

MATEMATİK DÜNYASI

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Geometrik Optimalleştirme Problemleri Üzerine II

G.Adilov - R.Tınaztepe

Catalan Sayılar Üzerine

Ünal Ufuktepe

Hesaplanabilirlik

U.G.Nuriyev - Halide G.Sadıgova

Putman Yarışması Üzerine

Ruşen Kaya

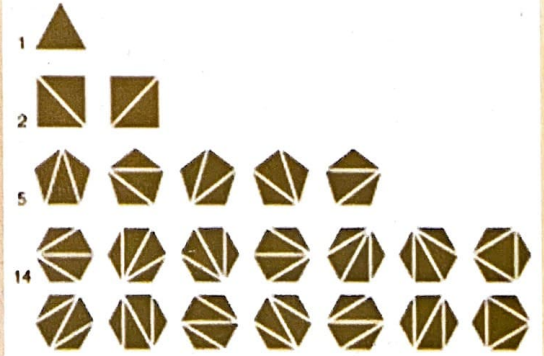
Zaman Skalasında Temel Analiz

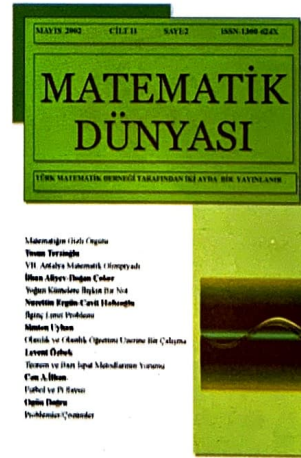
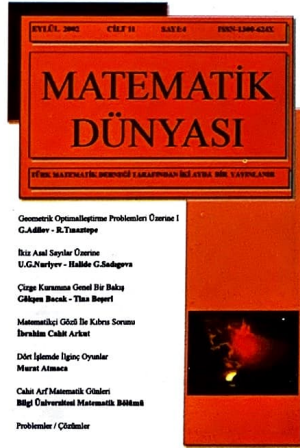
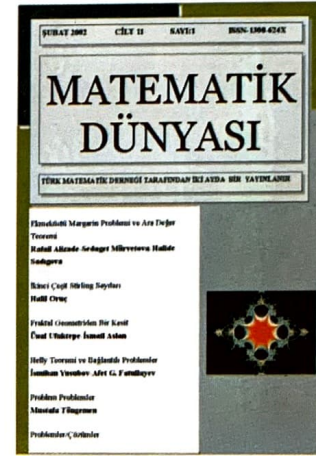
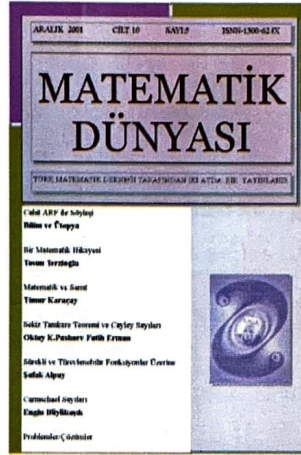
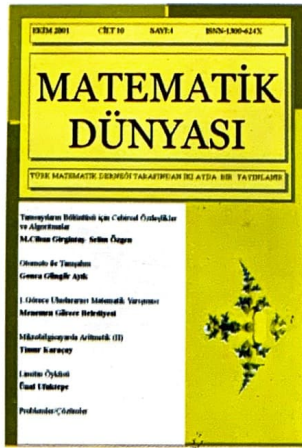
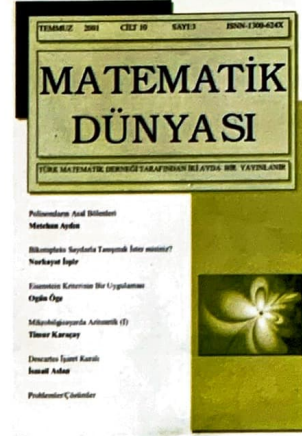
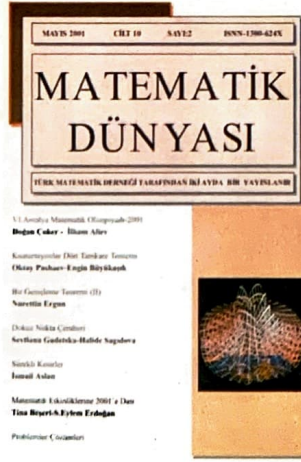
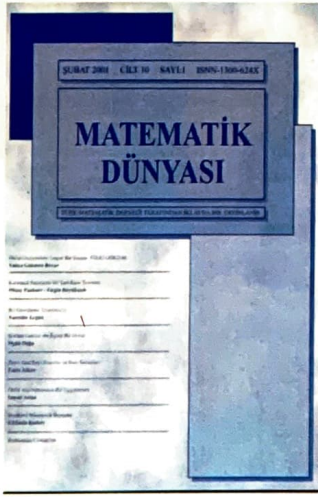
Ahmet Yantır

$1.8+1=9, 12.8+2=98, \dots$

Engin Mermut

Problemler / Çözümler





Eski ciltler aşağıdaki dernek adresinden temin edilebilir:

Türk Matematik Derneği Sabancı Üniversitesi Karaköy İletişim Merkezi Bankalar Cad. No:2
80020 Karaköy-İSTANBUL
Tel: (0212) 292 4939/1506 Faks: (0212) 252 3293
h.senkon@iku.edu.tr tmd@sabanciuniv.edu.tr

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Matematik Dünyasının 11. Cildini tamamlamanın keyfini yaşıyoruz. Matematik Dünyasına üniversitelerin matematik bölümleri sahip çıkmaya devam ederse nice ciltler tamamlanır. Bu derginin hazırlanmasına katkıda bulunan Türk Matematik Derneğine, Matematik Vakfına, Matematik Dünyasını bir gönül işi olarak algılayan İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü öğretim elemanlarına; Rafail Alizade, Ünal Ufuktepe, Oktay Pashaev, Murat Atmaca, İsmail Aslan, Engin Büyükaşık, Ali İhsan Neslitürk, Günnur Ufuktepe, Hakan Kutucu, Tina Beşeri, Eylem Erdoğan ve Gökşen Bacak'a yürekten teşekkür ediyoruz.

Matematik Dünyasının 12. cildi ve sonrası İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümünce hazırlanacak. Abonelerimiz bundan sonraki abonelik işlemlerini aşağıdaki bilgiler doğrultusunda yapmaları gerekiyor.

Bu sayımızda matematiğin bir çok ilginç konularına yer vermeye çalıştık. Dileriz bir çoğunu zevkle okursunuz ve alıştırma problemleri üzerine biraz olsun vakit ayırabilirsiniz. İki yıl boyunca gerek bizden, gerekse basımevimizden kaynaklanan hatalarımızdan dolayı sürçü lisan ettiysek affola. Matematiksel düşüncenin yeni yılda yaşamlarımızın temel bir parçası olması dileğiyle nice yıllara Matematik Dünyası...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Geometrik Optimalleştirme Problemleri Üzerine II	2
G. Adilov - R. Tınaztepe	
Catalan Sayıları Üzerine	6
Ünal Ufuktepe	
Hesaplanabilirlik	12
U.G. Nuriyev - Halide G. Sadıgova	
Putman Yarışması	17
Ruşen Kaya	
Zaman Skalasında Temel Analiz	21
Ahmet Yantır	
$1.8 + 1 = 9, 12.8 + 2 = 98, \dots$	27
Engin Mermut	
Problemler ve Çözümleri	30
Rafail Alizade	

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU

YAYIN KURULU : Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, Murat Atmaca

DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın , Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2002) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 12.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 10.000.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği' nin Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Galata (İstanbul) Şubesi 1021 304400 982751 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir). Parakende satış fiyatı 3.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Kuştepe Şişli İstanbul

Tel:0(212)2162222-302, Faks : 0(212)2168477 ; E-Posta : matematikdunyasi@math.bilgi.edu.tr

GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ ÜZERİNE II

Gabil Adilov-Ramazan Tınaztepe

gabil@pascal.sci.akdeniz.edu.tr-rtinaztepe@yahoo.com

Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

3. BAZI EŞİTSİZLİKLER VE OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMİNDE ROLÜ: Birçok optimalleştirme problemleri belli eşitsizlikler yardımıyla daha kolay çözülebilir. Meşhur eşitsizliklerden birkaç tanesini hatırlatalım. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ pozitif reel sayıları için;

$$\text{Aritmetik ortalama} \quad A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Geometrik ortalama} \quad G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

$$\text{Harmonik ortalama} \quad H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

olarak tanımlanır. Bu ortalamalar arasında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (1)$$

Burada eşitlik durumu ancak $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ durumunda olur. Yukarıdaki eşitsizliklerin daha genel bir halini verelim. Bunun için $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere k dereceden ortalama fonksiyonunu tanımlayalım:

$$M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_n^k}{n}}$$

Bu fonksiyonda $k = 1$, için

$M_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ve $k = -1$ seçilirse $M_{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ olacağı açıktır. Bununla birlikte aşağıdaki eşitlikler de kolayca gösterilebilir:

$$M_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow 0} M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n);$$

$$M_\infty(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\};$$

$$M_{-\infty}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow -\infty} M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}.$$

Yukarıda tanımlanan M_k fonksiyonu k parametresine göre monoton artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla $k > l$ olduğunda

$$M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq M_l(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2)$$

olur ve eşitlik ancak $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ durumunda olabilir. Görüldüğü gibi (2) eşitsizliği (3) eşitsizliğinin özel halidir.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in R$ ve $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \in R$ için

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik sadece $x_i = \lambda y_i$ ($i = 1, n$) olması durumunda geçerlidir. Bu eşitsizlikler yardımıyla çözülebilecek optimalleştirme problemlerine örnekler verelim.

Örnek 1: $x > 0, y > 0, z > 0$ olmak üzere $\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: x ve y 'yi $x = \sqrt[3]{3}t$, $y = \sqrt[3]{2}s$ şeklinde değiştirelim. Bu durumda $\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6} = \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2} t^3 s^2 z}{3t^6 + 2s^6 + z^6} = \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{t^{18} s^{12} z^6}}{3t^6 + 2s^6 + z^6}$ olur. Sonuncu terime Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğini uygularsak; $\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6} \leq \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2}}{6}$ buluruz. Burada eşitlik durumu $s = t = z$ durumunda vardır. Dolayısıyla, değişkenler $x = \sqrt[3]{3}\lambda$, $y = \sqrt[3]{2}\lambda$, $z = \lambda$ değerinde iken, verilen ifade maksimum olan $\frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2}}{6}$ değerine ulaşır (burada λ pozitif reel sayı değerli bir parametredir).

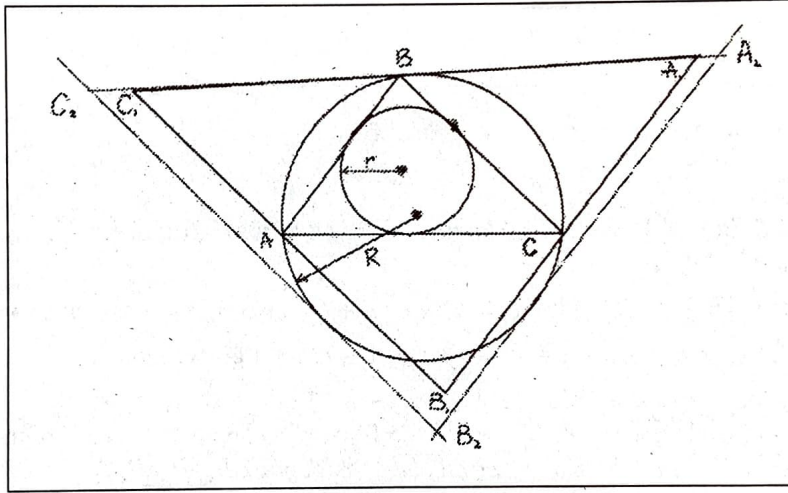
Örnek 2: a, b, c verilmiş reel sayılar olmak üzere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$ yuvarında $ax + by + cz$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden: $ax + by + cz \leq 10\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ olur. Eşitlik durumu: $x = \lambda a, y = \lambda b, z = \lambda c \Rightarrow \lambda = \frac{10}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Böylece $x = \frac{10a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y = \frac{10b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z = \frac{10c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ve $\max(ax + by + cz) = 10\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ bulunur. Özel halde $a = 1, b = 4, c = 8$ olursa, $x = \frac{10}{9}, y = \frac{40}{9}, z = \frac{80}{9}$ ve $\max(x + 4y + 8z) = 90$ olur.

Geometrik optimalleştirme problemlerinin incelenmesinde bu anlamda yararlı olabilecek birkaç önemli geometrik eşitsizliği verelim. Bu eşitsizlikler üçgenler ve dörtyüzlülerle ilgilidir. Bununla birlikte, birçok eşitsizliği konveks çokgenler ve çokyüzlüler için de uygun biçimde genelleştirmek mümkündür.

Önce, kullanılacak işaretlemeleri gösterelim. Bir ABC üçgeninde A, B, C bu üçgenin köşelerini; a, b, c kenarlarını, h_a, h_b, h_c yüksekliklerini, m_a, m_b, m_c kenarortaylarını, l_a, l_b, l_c açıortaylarını, R çevrel çemberin yarıçapını, r iç teğet çemberin yarıçapını, R_a, R_b, R_c sırasıyla üçgen içindeki bir noktadan A, B, C köşelerine olan uzaklığı, d_a, d_b, d_c sırasıyla üçgen içindeki bir noktadan a, b, c kenarlarına olan uzaklığı, S üçgenin alanını, $2p$ üçgenin çevresini gösterebiliriz.

Eşitsizlik 1. Her üçgen için $R \geq 2r$ eşitsizliği sağlanır ve eşitlik durumu sadece eşkenar üçgenler için geçerlidir.



