

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyasından

Karmaşık Düzlemde Analitik Geometri

Hüseyin Demir

Gauss Formülünün Genelleştirilmesi

Tosun Terzioğlu

Akıldan Çarpma Tekniği

Bahri Kaderoğlu

Geçişken Olmayan Zarlar Hakkında Teorem

Faramaz Maksudov, Elder Hacılarov

Seçim ve Matematik – 1
Kısmi Sıralama Bağlıları

Halil İbrahim Karakaş

Olimpiyat Haberleri

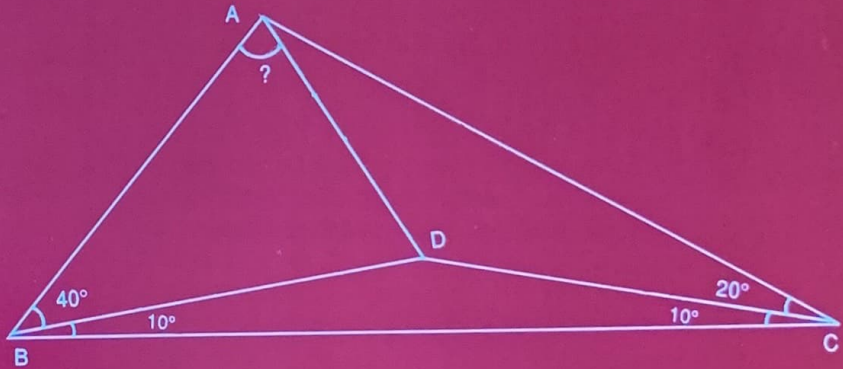
Albert Erkip

Sayılarla İlişkin İlginç Bağlılar

Talat Tuncer

Matematik Öğretiminden ne Bekliyoruz

Kemal Doğan



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına

Başkan

TOSUN TERZİOĞLU

BU SAYIYI YAYINA HAZIRLAYAN

OKTAY ÇELEBİ

YAYIN KURULU

CEMAL KOÇ, OKAY ÇELEBİ,
HÜSEYİN DEMİR, ALİ DOĞANAKSOY,
HALİL ERDEM, YAŞAR ERSOY,
İSMAİL GÜMÜŞEL, TİMUR KARAÇAY,
ALEV TOPUZOĞLU

YAZI İŞLERİ MÜDÜRÜ

ABDULLAH KAYGUSUZ

BASKI

TÜRK HAVA KURUMU BASİMEVİ

*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu
Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk.
K.İ.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi
uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 25.000.-TL., Yurtdışı yıllık 50.000.-TL.,

Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

ILAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.

Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.

Dergi içi, tam sayfa siyah-beyaz: 1.000.000.-TL.

Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.

Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz: 500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105

(Gökdelen) Kızılay 06650 ANKARA

Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İşerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA

Tel: (4) 223 71 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından	1
Karmaşık Düzlemde Analitik Geometri	
Hüseyin Demir	2
Gauss Formülünün Genelleştirilmesi	
Tosun Terzioğlu	11
Akıldan Çarpma Tekniği	
Bahri Kaderoğlu	13
Geçişken Olmayan Zarlar Hakkında Teorem	
Faramaz Maksudov, Elder Hacılarov	16
Seçim ve Matematik – 1 Kısmi Sıralama Bağlılıkları	
Halil İbrahim Karakaş	19
Olimpiyat Haberleri	
Albert Erkip	22
Sayıllara İlişkin İlginç Bağlılıklar	
Talat Tuncer	25
Matematik Öğretiminden ne Bekliyoruz	
Kemal Doğan	26
Sorular	27
Çözümler	28

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Dergimizin yayınlanmasındaki amatör yaklaşımı hala değiştirememiş olmanın huzursuzluğunu yaşıyoruz. Henüz, ne dergimizin zamanında çıkmasını, ne de Matematik dünyasına ilgi duyan okuyucularımızın kolaylıkla erişebileceği bir dağıtım düzenine sağlayabildik. Bu hatalarımızı kısa zamanda düzelteceğimiz umuduyla, hoşgörünüze sığınıyoruz.

Karmaşık Düzlemde Analitik Geometri : Yayın hayatına başladığımız günden beri size ulaşan ilginç yazıları ve problemleri ile tanıdığınız Hüseyin Demir bu kez de karmaşık düzlemde analitik geometriyi okuyucularına tanıtmaktadır.

Gaus Formülünün Genelleştirilmesi : ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Tosun Terzioğlu, çoğumuzun ilgi duyduğu, tamsayıların kuvvetlerinin toplamının bulunduğunu anlatmaktadır.

Akıldan Çarpma Tekniği : Bir tıp doktoru olan Bahri Kaderoğlu, geliştirdiği akıldan çarpma tekniğini, matematikle çok ilgili olmayanların bile anlayabileceği bir dil ile sunmaktadır

Geçişken Olmayan Zarlar Hakkında Teorem: Yazarlarımız arasına yeni katılan Faramaz Maksudov, bir Azeri Matematikçi. Geçişken olmayan zarların hakkındaki yazısını Tosun Terzioğlu günümüz Türkçesine çevirdi. Sonundaki Azerice olan birkaç satırla bu dilin kendine has özelliklerini de okuyucumuza aktarmak istedik.

Seçim ve Matematik - 1 Kısmi Sıralama Bağlılıkları : Seçimin Matematiksel temellerini inceleyen Halil İbrahim Karakaş, Akdeniz Üniversitesinde öğretim üyesi. Konuyu birkaç sayıda ve ilginç örneklerle sunacak.

Olimpiyat Haberleri : ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Albert Erkip 33. Matematik Olimpiyadı seçme sınavı ile ilgili bilgileri vermektedir.

Sayıllara İlişkin İlginç Bağlılıklar Emekli öğretim üyelerinden Talat Tuncer tarafından hazırlanmıştır.

Matematik Öğretimi ile ilgili bir **Tartışma** köşesini başlattık. Okuyucularımızın her türlü görüş, eleştiri düşüncelerine yer vermek arzusundayız.

KARMAŞIK DÜZLEMDE ANALİTİK GEOMETRİ

HÜSEYİN DEMİR

Analitik geometri matematik tarihinde ilk kez Fransız matematikçisi René Descartes (1596-1650) tarafından düşünülmüş ve analitik geometri matematiğin hızla ilerlemesine yol açmıştır.

Böylece, düzlemde noktalarla bu noktaların x, y koordinatlarının sıralı (x, y) ikilileri arasında birebir bir eşleme kurulmuştur. Descartes'ın (Dekart) Latince adlı Cartesius olan x, y koordinatlarına karteziyen koordinatlar denilmiştir. Fransızca olan karteziyen sözcüğü yerine Türkçe ek kullanarak kartezil diyeceğiz.

Bu yazımızda karmaşık düzlemde analitik geometriyi ele alarak doğruların, çemberlerin denklemlerini elde edecek ve üçgen geometrisine giriş yapacağız.

Önce, bilenlere hatırlatma, bilmeyenlere de tanıtmak için karmaşık sayılarla işe başlayacağız.

Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayılar ilk kez ikinci dereceden denklemleri çözerken ortaya çıkmıştır. Bunları çağdaş olarak vermek istersek sıralı ikililer için şu üç işlemi tanımlayacağız:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') \quad (1)$$

$$k(x, y) = (kx, ky), (k \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \quad (3)$$

(1) ve (2) den

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

$$= x(1, 0) + (0, 1)y$$

elde edilir.

Karşımıza çıkan $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ ikililerine $(3)'ü$ uygulayalım:

$$(1, 0)(a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b)$$

eşitliği her (a, b) için geçerli olup $(1, 0)$ ikilisini 1 olarak tanımlarız. $(0, 1)$ ikilisine gelince,

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ = (-1, 0) = -1 \cdot (1, 0) = -1$$

olup karesi -1 'e eşit olan bu ikili gerçel sayı ol maz. Bu ikiliyi i ile gösteririz:

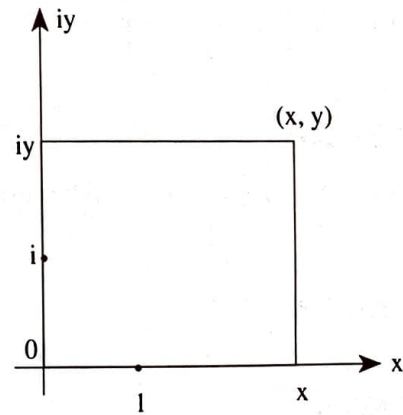
$$(0, 1) = i$$

Bu durumda

$$(x, y) = (1, 0)x + (0, 1)y = x + iy$$

bulunur ki gerçel sayıların sıralı her (x, y) ikilisi $x + iy$ biçiminde yazılabilir.

Bunu da



$$z = x + iy \quad (4)$$

olarak yazar ve z ye *karmaşık sayı* deriz.

Karmaşık sayıların (4) ile gösterilen biçimine *kartezil biçim* deriz. Biraz ileride kutupsal biçimden söz edeceğiz.

Böylece $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ için (1), (2), (3) işlemleri şunlar olur:

$$(a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b'+b')$$

$$k(a+ib) = ka + ikb \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)$$

Son eşitlikte çarpım gerçel sayılarda olduğu gibi yapılır ve her i^2 yerine -1 yazılarak elde edilir.

Örnek:

$$(2+3i)(4-i) = 8-2i+12i-3i^2$$

$$= 8+10i+3 = 11+10i$$

$x+iy$ sayısındaki x ve y gerçel sayıları için şu simgeleri kullanırız:

$$x = \text{ger}(z),$$

$$y = \text{san}(z) = "iy" \text{ sanal kısmında } i \text{ nin kasayısı.}$$

Eğer $y=0$ ise karmaşık sayı x gerçel sayısı olur. O halde *her gerçel sayı karmaşık bir sayıdır*. Eğer $y \neq 0$ ise karmaşık sayıya *sanal sayı* denir. Sanal bir sayıda $x = 0$ ise sayı *iy* biçiminde olur ve sayıya $y \neq 0$ için *salt sanal sayı* denir. Örneğin, $1+i, -3i, \sqrt{2}-i\pi$ sanal, $i, 2i, -\sqrt{3}$ i salt sanal sayılardır.

