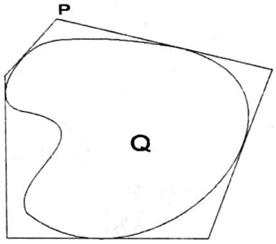
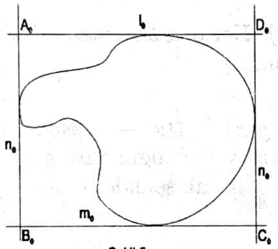


Şekil 4

Problem 3. Düzlem üzerindeki her bölgenin bir çevrel karesi bulunur mu?

Çözüm. Bir $\vec{a_0}$ vektörü alalım. Öteleme yardımıyla $\vec{a_0}$ vektörüne paralel olan, Q bölgesi ile ortak noktaları bulunan ve Q bölgesini aralarına alan iki l_0 ve m_0 doğrularını bulabiliriz (şekil 5)



Şekil 5

Aynı şekilde $\vec{a_0}$ vektörüne dik olan, Q ile ortak noktaları bulunan ve Q bölgesini aralarına alan iki k_0 ve n_0 doğruları bulunur. Böylece Q bölgesinin bir çevrel $A_0B_0C_0D_0$ dikdörtgeni bulunur. Problem 1'in çözümündeki gibi $\vec{a_0}$ vektörünü α açısı kadar döndürerek elde ettiğimiz vektörü $\vec{a_\alpha}$ ile gösterelim. $\vec{a_0}$ yerine $\vec{a_\alpha}$ aldığımızda elde ettiğimiz çevrel dikdörtgeni $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ ile gösterelim. Her $\alpha \in [0, \frac{\Pi}{2}]$ için $f(\alpha) = |A_\alpha B_\alpha| - |B_\alpha C_\alpha|$ alarak sürekli bir $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to R$ fonksiyonu elde ederiz. $A_{\frac{\pi}{2}} = B_0$; $B_{\frac{\pi}{2}} = C_0$; $C_{\frac{\pi}{2}} = D_0$ olduğundan $f(\frac{\pi}{2}) = |B_0C_0| - |C_0D_0| = -f(0)$ elde ederiz. Dolayısıyla ya $f(\frac{\pi}{2}) \leq 0 \leq f(0)$ ya da $f(0) \leq 0 \leq f(\frac{\pi}{2})$'dir. O halde Ara Değer Teoreminden $f(\alpha_0) = 0$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ bulunur. Bu durumda $|A_{\alpha_0}B_{\alpha_0}| = |B_{\alpha_0}C_{\alpha_0}|$ olduğu ortaya çıkar. Yani $A_{\alpha_0}B_{\alpha_0}C_{\alpha_0}D_{\alpha_0}$ dikdörtgeni Q bölgesinin bir çevrel karesi olur.

V. TÜBİTAK Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavında (1997) çıkmış olan aşağıdaki sorunun çözümünde Ara Değer Teoremi kullanılmaktadır:

Soru. $x^3 - 7x + 1 = 0$ denkleminin varsa, pozitif köklerinin (çarpma işlemine göre) terslerinin toplamını S ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\frac{13}{2} < S < 7$ B) $7 < S < \frac{15}{2}$ C)$S = 7$ D)Denklemin pozitif kökü yoktur. E)Hiçbiri

Çözüm. Vieta Teoreminden köklerin çarpımı -1, toplamı 0 olduğundan, varsa iki pozitif, bir negatif kök bulunur. $p(x) = x^3 - 7x + 1$ polinomu için $p(0) > 0$, $p(1) < 0$; $p(3) > 0$; $p(-3) < 0$, $p(-2) > 0$ olduğundan Ara Değer Teoreminden dolayı $(0, 1)$; $(1, 3)$; $(-3, -2)$ aralıklarında birer kök bulunur. Kökleri $x_1 < x_2 < x_3$ ile gösterirsek,