

EYLÜL 2002

CİLT 11

SAYI:4

ISSN-1300-624X

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Geometrik Optimalleştirme Problemleri Üzerine I
G.Adilov - R.Tınaztepe

İkiz Asal Sayılar Üzerine
U.G.Nuriyev - Halide G.Sadıgova

Çizge Kuramına Genel Bir Bakış
Gökşen Bacak - Tina Beşeri

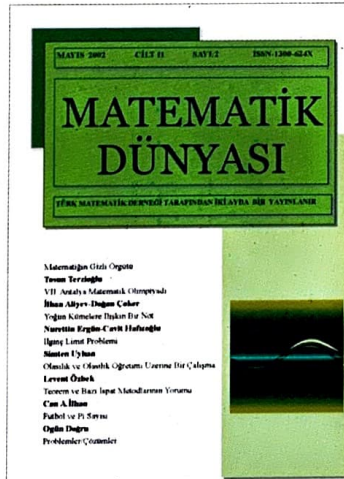
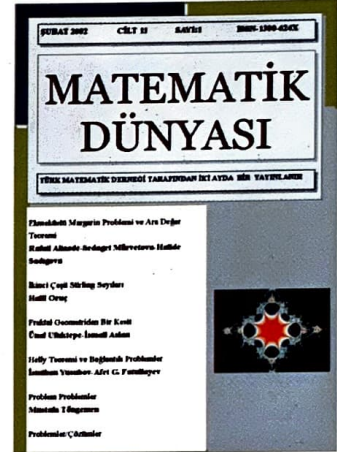
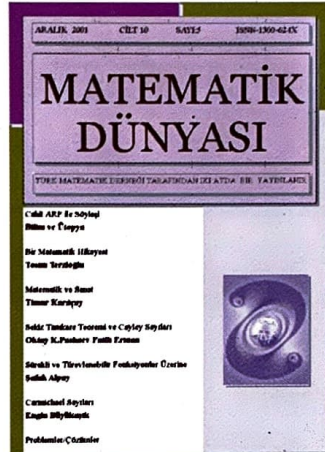
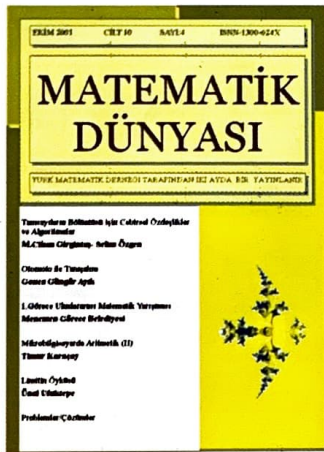
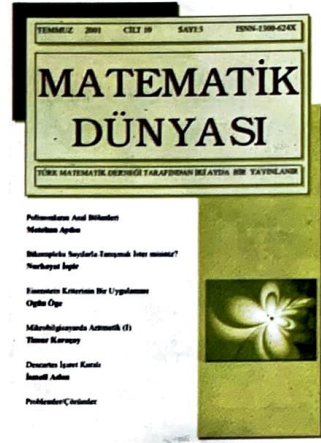
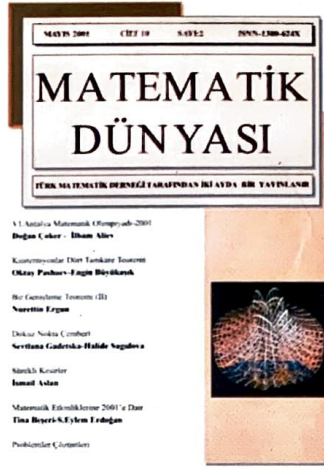
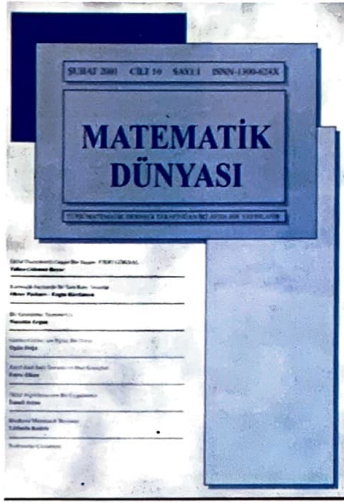
Matematikçi Gözü İle Kıbrıs Sorunu
İbrahim Cahit Arkut

Dört İşlemde İlginç Oyunlar
Murat Atmaca

Cahit Arf Matematik Günleri
Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü

Problemler / Çözümler





Eski ciltler aşağıdaki dernek adresinden temin edilebilir:

Türk Matematik Derneği Sabancı Üniversitesi Karaköy İletişim Merkezi Bankalar Cad. No:2
80020 Karaköy-İSTANBUL

Tel: (0212) 292 4939/1506 Faks: (0212) 252 3293

h.senkon@iku.edu.tr tmd@sabanciuniv.edu.tr

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Zamanı durdurmak mümkün değil. Herşey hızlı değişiyor. Değişimler bazen bizi şaşırtabiliyor ama Matematik Dünyası dinamik yapısını korumakta kararlı. Matematik Dünyasındaki değişim daha çok düşün kulesinin burçlarının gökyüzünün mavilikleri ile kucaklaşma yönünde. Matematik dünyası 11. yaşını doldurmak üzere. Gelecek sayımızdan sonra 12. cildimiz İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümünce hazırlanacak. Bu konudaki ayrıntılı bilgiler 5. sayıda duyurulacaktır.

Bu sayımızda konu bütünlüğünün bozulmaması için Geometri, Sayılar Kuramı ve Çizge Kuramı üzerine olan yazıları hiç bölmeden vermeyi uygun gördük. Matematik yarışmaları üzerine yazılara yer vermeye devam ediyoruz. Özellikle ilköğretim ve orta öğretim öğrencileri ve öğretmenlerinin zevkle okuyacaklarını düşündüğümüz Dört İşlemlere yönelik zihinsel oyunlar ilgi gördüğü taktirde gelecek sayımızda da bu konuya dair ilginç oyunlar vermeye devam edeceğiz.

Bizi İstanbul'da Türk Matematik Derneğinden, Ankara'da ODTÜ kitap satış birimi, Matematik Vakfı ve Dost Kitapevinden, İzmir'de Kabile ve İletişim kitapevlerinden sormayı unutmayın.

MATEMATİK DÜNYASI

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, Murat Atmaca, Behiye Ubuz

DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın , Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gun ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. MÜD. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2002) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 12.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 10.000.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Galata (İstanbul) Şubesi 1021 304400 982751 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir). Parakende satış fiyatı 3.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35435-İZMİR

Abone İşleri ve Dağıtım: Tina Beşeri-Günnur Ufuktepe 0 (232) 4987525-4987541, Dizgi: Hakan Kutucu, Faks : 0(232) 4987509-4987598 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Geometrik Optimalleştirme Problemleri Üzerine I G. Adilov - R. Tınaztepe	2
İkiz Asal Sayılar Üzerine U.G. Nuriyev - Halide G. Sadıgova	6
Çizge Kuramına Genel Bir Bakış Gökşen Bacak- Tina Beşeri	13
Matematikçi Gözü İle Kıbrıs Sorunu İbrahim Cahit Arkut	19
Dört İşlemlerde İlginç Oyunlar Murat Atmaca	25
Cahit Arf Matematik Günleri Bilgi Üniv. Matematik Bölümü	27
Problemler ve Çözümleri Rafail Alizade	29

GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ ÜZERİNE I

Gabil Adilov-Ramazan Tınaztepe

gabil@pascal.sci.akdeniz.edu.tr-rtinaztepe@yahoo.com

Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

İnsanlar ilk çağlardan beri gelirlerini maksimumlaştırma veya harcamalarını minimumlaştırma problemiyle karşılaşmışlardır. Bu tür problemler, medeniyetin ilerlemesiyle, kişiler kadar toplumların da problemi olmuştur. Bu problemlerin çözümüne yönelik çalışmalar günümüzde optimalleştirme teorisini ortaya çıkarmıştır. Bu teorisin uğraştığı problemler genel biçimiyle aşağıdaki gibidir.

$$\text{opt}f(x) \quad \text{for } x \in X \subset B \quad (1)$$

Burada B bir uzay, X kümesi B 'nin bir altkümesi, $f : X \rightarrow R$ bir fonksiyondur, opt işareti $\max$ ya da $\min$ olarak anlaşılır. Buna göre yukarıdaki problem şu şekildedir: x değişkeninin X kümesindeki hangi değeri için f fonksiyonu minimum ya da maksimum değerini alır ve bu değer nedir? Örneğin, $f(x) = x^2$ olmak üzere $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ kümesi üzerinde f fonksiyonunun minimumunu bulunuz (maksimumunu bulunuz).

Bu çok basit bir örnek olmasına rağmen problemde f , X ve B farklı alındığında daha zor ve karmaşık problemler ortaya çıkar. B uzayı R , R^n vb., X kümesi sonlu, konveks, açık veya kapalı, tüm uzay vb., f fonksiyonu doğrusal, konveks, türevlenebilir olabilir. Örneğin, f doğrusal, $X \subset R^n$ bir çokyüzlü alınırsa doğrusal bir optimalleştirme problemi ortaya çıkar. X tamsayılar kümesi seçilirse, problem biraz daha değişip Optimalleştirme teorisinin tamsayı programlama denilen bir dalına girer. Daha farklı değişiklikler yaparak optimalleştirme teorisinin daha karmaşık dallarına, sonsuz boyutlu optimalleştirme problemlerine girilebilir.

Optimalleştirme Teorisi klasik analizin bir dalı olarak ortaya çıkmış ve buna Newton, Lagrange, Euler, Schneider, Dirichlet ve Weierstrass gibi ünlü matematikçilerin büyük katkıları olmuştur. Bilgisayar teknolojileriyle birlikte bu teori son 50 yılda daha büyük hızla gelişmiştir.

Klasik analiz yöntemleriyle (1) probleminin basit hallerinin incelenmesi, lise kitaplarında da anlatılmaktadır: türev konusunda türevlenebilir bir fonksiyonun bir bölgede minimum ya da maksimumunun bulunması gibi. Bu yazıda geometri ile ilgili optimalleştirme problemlerinden bahsedeceğiz.

GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ: Geometride karşılaşılan

optimalleştirme problemlerinin büyük bir kısmı, aşağıda göreceğiniz gibi, belirli bir bölgede optimal noktayı (yada noktaları) bulma problemleridir. Bu tür problemlerin özel geometrik yöntemlerle incelenmesi büyük yarar sağlamaktadır. Örneğin,

Problem 1: A ve B noktaları, ℓ doğrusunun zıt taraflarında olsunlar. Bu durumda ℓ üzerinde olan, A 'ya ve B 'ye uzaklıkları farkının mutlak değerini maksimum yapan noktayı bulunuz.

Verilen ℓ doğrusu x eksenini, noktalar ise $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ olmak üzere bu problemi (1) biçiminde şöyle ifade edebiliriz: $f(x) = |\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2} - \sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}|$ fonksiyonunu maksimum yapan $C(x, 0)$ noktasını bulunuz. Görüldüğü gibi bu problemin klasik analiz yöntemleri ile incelenmesi bayağı zor olmasına rağmen, geometrik yöntemlerle çok basitçe çözülebilir:

Şekil 1'de B' noktası ℓ doğrusuna göre B noktasına simetriktir. ℓ üzerindeki her C' noktası için $\|AC'\| - \|C'B\| = \|AC'\| - \|C'B'\| \leq \|AB'\| = \|AC'\| - \|B'C'\| = \|AC'\| - \|BC'\| \Rightarrow C$ noktası optimal çözümdür.

Eğer B ve A noktaları simetrik ise, ℓ üzerindeki her C noktası için $\|AC\| - \|BC\| = 0$ olur. A ve B noktaları ℓ doğrusundan aynı uzaklıkta, fakat simetrik değillerse, problemin çözümü yoktur.

Bu sınıftan olan klasik iki probleme daha bakalım.

Problem 2: Köşeleri verilmiş ABC üçgeninin kenarları üzerinde olmak üzere en küçük çevre uzunluğu sahip üçgeni bulunuz.

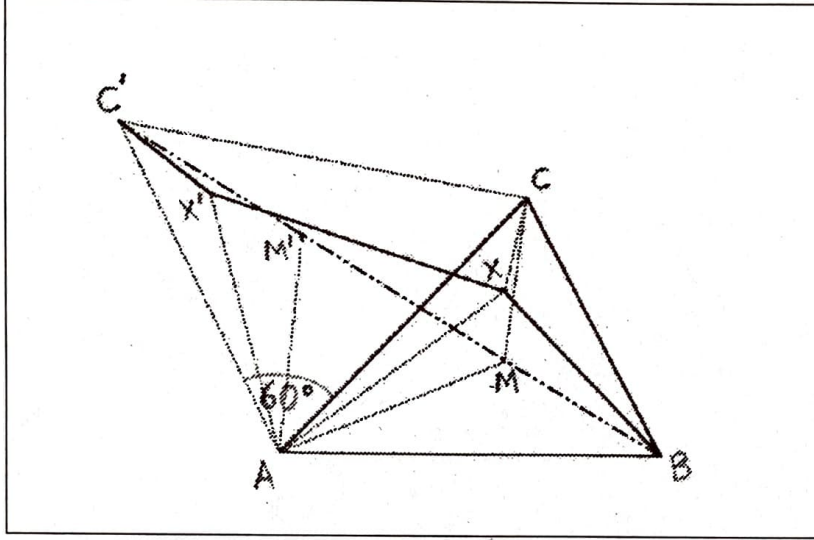
üçgen için optimal çözüm yüksekliklerin tabanıdır.

II. $\angle A \geq 90^\circ$ (veya $\angle B \geq 90^\circ$) olabilir. Bu durum yozlaşma halidir, yani $P_0 = A = N_0$ olur. Bundan dolayı çevre uzunluğu $2|AM_0|$ olan AAM_0 üçgeni alınır.

Bu problem daha genel haller için de çözülebilir. Bunu okuyucuya bir alıştırma olarak bırakıyoruz.

Problem 2' : m, n, p pozitif reel sayıları ve bir ABC üçgeni verilmiş olsun. Köşeleri ABC üçgeninin kenarları üzerinde bulunmak koşuluyla öyle bir XYZ üçgeni bulunuz ki, $m|XY| + n|XZ| + p|ZY|$ ifadesi en küçük olsun.

Problem 3: Düzlem üzerinde verilmiş ABC üçgeninin köşelerinden uzaklıkları toplamı en az olan noktayı bulunuz.



Şekil 3a

Çözüm: Önce, problemi üçgenin içindeki noktalar için çözelim. X üçgen içinde herhangi bir nokta olsun. ACX üçgenini A noktası merkez olmak koşuluyla 60° sola döndürelim. Yeni durumda oluşan üçgen $AC'X'$ olsun. Bu durumda $|AX| = |X'X'|$ ve $|CX| = |C'X'|$ olduğundan $|CX| + |AX| + |BX| = |C'X'XB|$ olur. Optimal X noktası öyle olmalıdır ki $C'X'XB$ çizgisinin uzunluğu en küçük olsun.

