq 1$ ve $a + 2d \leq 1000$ sağlanmalıdır. Buradan $a \leq 1000 - 2d$, ($d = 1, 2, \dots, 499$) olur. Böylece, artan aritmetik dizi oluşturan üçlüler sayısı

$$\sum_{d=1}^{499} (1000 - 2d) = 499 \cdot 1000 - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 499)$$

$$= 499 \cdot 1000 - 2 \cdot \frac{1+499}{2} \cdot 499$$

$$= 499 \cdot 1000 - 499 \cdot 500 = 249500$$

olur.

17. a, b, c gerçel sayıları $|a| \leq 3$, $|b| \leq 2$, $|c| \leq 1$ koşullarını sağlamak üzere, tüm $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denklemlerini düşünelim. Bu denklemlerden en az birini sağlayan pozitif gerçel sayıların en büyüğüne x_0 diyelim. x_0 sayısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $2 < x_0 < 3$ B) $1 < x_0 < 2$ C) $0 < x_0 < 1$

D) $3 < x_0 < 4$ E) $4 < x_0 < 5$

Çözüm. Reel katsayılı 3 dereceli her polinomun en az bir reel kökü vardır. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ polinomunun en büyük pozitif kökü, problemdeki koşulları sağlayan polinomların reel köklerinin hepsinden büyüktür. Gerçekten, $f(x)$ polinomunun en büyük pozitif köküne x_0 dersek, $\forall x > x_0 > 0$ için,

$$0 = f(x_0) < f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1 \leq x^3 + ax^2 + bx + c$$

olur. Yani, $x^3 + ax^2 + bx + c$ ($|a| \leq 3$, $|b| \leq 2$, $|c| \leq 1$) polinomlarının hiç birisinin x_0 'dan büyük kökü yoktur. Şimdi, x_0 'ın bulunduğu aralığı tahmin edelim. $f(3) < 0$ ve $f(4) > 0$ olduğundan, sürekli fonksiyonlar için Aradeğer Teoreminden, $x_0 \in (3, 4)$ olur. (Her $x > 4$ için $f(x) > 0$ olduğu kolayca görülebilir.)

18. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde AB kenarı üzerinde bir P noktası ve BC kenarı üzerinde bir Q noktası, $\triangle APD$, $\triangle PBQ$ ve $\triangle QCD$ üçgenlerinin alanları eşit olacak biçimde alınmıştır. Buna göre, $\frac{|AP|}{|PB|}$ oranı nedir?

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

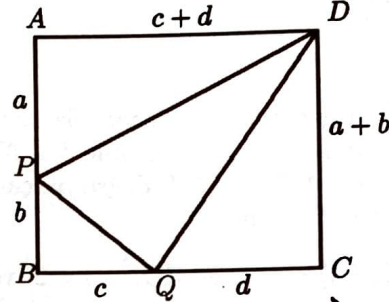
B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Çözüm.



$|AP| = a$, $|PB| = b$, $|BQ| = c$, $|QC| = d$ diyelim. Alanların eşitliğinden, $\frac{1}{2}a(c + d) = \frac{1}{2}d(a + b) = \frac{1}{2}bc$ olur. İlk eşitlikten,

$$ac = db \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

Son iki ifadenin eşitliğinden,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c}{d} \quad (2)$$

çıkar. (1)'i (2)'de yerine koyarsak, $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{a}$ elde ederiz. $\frac{a}{b} = x$ dersek, $x + 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ bulunur.

UYARI: $\frac{|AP|}{|PB|}$ oranının 1'den küçük olacağını görmek zor değildir. 1'den küçük olan tek seçenek ise $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 'dir!!!

19. 1'den 99'a kadar (1 ve 99 dahil) tüm tek sayıları alalım. Bu sayıların hepsinin toplamına A_1 , tüm ikiserli çarpımlar toplamına A_2 , tüm üçerli çarpımlar toplamına A_3 , ..., tüm 49-arlı çarpımlar toplamına A_{49} ve hepsinin çarpımına A_{50} diyelim. (Örneğin, a, b, c, d sayıları için ikiserli çarpımlar toplamı $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ 'dir.) Buna göre,

$$A_{50} - A_{49} + A_{48} - A_{47} + \dots + A_2 - A_1$$

toplamı neye eşittir?

A) $-50!$

B) $50!$

C) -1

D) 1

E) $-2^{49} \cdot 49!$

Çözüm. $(x + 1)(x + 3) \dots (x + 97)(x + 99)$ ifadesinde parantezleri açarak, sadeleştirirsek,

$(x+1)(x+3)\cdots(x+97)(x+99) = x^{50} + A_1x^{49} + A_2x^{48} + \cdots + A_{48}x^2 + A_{49}x^1 + A_{50}$ olur. $x = -1$ koyarsak, $A_{50} - A_{49} + A_{48} - \cdots + A_2 - A_1 + 1 = 0 \Rightarrow A_{50} - A_{49} + A_{48} - \cdots + A_2 - A_1 = -1$ olur.

$$x_0^5 + 3x_0^4 + x_0^3 - 5(x_0^2 + 15x_0 + 5) = 0 \Rightarrow$$

20.

$$(x_0^3 - 5)(x_0^2 + 3x_0 + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0 \\ x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0 \end{array} \right\} \text{ olur. } x_0^2 + 3x_0 + 1 \neq 0 \text{ olduğundan } x_0^3 = 5 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{5} \text{ bulunur.}$$

denklem sisteminin gerçel çözümü x_0 ise, $3x_0^3 + 7$ tamsayısının rakamlar toplamı kaçtır?

- A)** 4 **B)** 13 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 16

Çözüm.

1. Çözüm. x reel sayısı

$$x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0 \quad (2)$$

sistemi sağlasın. Eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$$

$$x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 15x - 5 = 0 \quad (3)$$

olur. (2) ve (3) 'ü taraf tarafa toplarsak,

$$2x^5 + 5x^4 - 10x^2 - 25x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^4 + 5x^3 - 10x - 25 = 0 \quad (4)$$

çıkar. (3) 'ten (2) 'yi çıkarırsak,

$$x^4 + 2x^3 - 5x - 10 = 0 \quad (5)$$

olur. (5) 'in her iki yanını 2 ile çarptıktan sonra,

$$2x^4 + 4x^3 - 10x - 20 = 0 \quad (6)$$

olur. Şimdi, (4) 'ten (6) 'yı çıkartırsak,

$$x^3 - 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5} \Rightarrow 3x^3 + 7 = 22$$

elde edilir.

2. Çözüm. x_0 'ın sistemi sağlayan reel sayı olduğunu varsayıp eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$x_0^6 + 3x_0^5 + x_0^4 - 5x_0^3 - 15x_0^2 - 5x_0 = 0 \Rightarrow$$

YOĞUN KÜMELERE İLİŞKİN BİR NOT

Nurettin Ergun-Cavit Hafızoğlu

İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

Usta Alman Matematikçi Dirichlet' in 1820' lerde gözlemlediği şu yalın ama önemli gerçek daha önce bu dergide yayımlanan iki yazıda ele alınmıştı, bkz[1],[2]. x_0 gerçel sayısı herhangi bir irrasyonel sayı olsun. Bu takdirde

$$A_{x_0} = \{kx_0 + m : k, m \in \mathbb{Z}\}$$

alt kümesi, tüm gerçel sayılar kümesinde **yoğundur**, başka bir deyişle herhangi iki x, y gerçel sayısı verildiğinde bu kümenin en az bir (ve aslında sonsuz sayıda) elemanı x ile y arasında yer alır. Bu kısa yazıda, x_0 herhangi bir irrasyonel sayı olmak üzere, daha özel bir küme olan

$$B_{x_0} = \{nx_0 + k : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$$

alt kümesinin (ve ayrıca $C_{x_0} = \{-nx_0 + k : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin de) yoğun olma niteliğini haiz olduğunu göstereceğiz. Bu yazıyı sağlıklı biçimde kavrayabilmek için yukarıda sözü edilen yazıları okumuş olmak kesinlikle gerekmemektedir. İyi bilindiği gibi 0,1,-1,2,-2,... özel rasyonel sayılarına tam rasyonel sayılar yada kısaca **tam sayılar** denir, onların kümesi $\mathbb{Z}$ işareti ile tüm pozitif tam sayıların kümesi ise $\mathbb{N}$ ile gösterilip elemanlarına kısaca **doğal sayılar** denir. Yine iyi bilindiği gibi, herhangi bir x gerçel sayısının $[x]$ işareti ile gösterilen tam kısmı, x den büyük olmayan tüm tam sayıların büyüğüdür. Her gerçel sayıdan büyük olan en az bir doğal sayının varlığını güvence altına alan ünlü **Arşimed İlkesi** (bu aslında kanıtlanabilen bir önermedir ama, gerçel sayıların aksiyomatik, sağlıklı ve uzunca süren bir inşasının sonunda kanıtlanabilen bir bilgidir ve bu uzun süren inşayı değil lise, üniversite yıllarında bile eksiksiz ve gereği gibi ayrıntılarıyla yapmayı göze alamayanlar tıpkı bu yazıda bizim şimdi yaptığımız gibi bu olağanüstü bilgiyi, kestirmeden tepeden inme bir ilke olarak söyleyip geçiverirler.), evet bu ünlü ilke gereği, herhangi bir x gerçel sayısı için $-x < n$ ve dolayısıyla $-n < x$ gerçekleyen bir n doğal sayısının varlığını çıkarmış oluruz. Elbette n doğal sayısından büyük olan tüm k doğal sayıları için $-k < x$ yani $-k \in (-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$ geçerli olur. Demek ki her x gerçel sayısı için $(-\infty, x]$ aralığında bulunan tam sayıların kümesi boş değildir ve üstelik sonsuz elemanlıdır. İşte boş olmayan bu $(-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$ kümesinin x gerçel sayısı ile üstten sınırlandırıldığını yani her $k \in ((-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$ için $k \leq x$ gerçekleştiğini gözlemek güç değildir. Gerek, doğal sayıların boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanının var olduğunu söyleyen önerme, gerek tam sayıların boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir en büyük elemanının var olduğunu söyleyen önerme eşdeğerdirler ve ünlü **Tümevarım İlkesi** yardımıyla kolayca kanıtlanabilirler. İşte bu nedendir ki $(-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$ kümesinin en büyük elemanı, elbette bu kümeye aittir ve $[x]$ işareti ile gösterilen bu tam sayı, dolayısıyla hem $[x] \leq x$ ve hem de $x < [x] + 1$ eşitsizliklerini gerçekler. $[x] + 1$ tam sayısının $(-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$ kümesine ait olmayacağı apaçıktır, aksi halde $[x] + 1$ tam sayısının, boş olmayan bu kümeye ait olup, bu kümenin en büyük elemanından büyük olmayacağı için $[x] + 1 < [x]$ gibi kesinkes olanaksız bir sonuçla karşı karşıya kalırdık. Demek ki her x gerçel sayısının tam kısmı $[x] \leq x < [x] + 1$ gerçekler. O halde $\forall x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq x - [x] < 1$ buluruz. İşte negatif olmayan bu sayıya x in **ondalık kısmı** denir ve genellikle (x) işareti gösterilir. Demek ki $x = [x] + (x)$ ve $0 \leq (x) < 1$ bilgileri her x gerçel sayısı için geçerlidir. Şunu gözlemek de kolaydır: x 'in irrasyonel olmasıdır. Şunları da kolayca gözleriz: k herhangi bir tam sayı ve $0 \leq \varepsilon < 1$ ise $[k + \varepsilon] = k$ ve dolayısıyla $(k + \varepsilon) = k + \varepsilon - [k + \varepsilon] = \varepsilon = (k + \varepsilon) - k$ bulunur. O halde yine kolayca, her $x \in \mathbb{R}$, ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $(x \mp k) = (x)$ ve $(kx) = (k(x))$ temel ve önemli eşitliklerini gözlemek güç değildir, örneğin ikincisi için $kx = k[x] + k(x)$ gerçekleştiği ve $k[x]$ in bir tam sayı olduğunu gözlemek yeterli olacaktır. Üstelik herhangi bir k tam sayısı verildiğinde $k \leq x < y < k + 1$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayıları için (böyle gerçel sayılara aynı bir tam kısım aralığına düşen gerçel sayılar denir, çünkü $[x] = [y] = k$ gerçekleşmektedir), evet bu koşulu gerçekleyen x ve y gerçel sayıları için $(x) = x - [x] < y - [x] = y - [y] = (y)$ geçerlidir, kısacası aynı bir tam kısım

aralığında yer alan gerçel sayılar için ondalık kısımlar kesin artandır. Evet şimdi şu temel önermeyle başlayalım.