Şekil 4

Kanıt: ABC üçgeninin iç teğet ve çevrel çemberlerini çizelim. Köşe noktalarından geçip, karşı kenara paralel olan $A_1B_1C_1$ üçgeni ABC üçgenine benzer olur: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ ve $2|AB| = |A_1B_1|$; $2|AC| = |A_1C_1|$; $2|BC| = |B_1C_1|$

Kenarları çevrel çembere teğet olup, $A_1B_1C_1$ üçgeninin kenarlarına paralel olan $A_2B_2C_2$ üçgeni de ABC 'ye benzer olur: $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ ve $|A_2B_2| \geq |A_1B_1|$; $|A_2C_2| \geq |A_1C_1|$; $|B_2C_2| \geq |B_1C_1|$. Küçük çember ABC üçgenine iç teğet, büyük çember $A_2B_2C_2$ üçgenine iç teğet $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ ve $|A_2B_2| \geq |A_1B_1| = 2|AB|$ olduğundan $R \geq 2r$ olur.

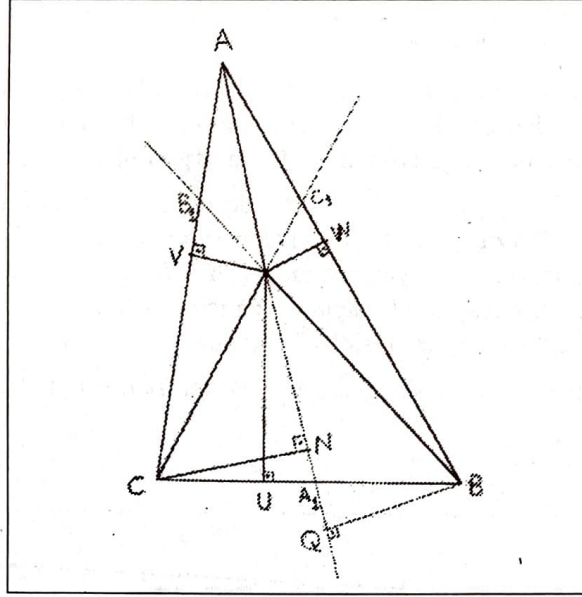
Eşitlik durumu: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ olduğunda olur. Başka bir deyişle ABC üçgeninin çevrel çemberi $A_1B_1C_1$ üçgenine iç teğet olduğunda olur. Kolayca görülür ki, bu durumda ΔABC eşkenar üçgendir.

Eşitsizlik 2. Verilmiş bir ABC üçgeninin içindeki her M noktası için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

- (a) $R_a R_b R_c \geq 8d_a d_b d_c$;
- (b) $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$;

$$(c) \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \right).$$

Yukarıdaki ifadelerde eşitlik durumu ancak eşkenar üçgenler ve M merkez nokta kabul edildiğinde ortaya çıkar.



Şekil 5

Kanıt: a) ŞEKİL 5 $BQ \perp AM$ ve $CN \perp AM$ dir. Kolayca görüldüğü gibi $|BC| = |BA_1| + |A_1C| \geq |BQ| + |CN|$. Dolayısıyla,

$$aR_a = |BC| \cdot |AM| \geq (|BQ| + |CN|) \cdot |AM| = 2S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} = cd_c + bd_b \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $bR_b \geq ad_a + cd_c$ ve $cR_c \geq ad_a + bd_b$ olduğu gösterilebilir.

Üç eşitsizliği art arda çarpsak; $aR_a bR_b cR_c \geq (cd_c + bd_b)(ad_a + cd_c)(ad_a + bd_b)$ elde edilir. Diğer yandan $cd_c + bd_b - 2\sqrt{cd_c \cdot bd_b} = (\sqrt{cd_c} - \sqrt{bd_b})^2 \geq 0 \Rightarrow cd_c + bd_b \geq 2\sqrt{cd_c \cdot bd_b}$ olur. Benzer şekilde $ad_a + cd_c \geq 2\sqrt{ad_a \cdot cd_c}$ ve $ad_a + bd_b \geq 2\sqrt{ad_a \cdot bd_b}$. Sonuçta $aR_a bR_b cR_c \geq 8abcd_a d_b d_c$ bulunur, dolayısıyla $R_a R_b R_c \geq 8d_a d_b d_c$ olur.

Eşitlik durumu: $|BC| = |BA_1| + |A_1C| = |BQ| + |CN| \Leftrightarrow BC \perp AM$ olmalı; benzer şekilde $BM \perp AC$; $CM \perp AB \Leftrightarrow M$ noktası yüksekliklerin kesişim noktasıdır (ortamerkez). Diğer yandan $ad_a = bd_b = cd_c \Leftrightarrow S_{\Delta AMB} = S_{\Delta MAC} = S_{\Delta MBC} \Leftrightarrow M$ noktası kenarortayların kesişim noktası olmalıdır. Buna göre ABC üçgeni eşkenar, M ise merkez noktasıdır.

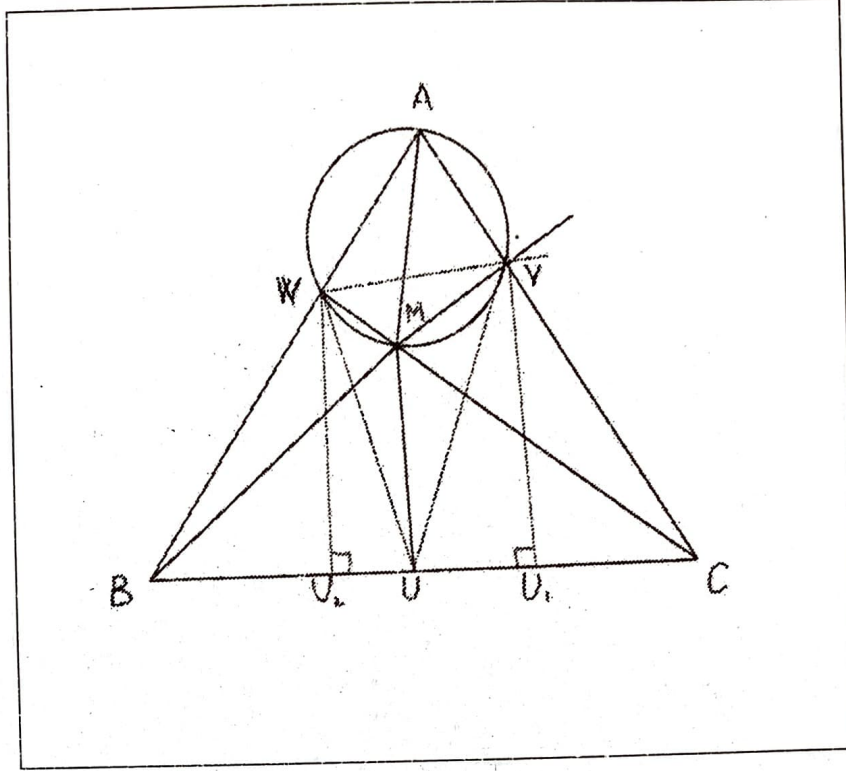
b) Şekil 6 A, W, M, V noktalarından geçen bir çember çizelim. ($MV \perp AC$ ve $MW \perp AB$ olduğundan bu çember çizilebilir.) Bu çemberin yarıçapı $R_a/2$ olur. Sinüs teoreminden $VW = R_a \sin A$ olur. $U_1 U_2$ parçası VW 'nin BC üzerinde izdüşümüdür: $prVW = prd_b + prd_c$. Bu ise $U_1 U_2 = d_b \sin C + d_c \sin B$ 'dir, buradan $R_a \sin A \geq d_b \sin C + d_c \sin B \Leftrightarrow R_a \geq d_b \frac{\sin C}{\sin A} + d_c \frac{\sin B}{\sin A}$ olur. Benzer şekilde:

$$R_b \geq d_a \frac{\sin C}{\sin B} + d_c \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$R_c \geq d_a \frac{\sin B}{\sin C} + d_b \frac{\sin A}{\sin C}$$

Bu üç eşitsizliği art arda toplarsak ve her $a > 0$ için $a + \frac{1}{a} \geq 2$ olduğuna dikkat edersek (burada eşitlik durumu $a = \frac{1}{a} = 1$ dir) : $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

Eşitlik durumu: İlk önce $\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} = 2$ olmalıdır. Bu durumda $\sin B = \sin C$ olur, böylece $B = C$ bulunur. Benzer şekilde $A = B$ 'dir, dolayısıyla üçgen eşkenar olmalıdır. Diğer yandan; $VW = U_1 U_2$ olmalıdır. Bu durumda $WV \parallel BC$, olur. Benzer şekilde $UW \parallel AC$ ve $UV \parallel AB$ olur.



Şekil 6

Dolayısıyla VW, UW, UV üçgeninin orta dikmesi olup M eşkenar üçgenin merkez noktasıdır.

c) Şekil 7 A', B', C' ve U', V', W' noktaları sırasıyla MU, MV, MW ve MA, MB, MC doğruları üzerinde olup, aşağıdaki koşulları sağlayan noktalardır: $R'_a = MA' = \frac{1}{MU} = \frac{1}{d_a}$; $R'_b = MB' = \frac{1}{MV} = \frac{1}{d_b}$; $R'_c = MC' = \frac{1}{MW} = \frac{1}{d_c}$; $d'_a = MU' = \frac{1}{MA} = \frac{1}{R_a}$; $d'_b = MV' = \frac{1}{MB} = \frac{1}{R_b}$; $d'_c = MW' = \frac{1}{MC} = \frac{1}{R_c}$. Kolayca gösterilebilir ki, U', V', W' noktaları $A'B'C'$ üçgeni üzerinde olup ve $MU' \perp C'B', MV' \perp C'A', MW' \perp A'B'$. Örneğin, MVA ve $MU'B'$ üçgenleri ortak M açısına sahip olup, kenarları orantılıdır: $|MV| : |MA| = d_b : R_a = \frac{1}{R'_b} : \frac{1}{d'_a} = d'_a : R'_b = MV' : MB'$.

Bu durumda $\triangle MU'B' \sim \triangle MVA$, dolayısıyla $\angle MU'B' = \angle MVA = 90^\circ$ olur.

Şimdi de ABC üçgenine Eşitsizlik 2(b)'yi uygularsak $R'_a + R'_b + R'_c = 2(d'_a + d'_b + d'_c) \Rightarrow \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c})$ elde edilir.

Eşitlik durumu, önceki eşitsizlikte olduğu gibi ABC üçgeni eşkenar ve M merkez nokta olunca olur.

Not 2. Bu eşitsizlikleri aritmetik, geometrik ve harmonik ortalama cinsinden şöyle ifade edebiliriz:

$$(a) G(R_a, R_b, R_c) \geq 2G(d_a, d_b, d_c);$$

$$(b) A(R_a, R_b, R_c) \geq 2A(d_a, d_b, d_c);$$

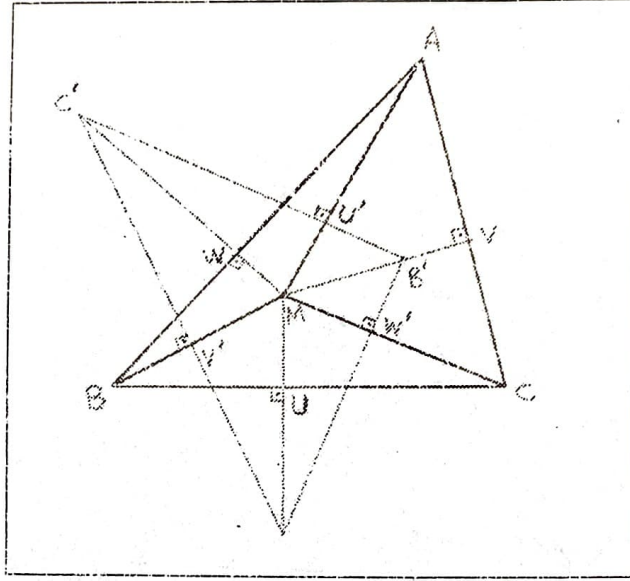
$$(c) H(R_a, R_b, R_c) \geq 2H(d_a, d_b, d_c).$$

Not 3. Yukarıdaki eşitsizlikleri A. Florian daha genel haliyle ispat etmiştir;

$$(i) |k| \leq 1 \text{ iken } M_k(R_a, R_b, R_c) \geq 2M_k(d_a, d_b, d_c)$$

$$(ii) |k| \geq 1 \text{ iken } M_k(R_a, R_b, R_c) \geq 2^{\frac{1}{|k|}} M_k(d_a, d_b, d_c)$$

Geometride bu konuyla ilgili olan ilginç eşitsizlikler yukarıda saydıklarımızla sınırlı değildir, aşağıda bu tür eşitsizlikler veriyor, fakat ispatlarını okuyucularımıza alıştırma olarak bırakıyoruz.



Şekil 7

ALİŞTIRMALAR

E 1. Her ABC üçgeni için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

(i) $9r \leq h_a + h_b + h_c \leq m_a + m_b + m_c \leq l_a + l_b + l_c \leq \frac{9}{2}R$

(ii) $m_a + m_b + m_c \leq p\sqrt{3} \leq r + 4R$

(iii) $27r^2 \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq p^2 \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{27}{4}R^2$

(iv) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \geq \frac{2}{R}$

(v) $2r \leq \frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}p \leq R$

(vi) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

(vii) $\min\{h_a, h_b, h_c\} \leq d_a + d_b + d_c \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$

(viii) $d_a d_b d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}$

(ix) $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq \frac{12r^4}{R^2}$

(x) $aR_a + bR_b + cR_c \geq 2(ad_a + bd_b + cd_c)$

(xi) $R_a R_b R_c \geq (d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_a + d_c)$

Bu eşitsizliklerde eşitlik durumunu inceleyiniz.

Şimdi de dörtyüzlüler için geçerli olan birkaç özelliği veriyoruz.