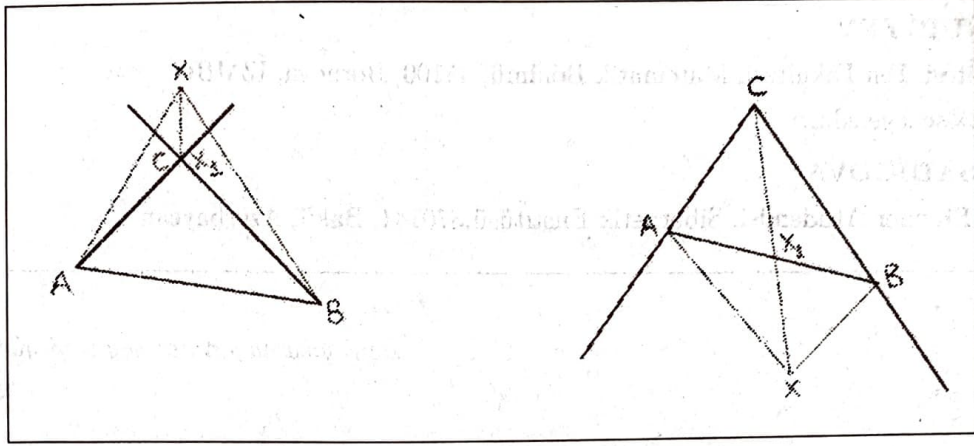
1. Durum. BC' parçası AC kenarını keser. Dolayısıyla $\angle BCC' < 180^\circ$ ve $\angle BAC' < 180^\circ$ olur. Bu nedenle $\angle A < 120^\circ$ ve $\angle C < 120^\circ$ olur. Buradan $C'B$ üzerinde olup $\angle C'MA < 60^\circ$ koşulunu sağlayan M noktasının optimal nokta olacağı açıktır. Üçgen içinde böyle bir nokta var ise, $\angle AMB = \angle CMB = \angle AMC = 120^\circ$ olur. Bu durumda $\angle CBA < 120^\circ$ olmalıdır. Eğer $\angle CBA \geq 120^\circ$ ise optimal nokta B noktası olur.

2. Durum. $C'B$ parçası AC kenarını kesmesin. Bu durumda $\angle C \geq 120^\circ$ (veya $\angle A \geq 120^\circ$) olur. Bu halde $C'X'XB$ çizgisi yerine $C'CB$ çizgisi götürülür ve C optimal nokta olur (benzer şekilde $\angle A \geq 120^\circ$ olursa optimal nokta A noktası olur).

Şimdi üçgenin dışında optimal bir nokta olmadığını gösterelim. X , ABC üçgeninin dışında bir nokta olsun. Bu durumda üçgenin sınırında, $|X_1A| + |X_1B| + |X_1C| < |XA| + |XB| + |XC|$ eşitsizliğini sağlayan bir X_1 noktasının var olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durum, X noktası C açısının aralığına düştüğünde Şekil 3(b) ve 3(c)'de görülür. Benzer şekilde diğer A ve B açıları için de aynı durum sözkonusudur.

Bu problemin de genelleştirmesinin incelenmesini okuyucuya bırakıyoruz:

Problem 3'. m, n, p pozitif reel sayıları ve ABC üçgeni verilmiş olsun. Bu durumda ABC üçgeninin



Şekil 3b ve 3c

verildiği düzlem üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu noktanın A, B, C köşelerinden uzaklıklarının, sırasıyla, m, n, p ile çarpımlarının toplamı en az olsun.

Not 1. Her bir geometrik optimalleştirme problemi belli bir fiziksel, ekonomik, biyolojik vb. problemin matematiksel modeli olabilir. Örneğin, problem 3'ü ekonomik bir problem biçiminde şöyle söyleyebiliriz: Yapılması planlanan üretim merkezi ürünlerini belli A, B, C tüketim merkezlerine m, n, p oranında dağıtmalıdır. Söz konusu üretim merkezi nerede yapılmalıdır ki, yol masrafı (ulaştırma masrafı) en az olsun.

Burada, bu konuyla ilgili birkaç alıştırmanın okuyucularımız için ilginç olacağını düşünüyoruz.

ALİŞTIRMALAR

P1. Bir açı ve içinde bir nokta verilmiştir. Bu noktadan öyle bir doğru geçirin ki,

- a) alınan üçgenin alanı en az olsun;
- b) alınan üçgenin çevresi en az olsun.

P2. Aşağıdaki koşulları sağlayan en küçük çevre uzunluğuna sahip olan ABC üçgenini bulunuz:

- a) A ve B noktaları sabit olup, C köşesi verilmiş bir ℓ doğrusu üzerindedir.
- b) A noktası sabit olup, B ve C sırasıyla verilmiş ℓ ve m doğruları üzerindedir.
- c) A, B ve C noktaları, sırasıyla, verilmiş ℓ, m ve n doğruları üzerindedir.

P3. Verilmiş bir ABC üçgeni içinde, aşağıdaki koşulları sağlayan noktalar bulunuz:

- a) Köşe noktalarına olan uzaklıklarının karelerinin toplamı en az olsun;
- b) Kenarlara olan uzaklıklarının karelerinin toplamı en az olsun.

P4. Verilmiş bir çemberin içine çizilebilecek, kenar uzunluklarının karelerinin toplamı en büyük olan üçgeni bulunuz.

UYARI: Problem 2 ile P2(c) problemleri benzer görünmelerine rağmen, farklı problemlerdir.

Burada üçgenler için verilmiş birçok problemi dörtgen, beşgen ve diğer çokgenler için de uygun biçimde genelleştirip incelemek mümkündür.

KAYNAKLAR

- [1] D.O. Schliarski, N.N. Chentsov, İ.M. Yaglom, Geometriçeski nera venstra i zadaçi na maksimum i minimum. Nauka, Moskova, 1970.

İKİZ ASAL SAYILAR ÜZERİNE

Urfat G. NURİYEV

Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 35100; Bornova, İZMİR

e-mail: urfat@sci.ege.edu.tr

Halide G. SADİGOVA

Azerbaycan Bilimler Akademisi, Sibernetik Enstitüsü, 370141, Bakü, Azerbaycan

Beni yıkamayan her şey beni güçlendirir.

Nietsche

1. Giriş

Yakın zamanlara kadar sayılar teorisi matematiğin çok cazip, fakat hemen hemen hiç bir uygulaması olmayan bir alanıydı. Günümüzde kuramsal sayısal algoritmalar çeşitli şifreleme (kriptografi) sistemlerinde geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Bu tür sistemlerde kullanılmak üzere büyük asal sayıların bulunması gerekmektedir.

Bu yazıyla amaçlanan asal sayıların uygulama alanlarını ve bu alanda son zamanlardaki gelişmeleri tanıtmak ve ikiz asal sayıları bulmak için bir algoritma vermektir.

Bir zamanlar ilgi görmeyen alanlardan biri olan çarpanlara ayırma çalışmaları, şifreleme ve bilgisayar güvenliğiyle ilgili olduğu için bugün matematiğin en popüler alanlardan birisidir.

Günümüzdeki bilgisayarlar, son derece hızlı olmalarına rağmen büyük sayıların çarpanlarını doğrudan bulmayı başaramıyorlar. Bu, bir tamsayıyı çarpanlarına ayırmak için şimdiye kadar etkin bir yöntemin bulunamamasından kaynaklanmaktadır. Bu tür algoritmaların olmamasından dolayı farklı şifreleme sistemlerinin kullanılma olanağı ortaya çıkmıştır. Eğer böyle algoritmalar bulunursa bu sistemlerin hepsi çöker.

Böylece bazen bir algoritmanın olmaması onun olmasından daha yararlı olabilir. Bu, belki de insanlığın, matematiğin başarısından çok başarısızlığından yararlandığı tek durumdur.

2. Asal sayılar

Sayma sayılarına *pozitif tamsayılar* denir. Bu kümeyi

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

ile gösterelim. Yalnızca 1 ve kendisi ile tam olarak (yani kalan bırakmadan) bölünebilen tamsayılara *asal sayılar* denir. Örnek olarak 5, 11 veya 23'ü verebiliriz. Bu tür sayıların sonsuz sayıda olduğu bilinmektedir.

Öklid (Euclides) Teoremi: Sonsuz tane asal sayı vardır.

Asal sayılar kümesini

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

olarak gösterelim. Bunların dışında kalan bütün tamsayılara *bileşik sayılar* denir. Bütün bileşik sayılar kendilerinden daha küçük olan tamsayıların çarpımlarından elde edilebilirler; örneğin 72 sayısı 8 ile 9'un çarpımından elde edilir. Daha küçük olan bu tamsayılara, büyük sayının *çarpanları* denir. Bunlar arasında daha özel olan çarpanlar bulunur; *asal çarpanlar*. Yukarıdaki örnekte verilen 8 ve 9'un her ikisi de asal olmadığından onların her biri tekrar çarpanlarına ayrılabilir. Çarpanlara ayırma sonucu elde edilen sayılar içinde sadece asal çarpanlar kalana kadar çarpanlarına ayırma işlemi sürdürülebilir. Bileşik sayı olan 72 için işlem $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \cdot 3^2$ ifadesine ulaşıncaya kadar sürdürülmüştür. Burada üç tane 2 ve iki tane 3, 72 sayısının asal çarpanlarıdır. Asal çarpanlar özeldir; çünkü her bileşik sayı için bir tane ve sadece bir tane asal çarpanlar takımı vardır. Bu nedenle asal sayılar, bütün diğer sayıların onların çarpımı yoluyla elde edildiği atomlardır (veya en küçük parçalardır).

Aritmetiğin Temel Teoremi: $n > 1$ olmak üzere, her bir n pozitif tamsayısı

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s, s \geq 1$$

şeklinde $p_1, p_2, \dots, p_s$ asal sayılarının çarpımı olarak yazılabilir. Bu yazılış, çarpanların sırası göz önüne alınmazsa, tek türdür.

Bu özelliğe, *pozitif tamsayıların tek çarpanlama (factorization) teoremi* denilmektedir. Bu ayrılış şeklini yeniden düzenlemek ve yalnız farklı asalları almak suretiyle

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_t^{k_t}$$

yazabiliriz. Burada $k_i \geq 1$ ve $p_1, p_2, \dots, p_t$ farklı asallardır.

Not 1: 1 sayısı ne asal, ne de bileşik sayıdır.

3. Asal sayıların bulunması algoritması üzerine

Eski zamanlardan beri matematikçiler asal sayılarla ilgilenmişlerdir. Asal sayılarla ilgili temel problemlerden biri, verilen bir sayının asal olup olmadığını kontrol etmektir. Şifrelemede geniş şekilde kullanıldığı için bir sayının asallığının testi önem kazanmıştır.

Antik Çinlilerden ve Yunanlılardan başlayarak çok kişi asallığı test etmek için efektif bir algoritma bulmaya çalışmıştır. Asallığın testi için ilk yöntemi M.Ö. 240 yıllarında Erastotenes (Eratosthenes) önermiştir.

Erastotenes Kalburu (Eleği): Verilmiş bir n sayısından büyük olmayan asal sayılar tablosunu yazmak için 2'den başlayarak n ' e kadar tamsayılar dizisini yazalım.

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots, n.$$

Dizinin ilk sayısı olan 2 asaldır. Bu dizide 2'den sonraki sayılar için, birer atlayarak 4, 6, 8,... i (yani 2'nin katlarını) silelim. Bu işlemden sonra kalan ilk silinmemiş sayı 3 olur ki, o da asaldır, çünkü 2'ye bölünmez. 3'ü silmeden ikişer atlayarak 6, 9, 12, 15,... i (yani 3'ün katlarını) silelim. Çift sayı oldukları için bunlardan bazıları önceden silinmiştir. Sonraki adımda ilk silinmemiş sayı 5'dir ve o asaldır, çünkü 2 ve 3'e bölünmez. 5'i silmeden dörder atlayarak 10, 15, 20, ... i (yani 5'in katlarını) silelim. Yine bu sayılardan bazıları 2'nin, bazıları 3'ün katı olduklarından daha önceki adımda silinmişti. Şimdi en küçük silinmemiş sayı 7'dir ve o asaldır, çünkü ondan küçük asal sayılara,

yani 2, 3, ve 5'e bölünmez. Böylece n ' den küçük asal sayıların tablosu $\sqrt{n}$ 'i geçmeyen sayıların katlarının silinmesiyle (başka deyişle elenmesiyle) biter.

Bu algoritmayı verilen bir n sayısını çarpanlarına ayırmak için de kullanabiliriz. Örneğin 60 sayısı verildiğinde, en küçük asal sayıdan başlayarak sırasıyla asal sayılardan her birine (yani 2, 3, 5, ...) bölünüp bölünmediği test edilir. Burada 60'ı bölen ilk sayı en küçük çarpan olur. Bu sayıyı bulduktan sonra aynı süreç tekrarlanarak daha büyük asal çarpanlar bulunur. Sayı büyüdükçe çarpan bulma işi de zorlaşır. Buna rağmen bu yöntem en azından ilke olarak her tamsayıya uygulanabilen bir yöntemdir. Eğer sayının kareköküne kadar olan bütün asal sayılar denenmiş ve bir çarpan bulunmamışsa, sayının kendisinden ve 1'den başka çarpanı yok demektir; dolayısıyla bu bir asal sayıdır.

Yukarıda verilen kaba kuvvete dayanarak çarpanlara ayırma yönteminin uygulanması basamak sayısı arttıkça daha da zorlaşır. Örneğin $2^{193} - 1$ sayısının ondalık ifadesinde 58 basamak vardır. Günümüzde her nanosaniyede (milyonda bir saniyede) bir bölme işlemi yapabilen en hızlı bilgisayarlar kullanıldığında bile, gösterilen yöntemle çarpanları bulmak 35.000 yıllık bir bilgisayar süresi gerektirir.

Büyük sayıların çarpanlarının bu yöntemle elde edilemeyeceği aşıkardır. XVII yüzyılda Fermat'ın küçük teoremi olarak bilinen teorem ispatlandı ve çarpanlara ayırma işleminde yeni bir sayfa açılmış oldu.

Fermat Teoremi: p asal sayı ise, her a tamsayısı için p , $(a^p - a)$ 'yı böler.

Ancak bu teoremin tersi Carmichael sayıları için geçerli değildir. Bu sonuç asallığı test eden algoritmalar için çıkış noktası olmuştur. 1976 yılında Miller, sonra da Rabin Genişletilmiş Riemann hipotezine dayanan ve hızlı çalışan, olasılıklı algoritmalar ürettiler. O zamandan bu yana bu konuda pek çok algoritma önerilmiştir. Bunlara örnek olarak 1983'de Adleman, Pomeiance ve Rumely algoritmasını gösterebiliriz. 1986'da Coldwasser ve Kilian eliptik eğrilere dayanan bir algoritma önerdiler. Asallığı test etmek için en son algoritma 2002 yılının Ağustos ayında Hindistan'ın Kanpur kentindeki Teknoloji Enstitüsünde Manindra Agrawal ve onun öğrencileri tarafından önerilmiştir. Algoritma polinomial zamanda çalışır (karmaşıklığı $\tilde{O}((\log n)^{12})$ dir). Bu çalışmasıyla Agrawal Clay araştırma ödülünü almıştır ve Fields madalyasını almaya adaydır.

Sayıları çarpanlara ayırma algoritmasına örnek olarak Pollard, Lensta ve Pomerance algoritmalarını gösterebiliriz. Çarpanlara ayırmanın zirvesi, "tek bir süper bilgisayar"la değil, birçoğunun ortak çabasıyla başarılmıştır. En son eğilim, çok sayıda farklı bilgisayarın hesaplamalarını bir araya getirme yönündedir. Bunların her biri tek bir çarpanlara ayırma probleminin ayrı yönleri üzerinde (genellikle yoğun olmayan gece saatlerinde) çalışır. Daha sonra yaptıklarını birleştirmek için bunları elektronik posta yoluyla bir bilgi işlem merkezine bildirir.