Önerme 1: Herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ irrasyonel sayısı için öyle uygun bir n doğal sayısı vardır ki

$$3 \leq n \text{ ve } (\varepsilon) < (n\varepsilon)$$

gerçekleşir.

Kanıtlama: Kanıtlama boyunca, çarpım işlemi için olan parantezler, ondalık kısım için kullanılanlarda ayırt edilebilsin diye, $\{, \}$, ile gösterilecektir. Gerçekten eğer $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ise $2 < \frac{1}{\varepsilon} < [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 = n$ ve $3 \leq n$ olduğu üstelik $1 < n\varepsilon = \varepsilon\{\frac{1}{\varepsilon} + 1\} = 1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{2}$ olduğu ve ayrıca $1 < 1 + \varepsilon < n\varepsilon + \varepsilon = \{n + 1\}\varepsilon < n\varepsilon + \frac{1}{2} < 2$ gerçekleştiği kolayca gözlenir. O halde $[1, 2)$ tam kısım aralığında yer alan $1 + \varepsilon$ ve $\{n + 1\}\varepsilon$ gerçel sayıları için yukarıda söylenenler nedeniyle, $n' = n + 1$ doğal sayısını tanımlayarak hem $4 \leq n'$ ve hem de $(\varepsilon) = (1 + \varepsilon) < (n'\varepsilon)$ buluruz. Aman dikkat: ε pozitif gerçel sayısının irrasyonel oluşu nedeniyle $\frac{1}{\varepsilon}$ irrasyoneldir ve dolayısı ile $[\frac{1}{\varepsilon}] < \frac{1}{\varepsilon}$ geçerlidir; bu nedendir ki yukarıda $\varepsilon\{\frac{1}{\varepsilon} + 1\} < \varepsilon\{\frac{1}{\varepsilon} + 1\}$ yazılmıştır, okuyucunun bu ayrıntıyı gözden kaçırmaması gereklidir. Evet ε irrasyonel sayısı için şimdi son seçeneği yani $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ gerçekleştiği durumu irdeleyelim. Bu durumda da $1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < [\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}] + 1 = m (\in N)$ ve $2 \leq m$ gözleriz. Üstelik $m < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1 = \frac{1}{1-\varepsilon}$ ve sonuçta $m - 1 < m\varepsilon$ ve ayrıca $\varepsilon < \frac{m}{m+1}$ nedeniyle $m - 1 < m - 1 + \varepsilon < m\varepsilon < m\varepsilon + \varepsilon = \{m + 1\}\varepsilon < m$ bulunur. $3 \leq m' = m + 1$ doğal sayısı yardımıyla bu kez de $(\varepsilon) = (m - 1 + \varepsilon) < (m'\varepsilon)$ bulunur. Bitti!

Önerme 2: Herhangi bir sabit x_0 irrasyonel sayısına karşılık öyle bir kesin artan

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

doğal sayılar dizisi vardır ki

$$0 < (n_1x_0) < (n_2x_0) < \dots < (n_kx_0) < (n_{k+1}x_0) < \dots < 1$$

gerçekleşir.

Kanıtlama: Bir önceki önerme nedeniyle, herhangi bir n_1 doğal sayısı ile işe başlarsak, pozitif (n_1x_0) ondalık kısmı bir irrasyonel sayı olup, buna karşılık öyle bir $3 \leq m_1 \in N$ vardır ki $(n_1x_0) < (m_1(n_1x_0)) = (m_1n_1x_0)$ bulunur. Dikkat: n_1x_0 gerçel sayısı irrasyonel olduğu için ondalık kısmı asla sıfır rasyonel olmayacaktır. O halde $n_2 = m_1n_1$ doğal sayısı sayesinde hem $n_1 < 3n_1 \leq m_1n_1 = n_2$ ve hem de $(n_1x_0) < (n_2x_0)$ bulunur. Aynı gerekçeyle $(n_2x_0) < (m_2(n_2x_0)) = (m_2n_2x_0)$ gerçekleşecek biçimde bir $3 \leq m_2$ doğal sayısı vardır. $n_3 = m_2n_2$ doğal sayısı için $n_2 < n_3$ ve $(n_2x_0) < (n_3x_0)$ bulunur. İstenen $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ kesin artan doğal sayılar dizisi tümevarımla tanımlanır. Tüm (n_kx_0) ondalık kısımları elbette tüm gerçel sayıların ondalık kısımları gibi < 1 gerçeklerler.

Önerme 3: $0 < x < y$ ise $\varepsilon < y - x$ gerçekleyen her pozitif ε sayısının uygun bir doğal sayı katı x ile y arasında yer alır.

Kanıtlama: Gerçekten $0 < \frac{x}{\varepsilon}$ pozitif gerçel sayısının tam kısmı negatif olmadığından, $n = [\frac{x}{\varepsilon}] + 1$ doğal sayısı için $\frac{x}{\varepsilon} < n \leq \frac{x}{\varepsilon} + 1 < \frac{y}{\varepsilon}$ eşitsizlikleri nedeniyle $x < n\varepsilon < y$ bulunur.

Ana Önerme: Herhangi bir sabit x_0 irrasyonel sayısı için $Bx_0 = \{nx_0 + k : n \in N, k \in Z\}$ alt kümesi, gerçel sayılar kümesinde yoğundur.

Kanıtlama: Öncelikle $0 \leq x < y < 1$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayıları alındığında bunlar arasında Bx_0 kümesinden en az bir elemanın yer aldığını gösterelim. $0 < \varepsilon < y - x$ gerçekleyen herhangi bir pozitif ε sayısı alalım. Önerme 2 yardımıyla

$$\xi_k = (n_kx_0), (k \in N)$$

kesin artan irrasyonel sayılarının var ve $0 < \xi_k < 1$ gerçeklediklerini ve üstelik $k \neq i$ için $\xi_k \neq \xi_i$ olduğunu, hatta $k < i$ ise $n_k < n_i$ ve $\xi_k < \xi_i$ gerçekleştiğini biliyoruz. $(0, 1)$ aralığındaki bu

sonsuz irrasyonel sayı $[0, 1]$ aralığındaki en az bir gerçel sayıya yığılır, aman dikkat, yakınsamaz fakat yığılır, iyi güzel de bu ne demektir? Bu, $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yoğun bir alt kümesinin, örneğin $\{\xi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisinin bir $\ell \in [0, 1]$ gerçel sayısına yakınsaması demektir. Ünlü Bolzano-Weierstrass Teoremi güvence altına alır böyle bir yakınsak alt dizinin varlığını...burada alt dizi tanımına ilişkin temel bir bilgiyi anımsamalıyız: $\{\xi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisindeki indisler $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ kesin artan bir doğal sayı dizisidir. Madem ki $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{k_i} = \ell$ gerçekleşiyor, O halde bir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki her $i \geq N_\epsilon$ için $|\xi_{k_i} - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$ olur. O halde

$$\forall i, j \geq N_\epsilon \text{ için } |\xi_{k_i} - \xi_{k_j}| < \epsilon$$

gerçekleşir, çünkü bu son mutlak değer $|\xi_{k_i} - \ell| + |\ell - \xi_{k_j}|$ toplamından eşit küçük kalır. Şimdi $N_\epsilon < j < i$ gerçekleyen herhangi iki doğal sayı alıp, bunları sabit turalım. O halde yukarıda biraz önce söylenenler nedeniyle $k_j < k_i$ ve dolayısıyla $n_{k_j} < n_{k_i}$ ve dolayısıyla $\xi_{k_j} = (n_{k_j}x_0) < (n_{k_i}x_0) = \xi_{k_i}$ geçerli olacağından, sonuçta $\xi_{k_i} - \xi_{k_j} = |\xi_{k_i} - \xi_{k_j}| < \epsilon$ bulunur. Önerme 3 yardımıyla, $\epsilon < y - x$ geçerli olduğu anımsanıp, öyle uygun bir m doğal sayısı vardır ki $x < m(\xi_{k_i} - \xi_{k_j}) < y$ bulunur. Oysa ξ_k ondalık kısımlarının tanımı gereği bu, (artık parantezleri çarpım işlemlerinde yine alışlagelen eski anlamlarında kullanmak üzere)

$$m(n_{k_i} - n_{k_j})x_0 + (m[n_{k_j}x_0] - m[n_{k_i}x_0]) \in B_{x_0}$$

elemanın x ile y arasında yer alması demektir, burada $n_{k_j} < n_{k_i}$ nedeniyle $m(n_{k_i} - n_{k_j})$ tam sayısının pozitif olduğu, kısacası bir doğal sayı olduğu önemli bir gözlemdir. Demek ki $0 \leq x < y < 1$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayıları arasında B_{x_0} kümesinden en az bir eleman vardır. Şimdi ise $x < y$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayılarını göz önüne alalım. Bunlar ya aynı bir tam kısım aralığına düşerler ya da düşmezler. Eğer aynı bir tam kısım aralığına düşerlerse $k_0 \leq x < y < k_0 + 1$ gerçekleyecek biçimde sabit bir k_0 tam sayısı vardır ve $0 \leq x - k_0 < y - k_0 < 1$ geçerli olduğundan, biraz önce kanıtlanan gerçek nedeniyle öyle uygun bir n_0 doğal ve k_1 tam sayısı vardır ki $x - k_0 < n_0x_0 + k_1 < y - k_0$ olur ve sonuçta $x < n_0x_0 + k_0 + k_1 < y$ bulunur, burada x ile y arasında yer alan gerçel sayı B_{x_0} kümesine aittir; yok eğer x ve y gerçel sayıları aynı bir tam kısım aralığına düşmüyorsa, bu kez de $x < [x] + 1 \leq [y] \leq y$ oluyor demektir. Bu son durumda eğer $[x] + 1 = [y]$ ise, $0 < \delta < \frac{1}{2}([x] + 1 - x)$ gerçekleyen pozitif δ sayesinde (unutmuyoruz değil mi, artık parantezler çarpım işlemi amacıyla kullanılmaktadır) evet bu δ yardımıyla $[x] \leq x < x + \delta < [x] + 1 - \delta < [x] + 1 = [y] \leq y$ olur ve $x + \delta$ ile $[x] + 1 - \delta$ gerçel sayıları arasında B_{x_0} kümesinden en az bir eleman vardır; yok eğer $[x] + 1 < [y]$ ise bu kez, $x < [x] + 1 < [x] + 2 \leq [y] \leq y$ olur ve $[x] + 1$ ile $[x] + 2$ tam sayıları arasında en az bir B_{x_0} elemanı bulunur. Tüm irdelemelerde sonunda hep x ve y arasında B_{x_0} kümesinden en az bir elemanın varlığı gösterilmiştir ve dolayısıyla kanıtlama bitirilmiştir.