Karmaşık sayı düzleminde gerçel sayıları içeren doğruya *gerçel eksen*, sıfır ve salt sanal sayıları içeren eksene de *sanal eksen* denir.

Gerçel eksenin sağına x ; sanal eksenin yukarısına iy yazacağız. (Hemen hemen bütün kitaplarda sanal eksenin yukarısına y yazılmaktadır).

Değişme, Birleşme ve Dağılma Özellikleri

Karmaşık sayılarda değişme ve birleşme özellikleri denilen şu özellikler geçerli olmaktadır:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

Bu iki eşitlik (1), (2), (3) ün kullanılmasıyla sağlanabilir.

Çarpmanın toplamaya göre dağılma özelliği de şudur:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

z nin Eşleniği ve Bölme

$z = x+iy$ sayısı verildiğinde $\bar{z} = x-iy$ olarak tanımlanan sayıya z nin *karmaşık eşlenik*'i denir. ($\bar{z}$ simgesini " z eşlenik" ya da " z çizgisi" diye okuruz). $\bar{\bar{z}}$ nin eşleniği de z dir.

z ve $\bar{z}$, sayıları (noktaları) gerçel eksene göre simetrikler. Eşlenik için şu özellikler geçerlidir:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad (5)$$

$$z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R} \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}$$

Altakilerin geçerliliğini gösterelim:

$$z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x \in \mathbb{R},$$

$$\bar{z}\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Bölmeye gelince, eğer $\frac{z_1}{z_2}$ de $z_2 \in \mathbb{R}$ ise sorun yoktur. Eğer z_2 sanal ise oranın pay ve paydası $\bar{z}_2$ ile çarpılıp payda gerçel yapılır. Örneğin

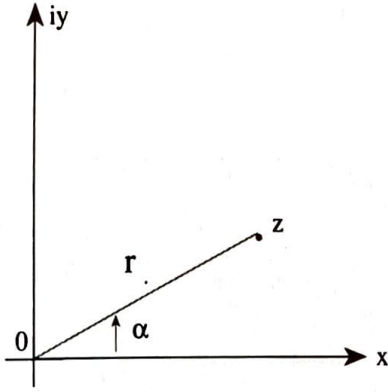
$$\frac{4+3i}{2-i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8-3+(4+6)i}{2^2+1^2} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$$

Kutupsal Biçim

$z = x+iy$ sayısı için şu iki sayıyı tanımlayalım:

$$\alpha = \text{açı}(z) = \angle(Ox, Oz) \pmod{2\pi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0 \quad (6)$$



Burada α , [Oz ışınının [Ox ışını ile yaptığı ve $0 < \alpha \leq 2\pi$ eşitsizliklerini sağlayan açı, r ise z nin O dan uzaklığını ifade eden sayı olup z nin $|z|$ mutlaka değeridir.

z nin karmaşık düzlemdeki her durumu için

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

geçerli olup

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r \cos \alpha + ir \sin \alpha \\ &= r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir. z nin $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ biçimine z nin *kutupsal biçim*'i denir.

Örnek: $1+i$ yi kutupsal biçimde yazınız.

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{açı } (1+i) = \pi/4 \\ r &= |z| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

olup

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

elde edilir

Kutupsal biçimdeki $\cos \alpha + i \sin \alpha$ toplamını $\cos$ ve $\sin$ in ilk harflerini kullanarak kısaca $\text{cis } \alpha$ olarak yazacağız:

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r \text{ cis } \alpha \quad (8)$$

Kutupsal biçim çarpma işlemi için çok elverişlidir. Gerçekten, $z_1 = r_1 \text{ cis } \alpha_1$, $z_2 = r_2 \text{ cis } \alpha_2$ ise

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (9)$$

geçerlidir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \text{cis } \alpha_1 \text{ cis } \alpha_2 &= (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ &= (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ &\quad + i (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1) \\ &= \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= \text{cis } (\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

Aşağıdaki formül tümevarımla ispatlanabilir:

$$\text{cis } \alpha_1 \dots \text{cis } \alpha_n = \text{cis } (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \quad (10)$$

Bunun da $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$ için özel hali şu olur:

$$\text{cis}^n \alpha = \text{cis } n\alpha$$

Bu formüle De Moivre formülü denilmektedir. Bunun daha açık ifadesi şudur:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad (11)$$

Bu formül $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$,... nın $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ türünden hesaplanması için çok elverişlidir.

Örnek: $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$ yı $\cos \alpha$ $\sin \alpha$ türünden yazınız.

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha (i \sin \alpha) + 3 \cos \alpha (i^2 \sin^2 \alpha) \\ &\quad + (i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + i (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha) - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ &\quad - i \sin^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) \\ &\quad + i (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) \\ &\Rightarrow \\ \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

2. Çemberler

Merkezi w ve yarıçapı r olan çemberin denklemi, çember üzerinde alınan bir z noktasının w noktasından uzaklığının r ye eşit olduğunu

yazarak elde olunur.

$$r = \sqrt{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}.$$

Bu da

$$(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) - r^2 = 0 \quad (12)$$

denklemini verir ve parentezler açıldığında

$$\bar{z}z - w\bar{z} - w\bar{z} + (w\bar{w} - r^2) = 0 \quad (13)$$

elde edilir. O halde $\bar{z}z$ terimini içeren ve $z, \bar{z}$ ye göre doğrusal olan bir bağıntı çember denklemi olur.

Özel olarak $w = 0$ ve $r = 1$ alındığında merkezi O'da olan birim çemberin denklemi

$$\bar{z}z - 1 = 0 \quad (14)$$

olur.

Uygulama: $\{z : \frac{|z-1|}{|z-3|} = 2\}$ kümesinin bir çember

olduğunu gösterip merkez ve yarıçapını belirleyiniz.

Kümedeki bağıntı

$$\sqrt{\frac{(z-1)(\bar{z}-1)}{(z-3)(\bar{z}-3)}} = 2$$

olup kare alıp düzenleme ile

$$4(\bar{z}z - 3\bar{z} - 3\bar{z} + 9) - (\bar{z}z - z\bar{z} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 3\bar{z}z - 11\bar{z} - 11z + 35 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z}z - \frac{11}{3}z - \frac{11}{3}\bar{z} + \frac{35}{3} = 0$$

$$\Rightarrow (z - \frac{11}{3})(\bar{z} - \frac{11}{3}) - \frac{121}{9} + \frac{35}{3} = 0$$

$$\Rightarrow (z - \frac{11}{3})(\bar{z} - \frac{11}{3}) = (\frac{4}{3})^2$$

$$\Rightarrow w = \frac{11}{3}, r = \frac{4}{3}.$$

1'in Kökleri

1'in n y inci dereceden kökleri

$$z^n - 1 = 0$$

denkleminin kökleri olup

$$\epsilon = \text{cis} \frac{2\pi}{n}$$

alındığında kökler

$$\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}, 1 \quad (15)$$

olarak karşımıza çıkar. Gerçekten

$$(\epsilon^n)^n = (\epsilon^n)^k = (\text{cis} \frac{2\pi}{n})^k = (\text{cis} 2\pi)^k = 1$$

Bu kökler, denklemi $z^n - 1 = 0$ olan çemberin içine çizilen ve bir köşesi 1 olan düzgün çokgenin köşeleridir.

Eğer $z = r \text{cis} \alpha$ nın n yinci dereceden köklerini istersek pozitif olan $\sqrt[n]{r}$ yi 1'in kökleriyle çarparak bulunur:

$$\sqrt[n]{r}\epsilon, \sqrt[n]{r}\epsilon^2, \dots, \sqrt[n]{r}\epsilon^{n-1}, \sqrt[n]{r} \quad (16)$$

Gerçekten bunların n yinci kuvvetleri hep 1'dir.

3. Doğrular

$A(a), B(b)$ gibi farklı iki noktadan geçen doğrunun denklemini bulmak için AB üzerinde değişken bir $Z(z)$ noktası aldığımızda

$$z - a = \lambda(a - b). (\lambda \in \mathbb{R})$$

bağıntısı geçerli olur.

$$\bar{z} - \bar{a} = \lambda(\bar{a} - \bar{b})$$

verir ve bölme ile

$$\frac{z-a}{z-\bar{a}} = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} =$$

$$\Rightarrow (\bar{a}-\bar{b})(z-a) - (a-b)(\bar{z}-\bar{a}) = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{a}-\bar{b})z - (a-b)\bar{z} + \bar{a}b - \bar{a}b = 0 \quad (17)$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{z}z$ terimin içermiyor ve z ile $\bar{z}$ a göre doğrusaldır. O halde $\bar{z}z$ terimini içermeyen ve z ile $\bar{z}$ a göre doğrusal olan bir denklem doğru denklemi olur.

Denklemin Determinant Biçimi

$A(a)$ ve $B(b)$ gibi farklı iki noktadan geçen doğrunu denklemi

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

dır.

Gerçekten determinant 1. satıra göre açılırsa denklem $z\bar{z}$ terimini içermez ve z ile $\bar{z}$ a göre doğrusaldır. O halde denklem bir doğrunun denklemidir. $z = a$ ya da $z = b$ alındığında determinant sıfır olduğundan denklem sağlanmış olur, yani doğru $A(a)$ ve $B(b)$ den geçer.

Örnek : $1+i$ ve $-i$ den geçen doğrunun denklemini yazınız.

Doğrunun determinant biçimindeki denklemi

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ 1+i & 1-i & 1 \\ -i & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olup 1. satıra göre açılırsa

$$(1-i-i)z - (1+i+i)\bar{z} + i(1+i) + i(1-i) = 0$$

$$\Rightarrow (1-2i)z - (1+2i)\bar{z} + 2i = 0.$$

Doğrunun Eğimi

- Bir doğrunun denklemi $\bar{z}$ a göre çözüldüğünde z nin katsayısına doğrunun *eğim*'i deriz.