Bu yaklaşımın en başarılı sonucu olarak GIMPS (The Great Internet Mersenne Prime Search), farklı ülkelerde binlerce bilgisayarı 2,5 sene kullanarak 14 kasım 2001 tarihinde 4053946 basamaklı $2^{13466917} - 1$ sayısını, yani 39. Mersenne asal sayısını bulmuştur. Bu sayının asal olup olmadığını kontrol etmek 45 gün sürmüştür.

Not 2: $M_n = 2^n - 1$ şeklinde gösterilebilen asal sayılara *Mersenne asal sayıları* denir. Yukarıdan anlaşıldığı gibi şimdiye kadar 39 tane böyle sayı bulunmuştur: $M_2 = 2^2 - 1 = 3$, $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, $M_5 = 2^5 - 1 = 31$, $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ v.s.

4. İkiz asal sayılar

Asal sayılar teorisinde ilk bakışta çok basit gibi görünen farklı sorularla karşılaşırız. Fakat bunlardan bazıları kolaylıkla cevaplanabilir. Örneğin en küçük iki asal sayı olan 2 ve 3 asal sayıları ardışık doğal sayılardır. Buradan aklımıza şu soru gelebilir: Aynı şekilde ardışık olan başka asal sayılar

var mıdır? Bunun olmadığını kolaylıkla gösterebiliriz. İki ardışık doğal sayıdan birisi mutlaka çift sayıdır. Sadece 2 sayısı çift asal sayı olduğundan bu sayının asal olmadığını söyleyebiliriz. Ancak bir çok ardışık tek sayılar vardır ki, ikisi de asaldır, örneğin 3 ve 5, 5 ve 7; 11 ve 13, 17 ve 19, 29 ve 31, 41 ve 43 ve diğerleri. Bu tür ikililere *ikiz asal sayılar* denir. 30 milyona kadar 152892 tane ikiz asal sayı ikilisi vardır. İkiz asal sayılar kümesini

$$PP = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, \dots\}$$

ile gösterelim. Çok eski zamanlardan beri bu kümenin sonsuz olup olmadığı problemi araştırılmaktadır ve günümüze kadar bu problem çözümlenememiştir. Yani biz 2 sayısının sonsuz yolla iki asal sayının farkı gibi gösterilebileceğini ispatlayamıyoruz.

Her çift sayının sonsuz yolla iki asal sayının farkı gibi gösterilebileceği düşünülmesine rağmen bunun hiç olmazsa bir yolla yapılabileceği bile ispatlanamamasına karşın bu bir çok ardışık çift sayılar için gösterilmiştir. Örneğin $2 = 5 - 3$, $4 = 11 - 7$, $6 = 29 - 23$, $8 = 97 - 89$, $10 = 149 - 139$.

Asal sayılar teorisinde buna benzer kolay gibi gözükten, fakat daha ispatlanamamış yüzlerce problem vardır ve bu problemler günümüzde bir çok matematikçinin ilgisini çekmektedir.

4.1. İkiz Asal Sayılar Üzerine Bazı Teoremler

$L^6 = \{l | l = 6n \pm 1, n \in S\}$ şeklinde gösterelim. Buna göre aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 1. $PP \setminus \{3\} \subseteq L^6$.

$K^6 = \{k | l_1 = 6k + 1 \in P \wedge l_2 = 6k - 1 \in P\}$ şeklinde gösterelim. Buna göre aşağıdaki teorem doğrudur:

Teorem 2. $\exists m, n \in S, k = 6mn \pm m \pm n \Rightarrow k \notin K^6$.

$$\begin{aligned} M_j^6 &= \{k | k = 6mn \pm m \pm n, m = j, j \in S, n \in S\} = \\ &= \{k | k = (6j - 1)n \pm j, n \in S\} \cup \{k | k = (6j + 1)n \pm j, n \in S\} \end{aligned}$$

şeklinde gösterelim. Örneğin;

$$j = 1 \Rightarrow M_1^6 = \{k | k = 5n \pm 1, n \in S\} \cup \{k | k = 7n \pm 1, n \in S\}$$

$$j = 2 \Rightarrow M_2^6 = \{k | k = 11n \pm 2, n \in S\} \cup \{k | k = 13n \pm 2, n \in S\}$$

$$j = 3 \Rightarrow M_3^6 = \{k | k = 17n \pm 3, n \in S\} \cup \{k | k = 19n \pm 3, n \in S\}$$

$$A_i^6 = \{k \in S | 6i^2 - 2i \leq k < 6(i+1)^2 - 2(i+1), i \in S\}$$

$M_j^6 \cap A_i^6 = P_{ij}^6$, $A_i^6 \setminus \bigcup_{j=1}^i P_{ij}^6 = P_i^6$ ve $P^6 = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^6$ şeklinde gösterelim. Buna göre aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 3. $P_i^6 \subset K^6, i = 1, 2, 3, \dots$

$P_0^6 = \{1, 2, 3\}$ kabul etsek aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4. $K^6 = \{1, 2, 3\} \cup (\cup_{i=1}^{\infty} P_i^6) = P_0^6 \cup P^6 = \cup_{i=0}^{\infty} P_i^6$

Aşağıdaki problemler bu konuda açık problemlerdir, yani henüz ispatlanamamıştır.

Problem 1. $|P^6| = \infty$?

Burada $|P^6|$, P^6 kümesinin eleman sayısını ifade etmektedir

Problem 2. $s \geq 3, s \in S$ için $|P^s| = \infty$?

Yukarıda P^s kümesi $M_j^6, A_i^6, P_{ij}^6, P_i^6$ ve P^6 kümelerinin ifadelerinde 6 yerine s yazılarak elde edilir.

4.2. İkiz Asal Sayıları Bulma Algoritması :

Bu bölümde, yukarıda verilmiş teoremlerden yararlanılarak ikiz asal sayıları bulmak için bir algoritma önerilmiştir. Bu algoritma önceden verilmiş bir M sayısı için $(6M + 1)$ ' den küçük tüm ikiz asal sayıları bulmaktadır.

Algoritma

0. M sayısını oku
1. $n = 1$
2. $A_2 :$ $i_1 = 6n^2 - 2n$
3. $i_2 = i_1 + 12n + 3$
4. $i = i_1$
5. $A_3 :$ $k = 1$
6. $A_4 :$ $k_1 = 6k - 1$
7. $k_2 = 6k + 1$
8. $k_3 = k_1 - k$
9. $k_4 = k_2 - k$
10. $k_5 \equiv i \pmod{k_1}$
11. Eğer $(k_5 = k)$ veya $(k_5 = k_3)$ ise, A_5 'e git
12. $k_6 \equiv i \pmod{k_2}$
13. Eğer $(k_6 = k)$ veya $(k_6 = k_3)$ ise, A_5 'e git
14. $k = k + 1$
15. Eğer $(k_5 \leq k)$ ise, A_4 'e git
16. $l_1 = 6i - 1$
17. $l_2 = 6i + 1$
18. l_1 ve l_2 'yi yaz
19. $A_5 :$ $i = i + 1$
20. Eğer $(i \leq i_2)$ ise, A_3 'e git
21. $n = n + 1$

22. *Eğer $(n \leq M)$ ise, A_2' 'ye git*
 23. *Dur*

Bu algoritmanın çalışması sonucunda önceden verilmiş bir M sayısı için M' den küçük olan ve bölüm 4.1'de tanımlanmış olan K^6 kümesinin elemanları olan i ' ler bulunur ve bu i 'lerden $l_1 = 6i - 1$ ve $l_2 = 6i + 1$ ikiz asal sayıları hesaplanır. Böylece $(6M + 1)$ 'e kadar olan bütün ikiz asal sayılar hesaplanmış olur. Bu algorithmadan yararlanılarak M sayısını arttırıp istediğimiz büyüklükte ikiz asal sayılar bulabiliriz.

Not 3: Günümüzde bilinen en büyük ikiz asal sayılar 51090 basamaklı $33218925 \times 2^{169690} \pm 1$ sayılarıdır. Bu sayılar 28 Eylül 2002 tarihinde bulunmuştur.

5. Alıstırmalar.

1. 3' ten büyük olan her asal sayının $6k + 1$ veya $6k - 1$ şeklinde gösterilebileceğini ispatlayınız.
2. 3' ten büyük olan her asal sayının karesinin $12k + 1$ şeklinde gösterilebileceğini ispatlayınız.
3. Bir asal sayının 30'a bölümünden kalanın da asal sayı olduğunu gösteriniz.
4. $n > 2$ için $2^n - 1$ ve $2^n + 1$ sayılarının ikisinin de aynı zamanda asal sayı olamayacaklarını gösteriniz.
5. p ve $p^2 + 2$ asal sayılarsa, $(p^3 + 2)$ 'nin de asal sayı olduğunu gösteriniz.

6. Kaynak web siteleri üzerine

Asal sayılar konusunda ve benzer bilgileri aşağıdaki web sitelerinden öğrenebilirsiniz:

1. <http://www.biltek.tubitak.gov.tr/asal> : Bu adreste bazı asal sayılar ve bazı çift sayıların iki asalın toplamı şeklinde yazılışlarının listelerini bulabilirsiniz.
2. <http://www.utm.edu/research/primes> : Asal sayılar hakkında bilmek isteyeceğiniz bir çok şey bu sitede var. Küçük asal sayıların listesi, bilinen en büyük asal sayılar, büyük sayıların asal olup olmadıklarını ispatlamak için yöntemler v.s.
3. <http://www.eff.org/coopawards/award-prime-rules.html> : EFF'nin en büyük asal sayı rekorunu kıranlara verdiği ödüllerin detaylarını bu sitede bulabilirsiniz
4. <http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html>

EFF (Elektronik Frontier Foundation - "Elektronik Sınırlar Vakfı") aslında bilgisayar dünyasında özgürlükleri savunan bir vakıftır. Vakfın büyük asallarla ilgisiyse, veri iletişimde kullanılan bazı kriptografik tekniklerin büyük asal sayıları kullanmalarıdır. Vakıf, asallar hakkında araştırmaları teşvik ederek kriptografik teknikleri güçlendirmek amacıyla bu tip ödülleri veriyor.

EFF' in verdiyi ödülleri burada ilan edelim: 10 milyon ondalık basamaklı ilk asal sayıyı bulana 100,000 dolar, 100 milyon basamaklı ilk asal sayıyı bulana 150.000 dolar, bir milyar basamaklı ilk sayıyı bulana 250,000 ödül verilecek

KAYNAKLAR

- [1] Agrawal M., Kayal, N. and Saxena, N.: Primes is in P. Indian Institute of Technology, 2002
<http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html>.
- [2] Apostol, T.M.: Introduction to Analytic Number Theory. Springer - Verlag, 1997.
- [3] Adleman, L.M., Pomerance, C. and Rumely, R.S.: On distinguishing prime numbers from composite numbers. Ann. Math., 117:173-206,1983.
- [4] Miller, G.L.: Riemann's hypothesis and tests for primality. J. Comput. Sys. Sci. 13:300-317,1976
- [5] Rabin, M.O.: Probabilistic algorithm for testing primality. J. Number Theory, 12: 128-138,1980.
- [6] Riesel, H.: Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Progress in Mathematics. Birkhauser,1985

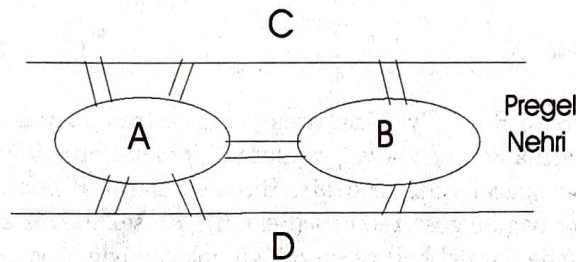
ÇİZGE KURAMINA GENEL BİR BAKIŞ

Gökşen Bacak-Tina Beşeri

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

18. yüzyılda Prusya'daki Königsberg kasabasında halk zamanının bir kısmını doğada gezinti yaparak geçiriyordu. Bu kasaba Pregel Nehri ile iki bölgeye ayrılmaktaydı ve nehrin içinde iki adacık bulunmaktaydı. Bu nehirdeki adaları kasabaya bağlayan 7 köprüye dair o bölgenin insanları arasında yayılan bir problem sonradan dönemin ünlü matematikçilerinden biri olan Leonhard Euler'e kadar ulaştı. Bu olaydan uzun yıllar sonra 1852 yılında bir başka ünlü matematikçi Augustus De Morgan, Sir William R. Hamilton'a gönderdiği bir mektupta öğrencisinin, İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirlerine komşu olanları farklı renklerde boyamak için 4 rengin yeterli olduğunu tespit ettiğini fakat bunu matematiksel olarak ispatlayamadığını yazmıştı. 4 Renk Problemi olarak anılan bu problem, uzun yıllar sonra 1976 yılında K.Appel ve W.Hakken tarafından bilgisayar yardımıyla ispatlandı. Bu iki problemin çözümü matematikte yeni bir çığır açtı.

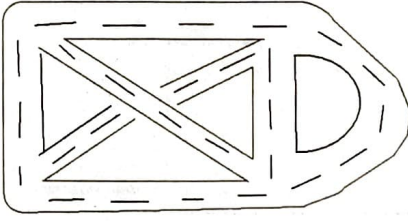
Königsberg Problemi: Kasabanın bir yakasından gezinti yapmak için çıkan biri tüm köprüleri sadece bir kez geçerek başladığı noktaya dönebilir mi?



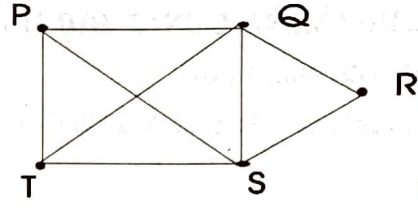
Euler bu problemin çözümü için uğraşırken belki de matematiğin yeni bir uygulama alanını yarattığını farketmemiştir. Daha sonraları Çizge Kuramı olarak bilinen bu yeni uygulama alanı birçok problemin çözümüne katkıda bulunacaktır. Çizge Kuramı ve uygulamalarına olan ilgi son yirmi yılda büyük bir hızla arttı. Bu artışın sebebi günlük hayatta karşılaştığımız birçok soruna çizge kuramı ile çözüm bulunabilmesidir. Karşılaştığımız birçok durum, bir noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren doğruların oluşturduğu şemalarla tanımlanabilir. Bu şemalara çizge denir. Örneğin noktalarla şehirleri, bu noktaları birleştiren çizgilerle bir havayolu şirketinde bazı şehirler arasındaki direk uçuşları gösterebiliriz. Bir kimyasal molekülde ise, noktalarla atomları, bu noktaları birleştiren çizgilerle de bu atomları bağlayan kimyasal bağları ifade edebiliriz. Bir sosyolog ise, bir grup insanın birbirlerine karşı davranış ve etkileşimlerini bir çizge yardımı ile rahatlıkla ifade edebilir. Çizgeler birbirinden bağımsız bir çok konuda; genetik, ekoloji, arkeoloji, müzik vb. alanlarda da karşımıza çıkabilir.