Uyarı: Herhangi bir x_0 irrasyonel sayısına karşılık $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, ve, $(n_1x_0) > (n_2x_0) > (n_3x_0) > \dots$ koşullarını gerçekleyen bir $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ doğal sayılar dizisinin varlığını gözlemlemek de güç değildir, çünkü herhangi bir pozitif ve $\epsilon < 1$ gerçekleyen irrasyonel ϵ sayısına karşılık $n = [\frac{1}{\epsilon}]$ doğal sayısı yardımıyla tanımlanan $m = n + 1$ doğal sayısının $2 \leq m$ ve $1 < m\epsilon < 1 + \epsilon < 2$, $(m\epsilon) < (\epsilon)$ eşitliklerini gerçeklediğini gözlemek kolaydır. Önerme 2'deki yöntemle aranan $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi tanımlanır. O halde bu yazının başında sözü edilen $C_{x_0} = \{-nx_0 + k : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin de yoğun olduğunu kanıtlamak güç değildir. B_{x_0} ve C_{x_0} yoğun kümelerinin ayrık olduklarını (hiçbir ortak elemana sahip olmadıklarını) gözleyebiliyoruz değil mi sevgili okurlar, iyi çalışmalar. Nasıl? Lütfen uğraşınız!

KAYNAKÇA

[1] N. Ergun: Dirichlet'nin bir teoremi hakkında, Matematik Dünyası, Aralık 1999, ss. 2-8.

[2] Y. Avcı, K. Almacık, N.Ergun: Üç analiz problemi, Matematik Dünyası, Eylül 1999, ss. 2-13

İLGİNÇ LİMİT PROBLEMLERİ

Simten Uyhan

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

Matematik ile ilgilenen her bireyin sık sık karşılaştığı kavramlardan birisi de limit kavramıdır. Reel ve kompleks sayı dizilerinin limit kavramı kendi başına çok önemli olmanın yanı sıra, fonksiyonların sürekliliğini kavramada; türev ve integral kavramlarını anlamada, sonsuz toplam ve çarpımları incelemede çok güçlü teknik araçtır. Bu yazımızda genç arkadaşlara, belki birçok defalar anlatılan limit kavramını bir kere daha hatırlatıp, ilginçliğine inandığımız bir kaç problem sunacağız. Kolaylık için, sadece, reel sayı dizileri ile uğraşacağız.

Doğal sayılardan, reel sayılara tanımlı herhangi bir fonksiyona dizi denildiğini biliyorsunuz. Diziyi $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ile gösteririz. Buradaki a_n , dizinin genel terimidir. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri, belli bir numaradan sonra, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ açık aralığının içinde kalıyorsa, o zaman $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine yakınsak dizi, a reel sayısına da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti denir. Daha matematiksel bir ifadeyle, $\forall \epsilon > 0$ için öyle bir N_ϵ doğal sayısı bulunabiliyorsa ki her $n \geq N_\epsilon$ için $|a_n - a| < \epsilon$ eşitsizliği sağlansın, o zaman $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti a 'dır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ veya $a_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty)$ biçiminde gösterilir. Limit tanımından açıkça görülebilir ki, bir dizinin limiti varsa, tektir. Limiti olmayan dizilere ıraksak dizi denir. Örneğin, $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (5)$ sabit dizisinin limiti 5, $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{n})$ dizisinin limiti 0'dır. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n)$ dizileri de birer ıraksak dizidir.

Aşağıda ele alacağımız limit problemlerine geçmeden önce bazı çözümlerde kullanacağımız meşhur eşitsizlikleri ve "Sandevich Teoremini" hatırlatalım.

Sandevich Teoremi: $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizileri için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($\forall n$) ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ ise, o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ vardır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ dir.

Bernoulli Eşitsizliği: $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $a > -1$ olsun. Bu takdirde

$$i) 0 < b < 1 \text{ ise } (1+a)^b < 1+ab$$

$$ii) b \notin [0, 1] \text{ ise } (1+a)^b > 1+ab$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği: $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

Cauchy-Schwartz-Bunyakovski Eşitsizliği: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun. Bu durumda, $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi birkaç ilginç limit problemi çözelim:

Problem 1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ her bir terimi pozitif olan bir reel sayı dizisi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_1}} = n \sqrt[n]{1} = n$$

elde edilir. Dolayısıyla her n için, $0 \leq \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}} \leq \frac{1}{n}$ ve buradan Sandevich Teoremine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}} = 0$$

elde edilir.

Problem 2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için $\frac{a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ise $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ olacağını gösteriniz.

Çözüm. Cauchy-Schwartz-Bunyakowski Eşitsizliğinden

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

ve

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 \leq n(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

yazarız ve bu iki eşitsizlikten

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 \leq n^2 n(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$0 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^4 \leq \frac{a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4}{n}$$

olur. Sandevich Teoremini kullanarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0$ buluruz.

Problem 3. a) $|a| < 1$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ (Daha genel: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0$)

b) $m > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Çözüm.

a) $|a| < 1$ ise $|a| = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$ yazılır. Buradan

$$n|a|^n = \frac{n}{(1+h)^n} = \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n} < \frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

bulunur. $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} n|a|^n < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} n|a|^n = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ elde edilir.

b) $m > 1$ ise $\sqrt[n]{m} > 1$ olur. $\sqrt[n]{m} - 1 = h_n > 0$ diyelim. Buradan Bernoulli eşitsizliği gözönüne alınarak, $\sqrt[n]{m} = 1 + h_n \Rightarrow m = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n$ bulunur. Böylece, $0 < h_n < \frac{m-1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$ olur. $m = 1$ ise $\sqrt[n]{m} = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$ olur. $m < 1$ ise $\frac{1}{m} > 1$ dir.

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m}} = 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$ elde edilir.

c) $n > 1$ için $\sqrt[n]{n} > 1$ olur. $\sqrt[n]{n} - 1 = h_n > 0$ diyelim. Kolayca görülebilir ki

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \Rightarrow n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \dots + h_n^n$$

ve buradan $n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \Rightarrow 0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}$ elde edilir. $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^2 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ bulunur.

Problem 4. $b_1, b_2, \dots, b_m$ pozitif sayıları verilmiş olsun. Genel terimi, $(\sqrt[m]{b_1^n + b_2^n + \dots + b_m^n})$ olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle $b = \max\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ diyelim. O halde

$$b = \sqrt[m]{b^n} \leq \sqrt[m]{b_1^n + b_2^n + \dots + b_m^n} \leq \sqrt[m]{mb^n} = b \sqrt[m]{m}$$

eşitsizliğinden, Sandevič Teoremi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = 1$ olduğu gözönüne alınarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{b_1^n + b_2^n + \dots + b_m^n} = b$$

elde edilir.

Problem 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ limitini hesaplayınız.

Çözüme geçmeden önce bu tip limitler için gözönüne alacağımız “ünlü limiti” hatırlatalım:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e; \quad (e \approx 2,718281845\dots)$$

Çözüm. Şimdi bu limit vasıtasıyla yukarıdaki problemi çözebiliriz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n \cdot n \ln(1 + \frac{1}{n})}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = e^{0 \ln e} = 1.$$

Problem 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^3} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n \\ &< 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$0 < \frac{\ln(n!)}{n^3} < \frac{n(n+1)}{2n^3} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = 0$$

olduğundan, Sandevič Teoremine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^3} = 0$ olur.

Problem 7. $a > b > 0$, $a_1 = a, b_1 = b$ ve $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + b_{n-1}}$, $b_n = \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} + b_{n-1}}$ olduğuna göre $(a_n)_{n=1}^\infty$ ve $(b_n)_{n=1}^\infty$ dizilerinin limitlerini bulunuz.

Çözüm. $n = 1, 2, \dots$ için $a_n, b_n > 0$ dır.

$$a_n - b_n = \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{a_{n-1} + b_{n-1}} = a_{n-1} - b_{n-1} = a_{n-2} - b_{n-2} = \dots = a_1 - b_1 = a - b$$

dir.

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right)^2 = \left(\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \right)^2 = \dots = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^{2^n} = \left(\frac{b}{a} \right)^{2^n}$$

bulunur. $0 < \frac{b}{a} < 1$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ olur. Öte yandan, $a_n - b_n = a - b$, $(n = 1, 2, \dots)$ eşitliğinden $b_n = a_n - (a - b)$ bularak yukarıdaki eşitlikte yazarsak,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{a-b}{a_n}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{a_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a - b. \text{ Sonuçta, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - (a - b) = a - b - (a - b) = 0 \text{ bulunur.}$$

Limit kavramının çok önemli bir uygulaması da sonsuz toplamlar (seriler) incelenirken ortaya çıkıyor. Başlı başına bir ciddi matematiksel konu olan seri kavramına çok girmeden, lise matematiğinde sık sık karşımıza çıkan sonsuz ondalık kesirlere biraz değinelim. Model olarak aşağıdaki ondalık kesri ele alalım.

$$0,33333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots$$

Şimdi yukarıdaki sonsuz toplama bir anlam vermeye çalışalım.

Bunun için, $a_1 = \frac{3}{10}$, $a_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$, $a_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$, ..., $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n}$, ... şeklinde bir dizi tanımlayalım. Eğer a_n 'nin limiti varsa bu limit değeri yukarıdaki "sonsuz toplam" 'ın değeri olarak kabul ediliyor. Şimdi a_n 'nin limitini hesaplayalım.

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

ifadesinden

$$\frac{1}{10}a_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots + \frac{3}{10^{n+1}}$$

elde edilir. Sonra $a_n - \frac{1}{10}a_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} = \frac{3}{10}(1 - \frac{1}{10^n})$ bulunur. Dolayısıyla, $\frac{9}{10}a_n = \frac{3}{10}(1 - \frac{1}{10^n})$ veya $a_n = \frac{3}{9}(1 - \frac{1}{10^n})$ dir. Açıkça $n \rightarrow \infty$ için $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$ dir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ olur. Sonuç olarak, sonsuz toplam'ın değerini, $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \frac{1}{3}$ olarak yazabiliriz.