(1) de bu iş yapıldığında

$$m(AB) = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{a-b} = \frac{\text{eşlenikler farkı}}{\text{sayılar farkı}} \quad (19)$$

elde olunur. Örneğin gerçel ve sanal eksenlerin eğimlerini hesaplayalım:

$$m(Ox) = \frac{\bar{1}-\bar{0}}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$m(Oy) = \frac{\bar{i}-\bar{0}}{i-0} = \frac{-i}{i} = -1$$

Sonuç 1. $a = r \text{ cis } \alpha$ ise

$$m(Oa) = \frac{\bar{a}-0}{a-0} = \frac{r \text{ cis } \alpha}{r \text{ cis } \alpha} = \frac{\text{cis } (-\alpha)}{\text{cis } (\alpha)} = \text{cis } (-2\alpha) \quad (20)$$

Sonuç 2. $a = r \text{ cis } \alpha$, $b = r \text{ cis } \beta$ ise

$$\frac{m(Ob)}{m(Oa)} = \frac{\text{cis } (-2\beta)}{\text{cis } (-2\alpha)} = \text{cis } 2(\alpha - \beta). \quad (21)$$

Teorem¹

$$a) AB \parallel CD \Leftrightarrow m(AB) = m(CD)$$

$$b) AB \perp CD \Leftrightarrow m(AB) = -m(CD)$$

Bu teorem Sonuç 2'nin bir sonucudur.

BİRAZ ÜÇGEN GEOMETRİSİ

Üçgen çok sade bir şekil olup üzerinde Batılılarca pek çok kitap ve 10.000'e yakın da makale yazılmıştır. Biz burada bir kaç konuya değinmekle yetineceğiz.

Sadelik için $A(\alpha) B(\beta) C(\gamma)$ üçgenimizi $\{z: z\bar{z}-1=0\}$ birim çemberi içinde alacağız. Böylece (14) gereğince

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}, \bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \quad (22)$$

olmuş olur. Hesaplarda sık sık karşımıza çıktıkları için α, β, γ için $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ile göstereceğimiz ilkel simterik fonksiyonlarını yazalım.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha + \beta + \gamma \\ \sigma_2 &= \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta \\ \sigma_3 &= \alpha\beta\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

Bunların eşleniklerine gelince,

$$\sigma_1 = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma\gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \bar{\sigma}_3 \sigma_2$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \bar{\beta}\gamma + \bar{\gamma}\alpha + \bar{\alpha}\beta = \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \bar{\sigma}_3 \sigma_1 \end{aligned}$$

elde ederiz

¹ Karmaşık düzlemde dikliğin bu sade bağıntısı gerçel düzleminkine üstünlük sağlar.

5. Genel Alan Formülü

Önce genel durumda $A(z_1)$ $B(z_2)$ $C(z_3)$ üçgeninin alan formülünü elde edelim.

Gerçek düzlemde köşelerin koordinatları

x_k, y_k ($k = 1, 2, 3$) olan üçgenin alanı için bilinen

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (25)$$

formülünden yararlanacağız.

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k, \quad k = 1, 2, 3$$

koyduğumuzda

$$2x_k = z_k + \bar{z}_k, \quad 2iy_k = z_k - \bar{z}_k$$

olup bunlar (1) de kullanıldığında sütun işlemleriyle

$$S = \frac{1}{4} i \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad S \in \mathbb{R} \quad (26)$$

formülü elde edilir.

Örnek: $A(\alpha)$ $B(\beta)$ $C(\gamma)$ üçgeninin alanını bulunuz.

(26) dan

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} i \begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} i \sigma_3 \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \beta^2 & 1 & \beta \\ \gamma^2 & 1 & \gamma \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} i \sigma_3 (\beta - \gamma) (\gamma - \alpha) (\alpha - \beta) \\ \Rightarrow \bar{S} &= -\frac{1}{4} i \sigma_3 (\bar{\beta} - \bar{\gamma}) (\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \end{aligned}$$

olup, kenar uzunlukları a, b, c ise,

$$\begin{aligned} S^2 &= S\bar{S} = \frac{1}{16} a^2 b^2 c^2 \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{4} abc \Rightarrow 4S = abc \end{aligned}$$

Bu da bildiğimiz $abc = 4RS$ formülüdür.

Kenar Doğrularının Denklemleri

$B(\beta)$ $C(\gamma)$ kenar doğrunun denklemini bulmak için önce $m(BC)$ yi hesaplarız.

$$m(BC) = \frac{\bar{\beta} - \bar{\gamma}}{\beta - \gamma} = \frac{-\beta\gamma(\beta - \gamma)}{\beta - \gamma} = \bar{\beta}\gamma \quad (27)$$

O halde denklem

$$\frac{\bar{z} - \bar{\beta}}{z - \beta} = m(BC) = \bar{\beta}\gamma$$

$$\Rightarrow -\bar{\beta}\gamma(z - \beta) + (\bar{z} - \bar{\beta}) = 0$$

$$\Rightarrow z - \beta + \beta\gamma(\bar{z} - \bar{\beta}) = 0$$

$$\Rightarrow BC : z + \beta\bar{z} = \beta + \gamma$$

$$CA : z + \gamma\bar{z} = \gamma + \alpha$$

$$AB : z + \alpha\bar{z} = \alpha + \beta$$

6. Kenarortaylar ve Ağırlık Merkezi

$A(\alpha)$ $B(\beta)$ $C(\gamma)$ üçgeninde AA' kenarortay doğrusunun denklemi

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \frac{\beta + \gamma}{2} & \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olup son satır 2 ile çarpılıp 2. satır eklendiğinde ve sonra 3 ile bölündüğünde

$$AA' : \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \frac{\alpha_1}{3} & \text{---} & \text{---} \end{vmatrix} \quad (29)$$

elde edilir. $z = \sigma_1/3$ için denklem sağlandığından ve σ_1 sayısı α, β, γ ya göre simetrik olduğundan üç kenarortay aynı G ($\sigma_1/3$) noktasından geçer.

Bu G noktası üçgenin ağırlık merkezidir.

7. Yükseklikler ve Ortosantr

$A(\alpha) B(\beta) C(\gamma)$ üçgeninde $[AX]$ bir yükseklik ise

$$AX \perp BC \Rightarrow m(AX) = -m(AC) = \overline{\beta\gamma}$$

olup denklemler

$$z - \alpha - \beta\gamma(\overline{z} - \overline{\alpha}) = 0$$

$$\Rightarrow AX : z - \beta\gamma\overline{z} = \alpha - \alpha\beta\gamma$$

$$BY : z - \gamma\alpha\overline{z} = \beta - \overline{\beta}\gamma\alpha \quad (30)$$

$$CZ : z - \alpha\beta\overline{z} = \gamma - \overline{\gamma}\alpha\beta$$

olur.

Yükseklik doğrularının noktadaşlığını göstermek üzere (30) da son iki denklemi ortak çözeriz. İlk denklemi β , ikinciye γ ile çarpıp taraf tarafa çıkardığımızda

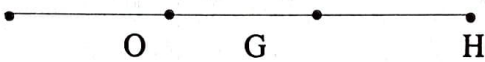
$$(\beta - \gamma)z = \beta^2 - \gamma^2 - \alpha(\gamma - \beta)$$

$$z = \sigma_1$$

elde edilir. σ_1 simetrik fonksiyon olduğundan üç yükseklik doğrusu $H(\sigma_1)$ noktasından geçer.

H ye üçgeninin ortosantrı ve OH ye Eurler doğrusu denir.

Sonuç: G noktası Eurler doğrusu üzerindedir ve $[OH]$ yı 1:2 oranında böler:



8. Açıortaylar ve İç Merkezler

$A(\alpha) B(\beta) C(\gamma)$ üçgeninde A köşesine ait $[AD]$ iç açıortay doğrusunun m eğimini bulalım:

(20) gereğince

$$\frac{m(AC)}{m} = \cos 2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{m}{m(AB)}$$

$$\Rightarrow m^2 = m(AB) m(AC) = (-\alpha\beta) \cdot (-\alpha\gamma) = \alpha\sigma_3$$

bulunur. m için iki kök ortaya çıkar. Bu kökleri

$\sqrt{\alpha\sigma_3}, -\sqrt{\alpha\sigma_3}$ olarak göstermek anlam taşımaz. Eğer $a > 0$ için $m^2 = a$ denklemi söz konusu olsaydı pozitif kökü $\sqrt{a}$, negatif kökü de $-\sqrt{a}$ olarak yazmak anlamlı olurdu. Eğer a negatif ya da sanal bir sayı ise $\sqrt{a}$ simgesi köklerden belirli birinin gösteremiyor.

AD nin denklemini bulmak için başka bir yola başvurmak zorundayız. $D(\sigma)$ noktası $[BC]$ yi içten $c : a$ oranında böldüğü için

$$\frac{\delta - \beta}{\delta - \gamma} = -\frac{c}{b}$$

yazar ve δ için

$$\delta = \frac{b\beta + c\gamma}{b + c}$$

değerini buluruz. O halde denklem

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ \alpha & \overline{\alpha} & 1 \\ \frac{b\beta + c\gamma}{b+c} & \frac{b\beta + c\gamma}{b+c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dir. Burada son satırı $b + c$ ile çarpıp ikinci satırın a katı eklendiğinde ve satır $a+b+c$ ile bölüldüğünde

$$u = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \quad (32)$$

koyarak denklem olarak

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ \alpha & \overline{\alpha} & 1 \\ u & \overline{u} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

elde edilir.

$z = u$ için denklem sağlandığından u sayısı $a\alpha, b\beta, c\gamma$ ya göre simetrik olduğundan üç iç açıortay doğrusu $I(u)$ noktasından geçmiş olur. I noktası üçgenin iç merkezi olur.