O halde çizge nedir? Öncelikle Şekil 1'deki yol haritasını ele alalım. Bu haritayı noktalar ve çizgiler yardımı ile Şekil 2'deki gibi gösterelim.

P, Q, R, S ve T noktalarına köşe, bu köşeleri birleştiren çizgilere de bağ adı verilir. Köşeler ve bağlar arasındaki matematiksel yapıyı gösteren şemaya ise çizge denir. PS ve QT doğru parçalarının kesim noktasının, Şekil 1'de bir dört yol belirtmemesi nedeniyle bu nokta çizgenin bir köşesi değildir. Bir köşeden çıkan bağların sayısına ise o köşenin derecesi denir. Örneğin Q köşesinin derecesi 4, R köşesinin derecesi 2'dir.



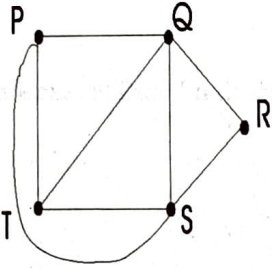
Şekil 1



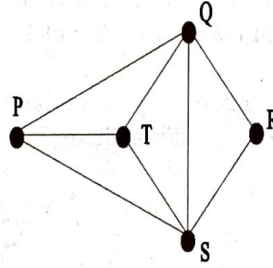
Şekil 2

Şekil 2, kesişen yollar dışında başka durumları da ifade edebilir. Örneğin P,Q,R,S ve T köşeleri futbol takımlarını, köşeler arasındaki bağlar da o köşenin temsil ettiği takımın karşılaşmalarını belirtsin. O halde Şekil 2'ye göre; P takımı Q,T ve S takımları ile karşılaşmış, R takımı ile karşılaşmamış. Bu örnekte köşelerin derecesi, o köşenin temsil ettiği takımın oynadığı maç sayısına eşittir.

Şekil 2'deki PS doğru parçasını kaldırıp bu iki köşeyi dışarıdan birleştirmek istersek Şekil 3'ü elde ederiz. Bu iki şekildeki çizgeler özdeştir. Bu çizgelere özdeş olan bir başka çizge de Şekil 4'de görülmektedir.

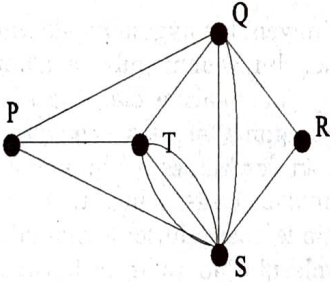


Şekil 3

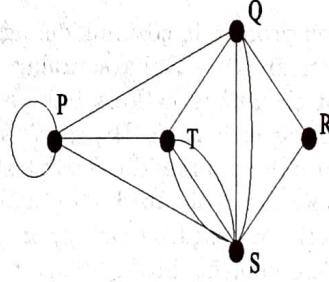


Şekil 4

Şekil 4'te, Q ile S ve S ile T'yi birleştiren yollarda trafiğin yoğun olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu köşeler arasında daha fazla yol yapılarak bir rahatlama sağlanabilir (Şekil 5). Q ile S ve S ile T arasındaki bağlara paralel bağlar denir. Buna ek olarak P noktasına bir otopark yapacak olursak bunu P'den P'ye bir bağ ile gösterebiliriz (Şekil 6). Bu şekilde bir köşeyi kendisine birleştiren bağa döngü denir. Bir çizgede paralel bağ ya da döngü yoksa böyle çizgelere basit grafik denir.



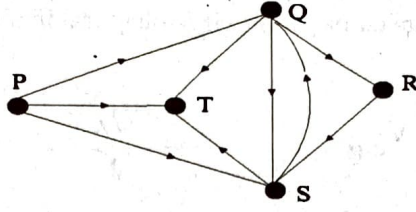
Şekil 5



Şekil 6

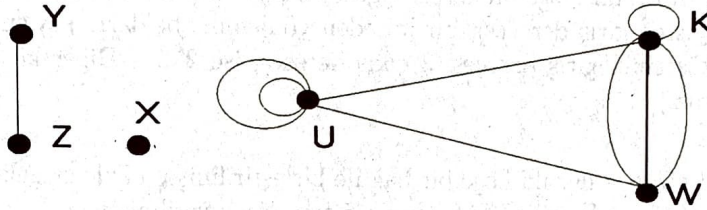
Şekil 1'deki yol haritasında tüm yolların tek yönlü yapılması istenirse, çizgedeki bağlar oklarla yönlendirilir. Bu tür çizgelere yönlendirilmiş çizge denir (Şekil 7).

Bir G çizgesindeki V köşesinin derecesi o köşe ile ilişkili bağların sayısı ile döngülerin sayısının iki katının toplamına eşittir. Bu dereceler küçükten büyüğe doğru sıralandığında elde edilen diziye çizgenin derece dizisi denir.



Şekil 7

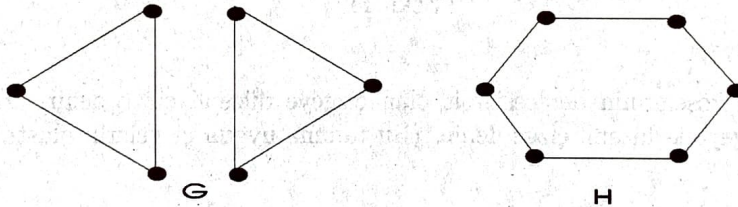
ÖRNEK: Aşağıda bir çizge ve onun derece dizisi verilmiştir.



$\langle 0, 1, 1, 4, 6, 6 \rangle$

Şekil 8

Not: Her çizgenin derece dizisi tek olmasına rağmen özdeş olmayan iki çizgenin derece dizileri aynı olabilir. Şekil 9 buna bir örnektir.



$\langle 2, 2, 2, 2, 2, 2 \rangle$

Şekil 9

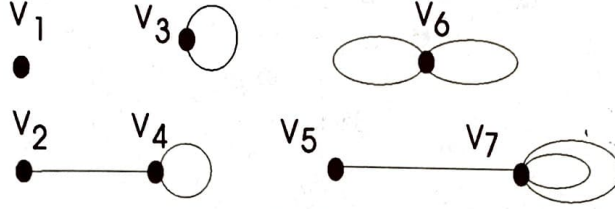
TEOREM TokalaşmaTeoremi: Bir çizgenin bütün köşelerinin derecelerinin toplamı, bu çizgenin bağlarının iki katıdır.

İspat: Bir bağın iki köşeyi birleştirdiğini düşünürsek, her bağ çizgenin derecesine iki kez katkıda bulunmuş olacaktır.

Sonuç olarak çizgenin derecesi çift olacağından tek dereceli köşeler çift sayıda olmak zorundadır.

ÖRNEK: Derece dizisi $\langle 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5 \rangle$ olan bir çizge oluşturmaya çalışalım. Bunun için $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ noktalarını alalım. Çift dereceli köşelere uygun sayıda döngü yerleştirelim. Derecesi sıfır olan v_1 köşesi izole noktadır. v_3 köşesinde bir, v_6 köşesinde de iki adet döngü yerleştirelim.

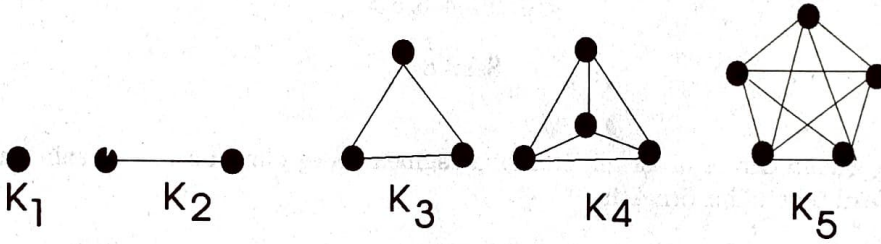
Tek dereceli v_2, v_4, v_5 ve v_7 köşelerini ise ikişer ikişer birleştirirsek şekil 10'daki çizmeyi elde ederiz. (Siz de bu derece dizisine karşılık gelen başka bir çizge oluşturabilirsiniz.)



Şekil 10

TANIM: Yönlendirilmiş bir çizgenin derecesi giriş ve çıkış dereceleri toplamına eşittir. Bir köşeye yönelmiş bağların sayısına giriş derecesi, bir köşeden yönelmiş bağların sayısına da çıkış derecesi denir. (Şekil 7'de S köşesinin giriş derecesi 3 çıkış derecesi ise 2'dir. Diğer köşelerin derecelerinin hesabını size bırakıyoruz.)

TANIM: Bir basit çizgede her iki köşe bir bağ ile birleştirilmişse böyle çizgelere tam çizge denir. n -köşeli bir tam çizge K_n ile gösterilir. Aşağıda ilk 5 tam çizge verilmiştir.



Şekil 11

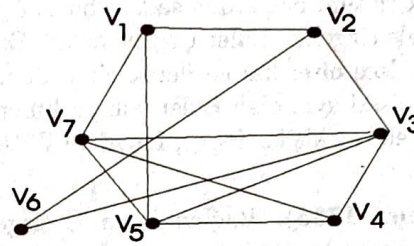
TANIM: Bütün köşelerinin derecesi eşit olan çizmeye düzenli çizge denir. Bütün köşelerinin derecesi k ise bu çizmeye k -düzenli çizge denir. (Bu tanıma uygun çizgelerin oluşturulmasını da size bırakıyoruz.)

ÇİZGE KURAMININ ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Uygulama 1: Bir bölgedeki radyo vericileri, radyo yayın frekanslarına ayrıldığında bazı vericilerin frekanslarının çakışmaması için farklı frekanslar kullanmaları gerekir. En az sayıda farklı frekansın belirlenmesinde çizge kuramı modelinden yararlanılır. Örneğin $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ yedi radyo vericisi olsun. Aralarında 100 kilometreden az mesafe bulunan iki vericinin farklı frekanslardan yayın yapması gerektiğini varsayalım. Köşelerin vericileri, bağların da aralarındaki mesafe 100 kilometreden az olan vericileri gösterdiği bir çizge oluşturmaya çalışalım. Şekil 12 yedi vericinin aralarındaki uzaklıkları gösteren bir tabloyu ve bu durumu temsil eden bir çizmeyi içerir.

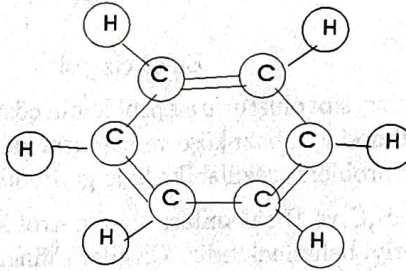
Radyo frekanslarının çalışması ile ilgili bu problem bir çizgede komşu köşelerin farklı renklerle boyanması problemi ile benzerdir. Kullanılacak en az sayıdaki frekans sayısı, çizge renklendirmeye kullanılacak en küçük renk sayısına eşit olacaktır.

	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	55	110	108	60	150	88
V_2		87	142	133	98	139
V_3			77	91	85	93
V_4				75	114	82
V_5					107	41
V_6						123



Şekil 12

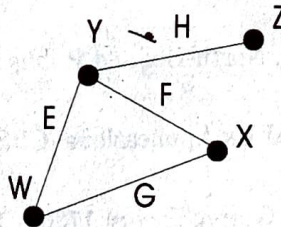
Uygulama 2: Şekil 13'te gösterilen benzen molekülünün bazı atomları arasında çift bağ vardır. Bu durumu basit olmayan bir çizgeyle gösterebiliriz. Her karbon atomu, çevresinde dört elektron bulunduğundan, derecesi 4 olan bir köşe ile; hidrojen atomu ise, çevresinde bir elektron bulunduğundan, derecesi 1 olan bir köşe ile gösterilir.



Şekil 13

TANIM: Bir çizgede bir köşeden diğer bir köşeye ulaşmak için kullanılan köşe ve bağ dizilerine yol denir. Bir yolun uzunluğu, yol dizisinde alınacak bağ adımlarının sayısı kadardır. x köşesinden başlayıp y köşesinde son bulan yola xy yolu denir. Başlanılan noktada son bulan yola kapalı, diğer yollara açık yol denir.

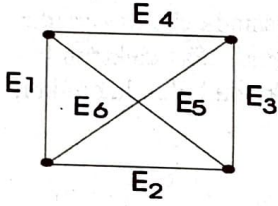
ÖRNEK: Şekil 14, dört köşeli bir çizgede uzunluğu 5 olan kapalı bir yolu göstermektedir.

 $\langle X, F, Y, H, Z, H, E, W, G, X \rangle$

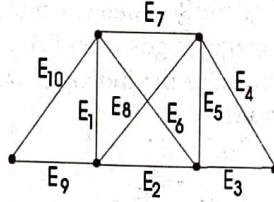
Şekil 14

Çizge Kuramındaki en önemli modellemelerden biri, adını Königsberg köprü problemi-nin ispatını ortaya koyan Euler'den alır. Euler, Königsberg problemindeki 7 köprüyü sadece bir kez geçerek başlanılan noktaya geri dönmenin olanaksızlığını ispatlamıştı. Çizge Kuramında, bir köşeden başlayarak ve tüm bağlardan sadece bir kez geçilerek yolu tamamlayıp, başlangıç noktasına dönülebiliyorsa böyle çizgelere Euler Çizgesi denir. Bir G çizgesinde, başlanılan köşeye dönmeden ve bütün bağlardan sadece birer kez geçilerek bir yol oluşturulabiliyorsa bu yola açık Euler yolu denir. Başlangıç ve bitiş köşesi aynı olan Euler yoluna Euler Turu denir. Euler Çizgesi ile ilgili çalışmaları Euler'den sonra inceleyen kişiler Biggs, Lloyd ve Wilson'dur.

TEOREM(Euler 1736): Bağlantılı bir G çizgesinin Euler çizgesi olması için gerek ve yeter koşul G çizgesindeki tüm köşelerin derecelerinin çift olmasıdır.



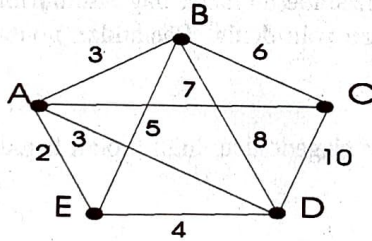
Euler çizgesi değil



Euler çizgesi

Königsberg Köprü Probleminin çizgesini oluşturarak problemin çözülemeyeceğini bir de siz gösterm çalışın. Köprü probleminin çözülebilmesi için bazı köşe ve bağların kaldırılması veya eklenmesi gerekmektedir. Bunu sizler de deneyerek problemi çözülebilir hale getirebilirsiniz.

Problem: Aşağıdaki çizgede A,B,C ve D rakamları birer petrol kuyusunu, E ise bu kuyulardan elde edilen petrolü işleyen bir rafineriyi belirtmektedir. Çizgiler rafineriler arasında döşenebilecek boru hatlarını ve üzerindeki sayılar da bunların maliyetlerini göstermektedir. Bütün kuyulardaki petrolün en az maliyetle işlenmesi için hangi boru hatları kurulmalıdır? Maliyet ne olur?



KAYNAKÇA

- [1] C.Berge: Graphs and Hypergraphs, North-Holland Publishing Company, 1973
- [2] J.Gross,J.Yellen: Graph Theory and Its Applications, CRS Press, 1999
- [3] N.L.Biggs, E.K.Lloyd, R.J.Wilson: Graph Theory 1736 – 1936, Oxford, 1986
- [4] R.J.Wilson: Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 1996

MATEMATİKÇİ GÖZÜ İLE KIBRIS SORUNU: ÜÇ RENK HARİTA BOYAMA İLE ÇÖZÜM ÖNERİSİ¹

İbrahim Cahit Arkut
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Lefke Avrupa Üniversitesi
Lefke, K.K.T.C.