Bu tipteki diziler için bir diğer problem de şöyledir:

Problem 8. Bir top düz bir yüzeye 50 m. yukarıdan bırakılıyor. Top yere her düşüşünden sonra bir önceki yüksekliğinin $\frac{1}{3}$ 'ü kadar bir yüksekliğe geri sıçrıyor. Topun aldığı toplam yolu bulunuz.

Çözüm. Burada alınan yolu, yine bir dizinin limiti şeklinde ifade etmeye çalışalım. Bu dizinin terimleri $S_1 = 50$, $S_2 = 50 + 2.50.\frac{1}{3}$, $S_3 = 50 + 2.50.\frac{1}{3} + 2.50.\frac{1}{3^2}$, ..., $S_n = 50 + 2.50.\frac{1}{3} + \dots + 2.50.\frac{1}{3^n}$ biçimindedir. Sonuç olarak, alınan toplam yol $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ limitidir. Şimdi bu limiti hesaplayalım.

$S_n = 50 + 2.50(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n})$ dir. Parantez içindeki ifadenin $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$ olduğu bir önceki problemten kolayca görülebilir. Buradan $S_n = 50 + 50(1 - \frac{1}{3^n})$ olur. Dolayısıyla toplam yol, yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 50 + 50(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}) = 50 + 50 = 100$ m. dir.

KAYNAKLAR

- [1] Karakaş, H.İ. ; Aliyev, İ.; *Analiz ve Cebirde İğinc Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri*, TÜBİTAK, 1998.
- [2] Balcı, M.; *Analiz I-II*, Ankara Üniversitesi Yayınları, 1996.
- [3] Spivak, M.; *Calculus*, Matematik Vakfı Yayınları, No:6, Ankara, 1997.
- [4] Özdeğer, A. ; Özdeğer N.; *Analiz Problemleri*, İ.T.Ü. Yayınları, 1995.

OLASILIK ve OLASILIK ÖĞRETİMİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Levent Özbek

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, ANKARA

Giriş

Evrende olup bitenleri anlama ve anlatma çabası içinde olan insan, ilgilendiği olay ve süreçlerle ilgili çeşitli modeller kurarak bu modeller üzerinde gelecekte ne gibi durumlar ortaya çıkabileceğini bilmeye çalışır.

Newton'un Mekanik ile doruk noktasına ulaşan Laplace anlamında belirlenimci dünya görüşü (determinizm-gerekircilik, saat gibi tıkır-tıkır işleyen evren modeli) kuantum fiziğinin gelişimi ile beraber yerini olasılıkçı dünya görüşüne bırakmak zorunda kalmıştır. Reaktörler için ya da atomların ısıması için olasılık hesapları yapılır ve gözlemlerle uyuşan sonuçlar bulunur. Bu anlamda belirlenimcilik kuantum mekaniğinde vardır ama Laplace anlamında belirlenimci değildir [19]. Belirlenimci dünya görüşü ve bununla ilişkili nedensellik ve rastlantı kavramları bilim, felsefe, sanat gibi alanlarda çok tartışılan konular arasında yer almaktadır [1]-[4].

Psikologlar kesinlik arayışını, çocukluğun ilk günlerine, kişinin henüz kuşku duygusundan tedirgin olmadığı, ana-babanın sağladığı güven içinde rahat olduğu günlere bir dönüş arzusu olarak açıklamaktadırlar. Bu arzu genellikle, çocuğu, kuşkulandırmayı bir günah, güven duymayı dinsel bir buyruk saymaya koşullandırılan bir eğitim tarafından yoğunlaştırılır. Kesinlik arayışı, hataya yol açan en tehlikeli kaynaklardan biridir; çünkü, bu eğilim üstün bilgi edinme çabası ile birlikte gider [5].

Olasılık kavramı, bilgi problemlerinin en önemlileri ile ilgilidir. Olasılık her şeyden önce doğa yasalarında kendini gösterir [6]. Olasılık ve olasılık kavramlarının diğer bilim alanlarındaki kavramlarla olan ilişkilerini değişik biçimlerde ele alan pek çok popüler yayın bulunmaktadır [12]-[18].

Eğitim sürecinde olasılık kavramlarının yeterince öğretilmemesi önemli problemlerden birisidir ve bununla ilgili yapılan çalışmalar günümüzde tüm ülkelerde devam etmektedir. Bununla birlikte ülkemizde ve diğer ülkelerde olasılık kavramlarının öğretiminde çeşitli nedenlerle zorluklar yaşandığı, öğretimin etkin bir şekilde yapılamadığı birçok araştırmacı tarafından belirtilmektedir [7]-[11].

Bulut ve diğ. [7], olasılık öğretiminde karşılaşılan sorunların başında öğretim materyallerinin eksikliği olduğunu vurgulamış ve olasılık kavramlarının öğretiminde kullanılacak çalışma yapılarının geliştirilmesine yönelik çalışma yapmışlardır. Truran [9], olasılığı öğretirken simetrinin sık kullanıldığı madeni para ve zar atışı örneklerini ele alarak çeşitli yaş gruplarındaki çocukların olasılıkla ilgili düşüncelerini belirlemek amacıyla araştırma yapmıştır. Olasılık kavramının yaşla birlikte değişik görünümeler gösterdiğini, oyunların basit deneylere göre daha etkili olduğunu saptamıştır. Sonuç olarak çeşitli yaş gruplarında yaptığı röportajlardan, çocuklardaki olasılık kavramının gelişmesinin tamamen anlaşılamadığını ve hangi öğretim yöntemlerinin daha iyi olduğu konusunda bu görüşmelerin yeterince ipucu vermediğini belirtmiştir. Batanero ve diğ. [11], rasgelelik kavramının tarihsel boyutunu ele alarak bu kavramın öğretiminde karşılaşılan sorunlar ile ilgili araştırma yapmışlardır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde, olasılığın anlamı üzerindeki görüşler ile ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, olasılık kavramının öğretiminde dikkat edilecek konulara değinilmiştir. Üçüncü bölümde, olasılık kavramının anlaşılmasına yönelik bilgisayar destekli benzetim uygulamaları ile ilgili bir örnek üzerinde durulmuştur.

1. Olasılığın Anlamı

Rasgelelik ve bununla bağlantılı olan olasılık kavramının çerçevesinin kolay oluşmadığı, bu konuda öğretim gören öğrenciler tarafından da dile getirilmektedir [20]. Klasik olasılık kuramına göre, sayısal olasılık değeri, "uygun sonuçlar" sayısının, "tüm sonuçlar" sayısına bölümü olarak tanımlanır. Bu tanım, öznel ve nesnel diye adlandırılan farklı yorumlara yol açmaktadır. "Hilesiz bir zarla 6 atmanın olasılığı 1/6'dır" önermesi sayısal olasılık önermesine bir örnektir. Sorun, sayısal bir olasılık önermesinin nasıl yorumlanacağıdır.

Popper [21], öznel yorumlamada bazı ruhselimsel öğelerin olduğunu, buna göre olasılık derecesini kesinlik ya da belirsizlik inancının ölçütü olarak değerlendirmiştir. Reichenbach [5], rasyonalistler için, olasılık derecesi denen şey, nedenlerin yokluğunda aklın ürünüdür, değerlendirmesini yapmıştır. Popper [21], nesnel yorumlamayı ise, sayısal her olasılık önermesi, olaylar dizisi içerisinde belirli olayların göreceli sıklığına ilişkin bir önerme olarak nitelmiştir. Böylece örneğin, "bir sonraki zar atışında 1 atmanın olasılığı 1/6'dır" biçimindeki bir önerme, bir sonraki zar atışının bir önermesi değil, atışlar kümesinin tamamının bir önermesidir; bir sonraki atış ile ilgili bir önerme de bu kümenin bir elemanıdır, bu önerme yalnızca, söz konusu kümede "1 atmanın" göreceli sıklığının 1/6 olduğunu ileri sürmektedir. Bu yaklaşıma göre, sayısal olasılık önermeleri, ancak sıklığa ilişkin bir yorum yapılabildiğinde kabul edilebilir.

Olasılıklar hesabındaki başlıca önermelerin geçerliliğini sağlayan bir sıklık kuramı R.V. Mises tarafından ortaya konulmuştur. Reichenbach [5], bu kuramı olasılığın empirist (deneysel) felsefesi olarak adlandırmıştır ve rasyonalist yorumun bilimsel felsefede yer almaması gerektiğini söylemiştir. Bu kurama göre olasılıklar hesabı, belirli "rasgelelik" ögesi içeren olaylar dizisinin bir kuramıdır. Bu olaylar dizisini tanımlayan iki belitsel koşul vardır: Bunlar, "sınır-değer beliti" ve "gelişigüzellik belitidir". Bir olaylar dizisi bu iki koşulu doyurduğunda, Mises bunu, sonsuz biçimde yinlendiği düşünülen denemeler dizisi - yani "kolektif"- olarak tanımlamaktadır. Örneğin, yıpranmayan bir zarla yapılan atışlar dizisi bir kolektiftir. Bu tür her olayın belirli bir özelliği vardır; örneğin "beş atış" bir özelliktir. Olaylar dizisindeki her bir eleman için yeni bir dizi "göreceli sıklıklar dizisi" karşılık getirilebilir. Özellikler dizisi uzadıkça, sınır-değer belitine göre, göreceli sıklıkların dizisi belirli bir sınır değere ulaşmalıdır. Mises'e göre "olasılık" sözcüğü, bir "kolektifin içinde bulunan göreceli sıklığın sınır-değerinin" başka bir ifadesidir. Mises'e göre olasılık hesabının tek amacı şudur: Verilmiş olasılıklardan yola çıkarak, başka olasılıkların hesaplanmasıdır. Reichenbach [5], olasılığın sıklık yorumunun, bir olasılık önermesinin tek bir olaya uygulanması sırasında güçlük çıkaracağını, tek bir olayın olasılığının sıklık olarak belirtmenin bir anlam taşımadığını söylemiştir.

Olasılığın çağdaş tanımı matematiğin alt dalı olan ölçü teorisindeki kavramlar yardımıyla Kolmogorov tarafından verilmiş böylelikle olasılık teorisi aksiyomatik bir yapıya kavuşturulmuştur. Bu tanım, klasik olasılık tanımını da içermektedir. Olasılığın bu tanımı [22]'de bulunabilir. Olasılık teorisi Kolmogorov Aksiyomları olarak bilinen matematiksel alt yapısı ve Mises'in sıklık kuramı ile birlikte ele alınmakta ve rasgelelik içeren süreçleri modellemede kullanılmaktadır.

Mises'in sıklık kuramı, Bernouilli Büyük Sayılar Kuralı ile matematiksel olarak daha iyi anlaşılabilir. Büyük Sayılar Kuralı kuramsal ve deneysel iki sayıyı birbirine bağlamaktadır. Bu kuralın aracılığı ile olasılık teorisi deneysel çalışma ile temas eder ve bu kuramın teorik olarak elde edilen sonuçları çeşitli deneysel bilim dallarına uygulanarak doğanın daha derin, ama kesin yasalarla ifade edilemeyen kanunlara uygunluklarını matematiksel olarak ifade etmeye olanak sağlar. Bernouilli Teoremi olarak bilinen bu kural [23]'de verilmiştir.

