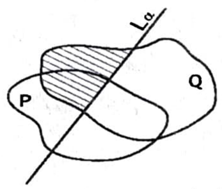

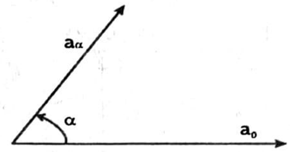

Şekil 3

3. Sabit Nokta Teoremi, Derecesi Tek Olan Polinomlar ve Başka Uygulamalar

Tanım. $f : A \to A$ bir fonksiyon olsun. Bir $a \in A$ için $f(a) = a$ ise, a'ya f fonksiyonunun sabit noktası denir. Bazı A kümeleri ve f fonksiyonları için en az bir sabit noktanın var olması gösterilebilir, bu da matematikte birçok problemin çözümünde rol oynuyor. Böyle durumlardan biri aşağıda verilmiştir.

Teorem 2 *(Sabit Nokta Teoremi).* Her $a < b$ sayıları için her sürekli $f : [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası bulunur.

Kanıt. $f(x)$ sürekli olduğundan $g(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlanan $g : [a, b] \to R$ fonksiyonu da süreklidir. $a \le f(a) \le b$ ve $a \le f(b) \le b$ olduğundan, $g(a) = f(a) - a \ge 0$ ve $g(b) = f(b) - b \le 0$ dır. Ara Değer Teoreminden $g(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [a, b]$ bulunur. O halde $f(x_0) = x_0$'dır, yani x_0 bir sabit noktadır.

Not 1. (a, b) açık aralıkları için Sabit Nokta Teoremi geçerli değildir. Örneğin $f(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlanan sürekli $f : (0,1) \to (0,1)$ fonksiyonunun sabit noktası bulunmamaktadır, çünkü her $x \in (0,1)$ için $\frac{x}{2} \neq x$ dir.

Not 2. Sabit Nokta Teoremi kapalı daire, küre ve genellikle R^n de $(n-1)$ boyutlu kapalı küre için de doğrudur, fakat bunlar için bilinen kanıtlar cebirsel topoloji bilgilerine dayanmaktadır.

Ara Değer Teoreminin bir başka uygulaması da gerçel katsayılı tek dereceden polinomlarla ilgilidir.

Teorem 3. Katsayıları gerçel sayılar olan ve derecesi tek olan her polinomun en az bir gerçel kökü bulunur.

Kanıt. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, n tek bir pozitif tamsayı ve tüm a_i'ler $(i = 1, 2, ..., n)$ gerçel sayılar olsun. $a_n > 0$ olduğunu varsayalım ($a_n < 0$ durumu benzer şekilde incelenir). x değişkeni ∞'a giderken, x^n sayısı $x^{n-1}, ..., x$ e göre çok daha hızlı büyüdüğünden, yeterince büyük bir b sayısı için $p(b)$ sayısı $a_n x^n$ ile aynı işarete sahip olacak, yani $p(b) > 0$ olacaktır. Aynı şekilde, n tek sayı olduğundan yeterince küçük (mutlak değerce büyük) bir a sayısı için $p(a) < 0$ olacak. O halde Ara Değer Teoreminden $p(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a, b)$ bulunacak, yani x_0 sayısı $p(x)$ polinomunun bir köküdür.

Şimdi Ara Değer Teoreminin başka bir geometri problemine uygulamasını verelim.

Tanım. Düzlem üzerinde verilen bir Q bölgesi bir P çokgeninin içerisinde ise ve P çokgeninin tüm kenarlarının Q bölgesi ile en az bir ortak noktası bulunuyorsa, P çokgenine Q bölgesinin çevrel çokgeni diyeceğiz (şekil 4)