GİRİŞ: Matematikte² bir asırdan uzun süre açık problem veya doğruluğu iddia edilen problem (conjecture) olarak kalmış olan ve doğruluğu ancak bilgisayar yardımı ile son 20 yılda verilen 'Dört Renk Teoremi' ile haritaların politik sorunlarda dengeli (equi-coior) boyanması ile çözümler verilebileceğini inceleyeceğiz. Özellikle seçtiğimiz matematik problemi (Dört Renk Problemi) ve Kıbrıs sorununda ortak ve ilginç tarafın problemlerin doğal karakterinde insana ve zamana karşı meydan okuma eyleminin var olamasıdır. Daha da ilginç gözlem, bu tipten problemlerin gerek matematikçi olmayan, gerekse usta bir politikacı olamayan her hangi bir kişiye bir iki dakikada kolay ve anlaşılır biçimde anlatılabilmesidir. Sağlam mantık ve rasyonel düşünebilen her insan için çözümlerin çok kolay olduğu ve kanıtlanabilecek pek bir durumun olmadığı yanılışına da kolayca düşülebilmektedir.

Makale matematikçi olmayanlara daha fazla hitap ettiğinden son bölümdeki matematik formülasyon hariç tümü kolayca anlaşılır biçimde ve şekiller yardımıyla verilmiştir.

Öncelikle okuyucuya Dört-Renk Problemi (DRP) veya Dört Renk Teoremi (DRT) hakkında tarihsel bazı bilgiler verelim. Geçen asrın ortalarında harita çizimi ile uğraşanlar, politik haritaların ilk bakışta daha kolay anlaşılması için birbirlerine kontrast teşkil eden renkleri ve elden geldiğince az sayıda renk kullanarak haritaları boyamaya çalışıyorlardı. Londra Üniversite Koleji öğrencilerinden Francis Guthrie 1852 yılında hocası matematikçi De Morgan'a verilen her haritayı komşu ülkeler aynı renge *boyanmamak* koşulu ile dört renk ile boyayabildiğini fakat üç rengin bazı haritalar için yeterli olmadığını söyleyerek hocasından dört rengin tüm haritaların bu şekilde boyanması için yeterli olduğunu kanıtlamasını ister. Anlaşılması çok basit olmakla beraber De Morgan bir çözüm öneremez ve meslekdaşı ünlü matematikçi Hamilton'a bir mektupla problemi bildirir. Hamilton'dan gelen cevap dört renk probleminin çözümünü bulamadığı ve görüldüğü kadar da basit olmadığı yönünde idi. 1879 yılında Kempe ilk yanlış kanıtı problem için verir ve yaptığı basit yanlışlık ilk bakışta görülemediği için yanlış kanıtından dolayı Krallyet Akademisi üyeliği ile ödüllendirilir! Heawood 1917'de Kempe'nin kanıtındaki yanlışlığı bulur fakat doğru kanıtı veremez. Yerine beş rengin tüm haritaların boyanması için yeterli olduğunu kanıtlar ve hayatının 60 yılını dört renk problemini kanıtlayabilmek için uğraşır.

Yukarıda özetlenen bu tarihsel girişten sonra birçok matematikçi ve kendisini matematikçi kabul eden binlerce kişi çeşitli yollardan dört renk probleminin çözümü için çaba sarfederek 1976 yılına gelinir. 1976 yılında Illinois Üniversitesi, ABD 'de Appel, Haken ve doktora öğrencileri bilgisayar bilimcisi Koch'un geliştirdiği son derece karmaşık ve insanın bilgisayar yardımı olmadan teyid etmesi imkansız olan bir yöntemle³, 1200 saatlik bir bilgisayar çalışması sonucu dört renk probleminin kanıtını verirler. 1995 yılında Princeton Üniversitesi, ABD'den N. Robertson, D. Sanders, R. Thomas ve

P. Seymour aynı yöntemi kullanarak yine bilgisayar yardımı ile fakat bu sefer daha kısa yoldan dört renk teoreminin kanıtını verirler. Verdikleri kanıtın doğruluğunu, kullanılan bilgisayar programlarını başka bilgisayarlar üzerinde de deneyerek sonucun aynı kaldığını gösterirler. 1979 yılında Toronto'daki dünya matematik kongresinde matematikçiler Appel ve Haken'in kanıtına inananlar ve inananmayanlar

¹Tüm haritaların dört renkle uygun şekilde bilgisayar yardımı ile olsa bile boyanabileceğinin kanıtı 125 yıllık bir süre almıştır. Kıbrıs sorunu 1963 yılında başladığına göre 36 yıl diğer problemin çözüm süresi yanında küçük kalır.

²Matematik genel olarak kesinlik ve doğruluğun ifadesi olarak algılanır. Yazar bunlara ilaveten barış ve adaletin de ifadelerinin içerildiğini öne atmaktadır.

³Ters örneğin olabileceği konfigürasyonlar kümesine indirgeme ve 1500'ü aşkın konfigürasyona bağlı üçgenselleştirmelerin verilen kuadratik renklendirme algoritması ile boyanması.

diye ikiye ayrılmışlardı. 1995 yılında biraz daha basit verilen kanıttan sonra inanmayanların sayısının oldukça azaldığı söylenebilir. Fakat insanın doğasında olan kendine güven duygusu ve insanlık gururu böyle bir problemin kanıtını yalnız (şimdilik) bilgisayar yardımı ile verilmesini kendine yedirememekte ve bilgisayar yardımı olmadan verilecek kanıt matematik dünyasında en fazla ispatlanmak istenenler listesindeki yerini korumaktadır.

Dört renk probleminin tarihçesi, ünü, ve var olan çözümü hakkında yukarıda verilen kısa bilgilerden sonra ilk bakışta matematik problemi gibi gözükmeyen fakat kendi çapında kötü yönde şöhret yapmış politik bir sorun olan Kıbrıs sorununa matematiksel bir bakışla ve var olması gereken çözümü bu perspektif altında vermeye çalışalım. Örnek problemi ele alırken geliştirilmeye çalıştığımız yöntemin matematiksel açıdan genel olduğunu ve benzer siyasi sorunların çözümünde en azından matematikçi olan kişiye ve büyük bir ümitle politikacılara da bir çözüm önerisi vereceğini düşünüyoruz. Günümüzde bu tipten siyasi problemlere Bosna Hersek, Kosova, Keşmir ve diğer bölgelerde hala rastlanmaktadır. Matematikte adil olma kavramı henüz tanımlanmadığından harita boyama ile elde edilecek olan çözümün ideal ve tüm tarafların kabul edebileceği çözüm olması gerekmez. Fakat sorunlu bölgelerin ilgili tarafların bayraklarındaki etkin renklerle ve dengeli olarak boyanması matematiğin sunduğu 'adaletli' olma koşulu olarak algılanmalıdır. Yine doğal olarak bu şekilde bir yaklaşım çözümün geçerliliği ve kalıcılığı üzerinde de pek bir etkisi olmayabilir. Yine de hiç çözüm üretememekten daha iyi olmalıdır belli kurallara uygun bir çözüm önerisi.

Kıbrıs Sorunu Üzerine: Kıbrıs sorunu Kıbrıs'lı Türkler'e ve Türkiye'ye göre 1963'teki Kıbrıs Cumhuriyetinin Kıbrıs Rumları tarafından tek taraflı olarak ortadan kaldırılıp eşit haklara sahip kurucu ortağa karşı kaba kuvvetle harekete geçilmesi ile ortaya çıkmıştır. Uluslararası sahada bu durum Kıbrıs Cumhuriyetinde etkin taraf olan Rumlar tarafından Kıbrıs'lı Türklerin Cumhuriyete bir baş kaldırısı olarak takdim edilmiştir. Bu yaklaşım uluslararası arenada taraftar ve destek bulmuştur. Kıbrıs Türkleri ve Türkiye ise gerçeğin ortaklıktan zorla atılma ve bir eritilme (asimilasyon) hareketi olduğunu 1963'den beri savunmakta ve sorunun olası çözümde bu temel gerçeğin göz önüne alınmasını gerek koşul olarak öne sürmektedirler. Kıbrıs'lı Rumlar ve Yunanistan tarafından 1974'e kadar her şeyin planlandığı şeklinde giderken Yunanistan kaynaklı darbe ile Türkiye'ye doğal olarak ve 1960 andlaşmaları ile tesbit edilen garantör ülke olma hakkının 1974 Barış Harekatı ile kullanılması Kıbrıs'lı Türkleri eritilmeden kurtarıp güvenlik altına alırken Kıbrıs'lı Rumlara Kıbrıs Cumhuriyeti'nin temsilcisi olması yanında ayrıca Kıbrıs Türkleri gibi hak arayan taraf olma durumuna getirmiştir. Kıbrıs Türkleri bu durumun çözüm yolunda en büyük engel olduğunu belirtmekte ve Kıbrıs Rumların Cumhuriyetin yegane temsilcisi olmadığını altını çizmektedirler. Bu bakımdan Rumlar açısından 1974'e kadar sorun olmayan Kıbrıs sorunu 1974 Barış Harekatı ile sorun olarak kabul edilmeye başlanmıştır. Yazar bu konuda bir uzman olmadığını kabul ederek daha geniş bir perspektif içerisinde Kıbrıs Sorunun için aşağıdaki tanımlı vermektedir. Bu tanımdan amaç, aşağıdaki tanımda sözü geçen ülkeler yerine Bosna Hersek, Kosova, Keşmir ve diğer benzer sorunlu bölgeler konulduğu zaman da tanımın geçerliliğini korumasıdır.

Tanım: Kıbrıs Sorunu

Genel olarak Kıbrıs sorunu iklimsel karakterleri birbirlerine benzeyen değişik ırk ve dinlere ait iki komşu ulusun Akdeniz'deki uzantılarının rekabeti ve birinin diğerine üstün gelme çabası olarak tanımlanabilir. Potansiyel güçler açısından avantaj anavatanlarından Türkiye'den Kıbrıs adasında Kıbrıs Rumları'dan yana oluşmuştur. Bu nedenle kendisini ezelden beri Batının parçası ve Batı medeniyetinin temel taşı olarak gören Yunanistan her zaman Batının hakemliğini ve desteğini istemiştir.

TANIM VE UYGULAMA: Ülkeler ve bayrakları arasında bire bir bağlantı her zaman kurulabilir. Ülkesi olupta bayrağı olan, veya tersi olan durumlar bir devleti temsil etmezler. Renkleri ve üzerinde semboller olmayan bayrak düşünülmemeyeceği için bayrak renklerin ve sembollerin fonksiyonu olarak ele alınabilir. Sembolsüz bayrakları işaretleşme için kullanıldığını kabul ediyoruz, yalnız beyaz renkle 'teslim veya ateşkes' veya yalnız kırmızı renkle 'doktrinel' bayraklar gibi. Genel olarak insan ve beğendiği renklerle o insanın hangi ulusa ait olduğu arasında bir ilişki kurmak doğru değildir.

En nihayet renk seçimi insandan insana değişen bir kavramdır. Fakat ulusal değerler ve ülkenin coğrafyası bazen tercih edilen renklerin seçilmesinde rol oynayabilir. Dört bir yanı denizlerle çevrili Akdeniz'deki bir ada için 'beyaz' renk hem güneş ışınlarını yansıtması hemde etrafta bolca bulunan alçı taşları dolayısıyla kullanılan etkin renk olarak ortaya çıkar. Bazen renk bir ülke üzerinde yaşayan insanların dinsel inançlarının terchi olarak ortaya çıkabilir. Örneğin bir çok Arap ülkesinin etkin rengi yeşil ve yeşilin çeşitli tonları olmaktadır. Yine çöllerle kaplı ülkelerde ülke iklim ve doğasının etkin renkleri olan sarı renk ve tonlarına kontrast teşkil eden siyah renk ön plana çıkar. Diğer etkin renk olma özelliği ise ülkelerin yönetilme şekillerine bağlı olarak kendini göstermektedir. Koyu lacivert renk her zaman monarşi belirtisi royal bir renktir. Fakat tüm insanlar için gündüzleri gökyüzünün mavisi ile gecelerin karanlığını temsil eden siyah renk doğal olarak veya farkına varmadığımız etkili renklerdir. Tüm burada değindiğimiz veya gözden kaçırdığımız diğer etkenler nedeniyle ulusal etkin renkler ortaya çıkar ve bu renkler o ülkenin bayrağının temel renklerini teşkil ederler.

Tanım: *B bayrağını boyayan k renkten p tanesi, $k \geq p$ diğerlerinden daha belirgin veya daha fazla kullanılmış ise p renk B bayrağının etkin renkleridir denir. Etkin renkler eşit dağılımlı iseler p renk B bayrağında etkin ve eşit-renklidir denir. Eğer $k = p$ ise B bayrağı eşit-renklidir deriz.*

Örneğin Türk bayrağı kırmızı ve beyaz renklerden oluşur ve bayrak $B_T = \{Kırmızı, Beyaz\}$ ile gösterilirse ' $K=Kırmızı$ ' renk etkin renktir. Benzer şekilde Yunan bayrağı $B_Y = \{Mavi, Beyaz\}$ ile gösterilir ve burada etkin renk $M=Mavidir$. İngiliz ve A.B.D. bayrakları sırayla $B_E = \{Mavi, Kırmızı, Beyaz\}$ ve etkin renkleri mavi ve kırmızı ve $B_A = \{Beyaz, Kırmızı, Mavi\}$ ve etkin renkler $B=Beyaz$ ve kırmızıdır.

Sorunun kaynağı olan Kıbrıs adası üzerindeki bayraklar için Kuzey Kıbrıs'ta egemen olan KKTC bayrağı $B_{KK} = \{Beyaz, Kırmızı\}$, etkin rengi beyaz ve Güney Kıbrıs'ta egemen bayrak⁴ $B_{GK} = \{Beyaz, Kahverengi, Yeşil\}$ renklerinden oluşmakta ve etkin rengi beyazdır. Dipnot'ta da belirtildiği gibi Güney Kıbrıs'ın belirlenmiş bir bayrağı bulunmamakta ve 1960 Londra ve Zürih Andlaşmaları ile kurulan ve 1963'te çıkan toplumlar olaylar nedeniyle fiziksel olarak ortadan kalkan Kıbrıs Cumhuriyeti bayrağı kullanılmaktadır. Kıbrıs adası üzerinde yaşayan toplumlardan Güneyi temsil eden Kıbrıs Rumları anavatanları Yunanistan'ın uzantısı (bazı tarihçilere göre tartışma konusu) ve benzer şekilde Kuzeyi temsil eden Kıbrıs Türkleri ise anavatanları Türkiye'nin uzantısını temsil etmektedirler. Bu nedenle Kıbrıs Rum Kesimini temsil eden bayrak sanal kabul edilmiş ve Kıbrıs Rum kesimi bayrağının etkin rengi mavi olarak alınmıştır. İlerde kurulması olası Güney Kıbrıs Rum Cumhuriyeti bayrağı etkin renkleri sırayla beyaz ve mavi olan örnek bayraklar Şekil 2 de gösterilmiştir. Bayraklar Yunanistan bayrağının temel şekilleri olan haç ve çubuk şekillerini içermektedir.