1. Olasılık Öğretimi ve Öneriler

İnsanlar doğal olarak kesinlik arayışı içindedirler. Kuşku duyma ise belirsizliği beraberinde getirir ve sonradan kazanılan bir davranış biçimi olarak görülebilir. Kişide kuşku duyma eğiliminin ortaya çıkması ile bu kavram sezgisel olarak oluşmaya başlar.

Olasılık öğretiminde karşılaşılan sorunlar dikkatli bir şekilde ele alınmalıdır. Öğrencilerin "olasılık" ve "rasgelelik" kavramları hakkındaki düşüncelerini öğrenmek amacıyla çeşitli yaş gruplarını içine alan araştırmalar yapılmalı ve bu doğrultuda öğretim yöntemleri geliştirmek için çalışmalar başlatılmalıdır.

Özellikle eğitim fakültesi öğrencilerine bu konular anlatılırken konunun teknik yönü kadar tarihi ve felsefi içeriğine de yer verilmelidir.

Olasılığın değişik bilim dalları ile olan ilişkileri üzerinde durulmalı bunlara uygun modeller anlatılmalıdır.

Olasılığın tımdengelimci (aksiyomatik kuram) ve tümevarımcı (sıklık kuramı) boyutu beraber ele alınmalıdır. Anlatılan konu ile ilgili deneysel çalışmalara yeterince yer ayrılmalıdır. Öğrencilerin kendi kendilerine deney yapmaları sağlanmalıdır.

Bilgisayar destekli uygulamalardan yararlanılmalıdır. Buna uygun ders programları geliştirilmeli öğretmene ve öğrenciye yol gösterecek kitaplar hazırlanmalıdır.

2. Olasılık Öğretiminde Deney ve Benzetim

Kurulan model üzerinde deney yapmaya benzetim denir. Bazı deneylerin yapılmasının zorluğu veya başka nedenlerle olasılık öğretiminde bilgisayar destekli benzetimden yararlanılır. Ayrıca bilgisayarda verilecek grafik ve hareketli görüntüler de problemin anlaşılmasına yardımcı olabilir. Bu amaçla, aşağıda verilen problem için model kurulmuş ve bu model üzerinde benzetim çalışması yapılmıştır.

Problem:

Deney; içinde 2 kırmızı, 3 sarı top bulunan bir torbadan çekilen topu tekrar torbaya atmak koşulu ile 100 top çekip gelen kırmızı topların sayısının gözlenmesi olsun. Problem de 100 top çekilişinde beklenen kırmızı topların sayısının ne olacağı olsun.

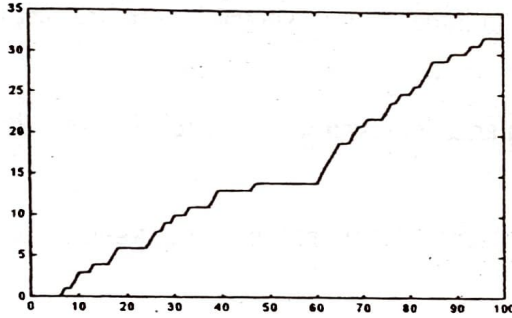
Model kurma:

Kırmızı ve sarı topların sayısı bilindiğinden klasik olasılık tanımını kullanılarak, kırmızı top gelmesi olasılığı için $P(k)=2/5$, sarı top gelmesi olasılığı için de $P(s)=3/5$ alınabilir. Öğrenci sezgisel olarak (rasgele değişken, olasılık dağılımları, Bernouilli Dağılımı, Binom Dağılımı,

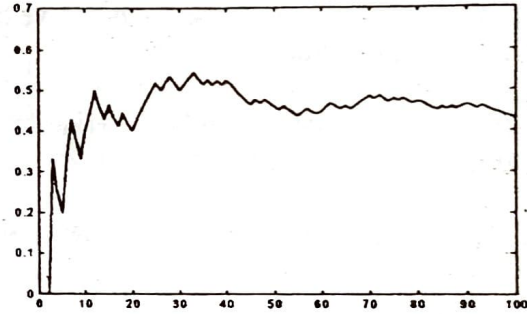
beklenen değer,... gibi kavramları bilmeseyse bile) $100 \cdot 2/5$ gibi basit bir aritmetik işlem yaparak sonucu söyleyebilecektir. Bu düşüncenin altında yatan da olasılıkların yukarıdaki gibi seçilmesi yani modellenmesidir.

Deney :

Sınıfta bulunan öğrenciler ikiye bölünür ve her gruba benzer torbalar dağıtılarak her grubun deneyi yapması ve deneyler bittğinde de sonuçları karşılaştırmak amacıyla tahtaya yazmaları istenir. Deney sonuçları ile sezgisel olarak bulunan sonuçlar karşılaştırılır. Eğer kurulan model doğruysa deney sonuçları modelin verdiği sonucu destekleyecektir (yakın çıkacaktır). Her grup yaptığı deney sonuçlarını x-ekseni deney sayısı (deney sıra numarası), y-ekseni de o deney sayısına kadar gelen kırmızı topların sayısını işaretlemek üzere Şekil-1'deki gibi bir grafik üzerinde gösterdiğinde kurulan modelin geçerliliği için sezgi sahibi olabilir. Yine benzer şekilde y-ekseninde gelen kırmızı topların sayısının deney sayısına oranlanmasından bulunan sonuç gösterilirse Şekil-2'deki gibi istatistik teorisinin temelinde yatan Büyük Sayılar Yasasının anlamı konusunda sezgi sahibi olabilir.



Şekil-1: Kırmızı topların sayısı



Şekil-2: Kırmızı topların sayısının deney sayısına oranı

Deney çok zaman alacağından veya başka nedenlerle birkaç gruba yaptırmakla yetinilebilir. Böyle bir durumda bilgisayarda deney istenildiği kadar tekrarlanabilir.

Benzetim:

Bu deneyi bilgisayarda gerçekleştirmek için çeşitli programlama dilleri kullanılarak program yazılabilir. Her programlama dilinde bulunan ve sayı üretmek için kullanılan (rnd, rand, random,... gibi) fonksiyon yardımıyla deney, Eğer $RAND < 2/5$ koşulu sağlandığında kırmızı top çekildi, aksi durumda sarı top çekildi biçiminde yapılabilir. Bu deneyi bilgisayarda n kez gerçekleştirmek amacıyla aşağıdaki Matlab programı kullanılabilir. Program çalıştırıldığında Şekil-1'dekine benzer bir grafik verecektir. n sayısı değiştirilerek deney istenildiği kadar tekrarlanabilir. Ayrıca, programda 12.satır,

`x(deneysay)=kırmızısay/deneysay;`

satırı ile değiştirilerek Şekil-2'dekine benzer bir grafik elde edilebilir. Bu benzetim uygulamasında dikkat edilecek konulardan birisi

Eğer $RAND < 2/5$ ise kırmızı

Koşulunun yazılmasının kurulan modelden ($P(k)=2/5$) gelmesidir.

```
1. clc
2. clear
3. n=100;
4. for deneysay=1:n
5.     x(deneysay)=0;
```

```

6. end
7. kırmızısay=0;
8. for deney-say=1:n
9.     if rand<2/5
10.        kırmızısay=kırmızısay+1;
11.    end
12.    x(deneysay)=kırmızısay;
13. end
14. plot(x)

```

KAYNAKLAR

- [1] Russell, B., "Bilim ve Din". Çev. Hilmi Yavuz, Cem Yayınevi, (1997).
- [2] Mengüsoğlu, T., "Felsefeye Giriş". Remzi Kitabevi, (1988).
- [3] Poincare, H., "Bilim ve Metot". Çev. H.R. Atademir, S.Ölçen", Milli Eğitim Basımevi, (1986).
- [4] Noel, E., "Günümüzde Bilimsel Görüntüleriyle Rastlantı". Çev. Ülkü Erdoğan, Pencere Yayınları, (1999).
- [5] Reichenbach, H., "Bilimsel Felsefenin Doğuşu". Çev. Cemal Yıldırım, Remzi Kitabevi, (1993).
- [6] Hızır, N., "Felsefe Yazıları". Çağdaş Yay., (1981).
- [7] Bulut, S., Ekici, C., İşeri, A.I. "Bazı Olasılık Kavramlarının Öğretimi İçin Çalışma Yapraklarının Geliştirilmesi". H.Ü. Eğitim Fak. Dergisi, 15:129-136 (1999).
- [8] İpek, M., "Olasılığa İstatistikçi Gözüyle Nasıl Bakılabilir". DİE, Araştırma Sempozyumu'91, Ankara, (1991).
- [9] Truran, J., "Children's Understanding of Symmetry", Teaching Statistics.
- [10] Metz, K.E., "Dimensions in the Assessment of Students Understanding and Application of Change". The Assessment Challenge in Statistic Education, Eds. Gal, I., Garfield, J.B. IOS Press, (1997).
- [11] Batanero, C., Green, D.R., Serrano, L.R., "Randomness, its meaning and educational implications". Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., V.29, No.1, 113-123, (1997).
- [12] Rucker, R., "Rastlantıları Yönlendiren Güçler". Bilim Teknik, TÜBİTAK Yay. Mayıs (1985).
- [13] Alsan, S., "Bu ne Rastlantı!", Bilim Teknik, TÜBİTAK Yay. Ocak (1999).
- [14] Alsan, S., "Ortalamalar Yasasını Lağvetmek". Bilim Teknik, TÜBİTAK Yay. Kasım, (1998).
- [15] Pagels, H.R., "Kozmik Kod, Doğanın Dili/Kuantum Fiziği". Çev. Nezihe Bahar, Sarmal Yay., (1992).
- [16] Ruelle, D., "Rastlantı ve Kaos". Çev. Deniz Yurtören, TÜBİTAK Yay., (1994).
- [17] Prigogine, I., Stengers, I., "Kaostan Düzene". Çev. Senai Demirci, İz Yay., (1996).
- [18] Nesin, A., "Matematik ve Oyun". Düşün Yay., (1995).
- [19] Dereli, T., "Kuantum Dünyası". ABRA dergisi eki, Mart, (1994).
- [20] Özbek, L., AÜFF, İstatistik Bölümü 1.sınıf öğrencilerinin İS152 İst. Lab. Dersi final sınavında "Rasgelelik konusundaki düşüncelerinizi yazınız" sorusuna verdikleri yanıtlar, yayınlanmamış araştırma, (1998).
- [21] Popper, K.R., "Bilimsel Araştırmanın Mantığı", Çev. İ. Aka, İ. Turan, YKY Yay, (1998).
- [22] Öztürk, F., "Matematiksel İstatistiğe Giriş", AÜFF Yay., 1993.
- [23] Hasanov, E. ve Uzgören, G., "Kombinatorik ve Elemanter Olasılık Teorisine Giriş", Çağlayan Kitabevi, 1997.