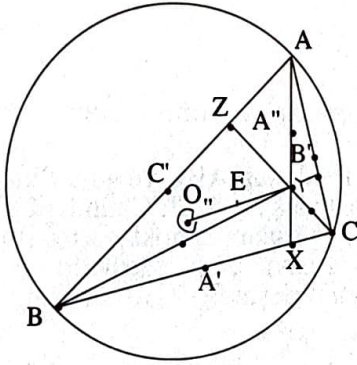
Benzer yolla dış açıortaylar da incelenebilirse de bu işi meraklılara bırakıyoruz.

9. Dokuz Nokta Çemberi

Teorem: Çevrel merkezi O, ortosantrı H olan bir üçgende kenarların orta noktaları, yüksekliklerin kenarlar üzerindeki ayakları ve ortosantrı köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları çemberdedir. Bu çemberin E merkezi [OH] nin orta noktası ve yarıçapı çevrel yarıçapın yarısıdır.

Bu çembere üçgenin dokuz nokta çemberi denir.

Kanıt (Homoteti ile). Üçgen $A(\alpha) B(\beta) C(\gamma)$, kenarların orta noktaları $A'(\alpha')$, $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$, yüksekliklerin ayakları $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ ve $[HA]$, $[HB]$, $[HC]$ nin orta noktaları A'' , B'' , C'' olsun.



Üçgen ve çevrel çembere $[H, \frac{1}{2}]$ homotetisini uygulayarak, A, B, C köşeleri A'' , B'' , C'' ye, O çevrel merkezi [HO] nun E ortasına dönüşür. A'' , B'' , C'' den geçen çemberin merkezi E ve yarıçapı $R/2$ olur. Öteki altı noktanın da bu (E) çemberi üzerinde olduğunu gösterelim. (E) nin denklemi

$$\begin{aligned} (z - \frac{\sigma_1}{2})(\bar{z} - \frac{\bar{\sigma}_1}{2}) &= (\frac{1}{2})^2 \\ \Rightarrow (E) : (2z - \sigma_1)(2\bar{z} - \bar{\sigma}_1) &= 1 \end{aligned} \quad (34)$$

olur.

$A'(\alpha')$ için (35) te $2z$ yerine $2\alpha' = \beta + \gamma$ konursa denklem sağlanır. O halde A' ve benzer olarak B' , C' noktaları (E) üzerindedir.

$X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ noktalarına gelince, X i bulmak için

$$BC : z + \beta\bar{\gamma} = \beta + \gamma$$

$$AX : z - \beta\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\beta\gamma$$

denklemleri ortak çözülüp

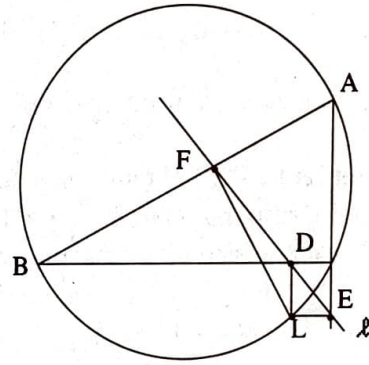
$$2x = \sigma_1 - \bar{\alpha}\beta\gamma$$

bulunur. Bu değer (E)'nin denklemini sağlar. O halde X , Y , Z noktaları (E) üzerindedir.

10. Simson Doğruları

Teorem. Bir üçgenin çevrel çemberi üzerinde alınan bir noktanın kenar doğruları üzerindeki dik izdüşümleri doğrudur.

Bu doğruya noktanın üçgene göre Simson doğrusu denir.



Kanıt: Üçgen ABC, nokta $L(\lambda)$ ve ayakları $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$ olsun x 'i hesaplayalım.

$$BC : z + \beta\bar{\gamma} = \beta + \gamma$$

$$LD : (z - \lambda) - \beta\gamma(\bar{z} - \bar{\lambda}) = 0$$

olup toplama lie

$$2d = \beta + \gamma + \lambda - \bar{\lambda}\beta\gamma = \sigma_1 + \lambda - \alpha - \bar{\lambda}\beta\gamma$$

ve benzer olarak

$$2e = \sigma_1 + \lambda - \beta - \bar{\lambda}\alpha\gamma$$

$$2f = \sigma_1 + \lambda - \gamma - \bar{\lambda}\alpha\beta$$

bulunur.

Buradan m (EF) yi bulmak üzere

$$2(e - f) = \gamma - \beta - \lambda\alpha(\gamma - \beta) = (\gamma - \beta) (1 - \lambda\alpha)$$

$$2(\bar{e} - \bar{f}) = -\beta\gamma(\gamma - \beta) (1 - \lambda\bar{\alpha})$$

elde eder ve

$$m(EF) = \frac{\bar{e} - \bar{f}}{e - f} = \frac{-\beta\gamma(1 - \lambda\alpha)}{1 - \lambda\alpha} = \lambda\sigma_3$$

buluruz. σ_3 simetrik fonksiyon olduğu için $m(EF)=m(FD)=m(DE)$.

O halde denklem

$$\lambda(2z - 2d) - \bar{\sigma}_3 (2\bar{z} - 2\bar{d}) = 0$$

$$\lambda[2z - \lambda - \sigma_1 + \alpha + \lambda\beta\gamma] - \bar{\sigma}_3 [2\bar{z} - \bar{\lambda} - \bar{\sigma}_1 + \bar{\alpha} + \lambda\bar{\beta}\bar{\gamma}] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(2z - \lambda - \sigma_1) - \bar{\sigma}_3 (2\bar{z} - \bar{\lambda} - \bar{\sigma}_1) + \lambda\alpha + \beta\gamma - \bar{\sigma}_3\bar{\alpha} - \lambda\alpha = 0$$

$$\Rightarrow l : \lambda (2\bar{z} - \bar{\lambda} - \bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_3 (2\bar{z} - \bar{\lambda} - \bar{\sigma}_1) = 0 \quad (35)$$

Bu denklemden hemen elde edilen teorem şudur:

Teorem (Stenier) : Bir noktanın bir üçgene göre Simson doğrusu, bu noktayı ortosantra birleştiren doğru parçasının ortasından geçer.

İkinci ilginç teorem de şudur:

Teorem. Bir üçgenin çevrel çemberinin bir çapının uçlarına ait Simson doğruları birbirlerine dik olarak dokuz nokta çemberi üzerinde kesişirler.

Bir çap [LM] ise $L(\lambda)$, $M(-\lambda)$ dan L ve M ye ait Simson doğrularının eğimleri $\lambda\bar{\sigma}_3$, $-\lambda\bar{\sigma}_3$ olup dik olurlar.

Steiner teoremi gereğince bu Simson doğruları [LH] ve [MH] nın L', M' orta ortalarından geçer. [LM] çap olup [L'M'] dokuz nokta çemberinin bir çapı olur. Sonuç buradan çıkar.

Noktası Üç Simson Doğrusu

$A(\alpha)$ $B(\beta)$ $C(\gamma)$ üçgeninin (O) çevrel çemberi üzerinde $L_1(\lambda_1)$, $L_2(\lambda_2)$, $L_3(\lambda_3)$ gibi üç nokta alındığında bu noktalara ait l_1 , l_2 , l_3 Simson doğrularının noktadaş olmaları için koşulu

araştıralım:

$$l_2 : \lambda_2 (2z - \lambda_2 - \sigma_1) - \sigma_3 (2\bar{z} - \bar{\lambda}_2 - \bar{\sigma}_1) = 0$$

$$l_3 : \lambda_3 (2z - \lambda_3 - \sigma_1) - \sigma_3 (2\bar{z} - \bar{\lambda}_3 - \bar{\sigma}_1) = 0$$

doğrularının w arakesit noktasını bulmak için bu iki denklemi taraf tarafa çıkarmak yeter:

$$(\lambda_2 - \lambda_3)2z - (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - (\lambda_2 - \lambda_3)\sigma_1 + \sigma_3(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3) = 0$$

$$\Rightarrow 2w - (\lambda_2 + \lambda_3) - \sigma_1 - \sigma_3 \lambda_2 \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow 2w = \lambda_2 + \lambda_3 + \sigma_1 - \sigma_3 \lambda_2 \lambda_3 \quad (36)$$

Bu noktanın

$$l_1 : \lambda_1 (2z - \lambda_1 - \sigma_1) - \sigma_3 (2\bar{z} - \bar{\lambda}_1 - \bar{\sigma}_1) = 0$$

üzerinde olduğunu yazdığımızda, hesaplar sonucu

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \sigma_3 \quad (37)$$

gerek ve yeter koşula varmış oluruz.

Sonuç: L_1, L_2, L_3 un ABC ye göre Simson doğruları noktadaş ise A, B, C nin $L_1 L_2 L_3$ e göre Simson doğruları da noktadaştır. Bu iki kesişme noktası aynı olup üçgenlerin ortasantlarını birleştiren doğru parçasının orta noktasıdır.

Alıştırmalar

1. Hangi üçgenlerde dokuz nokta çemberi çevrel merkezden geçer.

2. Bir ABC üçgeninde çevrel çemberin B ve C noktalarındaki teğet doğrularının arakesit noktasını bulunuz.

3. Bir ABC üçgeninde çevrel çemberin BC ye paralel bir kirisinin uçlarına ait Simson doğruları AX yüksekliği üzerinde kesişirler.

ÇÖZMECE

Aşağıdaki ABCTİK'i çözünüz.

$$\sqrt{LOBACEVSKI} = OLOLA$$

(Hazırlayan: Med. Dr. Bahri Kaderoğlu)

GAUSS FORMÜLÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ

TOSUN TERZİOĞLU

1' den n'ye kadar tamsayıların toplamını veren

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

formülüne genellikle *Gauss* formülü denir. Çok ünlü bir matematikçi olan Gauss ilkokulda iken bir gün sınıfa kıran öğretmeni tüm öğrencilerin birden yüze kadar sayıları toplamalarını istemiş ceza olarak. Kısa bir süre sonra küçük Gauss'un bir şey yapmadan oturduğunu görünce biraz da öfkeyle ona cevabı sormuş. Gauss'un cevabı doğruymuş. Çünkü o sayıları alt alta sıralayıp toplamak yerine (1,100), (2,99), (3, 98), (4,97)... gibi çiftler olarak düşünmüş. Her çiftteki sayıların toplamı 101 ve 50 tane çift var. Böylece $50 \times 101 = 5050$ olarak hemen bulmuş.