Politik Harita Renk Problemi⁵:

Renkler ve Bayraklar *M haritası ülkeleri bayraklarındaki etkin renkler listesine uygun olarak minimum renk kullanarak ve her iki komşu ülke değişik renk kullanma koşulu ile boyanmasına politik harita boyaması denir. Eğer kullanılan renk sayısı öncül etkin renklerin sayısına eşit ise ve her ülke etkin renklerinde biri ile boyanmış olurlarsa M haritası kabul edilebilir politik boyanmıştır denir.*

Örnek. Şekil 2'den görüleceği gibi A, B, C, ve D ülkelerinden oluşan haritayı göz önüne alalım. A ülkesi C ve D ye, B ülkesi C ve D ye, C ülkesi A, B, ve D ye ve D ülkesi A, B, ve C ülkelerine komşu olsunlar. A, B, C, ve D ülkelerinin bayraklarındaki renkleri:

- A={ Mavi, Kırmızı }, Etkin renk = Mavi
- B={ Mavi, Sarı }, Etkin renk = Mavi
- C= { Sarı, Mavi }, Etkin renk = Sarı
- D= { Kırmızı, Sarı }, Etkin renk = Kırmızı

Politik harita boyanması A ve B ülkelerinin maviye, C nin sarıya ve D nin ise kırmızıya boyanması

⁴Güney Kıbrıs bayrağı henüz bulunmamakta ve 1960'ta kurulan Kıbrıs Cumhuriyeti bayrağı kullanılmaktadır. Ulusları arena tarafından bu duruma onay verilmekte ve bu gerçek durumla çelişki oluşturmaktadır. Yazara göre Kıbrıs sorunun esas kaynağı.

⁵Politik harita renk probleminde her ülke için etkin renkler eşit sayıda verilirse ve etkin renk önceliği göz önüne alınmasa problem 'list coloring' problemine dönüşür [3].

ile elde edilir. Bu çözümden başka bir çözüm olmadığının gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz.

Sorunlu Politik Harita Renk Problemi

M haritası k adet bölgeye ayrılmış olsun. K adet ülke etkin bayrak renklerini kullanarak M haritasını kabul edilebilir politik boyamasına sorunlu politik harita renk problemi denir.

Yukarıda verilen açıklamalar ve tanımlar ışığında Kıbrıs var olan defacto durumu sağlayan boyama Kuzey'in kırmızı ve Güney'in mavi renge boyanmasıdır. Benzer şekilde Türkiye kırmızı ve Yunanistan mavi renklerle boyanmıştır. ABD'nin etkin renginin beyaz ve İngiltere'nin (ve Avrupa Birliği) etkin renginin mavi olduğu göz önüne alındığında mavi rengin eşit miktarda ilgili haritayı oluşturan ülkeler arasında dağılmadığını görürüz. Diğer yandan ABD'nin etkin renkleri beyaz, mavi ve kırmızıdır. Bu nedenle kabul edilebilir eşit renk dağılımlı harita boyaması ile Güney ve Kuzey Kıbrıs'taki sınırı beyaz renkle gösterilmiştir.

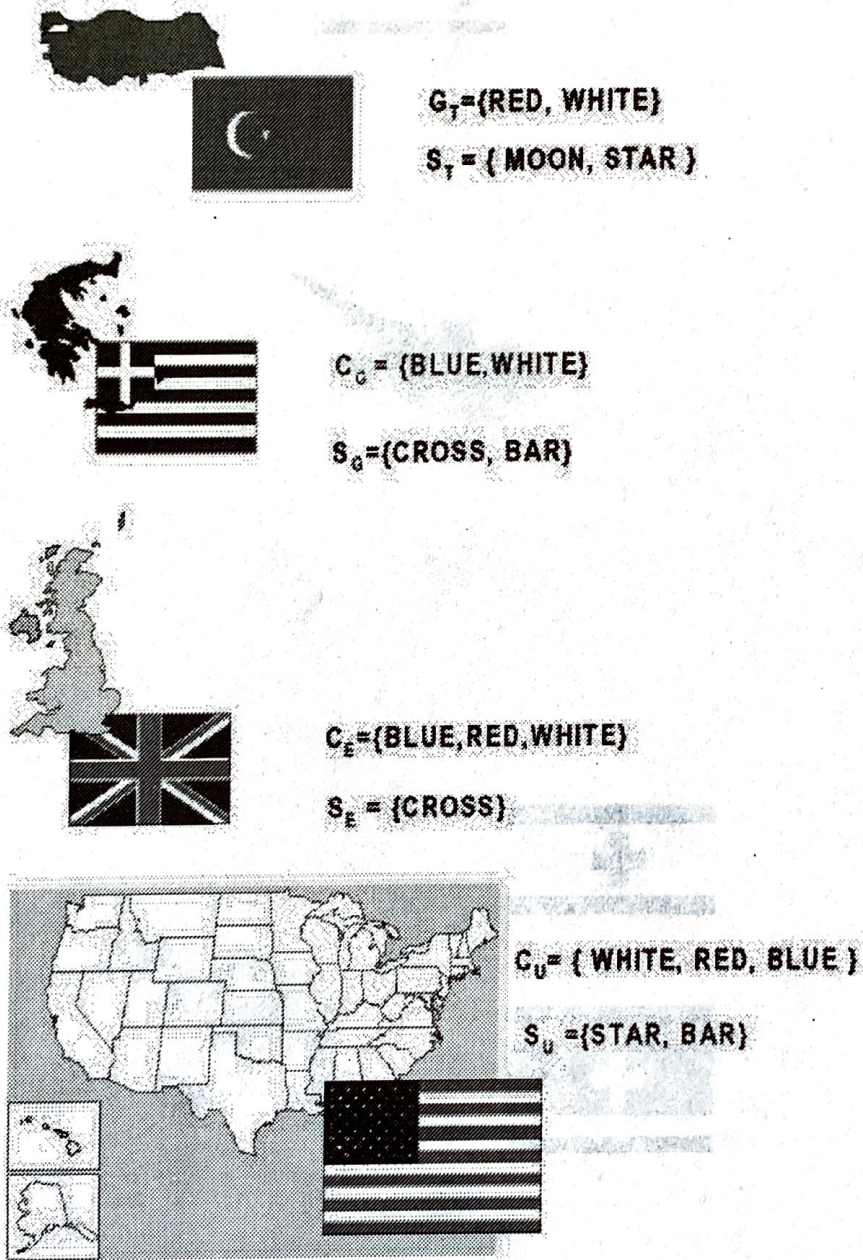
Semboller ve Bayraklar: Semboller açısından Kıbrıs sorunu ile ilgili ülke bayrakları ele alındığı zaman konu biraz daha karmaşık hale gelmektedir. Kısaca özetleyecek olursak Türkiye bayrağı ay ve yıldız, Yunanistan ve İngiltere bayrağı haç ve çubuklar, ABD bayrağı yıldızlar ve çubuklardan oluşmaktadır. Yıldız bolluğu içinde olana Avrupa Birliği bayrağı konu açısından bir devleti temsil etmediğinden göz önüne alınmamıştır. Daha öncede de belirttiğimiz gibi var olmayan Kıbrıs Cumhuriyeti'ni temsil etmekte olan Güney Kıbrıs bayrağı sembolleri Kıbrıs adası, zeytin dalı ve güvercin problemin çözümüne katkı koymamaktadır. Güney Kıbrıs'ın sembollerinin de haç ve çubuklardan oluşması gerektiğini kabul edebiliriz. Buradan çıkan sonuç bayraklarda bulunan semboller de dengeli dağılmaktadır. Başka bir deyişle etkin olan semboller yıldız, haç ve çubuk sembolleri konu ile ilgili ülke bayrakları üzerinde dengeli dağılmaktadır.

SONUÇ

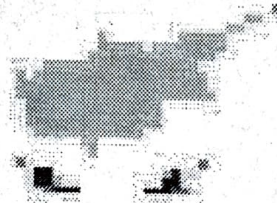
Matematikçi gözü ile Kıbrıs sorununa çözüm bulmak, var olan (defacto) durum üzerinde pek fazla değişiklik yapmadan sorunlu harita bölgesini, sorunla ilgili ülkelerin bayraklarındaki renkler ve sembollere bakarak, üç renk ile dengeli olarak boyamayı gerektirir. Bu çalışmada probleme yukarıda değindiğimiz şekilde bakarak dengeli üç renkle sorunlu bölge olan Kıbrıs adasının boyanmasını ele aldık. Elde edilen üç renkli çözümün siyasi karşılığının kolayca konfederasyon yapısına uygun düştüğü görülmektedir. Siyasi yaklaşım açısından üç renk çözümünün tek fazlalığı, belki Güney ve Kuzey Kıbrıs arasındaki beyaz renkle boyanması gereken sınır çizgisi olmaktadır.

KAYNAKÇA

- [1] K. Appel and W. Haken, "Every planar map is four colorable", *Contemporary Math.*, 98, (1989).
- [2] N. Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour, R. Thomas, "A new proof of the four color theorem", *Electron. Research Announc. Amer. Math. Soc.*, 2 (1996), 17-25.
- [3] B. Bollabas and A.J. Harris, "List Coloring of Graphs", *Graphs and Combin.*, 1 (1985), 115-127.



Şekil 3. Kıbrıs adası üzerine etkin ülkeler ve bayrakları.



Şekil 2. Etkin bayrak renklerine boyanmış Kıbrıs adası ve bayrakları.

DÖRT İŞLEMDE İLGİNÇ OYUNLAR

Murat Atmaca

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

Genel olarak hemen hemen herkesin çarpım kuralları hakkında bir bilgisi vardır. Bugün çoğu kişi dört işlem yaparken hesap makinası kullanmayı tercih etmesine karşın, bazı kişiler bu işlemleri kafasından yapar. Bu kişiler kimi zaman bu işlemleri hesap makinesinden daha hızlı olabilirler. İlk öğretimde çarpma işlemleri hakkında birçok yöntemler öğrendik. Bu yazımızda kafadan dört işlem yapma yöntemleriyle ne tür matematiksel sihirbazlıklar yapabileceğimiz üzerinde duracağız.

Bir sayının 11 ile çarpılması: Bir sayıyı 11 ile çarpmanın iki yöntemi vardır. Birinci yöntem; çarpılan sayıyı on ile çarpıp kendisi ile toplamaktır. Örneğin,

$$426 \times 11 = ? \quad (10 \times 426 \text{ ile } 426 \text{ sayısını toplayın}) \quad 426 + 4260 = 4686$$

$$12 \times 11 = ? \quad (12 \text{ sayısını alın ve } 10 \times 12 \text{ ile toplayın}) \quad 12 + 120 = 132$$

Son örnekte birşeylerin ilginç olduğunu görebilirsiniz. Çarpımda dikkat ettiyseniz onlar basamağındaki 3, çarpılan sayıdaki birler ve onlar basamağındaki rakamların toplamıdır. Yani, 12 sayısındaki 1 ve 2 rakamlarının arasına bunların toplamını eklediğimizde (132) sayısını elde ederiz.

Bir sayının 11 ile çarpılmasının ikinci yöntemini buna göre söyle tanımlayabiliriz: İki basamaklı bir sayıda iki basamağı toplayın ve toplamı basamaklar arasına yerleştirin. Örneğin 18×11 çarpımına bakalım; $18 \times 11 = 198$ gibi. (onlar basamağındaki 9 rakamı çarpılan sayının birler ve onlar basamağındaki rakamların toplanmasıyla elde edildi. Peki bu kural genel mi?

Şimdi $99 \times 11 = ?$ çarpma işlemine aynı kuralı uygulayalım.

$99 \times 11 = \text{olmadı sorun var}$ ($9 + 9 = 18$ olduğundan araya 18 koymak gerekir ki bu durumda yanlış sonuç elde ederiz. Peki nerede hata yaptık?

9 sayısına 9 eklediğimizde, iki-basamaklı bir sayı elde ediyoruz. Bu durumda, bu iki basamaklı sayının birler basamağındaki rakamı çarpılan iki basamaklı sayının rakamlarının arasına eldeki rakamı yani onlar basamağındaki rakamı da çarpılan sayının onlar basamağına ekleriz.

Tekrar örneğimize dönelim; $99 \times 11 = ?$ Önce $9 + 9 = 18$ toplamı bir basamaklı olmadığından 9'ların arasına bu toplamın birler basamağındaki 8'i yazarız. Elde kalan biride baştaki 9'a eklediğimizde $99 \times 11 = 1089$ sayısını elde ederiz. Bu kuralı şu şekilde genellemek mümkündür; 11 ile çarpılan sayı iki parçaya ayrılır bunların arasına bu iki sayının toplamının birler basamağı yazılır kalan kısım da baştaki sayıya eklenir.

Bir sayının birler basamağı bir olan sayıyla çarpımı: Çarpılan sayıyı çarpanın baştaki rakamı ile çarpıp sonuna bir sıfır koyun ve buna çarpanı ekleyin.

$42 \times 31 = 1302$ ($42 \times 3 = 126$ ve 126 sayısına sıfır eklenmesiyle 1260 sayısı elde edilir. Sonuç için 42 ile 1260 toplanır.)

Bu nasıl oldu? Çarpılan sayıyı çarpana sıfır ile biten en yakın sayıyı çarpın yani, çarpan 31'e en yakın sayı 30'dur. Sonrada sayıya çarpılan eklenir.

Bir sayının birler basamağı 5 olan sayıyla çarpımı: 5 ile biten sayıyı herhangi bir sayı ile çarptığımızda, cevabın daima 5 veya 0 ile biteceğini biliyoruz. Bunun uygulayacağımız method ile bir ilişkisi yoktur fakat cevabı kontrol etmek için kullanabilirsiniz. Eğer 5 ile biten sayıyı 0 ile biten bir sayı ile yer değiştirdiğinizde, çarpım kolay olacaktır. 5 ile biten herhangi bir sayının iki katı daima 0 ile biten sayıdır. Böylece ilk yapacağımız şey 5 ile biten sayının iki katını almaktır.

Şimdi çarpanı değiştirdiğimizden, çarpılan sayıyı da değiştirmek zorunda kalacağız ve sonuç değişmeyecektir. Önce Çarpanın iki katını alırız sonrada çarpılan sayının yarısını alıyoruz. Bir sayının iki katını ve diğer sayının yarısını aldığımızda, başlangıçta verilen sayılar ile aynı çarpımı elde ederiz.

Şimdi bu yöntemi örnekler ile açıklayalım;

$$4 \times 5 = 20 \quad (4\text{'ün yarısı } 2 \text{ ve } 5\text{'n iki katı } 10 \text{ dur. Sonuç } 2 \times 10 = 20 \text{ olacaktır.})$$

$$42 \times 15 = 630 \quad (42\text{'in yarısı } 21 \text{ ve } 15\text{'n iki katı } 30 \text{ dur. Sonuç } 21 \times 30 = 630 \text{ olacaktır.})$$

Eğer çarpan tek sayı ise, yöntemin uygulanması hala güvenli olacak, fakat kesirli bir sayı ile çarpım yapmak zorunda kalırsınız.

Şimdi'de 19×25 çarpımına bakalım;

$19 \times 25 = ?$ (19'un yarısı 9 buçuk ve 25'n iki katı 50 ve sonuç $9\frac{1}{2} \times 50 = 475$ dir.)