TEOREM VE BAZI İSPAT METOTLARININ YORUMU

Can A. İlhan

Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, ANKARA

Teorem, doğruluğu kanıtlanabilen önermedir [4]. Teoremin doğruluğunu göstermeye ispat denir. Bir teoremi ispatlarken aksiyomlardan (doğruluğu kabul edilen önermelerden) ya da diğer varsayımlardan (hipotezlerden) mantık kurallarıyla hareket edilir. O halde basit bir önerme olarak verilen teoremi, doğruluk değeri doğru olan bir önermenin gerektirmesi olarak ifade edebiliriz. Yani bize, q önermesi teorem olarak verilirse, doğruluk değeri doğru olan bir p önermesi için $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edebiliriz. p önermesi doğru olduğundan, q önermesinin doğru olması ile teoremin doğru olması eşdeğerdir. Bunu aşağıdaki doğruluk tablosunun 1. ve 2. satırını inceleyerek görebiliriz. Teoremi böyle yorumlayarak ispat metotlarının bir çoğunu mantık kurallarıyla anlaşılır hale getirmeyi amaçlıyoruz.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Önerme doğru ise doğruluk değeri 1; yanlış ise 0 ile gösterilmiştir.

ÖRNEK : “ $\sqrt{2}$ rasyonel sayı değildir” Bu bir teoremdir. Yani ispatlanabilir ve basit bir önerme şeklindedir. Bu teoremi şu şekilde de ifade edebiliriz “ a, b aralarında asal olan tamsayı $\Rightarrow \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ dir” Burada p önermesi olarak, a ile b aralarında asal olan tamsayı alınabilir ve p nin doğru olduğu kabul edilir. q önermesi olarak, $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ alınırsa, bu teoremi $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilebileceği görünür. (Olmayana Ergi Metodu ile bu teorem ileride ispatlanacak)

Bir teoremin ispatı yapılırken mantık prensipleri kullanılarak metotlar geliştirilmiştir. Şimdi bunlardan bazılarını inceleyelim.

NOT : Bir p önermesinin değili $\sim p$ sembolü ile gösterilecektir.

DOĞRUDAN (DİREKT) İSPAT METODU

İspat metotlarından en çok kullanılan, daha doğrusu ilk akla gelen metot doğrudan ispat metodudur. Çünkü, p önermesi doğru kabul edilerek direkt q önermesinin doğru olduğunu gösterme esasına dayanır.

ÖRNEK TEOREM:

$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

a, b 'yi tam böler $\Rightarrow$ her bir c tamsayısı için a, bc 'yi tam böler.

[$p: a, b$ 'yi tam böler, $q: her bir c tamsayısı için a, bc 'yi tam böler.]$

İSPAT :

a, b 'yi tam bölsün [p önermesinden hareket ediliyor]. Bu durumda, $b=ax$ olacak biçimde bir x tamsayısı vardır. $bc=axc=a(xc)$ olduğundan a, bc 'yi tam böler [q önermesi elde ediliyor].

OLMAYANA ERGİ İSPAT METODU

$p \Rightarrow q$ şartlı önermesinde p ve q önermelerinin alabileceği her doğruluk değeri için $\sim q \Rightarrow \sim p$ şartlı önermesinin doğruluk değeri ile aynı olduğunu, yani bu iki şartlı önermenin eş doğruluk değerlerine sahip olduğunu gösterelim:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Yukarıdaki tablodan, $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

q önermesinin değilinden başlayarak p önermesinin değilini elde ettiğimizi varsayalım. Yani, $\sim q \Rightarrow \sim p$ doğruluk değeri, doğru olan bir önerme olsun. Bu durumda, yukarıdaki denklitten $p \Rightarrow q$ önermesinin de doğruluk değeri doğrudur. Teoremin tanımından p doğru önerme olacağından q önermesi doğrudur. Yani p, q 'yu gerektirir.

ÖRNEK TEOREM: a, b aralarında asal olan tamsayı $\Rightarrow \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ dir.

[$p: a, b$ aralarında asal tamsayıdır, $q: \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$]

İSPAT:

$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ olsun [$\sim q$ 'dan hareket ediliyor]. Bu durumda, $\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ çifttir, dolayısıyla a çifttir. Yani, $a=2n$ olacak biçimde bir n tamsayısı vardır. $(2n)^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2$ ise, b^2 çifttir, dolayısıyla b çifttir. a ile b çift ise 2 sayısı hem a 'yı hem de b 'yi tam böleceğinden, a ile b aralarında asal değildir [$\sim p$ elde ediliyor].

ÇELİŞKİ BULMA İSPAT METODU

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Yukarıdaki tablodan $p \Rightarrow q$ şartlı önermesi ile $\sim p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değerleri aynıdır. De Morgan kurallarından [$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ve $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$], $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ denkliği elde ederiz.

p önermesi ve q 'nın değilinden hareket ederek doğru bir önerme olduğunu bildiğimiz r önermesiyle çelişkiye düştüğümüzü, yani $\sim r$ 'yi elde ettiğimizi kabul edelim. Başka bir deyişle $p \wedge q \Rightarrow \sim r$ şartlı önermesinin doğruluk değeri doğru olsun. Kontrapozitiflikten dolayı, $p \wedge q \Rightarrow \sim r \equiv r \Rightarrow \sim(p \wedge q)$ denklğini elde ederiz. Bu denklikten, $r \Rightarrow \sim(p \wedge q)$ şartlı önermesi doğru ve r doğru bir önerme olduğundan $\sim(p \wedge q)$ önermesinin doğru olduğu sonucu çıkar. Buna göre (1) ile gösterilen denklikten $p \Rightarrow q$ teoreminin doğru olduğu sonucuna ulaşılır. O halde, p önermesi ve q nun değilinden başlayarak doğru bir önermeyle çelişkiye düşme esasına dayanan metoda çelişki bulma metodu denir.

ÖRNEK TEOREM : $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. f , bire-bir fonksiyon $\Rightarrow f'(f(A)) = A$ dir. $[p: f, \text{ bire-bir fonksiyon}, q: f'(f(A)) = A]$

İSPAT : f , bire-bir fonksiyon ve $f'(f(A)) \neq A$ olsun [p ve $\sim q$ 'dan hareket ediliyor].

Her zaman $A \subset f'(f(A))$ olduğundan (neden?), $f'(f(A)) \not\subset A$ dir. Bu durumda $\exists x \in f'(f(A)) \ni x \notin A$ dir [r önermesi olarak $x \notin A$ önermesini alalım]. $f(x) = y \in f(A)$ ise $\exists a \in A \ni f(a) = y$ dir. $y = f(a) = f(x)$ ve f , bire-bir fonksiyon olduğundan $x = a$ dir. O halde $x \in A$ dir [r önermesiyle çelişkiye düştük, yani $\sim r$ önermesini elde ettik].

TÜMEVARIM METODU

Tümevarım metodu, önermenin değişkenlerinin kümesi olarak, doğal sayılar ya da doğal sayıların boştan farklı bir alt kümesi alındığında kullanılır. Doğal sayılar kümesinin boştan farklı bir alt kümesi D olsun. D tam sıralı bir kümedir. D 'nin en küçük elemanı vardır ve bu eleman a olsun. Verilen $P(n)$ önermesi için $P(a)$ doğru ise D kümesinin her k elemanı için $P(k)$ önermesinin doğru olduğunu varsayalım. $P(k+1)$ doğru bir önerme olduğunu gösterirsek, D kümesi üzerinde $P(n)$ önermesinin ispatını gerçekleştirmiş oluruz. Çünkü, $P(a)$ doğru ise $P(a+1)$ doğru bir önermedir. Bu şekilde; $P(a+2)$, $P(a+3)$, ..., $P(a+n)$ doğru olacağından D 'nin her elemanı için $P(n)$ önermesi doğru olur.

Bu metot teknik olarak farklı fakat doğrudan ispat metodu sınıfına sokabiliriz.

ÖRNEK TEOREM: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

İSPAT : (i) $n=1$ için $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ doğrudur.

(ii) $n=k$ için verilen önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ doğru olsun.

Şimdi $n=k+1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$1+2+\dots+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ dir.}$$

$n=k+1$ için de önermemiz doğrulandığından ispat tamamlanmış olur.

MANTIK PRENSİPLERİNDEN YARARLANARAK ELDE EDİLEN BAZI İSPAT METOTLARI

Mantık kurallarına bağlı kalarak bir çok ispat metotları geliştirilebilir. Biz burada çok kullanılan iki tane metodu vereceğiz.

1) $p \wedge q \Rightarrow r$ tipinde bir teorem verilmiş ise,

$$p \wedge q \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r \equiv \sim p \vee \sim q \vee r \equiv (\sim p \vee r) \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim q \equiv p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q$$

Şimdi, p önermesinin kendisi ve r 'nin değilinden başlayarak q önermesinin değilini elde ettiğimizi varsayalım. Yani, $p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q$ doğruluk değeri doğru olan bir önerme olsun. Bu durumda, yukarıdaki denkliklerden $p \wedge q \Rightarrow r$ önermesi de doğruluk değeri doğru olan bir önermedir. Teoremin tanımından $p \wedge q$ doğruluk değeri, doğru olan bir önerme olacağından r doğru bir önerme olacaktır, yani $p \wedge q$, r 'yi gerektirir.

ÖRNEK TEOREM: $A \subset B$ ve $B \subset A \Rightarrow A=B$ dir [$P: A \subset B$, $q: B \subset A$, $r: A=B$].

İSPAT: $A \subset B$ ve $A \neq B$ olsun [p ve $\sim r$ den hareket ediliyor].

Bu durumda en az bir x elemanı B kümesinin elemanı iken A kümesinin elemanı değildir. O halde, $B \not\subset A$ dir. [$\sim q$ önermesi elde ediliyor.]

2) $p \Rightarrow q \vee r$ tipinde bir teorem verilmiş ise;

$$p \Rightarrow q \vee r \equiv \sim p \vee q \vee r \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee r \equiv p \wedge \sim q \Rightarrow r$$

Şimdi, p önermesinin kendisi ve q 'nın değilinden hareket ederek r önermesini elde ettiğimizi varsayalım. Yani, $p \wedge \sim q \Rightarrow r$ doğruluk değeri doğru olan bir önermedir. Bu durumda, yukarıdaki denkliklerden $p \Rightarrow q \vee r$ önermesi de doğruluk değeri doğru olan bir önermedir. Teoremin tanımından p doğruluk değeri, doğru olan bir önerme olacağından $q \vee r$ doğru bir önermedir, yani p , $q \vee r$ 'yi gerektirir.

ÖRNEK TEOREM:

t bir asal sayı ve $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

t sayısı ab 'yi tam böler $\Rightarrow t$, a 'yı tam böler veya t , b 'yi tam böler.

[p : t sayısı ab 'yi tam böler, q : t , a 'yı tam böler, r : t , b 'yi tam böler]

İSPAT:

t sayısı ab 'yi tam bölün ve t , a 'yı tam bölmesin [p ve $\sim q$ dan hareket ediliyor]. Bu durumda, t ile a aralarında asaldır. t , ab 'yi tam böldüğüne göre t , b 'yi tam böler [r önermesi elde ediliyor].