E 2. Her dörtyüzlü için aşağıdaki özelliklerin doğru olduğunu ispat ediniz ve eşitlik durumunu inceleyiniz.

(i) $R \geq 3r$

(ii) $V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$

(iii) $\Delta \geq 6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$

(iv) $\Pi \geq 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}$

(v) $\Pi^2 \geq 3\sqrt{3}\Delta$

$$(vi) R \geq \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\Delta}}{4}$$

$$(vii) R \geq \frac{\sqrt{6}\Pi}{12}$$

Burada R , dörtyüzlünün çevrel küresinin yarıçapını, r içteğet küresinin yarıçapını, $V, \Delta, 2\Pi$ ise sırasıyla dörtyüzlünün hacmini, yüzey alanını ve çevresini (kenarları toplamını) ifade etmektedir.

E 3. Her $ABCD$ dörtyüzlüsü içinde verilen bir M noktası için $R_a R_b R_c R_d \geq 81 d_a d_b d_c d_d$ veya $G(R_a, R_b, R_c, R_d) \geq 3G(d_a, d_b, d_c, d_d)$ olur. Eşitlik durumunu da size bırakıyoruz.

Burada R_a, R_b, R_c, R_d sırasıyla dörtyüzlünün içinde verilmiş bir noktanın A, B, C, D köşelerine olan uzaklığı, d_a, d_b, d_c, d_d ise noktanın sırasıyla A, B, C, D köşelerinin karşısındaki yüzlere olan uzaklığıdır.

Not 4. Sonuncu özellik Eşitsizlik 2(a)'nın dörtyüzlüler için genelleşmesidir. Sonraki iki eşitsizlik için böyle bir genelleşme söz konusu değildir. Başka bir deyişle $A(R_a, R_b, R_c, R_d) \geq 3A(d_a, d_b, d_c, d_d)$ ve $H(R_a, R_b, R_c, R_d) \geq 3H(d_a, d_b, d_c, d_d)$ eşitsizlikleri her zaman sağlanmayabilir.

KAYNAKLAR

[1] D.O. Schliarski, N.N. Chentsov, İ.M. Yaglom, Geometriçeski nera venstra i zadaçi na maksimum i minimum. Nauka, Moskova, 1970.

CATALAN SAYILARI ÜZERİNE

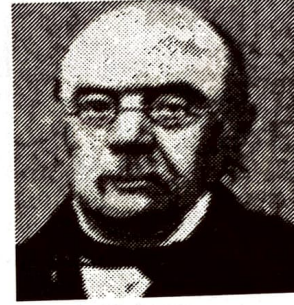
Ünal Ufuktepe

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

1. Giriş

Kombinatörler matematiğin sayma, sıralama ve düzenleme problemleriyle ilgili bir dalıdır. Uygulama alanları çok geniştir. Moleküler biyolog bir kromozom üzerinde genlerin kaç farklı şekilde sıralanabildiğini hesaplamaya çalışırken, bilgisayar mühendisi sıra önceliklerini tespit etmeye, psikolog öğrenme yollarını modellemeye uğraşır.

Bu tür kaygıların hiç birini taşımayan kumarcı ise poker oyununda eline fuloşun gelip gelmeyeceğini düşünür. Benzer şekilde mily-onlarca kişi her Cumartesi akşamı sayısal loto'da altıyı tutturup tutturamayacağını düşler.



Bu yazıda amaçlanan kombinatörlerin konularından birisi olan Catalan Sayıları ve bu sayıların uygulama alanlarına yer vermektir. Eugene Catalan bundan tam 167 yıl önce Belçika'da Ecole Polytechnique de Liouville'nin öğrencisiyken bu sayıları keşfetmiştir (1835). Catalan $n + 2$ kenarlı düzgün bir çokgenin n üçgene kaç farklı yolla bölünebileceğini hesaplamaya çalışırken bu sayıları bulmuştur. Aslında Catalan sayılarını ilk keşfeden Johann Segner (1758) olmasına karşın onun ispatları E. Catalan'ın ispatları kadar kesin ve net olmadığından bu sayıların isim babası E. Catalan olmuştur. Catalan bu yönde şanslı olmasına karşın kariyer yapma konusunda pek şanslı değildi. E. Catalan bugünün deyimiyle aşırı sol görüşlüydü. Onun bu politik tercihi o günün Belçika hükümetince pek hoş karşılanmamış ve akademik kariyeri engellenmiştir. Politik baskılar E. Catalan'ı akademik kurumlarda sitediği yerlere gelmesini engellemiş olmasına karşın Catalan sayılarının bilime mal olmasını hiç bir güç engelleyememiştir.

2. Catalan sayıları

Litaretürde Catalan sayıları üzerine bir çok tanım vardır:

1. $n + 2$ kenarlı düzgün bir çokgen n üçgene kaç farklı yolla bölünebilir?
2. n çift parantez (yani n tane soldan açılan ve n tane sağdan kapanan parantez) kaç farklı yolla düzenlenebilir?
3. n bağlantı noktası olan bir ağaç dalı çizge grafik (binary tree) kaç farklı şekilde çizilebilir?
4. Bir şehirdeki sokakların haritası $n \times n$ boyutlu bir satranç tahtası görünümünde olsun. Bu şehrin bir köşesinden yola çıkıp karşı köşeye ana köşegeninin üstüne (veya altına) çıkmaksızın kaç farklı yolla gidilebilir?

Bütün bu problemlerin çözümü $\{C_n\} = \{1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, \dots\}$ tam sayılar dizisinin elemanlarından biridir. Bu elemanlara Catalan sayıları denir. Mathematica paket programı ile bu dizinin elemanlarından birini aşağıdaki komutlarla elde edebilirsiniz.

<< DiscreteMath' (Paket programı ile kombinatörlere dair fonksiyonlar belleğe yüklenir) CatalanNumber[10] (10. Catalan Sayısı elde edilir.).

2. nolu probleme baktığımızda bir çift parantez tek bir yolla düzenlenebilir; (). Yani $C_1 = 1$. Eğer iki çift parantezimiz olsaydı bu iki parantezi iki farklı şekilde düzenleyebilirdik; () () ve (()), yani $C_2 = 2$. Eğer üç çift parantezimiz olsaydı bunları; ((()), (() ()), (() () ()) ve ((())) şeklinde düzenleyebilirdik, yani $C_3 = 5$. Bu durumu n çift parantez için nasıl genelleştirebiliriz?

3. Genelleştirme

n çift parantezin (yani n tane sol, n tane de sağ parantezin) düzenlenmesinde eğer her bir sol paranteze karşılık sağ bir kapanış varsa bu düzenlemeye **iyi düzenli**, diğer durumlara ise **bozuk düzenli** denir. Farklı iyi düzenleme sayısına da n . Catalan sayısı denir. Catalan sayıları arasındaki bağıntı şu şekilde tanımlanır [6];

$$C_0 = 1, C_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j}. \quad (1)$$

Bu bağıntı kullanılarak Catalan sayıları elde edilebilir ve aşağıdaki genel formül türetilir;

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (2)$$

burada $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ binom katsayılarına karşılık gelmektedir. (2) bağıntısını kullanarak dördüncü Catalan sayısını; $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!4!} = 14$ elde edebiliriz. Ardışık iki Catalan sayı arasındaki ilişki ise (2) nolu denklem kullanılarak, $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ oranından elde edilir;

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} C_n$$

C_n Catalan sayılarından türetilen $C(x)$ Catalan fonksiyonunu

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (3)$$

şeklinde tanımlayalım. (1) ve (3) eşitliklerinden

$$C(x) - 1 = x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (C_j x^j) (C_{n-1-j} x^{n-1-j}) = x C(x)^2 \quad (4)$$

ikinci dereceden denklem elde edilir. Buradan Catalan sayılarından türetilen $C(x)$ fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad (5)$$

bulunur.

3. Rassal Yürüme

Kombinatörlerin en ünlü problemlerinden birisi rassal yürüme problemidir; Bir doğru boyunca yürüyen bir kişinin n adımdan sonra yürüyüşe başladığı noktadan belirli uzaklıkta bulunması olasılığı nedir? Kabul edelim ki rassal yürüyüş simetrik bir yürüyüş yani bu kişinin sola veya sağa gitme olasılıkları eşit ve $p = (1/2)$. Bu problem Catalan sayılarıyla doğrudan bağlantılıdır. Rassal yürüyen kişinin $2n$. adımda başlangıç noktasına dönmüş olduğunu varsayalım. Sola yürüyüşü '(' sol parantez, sağa yürüyüşü ')' sağ parantez ile gösterelim. Bu kişi ilk adımını sola atmış olsun (bu sağda olabilir elbet). Bu durumda $2n - 2$ adımda bu kişi -1 noktasında olacaktır (yani başlangıç noktasından bir adım geride). $(2n - 1)$. adımını sağa atması mümkün olmadığına göre sola atması gerekmektedir. Bu durumda farklı adımlarının sayısı C_{n-1} Catalan sayısıdır. Bunun nedeni $(2n - 2)$ adımda sağa attığı adım sayısı sola attığı adım sayısına eşit olmasıdır. Bu kişinin ilk ve son adımını biliyoruz. Bu da doğrudan $(n - 1)$ çift parantezin kaç farklı yoldan iyi düzenlenebilmesiyle ilgilidir. (2) den

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \quad (6)$$

bulunur. Söz konusu olay simetrik olduğundan (ilk adımın sağa atılması durumu) yukarıdaki ifadeyi 2 ile çarpmamız gerekmektedir. Buna göre bir doğru boyunca rassal olarak yürüyen bir kişinin $2n$ adımda yürüyebileceği farklı yolların sayısı:

$$C_n = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}. \quad (7)$$

Bu sayı örnek uzaya bölündüğünde istenilen olasılık bulunmuş olur: her adımda iki durum (sağa veya sola) söz konusu olduğundan $2n$ adım için 2^{2n} durum söz konusudur. Buna göre olasılık:

$$\frac{1}{2^{2n-1}n} \binom{2n-2}{n-1}. \quad (8)$$

Örnek 1. Bir doğru boyunca yürüyen bir kişinin 20 adımda başladığı noktaya dönme olasılığı nedir? ($n = 10$)

$$\frac{1}{2^{19}10} \binom{18}{9} = \frac{2431}{262144}.$$

Problemi biraz zorlaştıralım: Rassal yürüyen kişinin $2n$ adımda başladığı noktaya geri döndüğünü varsayalım (bunu biliyoruz). Bunun kişinin başladığı noktaya ilk dönüş olma olasılığı nedir? Bu durumda örnek uzayımız değişmek zorunda. Rassal yürüyen kişinin m adımda k noktasına gelme olasılığı $P(Y_m = k)$ olsun. l sola adım sayısını, r sağa adım sayısını ve m ise toplam adım sayısını gösterebiliriz; $m = l + r$ ve $k = r - l$ olur. m adımda sola doğru $\binom{m}{l}$ farklı yolla adım atılabilir. Bu aynı zamanda k noktasına farklı varış sayısını da verir. Sağa veya sola adım atma olasılıkları eşit olduğundan;

$$P(Y_m = k) = \binom{m}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Bu durumda kişinin başlangıç noktasına dönme olasılığı, $k = 0$ ve $r = l = n$ olduğundan;

$$P(Y_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Bu ifadede pay kişinin kaç farklı yolla $2n$. adımda başlangıç noktasına dönebileceğini gösterdiğinden, bu sayı ile (7) in bölümünden:

$$\frac{\frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2n-1}.$$

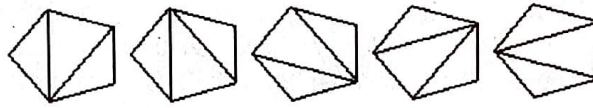
aranan olasılık bulunur.

Örnek 2. Örnek 1. deki probleme göre rassal yürüyen kişinin 20 adımda başlangıç noktasına döndüğünü biliyoruz. Bunun ilk varış olma olasılığı nedir? ($n = 10$)

$$\frac{1}{2 \cdot 10 - 1} = \frac{1}{19}$$

Aşağıda bu konuya dair alıştırmalar verilmiştir:

1. Düzgün bir altıgen, bir biriyle kesişmeyen üç doğru parçasıyla kaç farklı yolla üçgenlere bölünebilir (Aşağıdaki şekil beşgen için verilmiştir)



2. $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ aritmetik işlemine üç çift parantezi kaç farklı şekilde yerleştirebilirsiniz?
3. Gülbahçe'deki sokaklar 4×4 satranç tahtası biçimindedir. Her kare bir blok ve her çizgi bir sokağa karşılık gelsin. Bu karenin ana köşegeninin üst ucundan yola çıkan biri 4 blok güneye ve 4 blok batıya yürüyerek köşegenin alt noktasına kaç farklı yolla varabilir? (Ana köşegenin altına veya üstüne diğer taraftan geçmek söz konusu değil)

Catalan sayıları konusunda benzer bilgileri aşağıdaki web sitelerinden öğrenebilirsiniz:

1. <http://mathforum.org/advanced/robertd/catalan.html>
2. <http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html>
3. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Miscellaneous/CatalanNumbers/catalan.html>

KAYNAKLAR

- [1] Alter, R., Some Remarks and Results on Catalan Numbers, Proc. 2nd Louisiana Conf. Comb., Graph Theory, and Comput., sayfa 109-132, 1971.
- [2] Brualdi, D.F., Introductory Combinatorics., 3rd ed., New York:Elsevier, 1997
- [3] Dörrie, H., Euler's Problem of Polygon Division, New York:Dover, sayfa 21-27, 1965
- [4] Hilton, P. and Pederson, J., Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses, Math. Int. 13, 64-75, 1991
- [5] Singmaster, D., An Elementary of the Catalan Numbers, Amer. Math. Monthly 85, 366-368, 1978
- [6] Sands, A.D., On Generalized Catalan Numbers, Disc.Math. 21, 218-221, 1978

HESAPLANABİLİRLİK

Urfat G. NURİYEV

Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, urfat@sci.ege.edu.tr

Halide G. SADIGOVA

Azerbaycan Bilimler Akademisi, Sibernetik Enstitüsü, F. Agaev 9, 370141, Bakü, AZERBAYCAN

"Gerçek tehlike bilgisayarın insan gibi düşünmeye başlaması değil, insanların bilgisayar gibi düşünmeye başlamasıdır."