Eğer bu methodu uygulamak istemiyorsanız, bu probleminin kolay yolu 50'n yarısını alıp 9×50 'ye eklemektir (Yani $450 + 25 = 475$).

Bir sayının 15 sayısı ile çarpılması: 15 ile çarpmak istediğimiz sayıyı aynı cevabı elde etmek için 10 ile çarpılan bir sayı ile değiştirip sayının yarısını kendisine ekleyip 10'la çarpmak demektir. Örneğin,

$12 \times 15 = ?$ (12'nin yarısı 6 ve $12 + 6 = 18$ ve $18 \times 10 = 180$ dir.)

Bu sihirbazlık değil yalnızca mantıktır. 15 sayısı 10'nun yarısının kendisine eklenmesiyle bulunan sayıdır. Eğer çarpılanın yarısını kendisine eklediğinizde 15'in çarpılanını 10'na indirgiyorsunuz ve aynı cevabı buluyorsunuz.

Bu işlem bir matematik probleminin bir parçası olarak göz önüne alındığında, problemin diğer parçası üzerinde ters işlem uyguladığınızda cevap yine aynı kalır. Yani yarım eklemek ve yarım çıkarmak. Şimdi bu yöntemi büyük sayılar üzerinde deneyelim.

$44 \times 15 = ?$ (44'ün yarısı 22 ve $44 + 22 = 66$ ve sonuç $66 \times 10 = 660$ dir.)

$116 \times 15 = ?$ (116'nın yarısı 58 ve $116 + 58 = 174$ ve sonuç $174 \times 10 = 1740$ dir.)

$17 \times 15 = ?$ (17'nin yarısı $8\frac{1}{2}$ ve $17 + 8\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$ ve sonuç $25\frac{1}{2} \times 10 = 255$ dir.)

veya

$17 \times 15 = ?$ ($17 \times 10 = 170$ ve 170'n yarısını 170 eklersek $170 + 85 = 255$ 'i elde ederiz.)

Bir sayının 45 sayısı ile çarpılması: Bunu yapmak için, 5 sayısının 50'nin $\frac{1}{10}$ 'nu olduğuna dikkat edelim. 45 çarpanını 50 çarpanıyla değiştirip ve sonra 45 çarpanına geri dönmek için, çarpımın $\frac{1}{10}$ 'u kendisinden çıkarılacak. Yaptığımız şey 50-5 ile çarpmaktır.

Şimdi bunu örnek üzerinde uygulayalım.

$12 \times 45 = ?$ (50 ile çarpıldığını düşünün. $12 \times 50 = 600$ ve 600'ün $\frac{1}{10}$ 'n 60 dir. Böylece $600 - 60 = 540$ cevabını elde ederiz.)

Bir sayının 55 sayısı ile çarpılması: 55 ile çarpım yapmak demek 45 ile çarpım yapma yönteminin tersidir. Yani çarpım 50 sayısından $\frac{1}{10}$ fazla $\frac{1}{10}$ kadar da azdır. 45 ile çarpımdaki çıkarma işlemi yerine burada toplama işlemini yaparız. Örneğin,

$12 \times 55 = ?$ ($12 \times 50 = 600$ ve 600'ın $\frac{1}{10}$ 'n 60 dir. Böylece $600 + 60 = 660$ cevabını elde ederiz.)

Bir sayının 9 ile çarpımı: 45 ve 55 çarpımında kullandığınız aynı methodu burada kullanabilirsiniz. Yani 9 sayısı 10 sayısından bir eksiktir. Böylece bir sayıyı 10 ile çarpıp sonrada cevabı elde etmek için çarpımdan verilen sayıyı çıkartırsınız. Örneğin,

$12 \times 9 = ?$ ($12 \times 10 = 120$ ve sonuç $120 - 12 = 108$ dir.)

$145 \times 9 = ?$ ($145 \times 10 = 1450$ ve sonuç $1450 - 145 = 1305$ dir.)

9 ile biten iki basamaklı sayıların çarpımı: 1 ile biten sayıların çarpımında uyguladığınız yöntemi burada da kullanabilirsiniz. Çarpanı 0 ile biten çarpan ile değiştirin ve çarpanın onlar basamağı ile çarpın. Şimdi bu yöntemin tersini uygulayın ve sonuçtan çarpılanı çıkarın.

$12 \times 19 = ?$ (Burada 12 sayısı çarpılan ve 19 sayısı ise çarpandır. 20'yi elde etmek için 19 sayısına 1 ekleyin ve böylece $12 \times 20 = 240$ sayısını elde ederiz. 240 sayısından 12 çıkarıldığında $240 - 12 = 228$ sonucunu elde ederiz.)

Unutmayın bu tür zihinsel hesaplar zihninizi hep uyanık tutar.

KAYNAKÇA

[1] Flansburg, Scott. "Math Magic" 1993.

CAHİT ARF MATEMATİK GÜNLERİ

Matematik Bölümü, Bilgi Üniversitesi

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini simgeler: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini simgeler: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ kesirli (rasyonel) sayılar kümesini simgeler.

$\mathbb{R}$ reel (gerçek) sayılar kümesini simgeler.

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olarak tanımlanmıştır.

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlanmıştır.

$\mathcal{A}$ bir reel sayılar kümesi olsun.

Eğer $\mathcal{A}$ 'nin her iki a ve b ögesi için, $a - b$ sayısı gene $\mathcal{A}$ 'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **çıkarma altında kapalı** denir. Örneğin $\mathbb{Z}$ çıkarma altında kapalıdır ama $\mathbb{N}$ değildir.

Eğer $\mathcal{A}$ 'nin her iki a ve b ögesi için, $a + b$ gene $\mathcal{A}$ 'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **toplama altında kapalı** denir. Örneğin $\mathbb{N}$ toplama altında kapalıdır ama tek tamsayılar kümesi değildir.

Eğer $\mathcal{A}$ 'nin her iki a ve b ögesi için, ab de $\mathcal{A}$ 'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **çarpma altında kapalı** denir.

Eğer $\mathcal{A}$ 'nin her a ögesi için, a^2 de $\mathcal{A}$ 'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **kare alma altında kapalı** denir.

Eğer $\mathcal{A}$ 'nin her $a \neq 0$ ögesi için, a^{-1} de $\mathcal{A}$ 'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **tersini alma altında kapalı** denir.

Asağıdaki teoremi kullanmaya ihtiyacınız olabilir:

Teorem: Eğer $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ve $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n = 0$ ise, o zaman $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ dir.

Bu teoremi kanıtlamadan kullanabilirsiniz.

Önceki soruyu ya da soruları (kanıtlayamasanız dahi) sonraki soruların kanıtında kullanabilirsiniz.

1. Çıkarma altında kapalı olan bir reel sayılar kümesinin toplama altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: $x + y = x - ((x - x) - y)$.

2. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve her ögesinin yarısını da içeren bir reel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: $xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$.

3. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve $1/2$ 'yi de içeren bir reel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: $1/2$ kümede olduğundan, karesi $1/4$ de kümede. Asağıdaki eşitliğe dikkatinizi çekeriz:

$$x/2 = (x + 1/4)^2 - x^2 - (1/4)^2.$$

Demek ki küme ikiye bölme altında kapalı. Şimdi ikinci soruyu kullanın.

4. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir reel sayı kümesi bulun. (6. soruya dikkatinizi çekeriz.)

Yanıtlardan biri: $a_1 + a_2\pi^2 + 2a_3\pi^3 + a_4\pi^4 + \dots + a_n\pi^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}$.

5. Çıkarma ve tersini alma altında kapalı olan ve $1/2$ 'yi içeren bir reel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Yanıt: Önce 1 'in kümede olduğuna dikkatinizi çekeriz. Şimdi şu eşitliğe bakın:

$$((y - (1 + y^{-1})^{-1})^{-1} + y^{-1})^{-1} = y^2$$

ve üçüncü soruyu kullanın.

6. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir kesirli sayı kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Yanıt: $\mathcal{A}$, çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir gerçek sayılar kümesi olsun. $u, v \in \mathcal{A}$ olsun. Bu sayıları kesirli sayı olarak yazalım: $u = a/b$ ve $v = c/d$ (burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$). Ve e, ad ve bc

sayılarının en büyük ortak böleni olsun. Şimdi

$$u = a/b = (e/bd)(ad/e) \in (e/bd)\mathbb{Z}$$

ve

$$v = c/d = (e/bd)(bc/e) \in (e/bd)\mathbb{Z}.$$

Demek ki $uv \in (e^2/b^2d^2)\mathbb{Z}$. Dolayısıyla uv sayısının $\mathcal{A}$ 'da olduğunu kanıtlamak için, e^2/b^2d^2 sayısının $\mathcal{A}$ 'da olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için de e/bd sayısının $\mathcal{A}$ 'da olduğunu göstermek yeterli. $e = \gcd(ad, bc)$ olduğundan, öyle x ve y tamsayıları vardır ki $adx + bcy = e$. Demek ki $e/bd = (adx + bcy)/bd = (a/b)x + (c/d)y \in \mathcal{A}$.

7. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (ya da $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$) kümesinin bir altkümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa çarpma altında da kapalı mıdır?

Yanıt: Bu sorunun yanıtını yarışmadan önce biz de bilmiyorduk. Araştırmaya yönelik bir yarışma hazırlamak istediğimizden, yanıtını bilmediğimiz bir soruyu yarışmaya eklemekte bir sakınca görmedik. Şimdi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ için yanıt biliyoruz. Evet, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 'nin çıkarma ve kare altında kapalı olan bir altkümesi çarpma altında da kapalıdır. Ne yazık ki bulabildiğimiz kanıt lise düzeyini aşmakta ve orta düzeyde soyut cebir bilgisi gerektirmektedir.

$\mathcal{A}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ kümesinin çıkarma ve kare alma altında kapalı bir altkümesi olsun. $\mathcal{A}$ 'nin boşküme olmadığını varsayabiliriz. Birinci sorudan $\mathcal{A}$ 'nin toplama altında kapalı olduğunu biliyoruz. Demek ki eğer $n \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha \in \mathcal{A}$ ise, o zaman $n\alpha \in \mathcal{A}$. Biraz orta düzey soyut cebir bilgisinden şu çıkar: Öyle bir $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ vardır ki $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$. (Bu olduğunun kanıtı: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ iki öğe tarafından gerilmiş özgür bir $\mathbb{Z}$ -modüldür (örneğin 1 ve $\sqrt{2}$ tarafından.) Dolayısıyla, $\mathcal{A}$ da en çok iki öğe tarafından gerilmiş bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.)

Demek ki $\mathcal{A}$ 'nin her öğesi, $n\alpha + m\beta$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) olarak yazılabilir. $2\alpha\beta$ öğesi $\mathcal{A}$ 'da olduğundan, belli bir $u, v \in \mathbb{Z}$ için,

$$2\alpha\beta = n\alpha + m\beta \quad (1)$$

eşitliği geçerlidir. Bir de şuna dikkatinizi çekeriz: " $\alpha\beta \in \mathcal{A}$ " koşulu $\mathcal{A}$ 'nin çarpma altında kapalı olması için gerek ve yeter koşuldur. Dolayısıyla $\alpha\beta \in \mathcal{A}$ önermesini kanıtlamak yeterlidir.

Önce m 'nin tek sayı olduğunu varsayalım. (1) denkleminde $2\alpha^2\beta = n\alpha^2 + m\alpha\beta$ denklemini, bundan da

$$m\alpha\beta = 2\alpha^2\beta - n\alpha^2 \quad (2)$$

denklemini elde ederiz. α^2 ve β elemanları $\mathcal{A}$ 'da olduklarından, $2\alpha^2\beta \in \mathcal{A}$. Öte yandan $n\alpha^2$ elemanının da $\mathcal{A}$ 'da olduğunu biliyoruz. Demek ki, (2) denkleminde $m\alpha\beta$ elemanının da $\mathcal{A}$ 'da olduğu anlaşılır. Ama m tek bir tamsayı ve $2\alpha\beta \in \mathcal{A}$. Şimdi, $2\alpha\beta$ ve $m\alpha\beta$ sayılarını yeterince toplayıp çıkararak $\alpha\beta$ sayısının da $\mathcal{A}$ 'da olduğunu görürüz. Demek ki m tekse $\alpha\beta \in \mathcal{A}$. Dolayısıyla m 'nin çift olduğunu varsayabiliriz. Aynı biçimde n 'nin çift olduğunu da varsayabiliriz. Ama hem n hem m çiftse, (1) denklemini sadeleştirip, $\alpha\beta \in \mathcal{A}$ koşulunu elde ederiz. Bu sorunun $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ için yanıtını hl bilmiyoruz.

8. Yukardaki sorulara benzer sorular bulup yanıtlamaya çalışın.

CAHİT ARF MATEMATİK GÜNLERİ 17 Nisan 2002 ve 8 Mayıs 2002 tarihleri arasında İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümünce organize edilmiş ikili yazılı çalışmadır.

Amaç: Lise öğrencilerinin ve toplumun soyut matematiğe olan ilgilerini arttırmak ve bilinçlendirme yaratıcı genç insanları tespit edip onları soyut matematik dalında eğitim görmeleri konusunda teşvik etmektir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 30.Kasım 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama:

Bu sayımıza kadar bize yanıtlarını gönderenler içinde doğru çözüm üretenler: Oktay Balkis (Y.256 ve Y.257), Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi, Aksaray. Mustafa Dönmez ve Yaşar Dönmez (Y.256, Y.257), Halil Kale Fen Lisesi, Turgutlu Manisa ve Turgutlu Lisesi, Turgutlu-Manisa.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.266. 3698765432123456789 ve 345678909876543 sayılarının çarpımı kaç basamaklıdır?

A.267. Merkezi $\triangle ABC$ ikizkenar ($|AB| = |BC|$) üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde bulunan çember $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına teğettir, $|AC|$ kenarını da üç parçaya bölüyor. $[BH]$, ABC üçgeninin yüksekliği olmak üzere, $|BH| \cdot |AC| = 18\sqrt{2}$ ise, çemberin yarıçapını bulunuz.

A.268. -7 'den 7 'ye kadar olan tüm tam sayılar, her sayının iki komşusunun çarpımı negatif olmayacak şekilde, çember boyunca dizilebilir mi?

A.269. $[|x|]$, x gerçel sayısının tam değerini, $\{x\} = x - [|x|]$ de kesir değerini göstermek üzere, $[|x|] \cdot \{x\} \geq 3$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif gerçel x sayısını bulunuz.

A.270. a, b, c gerçel sayıları

$\max(a, b) + \max(c, 2002) = \min(a, c) + \min(b, 2003)$ olacak. Dolayısıyla s_n 'in 7 modunda alabileceği

eşitsizliğini sağlar. $b \geq c$ olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.266. n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını $\tau(n)$ ile gösterelim. $\tau(n^2 + 1)$ dizisinin hiçbir n sayısından başlayarak kesin artan olmayacağını kanıtlayınız.

Y.267. $ABCD$ paralelkenarının köşegenlerinin kesişim noktası O olsun. $\triangle ABO$ üçgeninin çevrel çemberi $[AD]$ kenarı ile bir E noktasında, $\triangle DOE$ üçgeninin çevrel çemberi de $[BE]$ doğru parçasını bir F noktasında kesiyor. $s(\angle BCA) = s(\angle FCD)$ olduğunu gösteriniz.