KAYNAKÇA

[1] Mustafa Çiçek: Genel Topoloji Ders Notları, Ankara Ü., Fen Fak, 1993

[2] S.Balcı: Modern Cebire Giriş, Ankara Ü., Fen Fak. Y, 1993

[3] D.Hilbert and W. Ackermann: Mathematical Logic, Chelsea P.C, 1950

[4] Türk Dil Kurumu, Matematik Terimleri Sözlüğü, 2000

FUTBOL VE Pİ SAYISI

Ogün Doğru

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ANKARA

Bildiğimiz gibi futbol oyunu hem ülkemizin hem de dünyanın en çok sevilen ve taraftar bulan oyunudur. Bu yazıda $\pi \approx 3.141592...$ sayısı ile futbol oyun kuralları, futbolcu sayıları ve saha ölçüleri arasında kurulan ve π sayısını veren bağıntılara yer verdik.

Bildiğimiz gibi futbol oyunu $11 + 11 = 22$ kişiden oluşan iki takım tarafından oynanan bir oyundur. Futbolda, başlama vuruşu, kale vuruşu, köşe vuruşu, penaltı vuruşu, direk vuruş, endirek vuruş ve taç atışı şeklinde 7 tane vuruş vardır. O halde ilk bağıntımız iki takımdaki futbolcu sayısının vuruş sayısına oranı olan ve π sayısını veren

$$\frac{22}{7} = 3.14 \approx \pi$$

bağıntısıdır.

Futbol topunun çevresi 71 cm. olup, topa etki eden futbolcu sayısı 22 ve her takımın 3 oyuncu değiştirme hakkına sahip olduğunu düşünürsek, $0.3 + 0.3 = 0.6$ olacağından topa etki eden oyuncu sayısı sayı 22.6'dır. Bunun futbol topuna oranı yine

$$\frac{71}{22.6} = 3.14159 \approx \pi$$

olur.

Ceza sahasının kaleye olan uzaklığı 16.5 m., kalenin yerden yüksekliği (kale direği dahil) 2.56 m. dir. Ceza sahasının kaleden uzaklığının 5 katının, kale yüksekliğinin 2 katının karesine oranı yani

$$\frac{5 \times 16.5}{(2 \times 2.56)^2} = 3.14 \approx \pi$$

olur.

Orta yuvarlağın yarıçapı 9.15 m., kalenin uzunluğu 7.32 m. ve kale çizgisinin genişliği 0.1 m. olup, orta yuvarlağın yarı çapının 5 katının, kale uzunluğunun 2 katından kale çizgisi farkına oranı yani

$$\frac{5 \times 9.15}{2 \times 7.32 - 0.1} = 3.14 \approx \pi$$

olur.

Köşe vuruşu yayının yarı çapı 1 m., saha uzunluğu 120 m., kale vuruşu çizgisinin kaleden uzaklığı 5.5 m. olup, köşe vuruşu yayının yarıçapı, saha uzunluğunun 2 katı, ceza sahasının kaleye uzaklığı ve kale vuruşu çizgisinin kaleye olan uzaklığı toplamının, orta yuvarlağın yarıçapının karesine oranı yine

$$\frac{1 + 2 \times 120 + 16.5 + 5.5}{(9.15)^2} = 3.141 \approx \pi$$

sayısına eşittir.

Burada futbolun bu kadar sevilmesinin bu ölçütlerde biraz da matematiğe bağlı olduğunu söylersek hiç fena olmaz herhalde...

KAYNAKÇA

- [1] Türkiye Futbol Federasyonu, FIFA Futbol Oyun Kuralları, Afşaroğlu Matbaası, Ankara, (1997)
- [2] Galatasaray Spor Kulübü, 1905, <http://www.galatasaray.org.tr>

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 15 Haziran 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama: Yarışma Sorularının doğru çözümlerini gönderenlerin isimleri dergide belirtilecektir.

– 2002 senesi boyunca en fazla doğru çözüm gönderenler arasından en az ilk 3 kişiye ödül olarak Matematik Dünyası 2003 yılı aboneliği ve yazarların imzası ile Matematik kitapları verilecektir.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.256. 2000^{2003} sayısı birkaç tane ardışık tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilir mi?

A.257. ABC üçgeninde $[BL]$ ve $[AK]$ açıortaylarını çizilmiştir. $[KL]$ de AKC üçgeninin açıortayı ise, BAC açısını bulunuz.

A.258. Okuldaki 15 sınıftan toplam 100 kişi alındı. En az iki sınıftan aynı sayıda öğrenci alınmış olduğunu gösteriniz.

A.259. x pozitif gerçel sayı olmak üzere $\frac{x^3}{8} + \frac{6}{x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

A.260. $a_1, a_2, a_3, \dots$ dizisinde $a_1 = 2002, a_2 = 2001$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ise, a_{2002} 'yi bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.256. $4(a+b+c) = ab+bc+ca$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Y.257. ABC ikizkenar üçgeninde ($|AB| = |BC|$), $s(\widehat{ABC}) = 80^\circ$ dir ve $s(\widehat{OAC}) = 40^\circ, s(\widehat{OCA}) = 30^\circ$ olmak üzere üçgenin içerisinde bir O noktası alınmıştır. $s(\widehat{BOC})$ 'yi bulunuz.

Y.258. Dışbükey 2002-genin köşelerinde birer tane bilye bulunur. Her adımda bilyelerden bazıları aynı vektör boyunca ötelenebilir. En az kaç adımda tüm bilyeler aynı doğru üzerine getirilebilir?

Y.259. Artan $f : R \rightarrow R$ fonksiyonu her $x \in R$ için $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlar (yani, f tek fonksiyondur). Herhangi a, b, c sayıları için $a + b + c = 0$ ise, $f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Y.260. Düzgün 30-genin köşelerine 1'den 30'a kadar tam sayılar yerleştirilmiştir. Her adımda iki komşu sayı yer değiştirebilir. Bir kaç böyle adımdan sonra her sayı tam karşıdaki köşeye geçmiştir. Bu adımların en az birinde toplamı 31 olan iki sayının yer değiştirdiğini kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

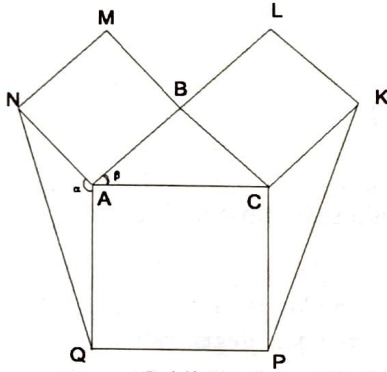
A.246. n pozitif tamsayısı 3'ün katı değilse, her birinin basamakları toplamı n 'ye bölünen iki ardışık pozitif tamsayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. $S(a)$ ile a sayısının basamakları toplamını gösterelim. İki ardışık m ve $m + 1$ sayılarını aldığımızda m sayısı 9'la bitmezse, $s(m+1) = s(m) + 1$ olduğundan $s(m+1)$ ve $s(m)$ sayıları aynı zamanda n 'ye bölünemez ($n \neq 1$). Dolayısıyla m sayısını 9'la biten sayılar arasında aramamız gerekir. m sayısı tam olarak k tane 9'la bitiyorsa $s(m+1) = s(m) - 9k + 1$ olacak. O halde m sayısını, $n|s(m)$ ve $n|(9k-1)$ olacak şekilde almamız yeterlidir. $9 \cdot 1 - 1, 9 \cdot 2 - 1, 9 \cdot 3 - 1, \dots, 9n - 1$ sayılarından hiçbirisi n 'e bölünmezse, $9s - 1 \equiv 9t - 1 \pmod{n}$ olacak şekilde iki $1 \leq s \leq t \leq n$ sayıları bulunacak. O halde, n ile 9 aralarında asal olduğundan $n|[9(t-s)]$ den $n|(t-s)$ elde ederiz. Çelişki! Böylece, $n|(9k-1)$ olacak şekilde bir pozitif tam k sayısı bulunur. Şimdi m olarak, ilk $n - 1$ basamağı 1, geriye kalan k basamağı 9 olan $k - 1$ basamaklı bir sayı alırsak, $s(m) = n + (9k - 1)$ ve $s(m+1) = n + 9k - 1 - 9k + 1 = n$ sayıları n 'e bölünür.

A.247. ABC üçgeninin kenarları üzerinde dışa yönelik $ABMN, BCKL, ACPQ$ kareleri

çizilmiştir. QN ve KP doğru parçaları üzerinde $QNTZ$ ve $KPXY$ kareleri çizilmiştir. $ABMN$ ve $BCKL$ karelerinin alanları farkı d ise $QNTZ$ ve $KPXY$ karelerinin alanları farkını bulunuz.

Çözüm. Kosinüs teoreminden $|QN|^2 = |AQ|^2 +$



Şekil 1

$|AN|^2 - 2|AN| \cdot |AQ| \cdot \cos \alpha$; $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \beta$. $\alpha + \beta = 180^\circ$ olduğundan, $\cos \alpha = -\cos \beta$ elde ederiz. Dolayısıyla, $|QN|^2 + |BC|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2$. Benzer şekilde, $|KP|^2 + |AB|^2 = 2|BC|^2 + 2|AC|^2$. O halde aranan alanlar farkı $|QN|^2 - |KP|^2 = 3|AB|^2 - 3|BC|^2 = 3d$ olacak.

A.248. Kutuda mavi ve kırmızı olmak üzere toplam 30 tane bilye bulunur. Herhangi 12 tane bilyeden enaz biri mavidir, herhangi 20 bilyeden enaz biri kırmızıdır. Sepetteki mavi ve kırmızı bilyelerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Mavi bilyelerin sayısını m , kırmızı bilyelerin sayısını da k ile gösterelim. Kırmızı bilyelerin sayısı 11'den büyük olsaydı, mavi olmayan 12 bilye alabilecektik, dolayısıyla $k \leq 11$ 'dir. $m > 19$ olsaydı, 20 tane mavi (yani kırmızı olmayan) bilye alabilecektik, dolayısıyla $m \leq 19$ 'dur. $k+m = 30$ olduğundan, $k = 11, m = 19$ olmak zorundadır.

A.249. Liseden birkaç kişi ayrıldıktan ve birkaç kişi liseye katıldıktan sonra öğrenci sayısı %10 azaldı, erkek öğrencilerin sayısı %50'den %55'e çıktı. Erkek öğrenci sayısı arttı mı, azaldı mı?

Çözüm. Başlangıçta lisedeki öğrenci sayısı a olsun. O halde başlangıçta erkek öğrenci sayısı

$\frac{a}{2}$ 'dir. Öğrenci sayısı %10 azaldıktan sonra $\frac{90a}{100} = \frac{9a}{10}$, erkek öğrenciler de bunların %55, yani, $\frac{9a}{10} \cdot \frac{55}{100} = \frac{99a}{200}$ olacak. $\frac{a}{2} > \frac{99a}{200}$ olduğundan erkek öğrenci sayısı azalmış olacak.

A.250. Bir aile gece köprüye yaklaştı. Baba köprüyü 1 dakikada, anne 2 dakikada, çocuk 5 dakikada, büyükanne 10 dakikada geçebilir. Köprüden aynı anda en fazla 2 kişi geçebilir ve ailenin tek bir lambası bulunmaktadır. Aile 17 dakikada köprüyü nasıl geçebilir? (Köprüyü lambasız geçmek mümkün değil ve köprü uzaktan aydınlatılamaz.)