Sydney J. Harris

1. Giriş

Bilim, yeni kavramların bulunmasıyla ilerler. Bazen yeni bir kavramın bir süre sonra doğal olmadığı ya da işlevli bulunmadığı anlaşılır. Diğer biri ise beklenenden daha da önemli ya da yararlı çıkabilir. Çağdaş bilimin başarılı kavramlarından hesaplanabilirlik kuramı diğer işlevlerin yanısıra karmaşıklık konusuna da ışık tutmuştur.

Bu yazıda hesaplanabilirlik kuramının gelişim tarihinden, algoritmalarından, Turing makinesi, P, NP ve NP-tam sınıf kavramları ve bu alandaki son gelişmelere yer verilmiştir.

2. Hilbert'in Matematik Programı

19. yüzyılın sonlarında matematikçiler, matematiksel kanıtlama yöntemlerinin giderek daha da güçlenmesinin etkisiyle büyük gelişmeler kaydetmişlerdir. Böylece matematikçiler bu güçlü yöntemleri giderek artan bir güvenle uygulamaya başlamışlardı. Ancak bu güven 1902'de İngiliz mantık bilimcisi ve felsefecisi Bertrand Russell'in ünlü paradoksunu ortaya atmasıyla sarsıldı. O zamanlarda matematikçiler aksiyomlardan ve yöntemsel kurallardan oluşan son derece biçimsel bir matematik sistemini geliştirmeye girişti. Büyük Alman matematikçisi David Hilbert daha uygulanabilir ve kapsamlı bir projeye başladı. Hilbert programının amacı matematiğin herhangi bir iyi tanımlanmış alan ile ilgili her çeşit doğru matematiksel usamlama yöntemini içine alacak kadar geniş kapsamlı ve yöntemsel kurallar listesi yaratmaktır. Ayrıca Hilbert projenin çelişkiden uzak olduğunu kanıtlamanın da mümkün olacağını düşünüyordu. Böylece matematikçiler sonsuza kadar, sarsılmaz bir temel üzerine oturabileceklerdi. Ancak onların umutları 1931'de, 25 yaşlarında zeki bir Avusturyalı matematik mantıkçısı olan Kurt Gödel'in, Hilbert'in programını altüst eden teoremiyle söndü.

Gödel Teoremi: Aksiyomlardan ve çıkarım kurallarından oluşan herhangi bir kesin ("biçimsel") matematik sistemi, basit aritmetik teoremlerinin tanımlamalarını kapsayacak kadar geniş kapsamlı olması ve çelişkisiz olması koşuluyla, sistemin kapsamına alınan yöntemlerle ne kanıtlanabilir ne de kanıtlanamaz bazı önermeleri içermelidir. Buna göre bu gibi önermelerin doğruluğu hakkında, onaylı yöntemlerle "karar verilemez". Gödel, gerçekte, uygun bir aritmetik teoremi şeklinde kodlandığında aksiyom sisteminin tutarlılığının bildirimini "karar verilemez" yöntem olduğunu kendiliğinden kanıtladığını göstermiştir.

3. Turing Makinesinin meydana gelişi

Bir Turing makinesi hakkında aklınızda tutulacak en önemli nokta bunun bir fiziksel nesne değil bir "Soyut Matematik" ürünü olduğudur. Bu kavram ilk kez, İngiliz matematikçisi, ünlü şifre uzmanı ve ilk bilgisayar bilimcilerinden Alan Turing tarafından 1935-36 yıllarında daha geniş kapsamlı bir probleme yanıt getirebilmek amacıyla ortaya konmuştur.

Entscheidungs problemi adıyla bilinen bu problem Hilbert tarafından 1900 Paris Uluslararası Matematikçiler kongresinde tanımlanmıştı. Turing'in ilgilenmiş olduğu Hilbert problemi Matematiğin

herhangi bir aksiyom sistemi cinsinden yazılmasından daha derine inen bir problemdir. Sorun şudur: *Matematiğin tüm problemlerini birbiri peşine çözebilecek genel bir mekanik yöntem ilke olarak var mıdır?* Turing bu soruyu *m sayısına uygulanan Turing makinesinin gerçekten DUR konumuna geçip geçmeyeceğine karar verme problemi* olarak yorumlamıştır. Bu problem DURMA problemi adıyla anılır.

Turing Gödel'in yapıtını inceledikten sonra DURMA probleminin çözülemeyeceğine dair teoremini geliştirmiştir.

4. Algoritmalar teorisi

Algoritma kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Algoritmalar ilk çağdan itibaren bilinip kullanılmakla beraber yirminci asırda gelişmiştir.

Algoritmalar ard arda gelen sonlu işlemlerle problem çözme yollarıdır. Bir *problemi* yanıt isteyen genel bir soru olarak kabul edebiliriz. *Soru* tanımı içinde (i) ilişkin tüm parametrelerin belirlenmesi ve (ii) yanıtın(çözümünün) taşınması gereken tüm özellikler olmalıdır. Parametrelere özgül değerler atandığında problemin bir *örneğini* (*bireysel problem*) elde ederiz.

Örnek-1: Genel bir 0-1 değişkenli denklem aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b, \quad a_i, b \in \mathbb{N}, \quad x_i = 0 \text{ ya da } 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Buna karşılık, bir 0-1 değişkenli denklem örneği şöyle verilebilir:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 8, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ya da } 1.$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1$$

bu problemin çözümüdür.

Herhangi bir algoritmanın bir P problemini çözdüğünü söyleyebilmemiz için bu algoritma P probleminin örneklerinin hepsi için çözümü daima verebilmelidir.

Teoride esas olan algoritmik olarak çözülebilme veya çözülmeme durumudur. Belirsiz algoritma kavramından kesin Turing makinası kavramına geçilip verilen bir problem sınıfının bir algoritma ile çözümlü çözülemeyeceği sorusu kesinleştirilmiştir.

Turing makinasında belli bir sayıda "çalışma" ile bir "dinlenme" durumundan oluşan sonlu sayıda bir *içdurum* bulunmaktadır. Makina karelere bölünmüş sonsuz uzunlukta bir kağıt şerit üzerinde çalışır(şerit bellek görevini yapmaktadır). Şeridin her karesinde özel simgeler bulunmakta olup bu simgelerden bir boş anlamını taşır. Çalışma durumlarından birinde olduğu zaman üzerinde bulunduğu kareyi okur ve bir yandan hangi iç durumda olduğuna ve diğer yandan da okuduğu simgeye bağlı olarak aşağıdaki işlemleri yapar: (i) Karede yazılı olanı siler ve başka bir simge (ya da yine aynı simgeyi) yazar. (ii) Bir kare ileri ya da geri gider. (iii)Yeni bir iç durumuna geçer.

Kısacası bir Turing makinesi normal bir bilgisayarın yaptığı herhangi bir işi yapabilir.

5. Hesaplanabilirlik

Hesaplanabilirlik gerçek bir "mutlak" matematik kavramıdır. İlk kez 1930'larda bu kavram gibi temel nitelikli diğer kavramlarla birlikte matematik bilimine girdiği için aynı zamanda oldukça yeni bir fikirdir ve matematiğin tüm alanlarını kapsar.

Eski sayılar ve kesirler, pay ve paydalar Turing makinelerince ne boyutta olursa olsunlar, hesaplanabilirler. π , $\sqrt{2}$ gibi diğer pek çok irrasyonel sayı Turing makinesi ile üretilebilirler. Turing makinesinin üretemeyeceği bazı irrasyonel sayılar da vardır. Turing makinesince üretilebilen sayılara *hesaplanabilir sayılar* adı verilirken, üretilmeyen sayılar (büyük çoğunluğu oluşturan sayılar!) hesaplanamaz sayılar olarak adlandırılır.

Hesaplanabilirlik fikrini açıklayan başka yollar da vardır. Bunlardan, tarih bakımından birincisi, Amerikalı mantıkçı Alonza Church'ün, Stephen C. Kleene'in yardımıyla geliştirdiği "Lambda Hesabı"dır. Church'ün yöntemi Turing'in yönteminden oldukça farklı ve daha soyuttur.

Hesaplanabilirlik, genellikle matematikte önemli bir konudur ve sadece sayılara uygulanabilir bir konu olarak değerlendirilmemelidir. Hesaplanabilirlik fikrinin gücü kısmen bazı iyi tanımlanmış matematik işlemlerinin aslında hesaplanamaz olmasından kaynaklanır. Çünkü, böyle hesaplanamaz işlemler olmasaydı, hesaplanabilirlik kavramı matematiğin ilgisini çekmezdi.

6. Algoritmik çözülme-yen problemler

Algoritmik çözülmezlik ilk olarak matematiksel mantıktaki problemler (sonuç çıkarabilme problemi) ve algoritmalar teorisindeki problemler (örneğin, kendi kendine hesap edilebilme problemi) için düşünülmüştü. Daha sonra ise matematiğin başka birçok dallarındaki benzer fakat daha az genel problemlere yöneltildi. Bunlardan biri de Hilbert'in onuncu problemidir: *Verilen her hangi bir Diophant denkleminin tamsayı çözümü olup olmadığının bulunması*. 10. problem genel halde uzun süre çözülmedi ve 1970 yılında Y.V.Matijosevich bu problemin çözülmez olduğunu ispatladı. Aşağıdaki 3 problem de çözümsüzlüğü ispatlanmış problemlerdendir:

1. Bir açının pergel ve cetvelle 3 eşit parçaya bölünmesi.
2. Sadece pergel ve cetvel yardımıyla, alanı verilmiş bir dairenin alanına eşit olan karenin çizilmesi.
3. Yalnız pergel ve cetvelle, verilmiş olan bir küpün 2 katı hacminde bir küpün 1 ayırıtın çizilmesi.

7. Algoritmik karmaşıklık

Matematikteki formalizm algoritmik olarak çözülme-yen problemlerin araştırılmasını gündeme getirdi. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler ise, başka tür problemlerin, ilke olarak değil, sadece uygulamada zor olan problemlerin öğrenilmesini öne çıkardı. Bu problemlerin çoğunu tam çözebilmek için bilgisayarları yüzlerce yıl çalıştırmak gerekebilir.

Örnek-2: Örnek-1'deki problemi $n = 50$ için saniyede 1.000.000 işlem yapan bir bilgisayarda sayımlama yöntemi ile çözmesi için gereken zamanı hesaplayalım.

$$\sum_{i=1}^{50} a_i x_i = b, \quad a_i, b \in \mathbb{N}, \quad x_i = 0 \text{ ya da } 1, \quad i = \overline{1, 50}.$$

Burada $x_i = 0$ ya da 1 olmak üzere $(x_1, \dots, x_{50})$ vektörlerini incelemek gerekecek ki, bunların da sayısı $N = 2^{50}$ olup,

$$N = 2^{50} = (2^{10})^5 = (1024)^5 > (1000)^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$$

işlem yapılacaktır. Bilgisayarımızın hızı $V = 10^6$ işlem / saniye olduğu için $N = 10^{15}$ işlem yapmak için gereken zaman $t = \frac{N}{V} = \frac{10^{15}}{10^6} = 10^9$ san ≈ 25 yıl. Önceleri bu tür problemlerin çözüm tekniklerinin bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler sayesinde yeterli geleceklere düşüncesi sonradan bu iyimserliğe gölge düşürecek kuşklar ortaya çıkardı. Bu kuşklar problemlerin çözüm karmaşıklığı ile ilgilidir.

8. P ve NP sınıf

Genel olarak algoritmaları çözüm karmaşıklığı açısından iki sınıfta toplamak mümkündür: (i) Verimli (efficient) algoritmalar. (ii) Üssel zamanlı algoritmalar.

Verimli algoritmalar problemleri polinom zamanda çözebilen algoritmalarlardır. Diğer bir deyişle verimli algoritmalarda çözüm için gerekli işlem sayısı problemin karakteristik bir boyutu cinsinden bir polinom ile ifade edilebilir. Öte yandan işlem sayısı problemin karakteristik boyutunu üssel bir işlevi olarak ifade edilen algoritmalar ise *üssel zamanlı algoritmalar* olarak sınıflandırılmaktadır.

Örnek-1'deki problemin karakteristik boyutu değişkenlerin sayısı olan n 'dir. Genel olarak *problemlerin karakteristik boyutuna* ilişkin verileri bilgisayarın belleğinde yazmak için gereken yerin büyüklüğü ile tanımlanabilir. Algoritmaların problemleri çözmede alacağı zaman bu büyüklük parametrelerinin bir işlevi olarak gösterilir. Bir algoritmanın, büyüklüğü verilen bir problem için maksimum kaç iterasyon süreceği ve her iterasyondaki toplam aritmetik işlem sayısı hesaplanabilir. Aritmetik işlemleri, toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve karşılaştırma gibi basit işlemlerin bilgisayarda sabit zaman aldığı varsayarak algoritmanın alacağı zamanı yalnızca büyüklük parametreleri cinsinden yazabiliriz. Bu işlem 1. Örnekteki problem için $T(n)$ olarak yazıldığında sayımlama algoritmasının *süresel karmaşıklığı* $O(2^n)$ olur, yani C sabit bir sayı olmak üzere $T(n) < C \cdot 2^n$ 'dir. İlk olarak J.Edmonds tarafından ortaya atılan *iyi - kötü* algoritma ayrımının testi işte bu süresel karmaşıklığa dayandırılmaktadır.