Şimdi Gauss formülünü genelleştirmeye çalışalım. Örneğin 1'den başlayarak bir n sayısına kadar tüm tam sayıların karelerini toplarsak

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

elde ederiz. Bu formülü tümevarımla oldukça kolay ispat edebiliriz. Elde ederiz dedik, ama nasıl? Daha genel olarak, 1'den büyük bir k tamsayısı için

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = T_k(n)$$

toplamını bulmaya çalışalım. Bu toplamda ve bundan böyle, n'yi bağımsız bir değişken gibi düşüneceğiz. İlk $T_k(n)$ ifadesinin neye benzediğini bulmaya çalışalım.

Bu toplamı sondan başlayarak $n^k + (n-1)^k + \dots + (n - (n-1))^k$ şeklinde düşünersek, her biri k. dereceden n tane polinomun toplamı olduğunu görürüz. $n \times n^k = n^{k+1}$; demek ki $T_k(n)$ derecesi k + 1 olan bir polinom. Öyleyse

$$T_k(n) = b_{k+1}n^{k+1} + b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0$$

şeklinde dir. Şimdi işimiz buradaki $b_{k+1}, b_k, \dots, b_1, b_0$ katsayılarını belirlemek. Bilinmeyen sayısı k + 2, ve bu nedenle de k + 2 tane denklem bulup, çıkan sistemi çözmemiz gerekiyor. Örneğin, k = 5 için 7 bilinmeyenli 7 denklem. Bu işe rastgele kalkışırsak sonuç pek parlak olmayacak gibi. Biraz düşünelim...

$$T_k(n+1) - T_k(n) = (n+1)^k \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} & b_{k+1}((n+1)^k - n^k) + b_k((n+1)^k - n^k) \\ & + \dots + b_2((n+1)^2 - n^2) + \\ & b_1 = (n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + \dots + 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. n'yi bağımsız değişken gibi düşünecektik. Dolayısıyla yukarıdaki formülde n'nin 0., 1., 2., ..., k. kuvvetlerinin katsayıları ayrı ayrı eşit olmalı. Tersten başlayalım işe. Sağ tarafta n^k 'nin katsayısı 1, solda ise, $(n+1)^k - n^k$ ifadesinde, n^k 'nin katsayısı (k + 1). Daha sonra gelen ifadelerdeyse n^k yok. Dolayısıyla $(k+1)b_{k+1} = 1$, yani

$$b_{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

bulduk. n^{k-1} 'in sağ taraftaki katsayısı k. Solda ise n^{k-1} sadece birinci ve ikinci terimlerde var. Buradan kolayca

$$\frac{(k+1)k}{2} b_{k+1} + kb_k = k$$

denklemini elde ederiz. b_{k+1} 'in bulduğumuz değerini yerine koyarak, $b_k = k/2$ olduğunu görürüz. Bu yöntem gerçekten sonuca varıracak bizi. b_{k+1} ve b_k katsayılarını bulduk. n^{k-2} 'nin katsayılarını eşitleyerek, örneğin bir sonraki adımda $b_{k-1} = (k-1)/12$ elde ederiz.

Yöntemi k = 3 özel hali için kullanalım bir de. Burada $b_4 = 1/4$, $b_3 = 1/2$, $b_2 = 1/6$ olduğunu genel sonuçtan biliyoruz. Sabit terim, yani $n^0 = 1$ 'in, katsayılarını eşitlersek,

$$b_4 + b_3 + b_2 + b_1 = 1$$

ve buradan da $b_1 = 1/12$ elde ederiz. İyi ama bir de b_0 var. Onu da $T_3(1) = 1$ eşitliğinden bulabiliriz hemen.

$$T_3(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

olacak. Bu da $b_0 = 0$ verir. Dolayısıyla,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{12}n^2 + \frac{1}{12}n$$

$$= \frac{n}{12} (3n^3 + 6n^2 + n + 1)$$

formülünü ispat ettik.

Yeniden genel hale dönelim. Ana denklemimiz

$$b_{k+1} ((n+1)^{k+1} - n_{k+1}) + b_k ((n+1)^k - n^k)$$

$$+ \dots + b_1 = (n+1)^k$$

idi. Şimdi de bilinmeyen katsayıları bulmak için kullandığımız yöntemi biraz irdeleyelim.

İsterseniz $k = 5$ alalım; bir de elimizin altında $k + 1 = 6$ 'ya kadar Pascal üçgeni olsun.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

Sağ tarafta n 'nin en yüksek kuvveti 5 ve katsayısı 1. Solda ise $6b_6$. İlk denklemimiz şu.

$$6b_6 = 1$$

Sağ tarafta, yani $(n+1)^5$ ifadesinin açılımında n^4 'ün katsayısı 5. Pascal üçgeninin sondan bir önceki sırasındaki ikinci sayı. Sol tarafta ise n^4 'ün katsayısı $15b_6 + 5b_5$. Yani

$$15b_6 + 5b_5 = 5$$

Biraz düşünersek ve Pascal üçgenine bakarsak sonraki denklemleri de yazabiliriz. Bunlara daha önceki iki denklemi de ekleyelim.

$$6b_6 = 1$$

$$15b_6 + 5b_5 = 5$$

$$20b_6 + 10b_5 + 4b_4 = 10$$

$$15b_6 + 10b_5 + 6b_4 + 3b_3 = 10$$

$$6b_6 + 5b_5 + 4b_4 + 3b_3 + 2b_2 = 5$$

$$b_6 + b_5 + b_4 + b_3 + b_2 + b_1 = 1$$

Sistemde sağ taraf $(n+1)^5$ 'in açılışının katsayılarından, yani üçgende 5. sıradan elde ediliyor. Sol tarafı da gördünüz sanırım; ama isterseniz bir de yeniden Pascal üçgenine bakıverin. Yukarıdaki denklemleri kolayca çözüp, $T_5(n)$ için formül bulabilirsiniz. Bir de, $T_k(1) = 1$ ve son denklemden, genel halde $b_0 = 0$ olduğunu görebilirsiniz.

İleride, bir başka yazıda, bu problemle biraz daha uğraşacağız.

ASAL SAYILARLA SİHİRLİ KARE

Birbirinden farklı dokuz asal sayı bularak 3X3 sihirli bir kare elde ediniz. (1'in asal sayı olarak edilmediğini hatırlayınız.)

AKILDAN ÇARPMA TEKNİĞİ

BAHRİ KADEROĞLU*

Tiyatro salonunun sahnesine elinde büyük bir sepetle bir adam geliyor. Sepette birden yüze kadar numaralı küçük topların bulunduğunu söyleyerek bunları yakalamaları için seyircilerin üzerine fırlatıyor. Sonra iki numara bildiriyor ve bu topları yakalamış olan iki izleyiciden sırayla herhangi iki sayı söylemelerini istiyor. Bunları sırayla sahnedeki tahtaya alt alta yazıp altlarını çiziyor ve altına da çarpım sonucunu hemen yazıveriyor...

Saygıdeğer bir hocamız yıllar önce yurt dışında bulunduğu sıralar tanık olmuştu bu gösteriye. Öyküyü de aynı adlı kitabımı kendisine götürdüğüm zaman dinlemiştim. Gösterinin izleyenler üzerinde nasıl bir etki bıraktığını anlayabilmek için kendisine bunu nasıl yapmış olabileceğini sordum. Belli bir görüşü yoktu. Anlaşılan bu konuda pek kafa yormamıştı. Dilerseniz şimdi gözlerimizi sayfadan ayırarak bir süre okumaya ara verelim ve düşünelim...

Sabırla beyninde kullanılmadan duran milyonlarca hücrelerinden bir kısmını kullanarak gerçeği yakalayanları kutlarım. Böylesi çocuksu (!) sevinçleri yaşamak herkese nasip olmaz.

Sanırım o zamanlar elektronik hesap makinelerinin kullanımı şimdiki gibi yaygın değildi. Yine de kendisine sahne gerisinden veya çevresinden, izleyenlerin farkedemeyeceği suflörler yardımcı olmuş olabilir. Gösterici için tüm bu olasılıklardan daha kolay bir yol vardır. Rastgele bir seçim yapıyormuş izlenimi vermek için seyircilerin üzerine atmış olduğu topların içinde numaralarını söylediği iki top yoktur. Bunları daha önce ceplerine koyup izleyicilerin arasına oturan iki yardımcısına vermiştir. Bunların söyleyecekleri iki sayı önceden

kararlaştırılmış ve çarpım sonucu da telefon numarası gibi ezberlenmiştir. Geriye bunu akılda tutup sahnede hemen yazmak kalmıştır.

Peki, hiç böyle danışıklı dövüşe başvurmadan herhangi iki sayıyı akıldan çarpabilir miyiz? Evet, fakat gerçeğe giden her yol gibi kolay olmaz. Haklı olarak herkesin cebinde bir hesap makinesi taşıdığı günümüzde, akıldan çarpmanın ne önemi olabilir diyenlerimiz çıkabilir. Sözümüz onlara değil, çünkü insan zekâsının kendi sınırlarını zorlamasındaki güzelliği görebilen çok kişi var yeryüzünde...

Bir yöntemi yazarak anlatmanın, sözlü anlatıma göre çok daha zor olduğu açıktır. Bu yüzden çok basit özel durumlardan hareket ederek karmaşığa doğru bir yol izliyoruz. Bu ön hazırlıktan sonra "Yöntem"'i özümseyen bir okur tekrar geri dönerse; formülleri kendisi çıkarabilir, ezberlemesine gerek kalmaz.