Çözüm. Önce baba ile anne köprüyü 2 dakikada geçer ve baba 1 dakikada lamba ile geriye döner. Sonra çocukla büyükanne 10 dakikada köprüyü geçer. Anne 2 dakikada lamba ile geriye döner. En son baba ile anne yeniden köprüyü 2 dakikada geçer. Böylece toplam $2+1+10+2+2$ dakikada ailenin tamamı köprüyü geçmiş olacak.

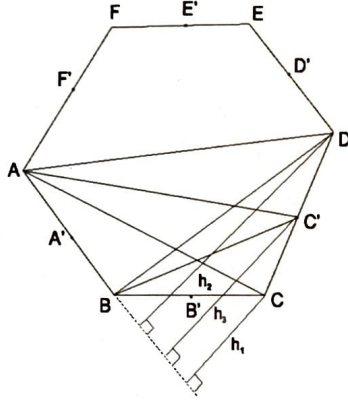
Y.246. $A, 2A, 3A, \dots, 500000A$ sayılarından hiçbirisinin son 6 basamağı birbirine eşit (yani aaaaaa şeklinde) olmayacak biçimde bir altı basamaklı A sayısı bulunur mu?

Çözüm. A sayısını $OBEBA(A, 10) = 1$ şeklinde alırsak, $A, 2A, \dots, 10^6 A$ sayılarının hepsi 10^6 moduna göre birbirinden farklı olacak. Gerçekten $0 < m < k < 10^6$ olmak üzere m ve k sayıları için $mA \equiv kA \pmod{10^6}$ sağlanırsa, $10^6 | (k-m)A$, buradan da $10^6 | (k-m)$ olacak, bu da imkansızdır. Böylece $A, 2A, \dots, 10^6 A$ sayılarının son 6 basamaklarının oluşturduğu 6 basamaklı sayılar hepsi birbirinden farklı olacak ve bunların arasında 0'dan $(10^6 - 1)$ 'e kadar olan her bir sayıya tam olarak birer kez rastlanacak. O halde son 6 basamağı 111111, 222222, ..., 999999, 000000 olan sayıların son 6 basamaklarını (yani bu sayıların $10^6 A, (10^6 - 1)A, (10^6 - 2)A, \dots, (10^6 - 9)A$ olmasını) sağlayabilirsek, ilk 500000 (hatta ilk $10^6 - 10$) sayı arasında son 6 basamağı aaaaaa şeklinde olan sayıya rastlanmayacak. Bunun için $A = 10^6 - 111111 = 888889$ alalım. o halde $10^6 A = 0 \pmod{10^6}$, $(10^6 - 1)A \equiv 111111 \pmod{10^6}$ olacak ve her $m = 2, 3, \dots, 9$ için $(10^6 - m)A \equiv (-m)(-111111) \equiv (mmmmmm)_{10} \pmod{10^6}$ elde edilir.

Y.247. $ABCDEF$ dışbükey altıgeninin AB, BC, CD, DE, EF, FA kenarlarının orta noktaları sırasıyla A', B', C', D', E', F' olsun. $ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'$

üçgenlerinin alanları toplamı S ise, $ABCDEF$ altıgeninin alanını bulunuz.

Çözüm. $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ABC'$ üçgenlerinin C, D



ve C' köşelerinden çıkan yüksekliklerini sırasıyla h_1, h_2, h_3 ile gösterirsek, $h_3 = \frac{h_1+h_2}{2}$ olacak.

Dolayısıyla $A(\triangle ABC') = \frac{1}{2}(A(\triangle ABC) + A(\triangle ABD))$ 'dir. Benzer şekilde

$$A(\triangle BCD') = \frac{1}{2}(A(\triangle BCD) + A(\triangle BCE)),$$

$$A(\triangle CDE') = \frac{1}{2}(A(\triangle CDE) + A(\triangle CDF)),$$

$$A(\triangle DEF') = \frac{1}{2}(A(\triangle DEF) + A(\triangle DEA)),$$

$$A(\triangle EFA') = \frac{1}{2}(A(\triangle EFA) + A(\triangle EFB)),$$

$$A(\triangle FAB') = \frac{1}{2}(A(\triangle FAB) + A(\triangle FAC))$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi $ABCDEF$ altıgeninin x alanını bulmak için bu eşitliklerin toplamını alalım.

$$S = \frac{1}{2}[(A(\triangle ABC)) + A(\triangle F\hat{A}C) + A(\triangle C\hat{D}F) + A(\triangle D\hat{E}F) +$$

$$(A(\triangle ABD)) + A(\triangle B\hat{C}D) + A(\triangle D\hat{E}A) + A(\triangle E\hat{F}A) +$$

$$(A(\triangle BCE)) + A(\triangle C\hat{D}E) + A(\triangle E\hat{F}B) + A(\triangle F\hat{A}B))] = \frac{3x}{2}$$

Böylece $x = \frac{2S}{3}$ 'tür.

Y.248. 10 bankacı bir masa etrafında oturmuşlar ve her bir bankacının hesabında bir gerçel sayı yazılmıştır. Bu sayılar pozitif ve negatif olabilir. Bankacılar sırasıyla geriye kalan 9 kişinin herbirinin hesabına (işlemlerden önceki) kendi sayısının $\frac{1}{9}$ 'unu ekliyor, kendisine ise 0 yazıyor. Onuncu işlemten sonra bankacıların sayılarının ilk baştaki duruma gelemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm. Bankacıların hesabındaki pozitif sayıların toplamını p ile gösterelim. Herhangi bir işlem yapan bankacının hesabındaki para a negatifse, eklenen $\frac{a}{9}$ sayıları negatif olduğundan, işlem sonucu p sayısı artmayacak ve $p > 0$ ise, kesin azalacak. $a > 0$ ise, p sayısı en az $\frac{a}{9}$ kadar azalacak. O halde, hesabındaki para sıfırdan farklı olan ilk bankacının işleminden sonra p azalacak ve hiç artmadığı için ilk baştaki duruma dönmeyecek.

Y.249. $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ olmak üzere $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$ eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ gerçel sayıları verilmiştir. $a_1 \leq b_1$ ise $a_3 \leq b_3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ ve $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ polinomlarını alalım. Bu polinomların ilk 3 katsayıları $1, a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$ olduğundan, c bir sabit olmak üzere $Q(x) = P(x) + c$ yazabiliriz. $Q(x)$ 'in en küçük kökü b_1 olduğundan her $x \in (-\infty, b_1)$ için $Q(x) < 0$ 'dır. $a_1 \leq b_1$ olduğundan $c = P(a_1) + c = Q(a_1) \leq 0$ elde edilir. Dolayısıyla $Q(a_3) = P(a_3) + c = c \leq 0$ 'dır. $Q(x)$ 'in en büyük kökü b_3 olduğundan her $x \in (b_3, \infty)$ için $Q(x) > 0$ 'dır. o halde $a_3 > b_3$ olsaydı $Q(a_3) > 0$ olacaktı. Dolayısıyla $a_3 \leq b_3$.

Y.250. Bir dışbükey n -gende, her köşegen en fazla bir başka köşegenle kesişecek şekilde en fazla kaç köşegen çizilebilir? (Köşegenler aynı köşeden çıkıyorsa, bu köşe kesişim noktası olarak kabul edilmiyor.)

Çözüm. $n = 2k$ ise, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2k}$ çokgeninin önce $[A_1A_3], [A_1A_4], [A_1A_5], \dots, [A_1A_{2k-1}]$ köşegenlerini (bunların sayısı $(n-3)$ 'tür), sonra $[A_1A_4], [A_4A_6], [A_6A_8], \dots, [A_{2k-2}, A_{2k}]$ köşegenlerini çizersek (bunlar da $k-1$ tanedir), sadece

$[A_1A_{2i+1}]$ ve $[A_{2i}A_{2i+2}]$ köşegenleri kesişecek ($i = 1, 2, \dots, k-1$), dolayısıyla bu köşegenleri problemin koşulunu sağlar. Toplam çizilen köşegen

sayısı $n - 3 + k - 1 = \frac{3n}{2} - 4$ olacak. Benzer şekilde, $n = 2k + 1$ ise, $[A_1 A_3], [A_1 A_4], \dots, [A_1 A_{2k}]$ ve $[A_2 A_4], [A_4, A_6], \dots, [A_{2k-2}, A_{2k}]$ köşegenleri koşulu sağlayacak ve bu köşegenlerin sayısı $n - 3 + k - 1 = \frac{3n}{2} - 4 - \frac{1}{2}$ olacak. Her iki durumda $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 4$ tane köşegen çizilmiş olacaktır ($\lfloor a \rfloor$, a sayısının tam değerini göstermektedir). Bu sayının üst sınır olduğunu tümevarımla gösterelim. $n = 3$ ve $n = 4$ için her şey açıktır. Şimdi her $k < n$ için iddianın doğru olduğunu varsayarak n için de doğru olduğunu varsayarak n için de doğru olduğunu gösterelim. $n > 4$ kabul edebiliriz. Problemin koşulu sağlanacak şekilde köşegenler çizilmiş olsun. Hiçbir çizilmiş köşegenle kesismeyen bir köşegen (çizilmiş veya çizilmemiş) bulunduğunu gösterelim. Herhangi bir çizilmiş $[AB]$ köşegeni alalım. $[AB]$ aradığımız köşegen değilse, yanibaska bir çizilmiş $[CD]$ köşegeni ile kesişiyorsa, $n > 4$ olduğundan $[AC], [CB], [BD], [DA]$ doğru parçalarından en az bir (diyelim $[AC]$ köşegeni hiçbir başka çizilmiş köşegenle kesişemez, çünkü $[AC]$ ile kesişen köşegen ya $[AB]$ ya da $[BC]$ ile kesişmek zorundadır. Böylece hiçbir çizilmemiş köşegenle kesişmeyen bir $[XY]$ köşegeni bulunur. $[XY]$ köşegeni çokgeni iki çokgene bölecek: bunlar m -gen ve k -gen olsun. O halde $m + k = n + 2$ ve $m, k < n$ olacak. n -genin çizilmiş köşegenlerinin her biri ya m -genin, ya k -genin köşegenidir, ya da $[XY]$ 'dir. Tümevarımın varsayımından n -genin çizilmiş köşegenlerinin sayısı en fazla

$$(\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor - 4) + (\lfloor \frac{3k}{2} \rfloor - 4) + 1 \leq$$

$$\lfloor \frac{3(m+k)}{2} \rfloor - 7 = \lfloor \frac{3(n+2)}{2} \rfloor - 7 = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 4$$

olabilir.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla, İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da
mdunyasi@galois.iyte.edu.tr adresine elektronik
posta ile gönderilmelidir.



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

XV. Ulusal Matematik Sempozyumu

4-7 Eylül 2002. Mersin



Eski ciltler aşağıdaki dernek adresin temin edilebilir:

Türk Matematik Derneği Sabancı Üniversitesi Karaköy İletişim Merkezi Bankalar Cad. No:2
80020 Karaköy-İSTANBUL
Tel: (0212) 292 4939/1506 Faks: (0212) 252 3293
h.senkon@iku.edu.tr tmd@sabanciuniv.edu.tr



PEKER

MATBAACILIK ve TİCARET Tel: 0(232) 459 15 61 - 459 32 90 Fax: 459 23 41