Bir algoritma ancak eğer süresel karmaşıklığı büyüklük parametrelerinin bir polinomu ise iyi kabul edilmektedir. Örneğin $O(n)$, $O(n^2)$, $O(\ln + m^3)$, $O(n^3 + m^3 + 5)$, vb. polinom sınırlı süresel karmaşıklıkları ifade ederler, $O(6^n)$, $O(n!m!)$, $O(n^m)$, ise polinom sınırlı olmayan süre karmaşıklıklarının, dolayısıyla kötü algoritmaları temsil eder. Polinom zamanlı çözer yöntemi bulunmuş problem sınıfı P ile gösterilir. Problemler sınıfını formal olarak tanımlamak için *gerekirci (deterministik) (DTM)* ve *gerekirci olmayan (nondeterministik) Turing makinesi (NTM)* kavramları kullanılır. Burada DTM'yi bildiğimiz bilgisayarlara eş bir makine, NTM'yi ise henüz eş dünyada olmayan üstün bir makine olarak kabul edebiliriz. Bu öyle bir üstün makinedir ki, bir anda sonlu bir k kadar çözüm tahminlerinde bulunup her tahmin için ayrı bir bilgisayar gibi hesaplamalar yapabilir.

Polinom sınırlı DTM ile çözülebilen tüm karar problemleri P sınıfını oluşturur. Polinom sınırlı NTM ile çözülebilen karar problemleri ise NP sınıfındandır. P , NP 'nin bir alt kümesidir. Çünkü NTM'ler polinom sınırlı DTM ile çözülebilen her problemi çözebilir. Asıl sorun yalnız polinom sınırlı NTM ile çözülebilen karar problemlerinin DTM ile polinom sınırlı sürede çözümlüp çözülemeyeceğidir. Yani $P \stackrel{?}{=} NP$ sorusunun yanıtı Karmaşıklık kuramının çözülmemiş en önemli problemidir.

9. NP-tamlık

Bir X problemi eğer, Y problemini çözen iyi bir algoritmadan yararlanılarak elde edilen diğer iyi bir algoritma ile çözülebiliyorsa, X , Y 'ye (polinom) *indirgenebilir* denir.

Örnek-3: X ve Y problemi aşağıdaki gibi olsun:

$$Y : ax^2 + bx + c = 0, \quad X : dx + q = 0.$$

X problemi Y probleminin özel durumu olduğu için Y problemini çözen algoritmadan yararlanarak X 'i de çözebiliriz. Yani X , Y 'ye indirgenebilir.

Burada X ya da Y için polinom sınırlı bir algoritmanın varlığı gerekli değildir. Yalnızca birini çözen bir iyi algoritma varsa, bunun diğeri için de iyi algoritma elde etme anlamına geleceğini söylüyoruz. Bunun için de X 'i Y 'nin özel bir durumuna polinom sınırlı sürede indirgeyecek bir algoritma bulmak yeterlidir. Eğer NP sınıfındaki her problem Y probleminin özel durumlarına indirgenebiliyorsa, Y problemi NP -zor ve aynı zamanda Y 'nin kendisi de NP sınıfından ise Y 'ye *NP-tam problem* denir.

Bir NP tam probleme verimli bir çözüm yöntemi bulunması halinde diğer NP tam problemler de verimli bir şekilde çözülebileceklerdir. Bu birbiri ile ilişkisiz gibi görünen problemlerin hepsinin matematiksel bir anlamda, aynı ailenin bireyleri oldukları, ilk olarak Toronto Üniversitesi'nden Stephen Cook tarafından 1971'de farkedildi. Daha önce matematikçiler bu problemlerin herbirini tek tek ele alıp, herbiri için ayrı bir "iyi" çözüm yöntemi arıyorlardı. Cook'un çalışmalarından sonra bilimciler daha önce bağlantısız olan birçok problemin NP tam olduğunu görmek için atağa geçti ve günümüzde yüzlerce bu tür problem saptanmıştır. Bu problemlerden belki de, en ünlüsü Gezgini Satıcı Problemidir.

Gezgini Satıcı Problemi: Bir gezgini satıcının bulunduğu bir şehirden başlayarak $(n - 1)$ sayıda

şehrin her birine ancak ve ancak bir defa uğramak koşulu ile tekrar başladığı şehre dönmesini sağlayan en kısa turu bulma problemidir.

Bu gezgin satıcı ilk durak olarak bu n kentin herhangi birini seçebilir. Daha sonra, ikinci durak yeri için, $(n - 1)$ seçim vardır, sonra $(n - 2)$ vb. Böylece farklı gezi programlarının toplam sayısı $(n - 1)!$ dir. Ancak bu rotanın yarısı sadece ters yönde, yolun öteki yarısından oluştuğu için doğru sayı $(n - 1)!$ in yarısıdır. Formal olarak bile, bu problem yeterince korkunçtur.

Eğer kentlerin sayısı fazla olursa, örneğin Türkiye'nin 79 il merkezi söz konusu olursa ne olur? Satıcının Ankara'dan yola çıkıp yol boyunca 78 il merkezini dolaşıp Ankara'ya döndüğünü düşünelim. Hiç düşünmeden problemin birbirinden farklı $78!$ in yarısı kadar, yani yaklaşık 10^{90} rota içerdiğini söyleyebiliriz. Saniyede bu tür bir milyon işlem yapabilen bir bilgisayar kullanırsak işlemi tamamlamak yaklaşık $4 \cdot 10^{76}$ yıllık bir zaman alacaktır.

Buradan neden satranç veya benzer oyunların büyük beceri ve marifet istediği anlaşılır. Bu tür oyunlarda algoritma ile verilen oyun stratejilerin pratik bakımdan imkansızlığı ile karşılaşmış oluruz. Böylece bu tür problemlerde ilke olarak, önce, olanaklı her farklı durum için hesaplama yapılarak (bilgisayarda hesaplama daha olası) sonra da (eğer varsa) verilen koşulları sağlayan en verimli sonuç seçilip tam olarak çözüme varılabilir. Ancak sorun, bu tür problemlerde farklı durumların sayısının akıl almaz büyüklükte olmasıdır.

10. Son durum ve gelişmeler

Günümüzde Matematiğin hemen-hemen tüm alanlarında karşımıza çıkan NP -tam problemlerin listesinde her geçen gün artan 1000'den fazla problem vardır (Bkz. Journal of Algorithms).

Bugüne kadar yapılan araştırmalarda NP -tam problemlerini çözebilen bir polinom zaman algoritması bulunamamıştır ve genel kanı böyle bir algoritmanın var olmadığı yönündedir. Fakat bu öngörü henüz kanıtlanmamıştır. Uzmanların çoğu Turing makinesine benzer bir aygıt kullanılarak, NP -tam probleminin polinom sürede çözülmesinin gerçekte olanaksız olduğunu ve sonuçta P ve NP -nin aynı olmadığını inanmaktadırlar. S.Smole'e göre " $P \neq NP$?" problemi XXI yüzyılın Matematiğin en önemli sorusudur.

Son yıllarda hesaplanabilirlik kuramında en önemli gelişme hesaplamaların *kuantum modelinin* yaratılmasıdır. Üzerinde en çok konuşulan *kuantum bilgisayarı* fikri de burada ele alınmaktadır. David Deutsch'e göre, bir "kuantum bilgisayarı" inşa etmek "ilke olarak" olasıdır. Deutsch bu bilgisayar için P 'de yer almayan, ama bu aygıt sayesinde polinom sürede çözülebilen problemlerin (problem sınıfları) var olduğunu ileri sürmektedir.

Sonuç: Üssel sınırlı algoritmaların teknolojik gelişmelerden sağladıkları yarar önemsiz denecek kadar küçük olduğu kolayca gösterilebilir. Bu yüzden etkili algoritma geliştirme, bilgisayar teknolojisinin gelişiminden daha çok önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Cormen, T.H. , Leiserson, C.E. , Rivest R.L. : Introduction to Algorithms. McGraw - Hill Book Company. New York, 2001.
- [2] Carey, M.R. , Johnson, D.S. : Computers and Intractability: A Guide ty the Thoery of NP-Completeness. W.H. Freeman, 1979.
- [3] Devis M.D.,Sigal R.,Weyuker E.J.: Computability, Complexity, and Languages. Fundamentals of Computer Science. Academic press. New York, 1994

PUTNAM YARIŞMASI ÜZERİNE

Ruşen Kaya

Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü, Adana

Kalkülüs (bir çok üniversitede "Analiz" adı altında okutulan ders) kuşkusuz matematiğin temel taşlarından biridir ve bir çok bilim dalı ona çok sıklıkla başvurur. Bazı sözlüklerde kimi zaman "diferansiyel ve integral hesabı" olarak tanımlanır. Kalkülüs'ü zevkli kılan özelliği ise ilginç problemleri ve bu problemlerin günlük yaşamla örtüşmesidir.

Aslında kalkülüs ile ilgili bir çok problem bulmak mümkündür. Ama en zevkli problemler : uç noktalara hitap eden, ayrıntılı bilgi ve ince düşünebilme yetisi gerektiren problemlerdir. Bu yazımızda böyle problemlerden bazılarını inceleyerek, kalkülüsün eğlenceli dünyasında ufak bir gezinti yapacağız. Fakat bunu yaparken sorulardan bazılarının dış görünüş itibarıyla pek karmaşık olduğunu; ama onları rahatça çözebilmek için işlemsel hız faktörünün ne kadar önemli olduğunu ve sonuç olarak basit algoritmalarından sonra nasıl kolaylaştığını göreceğiz. Yani çözeceğimiz problemler kalkülüsün kuramsal yönünden çok onun işlemsel güzelliğini ve işlemlerden sonra varılan sonucun sadeliği hakkında olacaktır.

Bütün bunları yaparken bir yarışmayla tanışacağız : Putnam yarışmaları. Çözeceğimiz sorular bu yarışmada farklı yıllarda sorulmuş olan kalkülüs problemleri. Ancak ileride bahsedeceğimiz gibi bu yarışma sadece kalkülüs üzerine değil aynı zamanda tüm lisans seviyesindeki matematik bilgisini de kapsıyan bir yarışma. Biz yarışmanın kalkülüs ile ilgili olan tarafına bakacağız. Böylelikle yazımız anlamlı olacak, aksi halde tüm konularla ilgili problemleri çözmeye ne sabır yeter ne de zaman!) Böylece (her ne kadar yarışmanın kalkülüs ile ilgili özel kısmını inceliyor olsak da) Putnam yarışmaları hakkında genel bir bilgi sahibi olma olanağına erişerek, böyle bir yarışmanın düzenlenmesine öncülük etmiş olan William Lowell Putnam'ı da anmış olacağız.

Elbette, bu yarışmada farklı yıllarda sorulmuş pek çok kalkülüs problemi var. Nitekim böyle soruların tamamını bu yazı da çözmeyeceğiz. Çözeceğimiz problemlerin bazıları çözülmesi çok zormuş gibi gözüken ve bazı teknikler gerektiren problemler, bazıları sabır ve işlem hızı gerektiren; ancak sonuç itibarıyla mükemmel bir sadeliğe sahip olan problemler, bazıları da pek ilginç olarak nitelenemeyecek olan kalkülüs problemleri. Böylelikle Putnam yarışmalarında ilginç problemlerin yer almasının yanı sıra, ilginç olmayanlarının da farklı yıllarda sorulduğunu göreceğiz. Özellikle kalkülüsün integral hesabına dayalı , çözülürken kişiye zevk veren problemlerle karşılaşacağız.

Yarışmanın Kısa Bir Tanımı

Sınav, kişilerin orjinal fikirlerini ve bilgi birikimlerini ölçmek üzere hazırlanıyor. Yarışmacılardan beklenen, temel kuramları kullanmak ve üniversite düzeyindeki matematik bilgilerini dışa vurmadır. Yarışma, özellikle matematik ana bilim dalında alışılmışın dışında, oldukça ince noktalara hitap eden matematiksel kavramlardan oluşmakta ve yarışmacıları bu dalda eğitmek ve teşvik etmek üzere tasarlanmıştır. Yarışmacının matematik bilimine, matematik klüplerinde veya derslerde tartışılan "matematiğin esaslarını inceleme" ve benzeri gibi başlıklardaki temel fikirle yaklaşmasını sağlamayı amaçlıyor. Grup teorisinin temel kavramları, kümeler kuramı, sayılar kuramı ve kardinal aritmetik gibi bilgileri gerektirebilecek, yarışmacıların kendi öz güvenleriyle çözebileceği soruların öğrencilere çok da yabancı gelmemesi umulmaktadır.

Ödüller:

William Lowell Putnam Ödülleri Ödüller, kazanan beş takımın bağlı oldukları kurumların matematik bölümlerine verilir. Ayrıca takımların her bir üyesi de ödüllendirilir. En yüksek derece alan beş kişi Amerikan Matematik Derneği tarafından Putnam üyeleri olarak seçilir. Ödüller bu kişilerle birlikte en yüksek derece yapan sonraki yirmi kişiye de verilir.

Ayrıca her yıl resmi olarak William Lowell Putnam burs ödülleri Harvard Üniversitesi'nde ya da Radcliffe Koleji'nde verilir.

Elizabet Lowell Putnam Ödülleri:

Bu ödül, periyodik olarak yarışmada göstereceği performansı övülmeye değer olan özel bayanlara veriliyor. Bu ödül, bayan yarışmacının başka yarışmalarda tekrar başarılı olması durumunda diğer ödülleri ekleniyor. Ancak bu ödül sadece bayan yarışmacılar için olup, yarışmacıların önceden cinsiyetlerini belirtmeleri gerekiyor.

Geçmiş Yıllara Ait Bazı Problemler

Aşağıdaki problemler, yanlarında belirtilen tarihlerde Putnam yarışmalarında sorulmuş olan problemlerden bazılarıdır.