ÖN AÇIKLAMALAR

1. Herhangi bir sayının rakamlarına sağdan sola doğru bulunduğu basamağa göre, 1-'inci, 2-'inci, 3-'cü... v.s. diyoruz.
2. Her işlem sonunda bulunan sayının son rakamı yazılır. Diğer kısmı bir sonraki işleme elde olarak eklenir. Geçen eldeler daire içinde gösterilmiştir.
3. İki dikey çizgi arası bir basamağı gösterir ve o basamak sayısını bulmak için yapılması gereken işlemleri diğerlerinden ayırmak için kullanılmıştır.
4. Çift yönlü ok ($\leftrightarrow$) işareti iki ucundaki

* Alsancak Devlet Hastanesi, İzmir'de doktor

sayıların çarpılacağını, birden fazla kesişen oklar ($\times$), ($\star$) ise; her ok ucundaki iki sayının çarpılıp bunların toplamının alınacağını gösterir.

5. Bazı özel durumlar dışında (bölerek sonuca gitme), çarpım sonucunun rakamları sağdan sola doğru bulunur ve yazılır.
6. Burada nasıl bir yol izlendiğinin anlaşılması için, çarpım sonucu bulunurken uzun uzun işlemler yazılmıştır. Pratik uygulamada bunların hiçbiri yazılmaz (akıldan yürütülür), sağdan sola doğru direk sonuç yazılır.

Şimdi biraz ısınmak için antrenman yapalım ve çoğumuzca bilinen bir özel durumu görelim. Bu formülü deneme yanılma yoluyla kendiniz de çıkarabilirsiniz.

1.1.SONU 5'LE BİTEN İKİ BASAMAKLI BİR SAYININ KARESİNİ BULMAK

$$(b5)^2 = bx(b+1) \mid 25$$

Açıklama: Sonu beşle biten iki basamaklı bir sayının karesini bulmak için yirmibeş yazar, önüne onlar basamağındaki sayı ile ondan sonra gelen sayının çarpımını yazarız.

Örnek : $(35)^2 = 3 \times (3 + 1) \mid 25$
 $= 3 \times 4 \mid 25 = 1225$

1.2.SONU 5'LE BİTEN ÜÇ BASAMAKLI BİR SAYININ KARESİNİ BULMAK

$$(cb5)^2 = c^2 \mid c \times \frac{b5}{5} + (b5)^2 \text{ in } \mid (b5)^2 \text{ in son}$$

dördüncü basamağı üç basamağı

Açıklama: (b5)'in karesi "1.1" formülü gereğince bizce her zaman ezbere biliniyor demektir. Buna göre sonu 5'le biten üç

basamaklı bir sayının karesini bulmak için b5'in karesinin son üç basamağı yazılır, dördüncü basamağı ise $c \times b5/5$ 'in üzerine elde olarak eklenip bulunan sayının son rakamı yazılır, diğer bölümü c^2 'in üzerine elde olarak geçer. b5/5'i daha pratik bulmak için b5'i önce 10'a böleriz sonra 2 ile çarpılır. Ör. $85/5 = (8,5) \times 2$ der iki katını ve 17 buluruz.

Örnek :

$(465)^2$ bulmak için sağdan sola doğru yazmaya başlarız.

a. Aranılan sayının son üç basamağı bizce belli ve 225'tir.

$(652 = 4225$ 'ten dolayı, ④ ise elde olarak geçer).

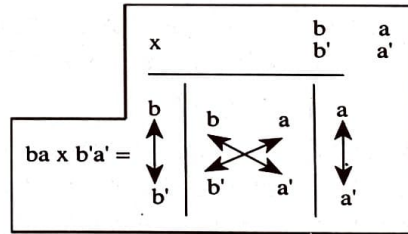
b. Dördüncü basamak sayısı da şöyle bulunur:

$4 \times 65/5 + ④ = 52 + ④ = 56$. Bunun 6 yazılır, ⑤ ise elde olarak c^2 'nin üzerine eklenir.

c. $c^2 + ⑤ = 4^2 + ⑤ = 21$

Böylece $4652 = 216 \overline{225}$ sonucunu buluruz.

1.3.İKİ BASAMAKLI İKİ SAYININ ÇARPIMI



Açıklama: İki basamaklı herhangi iki sayının çarpım sonucunu bulmak için şu yol izlenir.

a. $\begin{matrix} a \\ \updownarrow \\ a' \end{matrix}$ sembolü gereğince her iki sayının "Birinci"leri çarpılır.

$\begin{matrix} b & a \\ \swarrow & \searrow \\ b' & a' \end{matrix}$ sembolü gereğince her iki sayının "Birinci" ve "İkinci"leri çapraz olarak çarpılıp toplanır.

c. $\begin{array}{c} b \\ \updownarrow \\ b' \end{array}$ sembolü gereğince her iki sayının "İkinci"leri çarpılır.

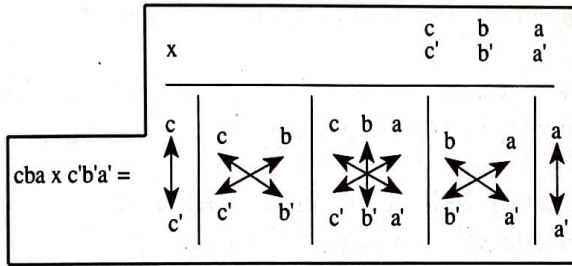
Örnek:
$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 52 \\ \hline \end{array}$$

e. $\begin{array}{c} c \\ \updownarrow \\ c' \end{array}$ sembolü gereğince her iki sayının "Üçüncü"leri çarpılır.

Örnek:
$$\begin{array}{r} 958 \\ \times 413 \\ \hline \end{array}$$

İşlemleri yazmadan, hemen sonucu bulmaya çalışalım. Şöyle bir yol izlenir. İki kere altı eşittir oniki der bunun 2'sini yazar ① elde deriz, sonra iki kere iki dört artı beş kere altı eşittir otuzdört bir önceki ① eldesini de ekleyerek otuzbeş bulunur. Bunun 5'ini yazar ③ elde olarak beş kere ikinin üzerine eklenerek 13 bulunur ve sonuç $\underline{\underline{1352}}$ olur.

1.4. ÜÇ BASAMAKLI İKİ SAYININ ÇARPIMI



Açıklama: Üç basamaklı iki sayının çarpım sonucunu bulmak için şu yol izlenir:

a. $\begin{array}{c} a \\ \updownarrow \\ a' \end{array}$ sembolü gereğince her iki sayının "Birinci"leri çarpılır.

b. $\begin{array}{c} b \quad a \\ \swarrow \quad \searrow \\ b' \quad a' \end{array}$ sembolü gereğince her iki sayının "Birinci" ve "İkinci"leri çapraz olarak çarpılıp toplanır.

c. $\begin{array}{c} c \quad b \quad a \\ \star \\ c' \quad b' \quad a' \end{array}$ sembolü gereğince her iki sayının "Birinci" "Üçüncü"lerin çapraz olarak çarpımları toplamına "İkinci"lerin çarpımları eklenir.

d. $\begin{array}{c} c \quad b \\ \swarrow \quad \searrow \\ c' \quad b' \end{array}$ sembolü gereğince her iki sayının "İkinci" ve "Üçüncü"leri çapraz olarak çarpılıp toplanır.

Sonucu sağdan sola doğru tek tek yazmaya başlıyoruz: Üç kere sekiz (24) dördü yazıyoruz iki elde. Üç kere beş onbeş artı bir kere sekiz artı iki eldesi eder (25) beşi yazıyoruz iki elde. Üç kere dokuz artı beş kere bir artı dört kere sekiz artı iki eldesi eder (66) altıyı yazıyoruz altı elde. Bir kere dokuz artı beş kere dört artı altı eldesi eder (35) beşi yazıyoruz üç elde. Dört kere dokuz artı üç eldesi eder (39) ve

Sonuç; $\underline{\underline{39}} \quad \underline{\underline{5}} \quad \underline{\underline{6}} \quad \underline{\underline{5}} \quad \underline{\underline{4}}$ olur.

Bir yabancınnın dahi anlayabilmesi için yöntemi daha çok şematik olarak açıklamaya çalıştık. Ancak yer darlığından dolayı örnek ve alıştırmalara yeterince yer veremedik. İlgiilenen okurlar daha geniş bilgi için Kaynak-1'e başvurabilirler.

Yöntemin geçerliliği ve ispatı konusunda bazı kuşku-ları olanlar için belirtelim. İspatı ilkokulda öğrendiğimiz klasik çarpma sisteminin aynıdır, çünkü ondan bir farkı yoktur. Yaptığımız toplam işlem sayısı (çarpma ve toplama olarak) aynıdır. Tek farkı klasik sistemde ayrı ayrı yaptığımız çarpma ve toplama işlemlerini burada kombine ederek aynı anda yapmış oluyoruz. O zaman kazancımız nedir? Kazancımız beyin jimnastiğiyle matematiğin eğlenceli tarafını ve gülen yüzünü biraz olsun gösterebilmek... Eğitim sistemimizde bunu sağlayabildiğimiz ölçüde matematik dersi korkulu bir rüya olmaktan çıkacaktır.

KAYNAKLAR

1. Kaderoğlu, Bahri, "Akıldan Çarpma Tekniği" kendi yayını (P.K. 2 Şirinyer) İzmir - 1984.
2. Tepedelenlioğlu Nazif, "Yıldırım Gibi Çarpmak", Bilim ve Sanat Dergisi sayı: 10, sayfa: 30, Ekim 1981.

GEÇİŞKEN OLMAYAN ZARLAR HAKKINDA TEOREM

FARAMAZ MAKSUDOV, ELDER HACILAROV

Geçişken olmayan oyunlar hakkında birçok ilginç problem ve paradokslar vardır. Bu yazıda biz böyle oyunların bir sınıfını inceleyerek size benzer oyunları oluşturmayı öğreteceğiz.

Oyunu anlatmadan önce bazı basit olayların olasılığını hesaplamayı öğrenelim. Örneğin adi bir oyun zarımız olsun. Bu zarı attığımızda 1 veya 6 sayısından hangisi daha sık gelebilir? Aşıkardır ki, zarımız mutlak olarak simetrikse bu sayılardan birine diğerine göre üstünlük vermemize gerek yoktur. Buna göre de her sayının gelme olasılığını aynı olarak kabul etmek doğru olur.