Y.268. 10 tane kağıt parçasının her birinde bir kaç tane 2 'nin kuvvetlerine eşit olan sayı yazılmıştır. Tüm kağıt parçalarındaki sayıların toplamı aynıdır. Yazılan tüm sayılar arasında en az 6 kez rastlanan bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

Y.269. a, b, c gerçel sayıları $9a + 11b + 29c = 0$ eşitliğini sağlamaktadır. $ax^3 + bx + c = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında en az bir kökü bulunduğunu kanıtlayınız.

Y.270. Aşağıdaki iddialardan ikisinin doğru, birinin de yanlış olduğu biliniyorsa, n pozitif tam sayısını bulunuz:

- 1) $n + 51$, bir tam sayının karesidir;
- 2) n sayısının son basamağı 1 'dir;
- 3) $n - 58$, bir tam sayının karesidir.

ÇÖZÜMLER

A.256. 2000^{2003} sayısı birkaç tane ardışık tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilir mi?

Çözüm. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ toplamını s_n ile gösterelim. s_n 'in 7 modunda alabileceği değerleri hesaplayalım.

$$s_1 \equiv 1 \pmod{7}; s_2 \equiv 1^3 + 2^3 \equiv 2 \pmod{7};$$

$$s_3 \equiv 2 + 3^3 \equiv 1 \pmod{7}; s_4 \equiv 1 + 4^3 \equiv 2 \pmod{7};$$

$$s_5 \equiv 2 + 5^3 \equiv 1 \pmod{7}; s_6 \equiv 1 + 6^3 \equiv 0 \pmod{7};$$

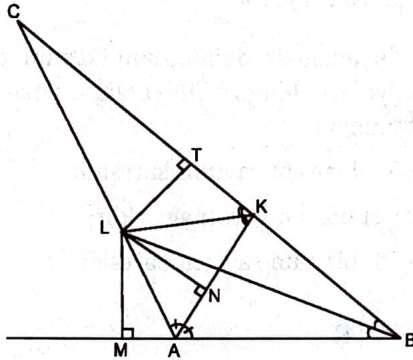
$$s_7 \equiv 0 \pmod{7}$$

olduğundan her $n > 7$ için de $s_n \equiv s_n - 7 \pmod{7}$ olacaktır. Dolayısıyla s_n 'in 7 modunda alabileceği

değerler sadece 0, 1, 2'dir. O halde $(n+1)$ 'den m 'ye kadar olan sayıların küpleri toplamı: $s_m - s_n$ farkı 7 modunda sadece 0, 1, 2, -1, -2 değerleri alabilir. Diğer taraftan $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$ olduğundan $2000^{2003} \equiv (5^6)^{333} \cdot 5^5 \equiv 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \equiv 3 \pmod{7}$ 'dir. Dolayısıyla 2000^{2003} , ardışık sayıların küplerinin toplamı şeklinde gösterilemez.

A.257. $\triangle ABC$ üçgeninde $[BL]$ ve $[AK]$ açıortayları çizilmiştir. $[KL]$ de $\triangle AKC$ üçgeninin açıortayı ise, $\widehat{BAC}$ açısını bulunuz.

Çözüm. L noktasından BA , AK ve BC doğrularına, sırasıyla LM , LN ve LT dikmelerini çizelim (şekil 1). BL açıortay olduğundan $|LM| = |LT|$ 'dir. KL , $\triangle AKC$ açısının açıortayı olduğundan $|LT| = |LN|$ 'dir. O halde $\triangle LMA$ ve $\triangle LNA$ üçgenleri eşittir. Dolayısıyla, $s(\widehat{MAL}) = s(\widehat{LAN}) = s(\widehat{KAB}) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, buradan da $s(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ 'dir.



Şekil 1.

A.258. Okuldaki 15 sınıftan toplam 100 kişi alındı. En az iki sınıftan aynı sayıda öğrenci alınmış olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Tüm sınıflardan farklı sayıda öğrenci alınmış olduğunu varsayalım ve sınıfları alınan öğrenci sayısına göre sıralayalım: k. sınıftan a_k öğrenci alınmıştır: $a_1 < a_2 < \dots < a_{15}$. O halde $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 2$, ..., $a_{15} \geq 14$ olduğundan $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \geq 1 + 2 + \dots + 14 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105 > 100$ elde ederiz. Çelişki!

A.259. x pozitif gerçel sayı olmak üzere $\frac{x^3}{8} + \frac{6}{x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm. Aritmetik ve Geometrik Ortalama arasındaki eşitsizliği kullanalım:

$$\frac{x^3}{8} + \frac{6}{x} = \frac{x^3}{8} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{8} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 4$$

$x = 2$ alındığında $(\frac{x^3}{8} = \frac{2}{x})$ denkleminin çözümü) 4 değeri elde ediliyor.

A.260. $a_1, a_2, a_3, \dots$ dizisinde $a_1 = 2002$, $a_2 = 2001$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ise, a_{2002} 'yi bulunuz.

Çözüm. $a_3 = \frac{a_2}{a_1}$; $a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{a_1}$; $a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{a_2}$; $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_1}{a_2}$; $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = a_1$; $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = a_2$ olduğundan her $n = 1, 2, \dots$ için $a_{n+6} = a_n$ elde edilir. O halde $a_{2002} = a_{1996} = \dots = a_4 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2002}$ 'dir.

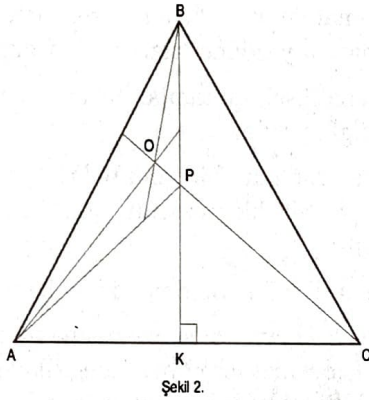
Y.256. $4(a+b+c) = ab+bc+ca$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm. $4(a+b+c) = ab+bc+ca \Leftrightarrow ab-2a+bc-2b+ca-2c-2a+4-2b+4-2c+4 = 12 \Leftrightarrow a(b-2)+b(c-2)+c(a-2)-2(a-2)-2(b-2)-2(c-2) = 12 \Leftrightarrow (a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2) = 12$. Denklem a, b, c 'ye göre simetrik olduğundan $a \leq b \leq c$ koşulunu sağlayan çözümleri bulup, diğer çözümleri bunların permutasyonları olarak elde edebiliriz. $5 \leq a \leq b \leq c$ olursa, $(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2) \geq 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27 > 12$ olduğundan $a \leq 4$ 'tür. $a = 1$ ise, $-(b-2)+(b-2)(c-2)-(c-2) = 12 \Leftrightarrow (b-2)(c-3)-(c-3) = 13 \Leftrightarrow (b-3)(c-3) = 13 \Leftrightarrow b = 4; c = 16$ elde edilir. $a = 2$ ise, $(b-2)(c-2) = 12$, buradan da ya $b = 3, c = 14$; ya $b = 4, c = 8$, ya da $b = 5, c = 6$ elde edilir. $a = 3$ ise, benzer şekilde $(b-1)(c-1) = 13$ elde edilir. Bu denklemi sağlayan $c \geq b \geq a = 3$ üçlüsü bulunmuyor. $a = 4$ ise, $bc = 16$, buradan da $b = c = 4$ elde edilir. Böylece tüm çözümler, $(1, 4, 16)$; $(2, 3, 14)$; $(2, 4, 8)$; $(2, 5, 6)$; $(4, 4, 4)$ üçlülerini ve bunların permutasyonlarıdır (toplam 25 tane çözüm).

Y.257. $\triangle ABC$ ikizkenar üçgeninde ($|AB| = |BC|$), $s(\widehat{ABC}) = 80^\circ$ dir ve $s(\widehat{OAC}) = 40^\circ$, $s(\widehat{OCA}) = 30^\circ$ olmak üzere üçgenin içerisinde bir O noktası alınmıştır. $s(\widehat{BOC})$ 'yi bulunuz.

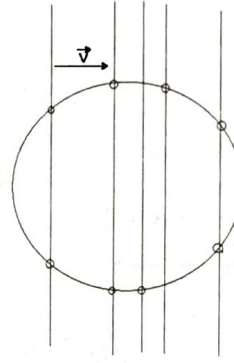
Çözüm. $[BK]$ yüksekliğinin OC ile kesişim noktasını P ile gösterelim (Şekil 2). O halde

$s(\widehat{PAC}) = s(\widehat{PCA}) = 30^\circ$ 'dir, dolayısıyla, $s(\widehat{PAB}) = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$ 'dir, böylece AO , $\widehat{BAP}$ açısının açıortayıdır. $s(\widehat{OPA}) = 180^\circ - s(\widehat{APC}) = 60^\circ$ ve $s(\widehat{APB}) = 180^\circ - (s(\widehat{ABP}) + s(\widehat{BAP})) = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$ olduğundan PO , $\widehat{APB}$ açısının açıortayıdır. Böylece O , $\triangle APB$ üçgeninin açıortaylarının kesişim noktasıdır. O halde $s(\widehat{BOP}) = 180^\circ - (20^\circ + 60^\circ) = 100^\circ$ 'dir.

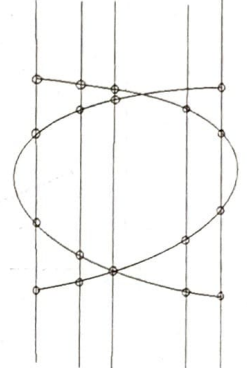


Y.258. Dışbükey 2002-genin köşelerinde birer tane bilye bulunur. Her adımda bilyelerden bazıları aynı vektör boyunca ötelenebilir. En az kaç adımda tüm bilyeler aynı doğru üzerine getirilebilir?

Çözüm. Başlangıçta her doğru üzerinde en fazla 2 bilye bulunur. İlk adımdan sonra her doğru üzerinde en fazla 4 bilye bulunacak v.s., 9. adımdan sonra her doğru üzerinde en fazla $2^{10} = 1024$ bilye bulunacak. Dolayısıyla 9 adımda 2002 bilyenin hepsi aynı doğru üzerine getirilemez. 10 adımda bilyelerin hepsinin aynı doğru üzerine getirilebileceği bir örnek verelim. Çemberi birbirine paralel ve aralarındaki uzaklık eşit olan $2^{10} = 1024$ tane doğru ile keselim. Kesişim noktalarından herhangi 2002 tanesine birer bilye yerleştirelim. (Bu noktalar bir dışbükey 2002 genin köşeleri olacak)(bkz.Şekil 3). Şimdi sol yarıdaki 2^9 tane doğruyu üzerlerindeki bilyelerle beraber $\vec{v}$ vektörü boyunca ötelediğimizde, tüm bilyeler sağdaki 2^9 tane doğrunun üzerinde bulunacak (Şekil 4). Benzer şekilde devam edersek, 10. adımdan sonra tüm bilyeler aynı doğru üzerinde bulunacak.



Şekil 3



Şekil 4

Y.259. Artan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlar (yani, f tek fonksiyondur). Herhangi a, b, c sayıları için $a + b + c = 0$ ise, $f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

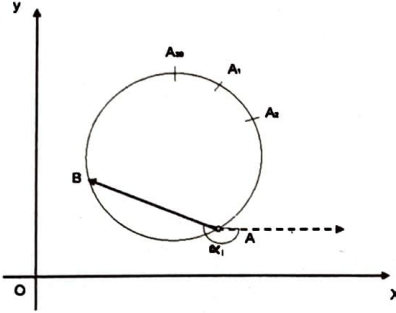
Çözüm. $F(x, y, z) = f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x)$ alalım. $F(-x, -y, -z) = F(x, y, z)$ özdeşliğinden ve F 'in x, y, z değişkenlerine göre simetrik olmasından dolayı $c \leq 0, a \geq 0, b \geq 0$ durumu için $f(a, b, c) \leq 0$ eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermemiz yeterlidir. f fonksiyonu tek ve artan olduğundan her $x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$ 'dir. $c = -a - b$ olduğundan $F(a, b, c) = f(a)f(b) + f(-a-b)[f(a) + f(b)] = f(a)f(b) - f(a+b)[f(a) + f(b)]$. $0 \leq f(a) \leq f(a+b)$ ve $0 \leq f(b) \leq f(a) + f(b)$ olduğundan $F(a, b, c) \leq 0$ elde edilir.

Y.260. Düzgün 30-genin köşelerine 1'den 30'a kadar tam sayılar yerleştirilmiştir. Her adımda iki komşu sayı yer değiştirebilir. Bir kaç böyle adımdan sonra her sayı tam karşıdaki köşeye geçmiştir. Bu adımların en az birinde toplamaları 31 olan iki sayının yer değiştirdiğini kanıtlayınız.

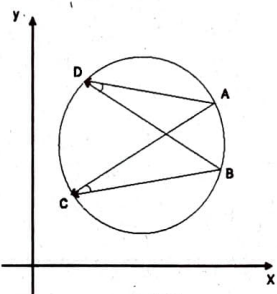
Çözüm. Her $i = 1, 2, \dots, 15$ sayısı için i 'nin bulunduğu köşe A , $31 - i$ sayısının bulunduğu köşe B ise, $\vec{AB}$ vektörünün $\vec{Ox}$ eksenine ile oluşturduğu açıyı (saat yönünde) α_i (Şekil 5) ve $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{15} \alpha_i \pmod{360^\circ}$ ile gösterelim.

Her sayı tam karşıdaki köşeye geçerse, α açısı $15 \cdot 180^\circ \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ açısı kadar değişir. Diğer taraftan bir adımda toplamaları 31 olan iki sayı (i ve $31 - i$) yer değiştirmiyorsa, bu adım

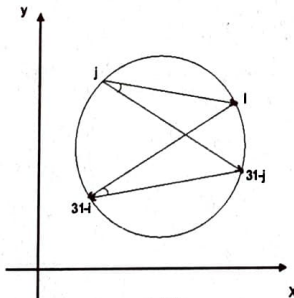
YAZARLARA



sonucu α da değişmez. Gerçekten komşu $1 \leq i, j \leq 15$ sayılarının yer değiştiğini varsayalım. $i, j, 31-i, 31-j$ sayıları sırasıyla A, B, C, D köşelerinde bulunsunlar (Şekil 6). O halde α_i, β_i açıları ile, yer değiştirmeden sonraki α'_i, β'_i açıları arasında aşağıdaki şekilde bir bağlantı olacak. $\alpha'_i = \alpha_i + \beta_j$; $\alpha'_j = \alpha_j - \gamma$. Dolayısıyla $\alpha'_i + \beta'_i = \alpha_i + \beta_i$. Benzer şekilde $1 \leq i, j \leq 15$ olmak üzere, i ve $31-j$ sayılarının yer değişmesi durumunda toplamın değişmediğini görüyoruz (bkz. Şekil 7). $31-i, 31-j$ durumu da aynı şekilde incelenir. Böylece toplamı 31 olan sayılarının yerlerini değiştirmeden toplamı 180° değiştirmek mümkün değildir.



Şekil 6



Şekil 7

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla, İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da mdunyasi@galois.iyte.edu.tr adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

2003'e bonus zengini girin

Aralık' ta
300 milyonluk alışveriş yapana
Ocak, Şubat, Mart' ta

%50 ekstra bonus hediye

 **Garanti**

+ bonus card

Alo Bonus 444 0 334 bonus.com.tr bonuscardshop.com