1980

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx = ?$$

Çözüm: Bilinen integrasyon teknikleriyle bu problemi çözmeye çalışırsanız kendinizi büyük bir çıkmazın içerisinde hissedersiniz. Bu problem böyle özel bir yarışmada sorulduğuna göre, işin içinde bir numara olmalı! $f(x) = \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{1 + (\cot x)^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(\tan x)^{\sqrt{2}}}} = \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}} + 1 - 1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} - \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} = 1 - f(x). \end{aligned}$$

Şimdi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \dots (*)$$

olarak yazalım ve $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ integralini irdeleyelim: $\frac{\pi}{2} - x = u$ olsun. Bu durumda, $-dx = du$ ve integral.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - f(u)) du$$

olarak bulunur. Bu sonucu (*) eşitliğinde kullanarak:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - f(u)) du$$

bulunur. Bu son eşitlikte $u = x$ alındığında,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x) + 1 - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

1987

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = ?$$

Çözüm:

Bu integral ilk bakışta korkunç gözüktüyor. Alışılmış yöntemleri kullanmak sonuç vermiyor, bu durumda farklı bir yöntemi deneyelim:

$9 - y = x + 3$ veya $9 - x = y + 3$ olsun; $-dy = dx$ olur. Ayrıca $x = 2 \Rightarrow y = 4$, $x = 4 \Rightarrow y = 2$ dir. Elde ettiğimiz bu verilerle integralin değişkenlerini değiştirelim :

$$I = \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)} + \sqrt{\ln(9-y)}} (-dy) = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)} + \sqrt{\ln(9-y)}} dy$$

elde ederiz; ama bu son integralde $y = x$ değişken değiştirildiğinde,

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx$$

olur. Bu integral ile integralin ilk hali toplandığında:

$$I + I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx + \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = \int_2^4 1 dx = 2$$

olur; fakat $2I = 2 \Rightarrow I = 1$ sonucuna ulaşırız.

Kalkülüste önemli bir yere sahip olan maksimum-minimum problemlerinden birine bakalım :

1998

$$f(x) = \frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2}{(x + \frac{1}{x})^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

$x > 0$ için f 'in minimum değerini hesap ediniz.

Çözüm: Fonksiyonun görünümü hiç de iç açıcı değil, bu haliyle minimumunu bulmak, bir hayli karmaşık işlemlerin içinde bocalamamıza neden olacak gibi. Fakat f 'i kısaltmak mümkün gibi. Bu özelliği parantezli ifadeleri açarak görebiliriz:

$$f(x) = \frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2}{(x + \frac{1}{x})^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6} - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2}{x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{6x^4 + 15x^2 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + 18}{2x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{6x^8 + 15x^6 + 15x^2 + 6 + 18x^4}{x^4} \cdot \frac{x^3}{2x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3(2x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2) + 3x^2(2x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2)}{x(2x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2)} = \frac{3 + 3x^2}{x} = 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ olduğundan, $x = 1$ ve $x = -1$ apsisli noktalar kritik noktalardır. $f''(1) > 0$, $f''(-1) < 0$ olduğundan f fonksiyonu, $(1, 6)$ noktasında yerel minimuma, $(-1, -6)$ noktasında ise yerel maksimuma erişir. Dahası $x \in (0, 1)$ için $f'(x) < 0$ ve $x \in (1, \infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f , $x > 0$ için $(1, 6)$ noktasında mutlak minimuma erişir. O halde $f(x)$ 'in $x > 0$ için minimum değeri 6 dır.

1984

$f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun $x^4 + 36 \leq 13x^2$ kümesi üzerinde maksimum değerini bulunuz.

Çözüm: Bu soru Putnam yarışmalarındaki ilginç olmayan problemler kategorisinde değerlendirilebilir.

$$x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2) \leq 0$$

Bu eşitsizliğin çözüm kümesi : $S = [-3, -2] \cup [2, 3]$ bulunur. Öte yandan $f'(x) = 3x^2 - 3$ olup; $f'(-1) = f'(1) = 0$, olduğundan $x = -1$ ve $x = 1$ apsisli noktalar kritik noktalardır; ancak $1 \notin S$ ve $-1 \notin S$ olduğundan $x = -1, 1$ apsisli noktalarda maksimum aramak anlamsızdır. $[-3, -2]$ ve $[2, 3]$ aralıkları için, $x = -3, -2, 2, 3$ apsisli noktalar kritik noktalardır. Ancak $f(-3) = -18$, $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 18$ olduğundan f , S üzerinde maksimuma $(3, 18)$ noktasında erişir. Dolayısıyla f nin S üzerindeki maksimum değeri 18 dir.

Yarışmanın Kısa Bir Tarihçesi

Yarışma ilk 1938'de Amerika ve Kanada üniversitelerindeki matematik çalışmalarında verimli rekabeti teşvik etmek üzere yapıldı. Mr. William Lowell Putnam, kolejlerdeki düzenli çalışmalarda organize olmuş olan takım yarışmalarının yararlı olacağı konusunda çok büyük bir inanca sahipti. 1882 yılı Harvard sınıfının bir üyesi olan Mr. Putnam, içerisinde üniversitelerarası entellektüel yarışmaların önemine değindiği bir makalesini "Harvard Mezunları" (Harvard Graduates' Magazine) adlı derginin 1921'deki Aralık sayısında yayımladı. Bir yarışma düzenlemek üzere Mr. Putnam'ın eşi Elizabeth Lowell Putnam 1927'de yeni bir maddi kaynak yarattı. İngiliz sahalarında ilk yarışma bu kaynak ile desteklendi ve birkaç yıl sonra ikinci bir yarışma matematik dalında iki kurum arasında gerçekleştirildi. Bu yarışma sadece 1935'de Mr. Putnam'ın ölümüne kadar değildi öyle ki; sınav onun bıraktığı bir miras olarak kabul edildi ve Amerikan Matematikçiler Derneğini bu mirasa hala sahip çıkıyor.

Acaba ülkemizde bu formatta bir yarışma var mı? Dilerim Türk Matematik Derneği böyle bir misyonu zaman içinde üstlenir...

Faydalanılan web siteleri :

1. <http://math.scu.edu/putnam>
2. <http://www-scf.usc.edu/nmahesh/competitions.html>

ZAMAN SKALASINDA TEMEL ANALİZ

Ahmet Yantır

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR e-posta: ayantir@likya.iyte.edu.tr

1990' lı yılların en gözde çalışmaları Zaman Skalası üzerinde yapılan çalışmalardır. İlk kez 1988 yılında Stefan Hilger' in doktora tezinde tanıtılan Zaman Skalası en genel anlamıyla sürekli ve ayrık olan analizin birleştirilmesidir. Zaman Skalası üzerinde yapılan çalışmaların büyük bir kısmı adi diferansiyel denklemler ve dinamik sistemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmada zaman skalasında türevin nasıl tanımlandığı ve bu yeni tanıma göre türevin özelliklerinin nasıl şekillendiğini ispat ve örneklerle açıklamaya çalışacağız.

T reel sayıların herhangi bir kapalı alt kümesi olsun. T' yi zaman skalası olarak adlandıracamız. Reel sayılar

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in R$$

metriğine göre tam uzay olduğundan ve T kapalı olduğundan T kümesi de aynı metriğe göre tam uzaydır.

İleriye Sıçrama Operatörü:

$\forall t \in T ; t \leq \max T$; olmak üzere σ' yı

$$\sigma(t) = \inf\{s : s \in T, s > t\}$$

Şeklinde ifade edelim. Bu durumda öyle $s_n \in T$ vardır ki $s_n \rightarrow \sigma(t)$. T kümesi kapalı olduğundan $\sigma(t) \in T$.

Tanım: $\sigma : T \rightarrow T$ operatörüne ileriye sıçrama operatörü denir.

$T=R$ durumunda $\sigma(t) = t$, $T=Z$ durumunda ise $\sigma(t) = t + 1$ ' dir.

Ayrıca $\sigma(\max T) = \max T$ şeklinde tanımlanır.

Tanım: Eğer $\sigma(t) = t$ ise t' ye sağ yoğun nokta, $\sigma(t) > t$ ise t' ye sağ yayılmış nokta denir.

Geriye Sıçrama Operatörü:

$\forall t \in T ; t \leq \max T$; olmak üzere ρ' yu

$$\rho(t) = \sup\{s : s \in T, s < t\}$$

Şeklinde ifade edelim. Bu durumda öyle $s_n \in T$ vardır ki $s_n \rightarrow \rho(t)$. T kümesi kapalı olduğundan $\rho(t) \in T$.

Tanım: $\rho : T \rightarrow T$ operatörüne geriye sıçrama operatörü denir.

$T=R$ durumunda $\rho(t) = t$, $T=Z$ durumunda ise $\rho(t) = t - 1$ ' dir.

Ayrıca $\rho(\min T) = \min T$ şeklinde tanımlanır.

Tanım: Eğer $\rho(t) = t$ ise t' ye sol yoğun nokta, $\rho(t) < t$ ise t' ye sol yayılmış nokta denir.

Bu tanımlara göre akla şu iki soru gelebilir:

- 1) Hangi $t \in T$ için $\rho(\sigma(t)) = t'$ dir ?
- a) Eğer t sağ yayılmış ise ve b) Eğer t sağ ve sol yoğun ise
- 2) Hangi $t \in T$ için $\sigma(\rho(t)) = t'$ dir ?
- a) Eğer t sol yayılmış ise ve b) Eğer t sağ ve sol yoğun ise

Tanım: $T^* = \begin{cases} T - \{\max T\} \\ T \end{cases}, \max T < \infty \quad \text{ve} \quad \sigma(\max T) > \max T$
diğer durumda

$$T_k = \begin{cases} T - \{MinT\} \\ T \end{cases}, \quad MinT < -\infty \quad \text{ve} \quad \rho(MinxT) < MinT \\ \text{diğer durumda}$$

T^k ' ya Δ -türevlenebilirlik bölgesi, T_k ' ya ∇ -türevlenebilirlik bölgesi denir.

Zaman Skalasında Türev

Tanım: $f : T \rightarrow C$ bir fonksiyon, $t \in T^k$ ve $a \in C$ olsun. Eğer

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in U_t$$

olacak şekilde t ' nin bir U_t komşuluğu varsa f fonksiyona t noktasında Δ -türevlenebilir bir fonksiyon, a ' ya f fonksiyonunun t noktasındaki Δ -türevi denir ve $a = f^\Delta(t)$ ile gösterilir.

$$a = f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

Örnekler:

1) $T = R$ olsun. O halde $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

2) $T = Z$ olsun. O halde $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1 - s}$$

$$= f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

3) T keyfi bir uzay, $f : T \rightarrow C$ bir fonksiyon ve $f(t) = \alpha$, $\forall t \in T$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\alpha - \alpha}{\sigma(t) - s} = 0$$

O halde sabit bir fonksiyonun türevi 0' dir.

4) T keyfi bir uzay, $f : T \rightarrow C$ bir fonksiyon ve $f(t) = t$, $\forall t \in T$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1$$

5) T keyfi bir uzay, $f : T \rightarrow C$ bir fonksiyon ve $f(t) = t^2$, $\forall t \in T$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s)}{\sigma(t) - s} = \sigma(t) + t$$

6) $T = N_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$$t = \sqrt{n} \Rightarrow n = t^2$$

$$\sigma(t) = \sigma(\sqrt{n}) = n + 1 = \sqrt{t^2 + 1}, \text{ dir. O halde } (t^2)^\Delta = t + \sqrt{t^2 + 1}$$

7) $T = \{\frac{n}{2} : n \in N_0\}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$$t = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 2t$$

$$\sigma t = \sigma \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2} = t + \frac{1}{2}, \text{ dir. O halde } (t^2)^\Delta = 2t + \frac{1}{2}.$$

8) $T = N_0^{\frac{1}{3}} = \{\sqrt[3]{n} : n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$$t = \sqrt[3]{n} \Rightarrow n = t^3$$

$\sigma(t) = \sigma(\sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{t^3+1}$ dir. o halde $(t^2)^\Delta = t + \sqrt[3]{t^3+1}$ dir.

9) T keyfi bir uzay, $f: T \rightarrow C$ bir fonksiyon ve $f(t) = \sqrt{t}$, $\forall t \in T$ olsun.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{(\sigma(t) - \sqrt{s})(\sigma(t) + \sqrt{s})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{t}} \end{aligned}$$

$t = \text{Max}T$ Halinde Δ Türevin Anlamı

Δ türevi $T^k = T - \{\text{Max}T\}$ üzerinde tanımlandık. Burada şu soru sorulabilir: "Acaba $t = \text{Max}T$ noktasında Δ türev için ne söylenebilir?"

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \quad ; \forall s \in U_t$$

$t = \text{Max}T \Rightarrow U_t$ t 'nin küçük komşuluğu yalnız t noktasını içerir. O halde yukarıdaki eşitsizlikte s yerine yalnızca t konabilir. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(t) - a[\sigma(t) - t]| \leq \epsilon |\sigma(t) - t|$$

$$\Rightarrow |f(t) - f(t) - a[t - t]| \leq \epsilon |t - t|$$

$$\Rightarrow 0 \leq 0$$

halini alır ki; bu da a 'nın her değeri için sağlanır. O halde türev tek türlü belirlenemez.

Önerme: $t_0 \neq \text{Min}T$, $\sigma(t_0) > t_0$ ve $\rho(t_0) = t_0$. Bu durumda $\sigma(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında Δ türeve sahip değildir.

