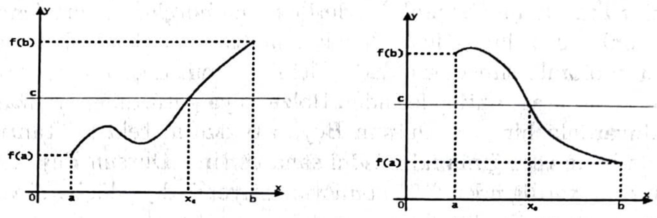
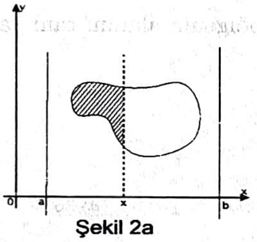
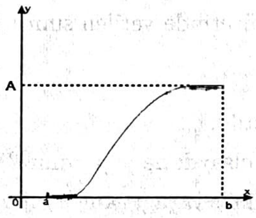


Şekil 1

Problem 2'ye gelince, alanı A olan sınırlı bölgeyi xy düzlemine yerleştirelim. Bölge $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalacak şekilde, a ve b sayılarını alalım. Her $d \in [a, b]$ için bölgenin $x = d$ doğrusundan solda kalan kısmının alanını $f(d)$ ile gösterelim. O halde $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olacaktır (biz, bölgenin sınırlarının düzgün olduğunu kabul edeceğiz, gerçi "düzgün" kelimesinin de ciddi tanımlanması gerekmektedir[6]).



Şekil 2a



Şekil 2b

Şekil 2'de $f(x)$ taralı alanı göstermektedir. $f(a) = 0$ ve $f(b) = A$ olduğundan, $0 < \frac{A}{2} < A$ için $f(x_0) = \frac{A}{2}$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a, b)$ bulunur. Böylece $x = x_0$ doğrusu bölgenin alanını tam yarıya bölecektir.

Problem 2'de koordinat sistemini istediğimiz şekilde seçebileceğimiz için aşağıdaki önermenin doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme. Düzlem üzerinde bir bölge ve bir l doğrusu verilmişse, bölgenin alanını yarıya bölen ve l'ye paralel olan bir l_1 doğrusu bulunur.

Şimdi Problem 1'e dönelim. Düzlem üzerinde P ve Q bölgeleri verilmiş olsun. Bir $\overrightarrow{a_0}$ vektörü alalım. $\overrightarrow{a_0}$ vektörüne paralel olan ve P'nin alanını tam yarıya bölen bir l_0 doğrusu bulunur. Q bölgesinin l_0 doğrusundan soldaki ($\overrightarrow{a_0}$ vektörü yönünde baktığımızda) kısmının alanı A_0 olsun. $\overrightarrow{a_0}$ vektörünü α açısı kadar saat yönüne ters yönde döndürerek elde ettiğimiz vektörü $\overrightarrow{a_\alpha}$ ile gösterelim. P'nin alanını tam yarıya bölen ve $\overrightarrow{a_\alpha}$' vektörüne paralel olan bir l_α doğrusu bulunacak. Q bölgesinin l_α doğrusundan solda kalan kısmının (Şekil 3'deki taralı bölgenin) alanını A_α ile gösterelim.

Şimdi her $\alpha \in [0, \pi]$ için $f(\alpha) = A_\alpha$ olarak tanımlanarak elde edilen f fonksiyonunun, α açısının ufak bir değişimi durumunda az bir değişime uğrayacağını görürüz, yani f sürekli bir fonksiyondur. Q bölgesinin alanı A ise, $f(\pi)$, Q bölgesinin taralı olmayan kısmının alanına eşit olacak, yani $f(\pi) = A - A_0$'dır. O halde $A_0 \leq \frac{A}{2} \leq A - A_0$ veya $A - A_0 \leq \frac{A}{2} \leq A_0$ olacak ve Ara Değer Teoreminden $f(\alpha_0) = \frac{A}{2}$ sağlanacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, \pi]$ bulunacak. Bu da l_{α_0} doğrusunun Q bölgesinin alanını tam yarıya böleceği anlamına gelir.

[6]Örneğin sürekli kapalı bir eğri düzgün sayılabilir