Böylece zar atıldığında altı farklı, eşit olasılıklı hal vardır. Buna göre herhangi bir sayının gelme olasılığı $1/6$ 'ye eşittir. Başka bir deyişle 1 sayısı 6 farklı halden ancak birinde gelebilir.

Eğer biraz daha karmaşık bir olayın olasılığını, örneğin $\{1,2\}$ kümesinden bir sayının gelmesi olasılığını hesaplamak istersek, önce bu olayın hangi hallerde olabileceğini (bu durumda iki halde) buluruz ve sonra da bu sayıyı tüm hallerin sayısına böleriz. Kısaca 1 ya da 2 sayılarından birinin gelme olasılığı $2/6 = 1/3$ 'tür Okuyucu $\{1,2,5,6\}$ sayılarından birinin gelme olasılığını kendisi hesaplayabilir.

Ele aldığımız soruyu biraz daha zorlaştıralım ve tam simetrik A ve B diyeceğimiz oyun zarlarını aynı anda attığımızda neler olabileceğini düşünelim. Her iki zar da altı farklı şekilde gelebileceğinden, A ve B aynı anda atıldığında tüm farklı hallerin sayısı $6^2 = 36$ olur. Zarlarımız simetrik olduklarından her halin olasılığı eşittir. Öte yandan belli bir α olayının olasılığını hesaplamak için, bu 36 halden kaçında α olayının ortaya çıktığını bulup bu sayıyı 36'ya böleriz. Bulduğumuz ise α olayının olasılığıdır.

Örnek 1: A ve B zarlarının birlikte atılması sonucu toplamının 5'e eşit olması olasılığı kaçtır?

Çözüm: Toplamın 5'e eşit olmasının hangi durumlarda olabileceğini görelim. Şekil 1'deki tabloya bakarsak istenilen olayın dört halde olabileceğini buluruz. Böylece toplamın 5 olması olasılığı $4/36 = 1/9$ dur.

Soru 1: A ve B zarları birlikte atılınca toplamın hangi sayı olmasının olasılığı en yüksektir?

Örnek 2: A zarında gelen sayının B'de gelenden büyük olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: İlkin bu olayın hangi hallerde olabileceğini görelim.

1. Eğer A zarında 6 sayısı gelirse ve B de $\{1,2,3,4,5\}$ sayılarından birisi gelirse bu 5 halde istediğimiz olay meydana gelmiş olur.
2. Eğer A da 5 ve B de $\{1,2,3,4\}$ sayılarından biri gelirse bu 4 halde istenilen olay meydana gelmiş olur.

Bu düşünce biçimini sürdürerek A da 4 gelmesi durumunda 3 halde, A da 3 gelmesi durumunda 2 halde ve A da 2 gelmesi durumunda da 1 halde beklenen olay olur, A zarı 1 gelirse istenilen asla olmaz. Böylece istediğimiz olay $5+4+3+2+1=15$ halde meydana gelebilir. Olasılığı ise $15/36 = 2/15$ dir.

Bu uzun ve can sıkıcı hesapları tam olarak verdik ki siz de benzer hesapları kendiniz yapabilesiniz.

Soru 2 : A zarında sayının B de gelenden büyük veya eşit olma olasılığını hesaplayınız.

2. Oyunun Tanıtımı.

Bu bölümde yüzlerinde "1,2,3,4,5,6" yazılı adi oyun zarlarından farklı olarak, üzerinde değişik sayılar yazılmış oyun zarlarını ele alacağız. Böyle zarlara standart olmayan zarlar diyelim.

Artık oyunumuzu tanıtabiliriz. A, B ve C diye üç tane standart olmayan zarımız olsun. A zarının yüzlerinde {1,3,4,14,17,18}, B'nin yüzlerinde {2,9,10,11,12,13} ve C'ninkilerdeyse {5,6,7,8,15,16} sayıları var. İki oyuncu aşağıdaki oyunu oynarlar.

1. oyuncu istediği zarı seçer. 2. oyuncu da kalan iki zardan birini seçer. Her oyuncu istediği zarı atar. Yüksek sayıyı atan oyuncu oyunu kazanır.

Sizce hangi oyuncunun kazanma olasılığı daha yüksektir? İlk bakışta üstünlüğün 1. oyuncuda olduğu sanılabilir. Çünkü 1. oyuncu ilk seçimi yaptığı için en iyi zarı seçebilir. Böylece kazanma olasılığı en az 1/2 olmasını garanti eder. Ancak bu düşünüş şekli doğru değildir. Gelin oyunumuzu ayrıtılı olarak ele alalım.

Hangi zarın, A veya B'nin elverişli olduğunu anlamaya çalışalım. Bu iki zarı birlikte atarsak 36 eşit olası hal olduğunu biliyoruz. Şimdi bu 36 halden kaçında A zarının kanzandığını hesaplayalım; eğer A zarında 14,17 veya 18 gelirse B'de ne gelirse gelsin A kazanır. Bu size 3.6=18 hal verir. Eğer A zarında 3 veya 4 gelirse, A ancak 13'te 2 gelirse kazanır. Bu da bize 2 kazanma biçimi daha verir. A'da 1 gelirse, A mutlaka kaybeder. Böylece A'nın B'ye karşı kazanma olasılığı $20/36=5/9$ 'dır ve $5/9 > 1/2$ olduğundan A zarı B'den üstündür.

Soru 3: Aynı şekilde A ile C'yi, sonra da B ile C'yi karşılaştıralım.

Eğer bu soruyu doğru yanıtlamışsanız, çelişkili bir durumla karşılaşacaksınız. A zarı B zarından 20 halde, B zarı C zarından 20 halde, ve C'de A zarından gene 20 halde üstündür. Başka bir deyişle, A zarı B'den, B zarı C'den C zarı da A'dan elverişlidir. Herhangi iki zarı düşünersek biri diğerinden üstündür ve üstün olanın kazanma olasılığı $20/36 = 5/9$ dur; ancak en elverişli zar yoktur.

Şimdi oyuna dönelim: 1. oyuncunun seçtiği zardan bağımsız olarak, 2. oyuncu daima daha elverişli zar seçebilir ve kendine 5/9 olasılığıyla kazanma şansı sağlayabilir (Şekil 2). Yani, eğer 1. oyuncu A'yı seçerse 2. oyuncu C'yi, 1. oyuncu B'yi seçerse 2. oyuncu A'yı seçer.

Artık geçişkenliğin anlamını verebiliriz. Bilindiği gibi, a, b, c üç gerçel sayıysa, $a > b$ ve $b > c$ eşitsizlikleri $a > c$ eşitsizliğini gerektirir. Bu özelliğe *geçişkenlik ilişkisi* deriz. Yukarıda anlattığımız oyunda gördük ki, A zarı B'den ve B zarı C'den elverişlidir; ancak A zarı C'den elverişli değildir. Aksine C zarı A'dan elverişlidir.

Tanıtığımız oyunda elverişlilik geçişken değil. Bu tür oyunlara geçişken olmayan oyunlar denir. Her standart olmayan zarlar geçişken olmayan bir oyun vermez. Örneğin, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ve $C = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ olsa, C zarı en elverişlidir. Gerçekte, geçişken olmayan oyunları oluşturmak pek kolay değildir. Bundan sonraki bölümü okursanız bunu siz de göreceksiniz.

3. Esas Teorem

Durumu genelleştirelim. Bu bölümde 6 yüzlü değil de, daha genel olarak n yüzlü ($n \geq 3$) zarları ele alacağız. Böyle zarlara n-zar diyelim.

Teorem: Yüzlerinde 1'den 3n'ye kadar sayıların tekrarlanmayarak yer aldığı A, B ve C gibi n-zarlarımız olsun. A'nın yüzlerinde $\{a_1, \dots, a_n\}$, B'nin yüzlerinde $\{b_1, \dots, b_n\}$ sayıları yazılmış olsun.

A'nın B'ye, B'nin C'ye ve C'nin A'ya eş olasılıklarla üstün olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

olmasıdır.

İspattan önce teoremi biraz irdeleyelim. 2. bölümdeki oyunda zarlar A, B ve C üzerindeki sayıların toplamı her zar için $\frac{6(19)}{2} = 57$ 'ye eşittir. Bu teoremden yararlanarak, farklı zarlarla

aynı oyunu kurabiliriz. Bunun için 1'den 18'e kadar tamsayıları öyle üç kümeye ayıralım ki, her kümedeki sayıların toplamı 57'ye eşit olsun. Oyunumuzda A'nın B'ye, B'nin C'ye ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıkları eşittir. Bu olasılığa P dersek, teoremimiz $p = 1/2$ halini de kapsar. Tabii bu durumda A, B ve C zarları eşit derecede elverişlidir.

Soru 4: Eğer $p < \frac{1}{2}$ ise, aldığımız zarlarda geçişkenlik özelliği olmayabilir mi? Ne için?

İlk olarak, teoremin ispatında kullanacağımız bir yardımcı sonucu ele alalım.