İspat: $a = f^\Delta(t_0) = \sigma^\Delta(t_0)$ olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow |\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - a[\sigma(t_0) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t_0) - s| \quad ; \forall s \in U_t$$

i) $t_0 \in U_0$ olduğundan $s = t_0$ seçilebilir.

$$|\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - a[\sigma(t_0) - t_0]| \leq \epsilon |\sigma(t_0) - t_0| \quad ; \forall s \in U_{t_0}$$

her ϵ değeri için geçerli olduğundan $\epsilon \rightarrow 0$ için limit

$$\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0) - a[\sigma(t_0) - t_0] = 0 \text{ olur. Yani;}$$

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

dir.

ii) t_0 sağ yayılmış ve sol yoğun olduğundan $s \in U_{t_0}$ noktaları t_0 noktasının solundan seçilebilir ve s 'ye yeterince yakın t_0 lar için $s \rightarrow t_0 \Rightarrow \sigma(s) \rightarrow t_0$.

$$|\sigma(\sigma(t_0)) - t_0 - a[\sigma(t_0) - t_0]| \leq \epsilon |\sigma(t_0) - t_0|$$

her ϵ değeri için geçerli olduğundan $\epsilon \rightarrow 0$ için limit

$$\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0) - a[\sigma(t_0) - t_0] = 0 \text{ olur. Yani;}$$

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

dir.

(i) ve (ii) den $\sigma(t_0) = t_0$. Bu bir çelişkidir. Bu durumda kabulümüz yanlıştır. O halde $\sigma(t)$, t_0 noktasında Δ türevlenemez.

Önerme: $f : T \rightarrow C$ fonksiyonu T^k da Δ türevlenebilir bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun. Bu durumda $a = f^\Delta(t)$ tektir.

İspat : $a_1 = f^\Delta(t)$ ve $a_2 = f^\Delta(t)$ olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - a_1[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \quad ; \forall s \in U_t^1, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - a_2[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \quad ; \forall s \in U_t^2, \quad \forall \epsilon > 0.$$

$U_t = U_t^1 \cap U_t^2$ olsun. Bu durumda her iki eşitsizlik de sağlanacaktır.

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_1 \right| \leq \epsilon \quad ; \forall s \in U_t^1, \quad s \neq \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_2 \right| \leq \epsilon \quad ; \forall s \in U_t^2, \quad s \neq \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \forall s \in U_t; |a_1 - a_2| = \left| a_1 - a_2 - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \right|$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| \leq \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_1 \right| + \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_2 \right|$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \quad a_1 = a_2$$

Teorem: $f : T \rightarrow C$ bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun.

1) f fonksiyonu $t \in T^k$ noktasında Δ türevlenebilir ise t noktasında süreklidir.

2) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış ise f fonksiyonu t' de Δ türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}.$$

3) Eğer t sağ yayılmış ise f' nin t' de Δ türevlenebilir olması gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda ;

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

4) Eğer $f(t)$ t noktasında Δ türevlenebilir ise;

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - t].$$

Hatırlatma: "Z Üzerinde Süreklilik"

E bir metrik uzay ve $x_0 \in E$ olsun. Eğer verilen $\epsilon > 0$ değeri için

$$\forall x \in U_\delta(x_0) = x \in E : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde öyle $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ değeri bulunabiliyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

$$d(t_1, t_2) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

$$T = Z \text{ olsun. } t_0 \in Z, \quad \forall \delta > 0, \quad U_\delta(t_0) = \{t \in Z : |t - t_0| < \delta\} = \{t_0\}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$$

$\Rightarrow Z$ üzerinde tanımlanan tüm fonksiyonlar süreklidir.

İspat:

1) f' nin t noktasında Δ türevi olduğundan, verilen $\epsilon > 0$ değeri için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| \leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U_t$$

olacak şekilde U_t komşulugu vardır.

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s] - (f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]) + f^\Delta(t) \cdot (t - s)| \\ &\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| + |f(\sigma(t)) - f(t) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - t]| + |f^\Delta(t)(t - s)| \\ &\leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s| + \epsilon \cdot |\sigma(t) - t| + |f^\Delta(t)| \cdot |t - s| \\ &\leq 2 \cdot \epsilon \cdot |\sigma(t) - t| + |f^\Delta(t)| + \epsilon = \epsilon_1, \quad \epsilon_1 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ fonksiyonu t noktasında süreklidir.

$$2) \quad \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t) + f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - s} + \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$\Rightarrow f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - s}$$

3) $(\Rightarrow)$ f' nin t noktasında Δ türevi olsun.

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

$$\Rightarrow f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

t noktası sağ yoğun olduğundan;

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^\Delta(t)$$

($\Leftarrow$) Aşikardır.

4) Let $\sigma(t) = t$

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t)[\sigma(t) - t] \Rightarrow f(t) = f(t)$$

Let $\sigma(t) = t$.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \Rightarrow f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t)[\sigma(t) - t].$$

Teorem: $f, g : T \rightarrow C$ fonksiyonlar ve $t \in T^k$ olsun. Eğer f ve g t noktasında Δ türevlenebilir ise;

1) $f+g$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

2) $k \in C$ olmak üzere kf fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(kf)^\Delta(t) = k \cdot f^\Delta(t)$$

3) $f \cdot g$ de t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(f \cdot g)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t) \cdot g^\Delta(t) + f^\Delta(t) \cdot g(\sigma(t))$$

4) Eğer $g(t) \cdot g(\sigma(t)) \neq 0$) ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

1 ve 2 nolu ifadelerin ispatı reel analizdeki gibidir.

İspat :

3) **Durum 1)** t noktası sağ yayılmış olsun.

$$(fg)^\Delta(t) = \frac{(fg)(\sigma(t)) - (fg)(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(t)g(\sigma(t)) + f(t)g(\sigma(t)) - f(t)g(t)}{\sigma(t) - t}$$

$$= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} g(\sigma(t)) + f(t) \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\sigma(t) - t} = f^\Delta(t) g(\sigma(t)) + f(t) g^\Delta(t)$$

Durum 2) t noktası sağ yoğun olsun.

$$\begin{aligned} (fg)^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(fg)(t) - (fg)(s)}{t - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)g(t) - f(t)g(s) + f(t)g(s) - f(s)g(s)}{t - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} f^\Delta(t) + \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} g^\Delta(t) \\ &= g^\Delta(t) f(t) + f^\Delta(t) g(t) \\ &= f^\Delta(t) g(\sigma(t)) + f(t) g^\Delta(t) \end{aligned}$$

4 nolu ifadenin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

KAYNAKÇA :

- 1) Hussein Husseinov: Zaman skalasında Dinamik Sistemler ders notları, İzmir 2000
- 2) Martin Bohner, Allan Peterson: Dynamic Equations on Time Scales, Boston 2001

$$1 \cdot 8 + 1 = 9, 12 \cdot 8 + 2 = 98, \dots, 123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$$

Engin Mermut

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Kaynaklar Yerleşkesi, 35160, Buca/İZMİR
engin.mermut@deu.edu.tr

Başlığımızdaki eşitlikler şunlar:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 8 + 1 &= 9, \\ 12 \cdot 8 + 2 &= 98, \\ 123 \cdot 8 + 3 &= 987, \\ 1234 \cdot 8 + 4 &= 9876, \\ 12345 \cdot 8 + 5 &= 98765, \\ 123456 \cdot 8 + 6 &= 987654, \\ 1234567 \cdot 8 + 7 &= 9876543, \\ 12345678 \cdot 8 + 8 &= 98765432, \\ 123456789 \cdot 8 + 9 &= 987654321. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikleri bir arkadaş iletmişti bana¹; ilk olarak kim bulmuş bilmiyorum. Neden diye soruyor insan tabii ki? Bu eşitlikleri kolayca doğrulayabilirsiniz, ama hepsini aynı anda ve hatta daha fazlasını kanıtlamak daha matematiksel olmaz mı? Böylece bu eşitliklerin niye doğru olduğunu daha iyi anlamış olmaz mıyız?

Önce şu geometrik toplamı hatırlayalım: n pozitif bir tamsayı ise,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad \text{her } x \neq 1 \text{ reel sayısı için.} \quad (1)$$

Her iki tarafın x 'e göre türevini alırsak,

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{-nx^{n-1}(1-x) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x^n) - nx^{n-1}(1-x)}{(1-x)^2}$$

elde ederiz. Şimdi de her iki tarafı x ile çarpalım:

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \frac{x(1-x^n) - nx^n(1-x)}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1. \quad (2)$$

Başlığımızdaki eşitlikleri $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ için şu şekilde yazabiliriz (ondalık açılımlarını düşünerek):

$$n + 8 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)10^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (9-k)10^{n-1-k} \quad (3)$$

¹Özlem Ege, DEÜ Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü.

Bu eşitlik doğrudur ancak ve ancak

$$n + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{[8(k+1) - (9-k)]}_{9k-1} 10^{n-1-k} = 0 \Leftrightarrow$$

$$n + 9 \cdot 10^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} k(10^{-1})^k - 10^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (10^{-1})^k = 0 \quad (4)$$

Şimdi $x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ olsun. O halde, $10 = \frac{1}{x}$ ve $9 = 10 - 1 = \frac{1-x}{x}$ olur. Bu durumda göstermek istediğimiz (4) eşitliği $x = 10^{-1}$ cinsinden şu olur:

$$n + \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} kx^k - \frac{1}{x^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 0 \quad (5)$$

(1) ve (2) eşitliklerini kullanarak (5) eşitliğinin $x = 10^{-1} \neq 1, 0$ olduğundan şu eşitliklere denk olduğunu görürüz:

$$n + \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{x(1-x^n) - nx^n(1-x)}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow n + \frac{(1-x^n) - nx^{n-1}(1-x)}{x^{n-1}(1-x)} - \frac{1-x^n}{x^{n-1}(1-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow nx^{n-1}(1-x) + (1-x^n) - nx^{n-1}(1-x) - (1-x^n) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Yani (5), dolayısıyla (4) ve (3) eşitlikleri doğrudur, üstelik her pozitif n tamsayısı için, sadece $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ için değil! Örneğin, $n = 10, 11, 12$ için de (3) eşitliği bize şu eşitlikleri verir:

$$10 + 8 \cdot (1234567890 + 10) = 9876543210$$

$$11 + 8 \cdot (12345678900 + 100 + 11) = 98765432100 - 1$$

$$12 + 8 \cdot (123456789000 + 1000 + 110 + 12) = 987654321000 - 10 - 2$$

Başlığımızdaki eşitlikler, (3) eşitliğinin $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ için özel hali, ama aslında (3) eşitliği de her $x \neq 1, 0$ reel sayısı için doğru olan (5) eşitliğinde $x = 10^{-1}$ alınarak elde edilen (4) eşitliğinden geliyor. Uzun lafın kısıması, kimi cebirsel eşitlikler, bazı özel sayılarda eğlenceli eşitlikler verebiliyormuş!

Tabii kendimizi 10'luk düzene mahkum etmek zorunda değiliz. R. Alizade'nin² başlıktaki eşitliklere ilk tepkisi herhangi bir düzende de doğru mu diye sormak olmuştur. Yazının başında vurguladığımız gibi matematikte neden bir önermenin doğru olduğunu daha iyi anlamaya çalışıyoruz, yani sonucu doğru yapan tam olarak hangi hipotezlerdir. b , 1'den büyük bir tamsayı olsun. b -düzenindeki rakamları artan sırada, $A_0, A_1, \dots, A_{b-1}$ sembolleri ile gösterelim. 8 rakamı onluk düzende sonuncu rakamdan bir önceki rakamdı. Bu durumda başlığımızdaki eşitlikleri b -düzeninde şöyle yorumlayabiliriz: $n \leq b-1$ pozitif tamsayısı için,

$$(A_1 A_2 \dots A_n)_b \cdot (A_{b-2})_b + n = (A_{b-1} A_{b-2} \dots A_{b-n})_b$$

²İYTE Fen Fakültesi Matematik Bölümü.

Bunun kanıtını da onluk düzendekine benzer şekilde (5) eşitliğinde $x = b^{-1}$ olarak elde edebileceğimizi göstermeyi okura bırakıyoruz. Böylece başlığımızdaki eşitliklerde niye 8 ile çarptığımız daha bir açıklığa kavuştu. Örneğin $b = 16$ için, 16'lık düzendeki rakamları artan sırada 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F sembolleri ile gösterirsek, şu eşitliği yazabiliriz:

$$(E)_{16} \cdot (123456789AB)_{16} + (B)_{16} = (FEDCBA98765)_{16}.$$

$b = 8$ 'lik düzende, rakamları artan sırada 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ile gösterirsek de örneğin şu eşitliği yazabiliriz:

$$(6)_8 \cdot (12345)_8 + (5)_8 = (76543)_8.$$

Bütün bu eşitlikleri elde etmemizi sağlayan en önemli sonucumuz $\sum_{k=0}^{n-1} kx^k$ toplamını (2) eşitliğinde verilen şekilde bulmuş olmamızdır. Bu toplamı, türev kullanmadan, perturbasyon metodu³ ile de elde edebiliriz. Bu metod başka toplam formüllerini elde etmekte de kullanılabileceği için bu yolla nasıl elde edildiğini de gösterelim. $x \neq 1$ bir reel sayı olsun. Her n pozitif tamsayısı için aradığımız $\sum_{k=0}^n kx^k$ toplamını S_n ile gösterelim ve $S_{n+1} = S_n + (n+1)x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} kx^k$ toplamının ilk terimini ayırarak kalan kısmı S_n cinsinden ifade etmeye çalışalım; böylece S_n için çözebileceğimiz bir denklem bulacağız:

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)x^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} kx^k = \underbrace{0 \cdot x^0}_{\text{ilk terim}} + \sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{k=0}^n (k+1)x^{k+1} \\ &= x \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^n kx^k}_{=S_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^n x^{k+1}}_{=\frac{x-x^{n+2}}{1-x}} \text{ (geometrik seri toplamı)} \\ \Rightarrow S_n + (n+1)x^{n+1} &= xS_n + \frac{x-x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

Bu denklemi S_n için çözerek, $S_n = \sum_{k=0}^n kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ elde ederiz (ki bu bize S_{n-1} için (2) eşitliğini verir).

Toplamlarla oynamaya meraklı okur için integral hesaplarında yaptığımız kimi işlemlerin uygun bir biçimde sonlu toplamalarda benzerlerinin yapılabileceğini⁴ ve bu şekilde

$$\sum_{k=0}^n kx^k = \left[k \cdot \frac{x^k}{x-1} - \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^{k+1}}{x-1} \right]_{k=0}^{n+1} = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

ifadesinin kolayca elde edilebileceğini belirterek yazımızı noktalayalım.

³Bakınız *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, 1994, Addison-Wiley, sayfa 32-33, 43-44.

⁴Bakınız *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, 1994, Addison-Wiley, sayfa 47-56.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, Matematik Dünyası, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Kuştepe Şişli İstanbul adresine 30 Ocak 2003 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama:

Bu sayımıza kadar bize yanıtlarını gönderenler içinde doğru çözüm üretenler: Oktay Balkış (Y.262)-Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi, Aksaray. Özel Selvergazi Fen Lisesi Matematik Olimpiyat grubu (Y.261, Y.262, Y.263, Y.265). Kendilerini kutluyor ve armağan olarak bedava 2003 aboneliği veriyoruz.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.271. A pozitif tam sayısının rakamları soldan sağa artan sırayla dizilmiştir. $9A$ sayısının basamakları toplamını bulunuz.

A.272. $ABCD$ paralelkenarının köşelerinin kesişim noktası O 'dur. A , O ve B noktalarından geçen çember BC 'ye teğettir. B , O ve C noktalarından geçen çemberin CD 'ye teğet olduğunu kanıtlayınız.

A.273. 16 tane karta 1'den 16'ya kadar tam sayılar yazılmıştır. Herhangi iki komşu kart alındığında bunların üzerindeki sayıların toplamı tam kare olacak şekilde, bu kartlar sıralanabilir mi?

A.274. A şehirden B şehrine bisikletli, aynı anda B 'den A 'ya motorsikletli çıktı. Bunlar saat 14:00'da karşılaştılar. Bisikletli 2 kat fazla hızla gitseydi saat 13:30'da karşılaşacaklardı. Motorsikletli 2 kat fazla hızla gitseydi 13:12'de

karşılaşacaklardı. Bisikletli ve motorsikletli saat kaçta yola çıkmışlardı?

A.275. 100 tane gerçel sayının toplamı sıfırdır. İlk sayı ve her $k \geq 2$ için ilk k sayının toplamı negatif olmayacak şekilde bu sayıların sıralanabileceğini kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.271. Üçüncüden başlayarak tüm terimleri için $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{OBE B(a_{n-1}, a_{n-2})}$ eşitliği sağlanan tüm sonsuz, sınırlı $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitif tam sayı dizilerini bulunuz.

Y.272. Düzlem üzerindeki 3 konveks çokgenin tek bir doğruyla kesilmemesi için gerek ve yeter koşul bu çokgenlerin her birinin diğer ikisinden bir doğruyla ayrılabilmesidir (yani öyle bir doğru bulunacak ki bu çokgen doğrunun bir tarafında, diğer iki çokgen de doğrunun diğer tarafında kalacak). Kanıtlayınız.

Y.273. Bir kare 9 tane yatay ve 9 tane de dikey doğruyla 100 tane dikdörtgene bölündü. Bu dikdörtgenlerden tam 9 tanesinin kare olduğu biliniyorsa bu karelerden en az ikisinin birbirine eşit olduğunu kanıtlayınız.

Y.274. (a_n) ve (b_n) gerçel sayı dizileri aşağıdaki şekilde tanımlanıyor. herhangi iki $a_0 > 0$ ve $b_0 > 0$ sayıları alınıyor. $x^2 + a_n x + b_n = 0$ denkleminin pozitif kökü a_{n+1} , negatif kökü de b_{n+1} olarak alınıyor. Bu dizilerin limitlerini bulunuz.

Y.275. 1'den 1000000'a kadar tüm tam sayılar beyaz veya siyah renge boyanmıştır. Her adımda bu sayılardan herhangi birisi alınıp, bu sayıyla aralarında asal olmayan tüm sayılarla birlikte karşıt renge boyanıyor. Başlangıçta tüm sayılar siyah ise bu işlemlerle tüm sayılar beyaz yapılabilir mi?

ÇÖZÜMLER

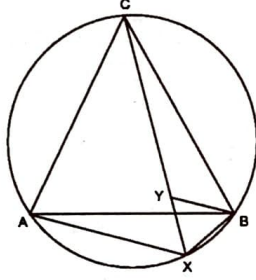
A.261. Tam m tane sıfırla biten bir faktoriyelin bulunduğu, fakat tam $m - 1$ tane sıfırla biten faktoriyel bulunmadığı bilinir. Tam $m + 1$ tane sıfırla biten bir faktoriyelin bulunur mu?

Çözüm. Tam m tane sıfırla biten en küçük faktoriyel $n!$ ise, n sayısı 5'e bölünüyor. n sayısı 25'e bölünmeseydi $(n - 1)!$ tam $m - 1$ tane sıfırla bitirdi. Böylece n sayısı 25'e bölünür. O halde

$n+5$ sayısı 5'e bölünür, 25'e bölünmez, dolayısıyla $(n+5)!$ sayısı tam $m+1$ tane sıfırla biter.

A.262. Eşkenar ABC üçgeninin çevrel çemberinin (küçük) AB yayı üzerinde bir X noktası alınmıştır, $|AX| + |BX| = |CX|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $|XY| = |XB|$ olmak üzere XC



Şekil 1

üzerinde Y noktası alalım (Şekil 1). $m(\widehat{CXB}) = m(\widehat{CAB}) = 60^\circ$ olduğundan XYB eşkenar üçgendir. $m(\widehat{YBC}) = 60^\circ - m(\widehat{ABY}) = m(\widehat{XBA})$ olduğundan YBC ve XBA üçgenleri eşittir. Dolayısıyla $|AX| + |XB| = |CY| + |YB| = |CY| + |YX| = |CX|$ 'dir.

A.263. $1gr, 2gr, \dots, 19gr$ olan ağırlıkların 9'u gümüşten, 9'u bronzdan, biri de altından yapılmış. Bronzların toplam ağırlığı gümüşlerin toplam ağırlığından 90 gr daha fazla olduğuna göre altın olan ağırlık kaç gramdır?

Çözüm. Bronzların toplam ağırlığının gümüşlerin toplam ağırlığından 90gr daha fazla olması sadece aşağıdaki durumda olabilir: bronzlar $19gr, 18gr, \dots, 11gr$ 'lık, gümüşler de $1gr, 2gr, \dots, 9gr$ 'lık ağırlıklardır. O halde altın olan ağırlık $10gr$ olacak.

A.264. Herhangi 4 rakam verilmiştir. Bu sayıların, aşağıdaki eşitsilik sağlanacak şekilde, karelere yerleştirilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. Rakamları $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ şeklinde sıralayalım. O halde

$$a_4 + a_2 - a_3 - a_1 = (a_4 - a_3) + (a_2 - a_1) \geq 0 \text{ ve} \\ a_4 + a_2 - a_3 - a_1 \leq (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_4 - a_1 \leq a_4 \leq 9$$

olduğundan $0 \leq a_4 + a_2 - a_3 - a_1 \leq 9$ eşitliğini elde ederiz.

A.265. Temel, basamakları toplamı ile toplandığında 2002'yi veren bir pozitif tam sayı bulduğunu İdris'e açıkladı. İdris de, basamakları toplamı ile farkını 2002'ye eşit olan bir pozitif tam sayı bulduğunu açıkladı. Temel, biraz düşündükten sonra böyle bir sayının bulunmadığını söyledi. Temel haklı mı? Temel'in sayısını bulunuz?

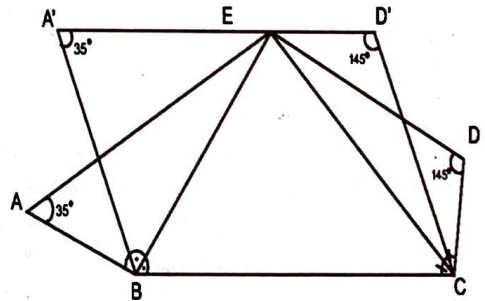
Çözüm. Bir sayı ile bu sayının basamakları toplamı 3'e bölündüğünde aynı kalan verdiğinden, bunların farkı 3'e bölünür. 2002 sayısı 3'e bölünmediğinden İdris'in söylediği koşulları sağlayan sayının bulunmamasına ilişkin Temel'in açıklaması doğrudur. Temel'in sayısının $19xy$ şeklinde olduğu açıktır. $1000 + 900 + 10x + y + 1 + 9 + x + y = 2002$ denkleminde $11x + 2y = 92$ elde edilir. O halde x çift sayıdır, $2y \leq 18$ olduğundan $x = 8$, buradan da $y = 2$ elde edilir. Böylece Temel'in sayısı 1982'dir.

Y.261. Küpleri toplamı 2002 olan iki tam sayı bulunur mu?

Çözüm. Bir tam sayının küpü 9'a bölündüğünde sadece 0,1,8 kalanları elde edilebilir. Dolayısıyla iki tam sayının küpleri toplamı 9'a bölündüğünde sadece 0,1,2,7 ve 8 kalanları elde edilebilir. $2002 \equiv 4 \pmod{9}$ olduğundan, 2002 iki tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemez.

Y.262. $ABCDE$ dışbükey beşgeninde BE ve CE köşegenleri sırasıyla $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{BCD}$ açılarının açıortaylarıdır. $s(\widehat{EAB}) = 35^\circ$, $s(\widehat{CDE}) = 145^\circ$ ve BCE üçgeninin alanı 11'dir. $ABCDE$ beşgeninin alanını bulunuz.

Çözüm. $[BE]$ doğru parçasının orta dikmesine



göre A noktasının simetrisini A' ile, $[CE]$ 'nin orta dikmesine göre D noktasının simetrisini D' ile gösterelim. $m(\widehat{A'EB}) = m(\widehat{ABE}) =$

$m(\widehat{EBC})$ olduğundan $A'E \parallel BC$ 'dir. Benzer şekilde $ED' \parallel BC$ 'dir. Dolayısıyla A', E, D' noktaları doğrusaldır ve $A'D' \parallel BC$ 'dir. $m(\widehat{BA'D'}) + m(\widehat{CD'A'}) = m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{CDE}) = 35^\circ + 145^\circ = 180^\circ$ olduğundan $BCD'A'$ dörtgeni paralelkenardır. O halde $Alan(ABCDE) = Alan(ABE) + Alan(BEC) + Alan(ECD) = Alan(A'BE) + Alan(BEC) + Alan(ECD') = Alan(A'BCD') = 2Alan(BEC) = 22$ elde edilir.

Y.263. 1'den 121'e kadar olan pozitif tam sayılar, 11×11 boyutlu tabloyu aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde yazılabilir mi:

a) aralarındaki fark 1'e eşit olan sayılar komşu (ortak kenarları bulunan) karelere yazılacak;

b) tüm tam kareler aynı sütunda bulunacak?

Çözüm. Sayıların, koşullar sağlanacak şekilde yazılabileceğini varsayalım. Tam karelerin bulunduğu sütun birinci ve sonuncu sütun olamaz, çünkü bu sayıların 1 eksik ve 1 fazlalarının sayısı 20'dir. O halde bu sütunu sildiğimizde tablo iki gruba bölünecek. İki ardışık sayının kareleri arasındaki tüm sayılar aynı grupta bulunacak. Diğer taraftan $m^2 - 1$ ve $m^2 + 1$ sayıları farklı gruplarda bulunacak. Dolayısıyla 1^2 ile 2^2 arasındaki sayılar 1. grupta ise, 2^2 ile 3^2 arasındaki sayılar 2. grupta bulunacak, 3^2 ile 4^2 arasındaki sayılar 1. grupta bulunacak v.s. 10^2 ile 11^2 arasındaki sayılar 2. grupta bulunacak. m^2 ile $(m+1)^2$ arasında $2m$ tane sayı bulunduğundan, 1. grupta $2+6+10+14+18 = 50$ sayı bulunacak. 50 sayısı 11'e bölünmediğinden çelişki elde edilir. Böylece sayılar, koşullar sağlanacak şekilde yazılamaz.

Y.264. a, b pozitif tam sayıları için $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0$ sağlanıyorsa, $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow 5b^2 \geq a^2 + 1 = a^2 + 2a\frac{1}{4a} + \frac{1}{4} > a^2 + 2a\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = (a + \frac{1}{4a})^2 \Rightarrow 5 > (\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab})^2 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$

Y.265. Her iki komşu sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bir asal sayı elde edilecek şekilde, çember boyunca birbirinden farklı 2003 tane pozitif tam sayı yazılabilir mi?

Çözüm. $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$ sayılarının koşulu sağladığını varsayalım. a_n sayısı asal çarpanlara ayrıldığında elde edilen asal bölenlerin sayısını p_n ile gösterelim ($n = 1, 2, \dots, 2003$). Örneğin $a_n = 18$ ise, $p_n = 3$ 'tür. İki komşu sayıdaki asal bölen

sayısı arasındaki fark 1 olduğundan $p(n)$ ve $p(n+1)$ sayılarından biri tek ise, diğeri çifttir ve tersine. O halde $p(1)$ tek (çift) ise, $p(3), p(5), \dots, p(2003)$ sayıları da tektir (çifttir). Diğer taraftan a_1 ile a_{2003} komşu olduğundan a_{2003} 'ün çift (tek) olması gerekir. Çelişki!

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Kuştepe Şişli İstanbul

adresine posta ile gönderilmeli, ya da matematikdunyasi@math.bilgi.edu.tr adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.



Leonhard Euler (1707-1783)



Elma hesabı
sizin hesabınıza çalışır.

Paranızla
yatırım fonu alır,
ödemelerinizi
otomatik yapar.



444 0 333 garanti.com.tr