Yardımcı Sonuç: $1 \geq a_1 < a_2 < \dots < a_n \geq 3n$ tam sayılarında kurulan $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ kümesi için

$$S(A) = \sum_{\alpha \in [1, 3n] \setminus A} \text{sgn}(Q_i - \alpha) = 2 \sum_{i=1}^n a_i - n(3n+1)$$

olur. Burada $[1, 3]$ ile $\{1, 2, 3, 4, \dots, 3n\}$ kümesini ve sgn ile de

$$\text{sgn}x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu gösteriyoruz. A kümesinde bir a_i ögesi seçelim ve

$$S_i = \sum_{\alpha \in [1, 3n] \setminus A} \text{sgn}(a_i - \alpha)$$

toplamını hesaplayalım. S_i sayısı $[1, 3n] \setminus A$ kümesinde a_i 'den küçük olan öğelerin sayısından a_i 'den büyük olan $[1, 3n] \setminus A$ kümesi öğelerinin sayısını çıkarmakla elde edilir. a_i 'den küçük tamsayılar $(a_i - 1)$ tanedir. Ancak bunlardan $(i-1)$ tanesi, $a_1 \dots a_{i-1}$ sayıları A kümesindedir. Böylelikle $[1, 3n] \setminus A$ kümesinde a_i 'den küçük $(a_i - 1) - (i - 1) = a_i - i$ tane sayı vardır. Aynı şekilde $[1, 3n] \setminus A$ kümesinde a_i 'den büyük $(3n - a_i) - (n - i) = 2n - a_i + i$ tane sayı vardır. Demek ki

$$S_i = (a_i - i) - (2n - a_i + i) = 2(a_i - i - n)$$

olur. Burada $S(A)$ sayısını şöyle hesaplarız:

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_{i=1}^n S_i = 2 \sum_{i=1}^n (a_i - i - n) \\ S(A) &= \sum_{i=1}^n S_i = 2 \sum_{i=1}^n (a_i - i - n) = 2 \sum_{i=1}^n a_i - 2 \sum_{i=1}^n i - 2n \\ &= 2 \sum_{i=1}^n a_i - n(3n+1) \end{aligned}$$

Teoremin ispatını geçelim. Önce A'nın B'ye, B'nin C'ye ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıklarının eşit olduğunu varsayalım. A zarı C'ye karşı kaç halde kaybederse, B'ye karşı da o kadar halde kazanır. Aynı şekilde A zarı C'ye karşı kaç halde kazanırsa, B'ye karşı da o kadar halde kaybeder. $B \cup C = [1, 3n] \setminus A$ olduğu için, buradan $S(A) = 0$ elde edilir. Böylece yardımcı sonuçtan

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

eşitliği bulunur. Durumun simetrik olması, bize

$$\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

eşitliklerini verir.

Tersine,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

olduğunu varsayalım. Yardımcı sonuçtan $S(A) = S(B) = S(C) = 0$ elde ederiz. A zarı B'ye karşı n^2 -halden m -inde kazansın, $(n^2 - m)$ halde ise kaybetsin. $S(A) = 0$ olduğundan, A zarının C'ye karşı m -halde kaybettiğini ve $(n^2 - m)$ halde de kazandığını buluruz. Başka bir deyişle A'nın B'ye karşı ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıkları $p = m/n^2$ 'dir. Öte yandan, C ile A'yı ve C ile B'yi karşılaştırsak, sonuçta A zarının B'ye, B zarının C'ye ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıklarının $p = m/n^2$ olduğunu görürüz. Böylece teoremin ispatı bitmiş olur.

Bu ispatı okuyup anlayan okuyucuya aşağıdaki ilginç problemi sunarız.

Soru 5: İkinci bölümde $p = 5/9$ olan bir 6-zar oyununu öğrendik. $p > 5/9$ halinde geçişken olmayan 6-zar ırdeleyin.

Son üç cümle azari dilinde aşağıdaki gibidir.

Teoremin isbatını ohuyub başa düşen ohucuya aşağıdaki maraglı mäsäläni tãgdım edirik.

Mäsälä 5. 2-ci bänddä biz $p = \frac{5}{9}$ olmagla geyri-tranzitiv 6-zär yigimini öyrändik. $p > \frac{5}{9}$ olmagla geyri-tranzitiv 6-zär yigimiki fikirläşin.

SEÇİM VE MATEMATİK-1

KİSMİ SIRALAMA BAĞINTILARI

HALİL İBRAHİM KARAKAŞ

Bir toplumun her bireyinin, Çeşitli konularda belli tercihleri vardır. Birey, önceden var olan veya kendisine sunulmuş olan seçenekler arasından kendisi için veya başkası için seçim yapar; yapılan bu seçime göre, bireyin veya başkalarının yaşantıları etkilenir. Çoğu zaman bir toplumun, bütün olarak, bir konuda alacağı karar ve göstereceği etkinlikler, toplumun bireylerinin o konuda yapacakları seçim ya da tercihlerle belirlenir. Başka bir deyimle, toplumun bir konudaki seçimi, bireylerin o konudaki seçimleriyle ortaya çıkar.

Toplumun ve bireylerin yarınları vey a gelecekleri, bu gün yaptıkları seçimlerle veya tercihlerle biçimlenir. Bu nedenle, seçim kavramı ve seçme eylemi üzerinde özenle düşünmekte, bunları irdelemekte, bir seçimin arzu edilen özelliklerinin neler olması gerektiğini araştırmakta yarar vardır.

Önce, seçme eylemi nedir, nasıl oluşur onu belirleyelim. Bir seçme eyleminden veya seçim olayından söz edebilmemiz için, her şeyden önce, bir seçenekler kümesi bulunmalıdır. Örneğin, konuk olduğunuz bir yerde size: "Ne içersiniz? Çay, kahve ve Kola var." diye sorulursa, seçenekler kümesi

{çay, kahve, kola}

dır. Seçiminizi bu kümeden yaparsınız. Bu basit örnekte de görüldüğü üzere, seçim olayı, seçenekler kümesinin elemanları birbirleriyle karşılaştırılıp tercihlerde bulunarak gerçekleştirilir.

Yukarıdaki örnekte, ne içeceğinizi bildirirken, seçenekler kümesindeki içecekleri birbiri ile karşılaştırıp biri için tercihte bulunursunuz (veya bu eylemi daha önceleri yapmışsınızdır) örnek olarak, (çay, kahve) ikilisinden biri veya hiçbiri lehine tercihte bulunursunuz. Bunu (çay, kola)

ve (kola, kahve) ikilileri için tekrarlırsınız. Yapacağınız seçimin, en azından kendi içinde tutarlı olması için, seçenekler kümesinin elemanlarını ikişer ikişer ele alıp tercihlerde bulunurken bazı kurallara uymanız gerekir. Örneğin, (çay, kahve) ikilisinden kahveyi tercih ediyorsanız (kahve, çay) ikilisinden de kahveyi tercih etmeniz gerekir (Ters-Simetri Özelliği). Eğer, (çay, kahve) den kahveyi (kahve, kola) dan kolayı tercih ediyorsanız, (çay, kola) dan hangisini tercih etmeniz gerekir? Kuşkusuz kolayı! (Geçişme Özelliği).

Konuyu matematiksel bir zemine çekmek için seçenekler kümesinden oluşturacağımız bir ikilinin her iki bileşeninin de aynı olması durumunda, o ikiliyi oluşturan elemanın tercih edileceğini varsayalım. (Yansıma Özelliği). Örneğin, (çay, çay) ikilisinden, çay tercih edilecektir.

Bu noktada bir yanlış anlama olasılığını ortadan kaldırmak için, bileşenleri farklı olan herhangi bir ikilinin hiç birinin de tercih edilmeyebileceğini belirtmeyiz. Somut bir örnekle, (çay, kola) ikilisinden hiç birini sevmeyebilirsiniz.

Şimdi, yukarıda söylediklerimizi matematiksel dile aktarmağa çalışalım. Bir seçim olayında, seçenekler kümesi S ise, yapılan seçim, S nin elemanlarından oluşan bazı ikililer, yani S nin kendisi ile Kartezyen çarpımı, $S \times S$ nin bir altkümese karşılık gelmektedir. Bu altküme,

$$K = \{(a,b) \in S \times S : a \text{ b ye tercih ediliyor}\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

İçecek örneğimize geri dönelim: çay yerine $\ç$, kahve yerine k ve kola yerine ℓ yazarak

$$K_1 = \{(\ç, \ç), (k, k), (\ell, \ell), (\ç, k), (\ç, \ell)\}$$

kümesini ele alalım. Bu küme, $S = \{\text{ç, k, l}\}$ olmak üzere $S \times S$ nin bir altkümesidir ve çay, kahve ve koladan çay tercih edildiğini göstermektedir.

Seçim olayında seçenekler kümesinden ikililer oluşturulurken, matematiksel deyimle, $S \times S$ nin K altkümesi oluşturulurken bazı kurallara uyulması gerektiğini belirtmiştik. Bu kurallar,

1. Her $a \in S$ için $(a, a) \in K$ (Yansıma Kuralı)
2. $a, b \in S$; $(a, b) \in K$ ve $(b, a) \in K \Rightarrow a = b$
(Ters-Simetri Kuralı)
3. $a, b, c \in S$; $(a, b) \in K$, $(b, c) \in K \Rightarrow (a, c) \in K$
(Geçişme Kuralı)

biçiminde ifade edilebilir. Böylece, bir seçenek kümesi üzerinde bir seçim yapmak, aşağıda verilen tanımlar çerçevesinde, bu seçenekler kümesi içinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* oluşturmak demektir.

Tanımlar. Bir S kümesi verilmiş olsun.

- 1) $S \times S$ nin her bir K altkümesine S içinde bir *bağıntı* denir.
- 2) K , S içinde bir bağıntı ve
 - i) her $s \in S$ için $(s, s) \in K$ (Yansıma Özelliği)
 - ii) $s, t \in S$; $(s, t) \in K$, $(t, s) \in K \Rightarrow s = t$
(Ters-simetri Özelliği)
 - iii) $s, t, u \in S$; $(s, t) \in K$, $(t, u) \in K \Rightarrow (s, u) \in K$
(Geçişme Özelliği)

ise, K ye S içinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* (kısaltılmış olarak *kısıba*) denir.

- 3) İçinde bir *kısıba* tanımlanmış bir kümeye *kısmi sıralanmış küme* (kısaltılmış olarak, *ksk*) denir.

Seçim sözcüğü çoğunlukla *matematik* sözcüğünden başka sözcükleri akla getirir: *demokrasi* gibi. Ancak, yukarıda sunulanlardan görüldüğü üzere, her hangi bir konuda bir seçim yapmak, belli bir küme içinde bir *kısıba* oluşturmak demektir. Bu, seçim sözcüğüne matematiksel bir anlam vermektedir. Sonuç olarak, "bir seçimin *arzu edilen* özellikleri neler olmalıdır?" sorusunu araştırırken, o seçimin seçenekler kümesi içindeki *kısıbaları*

incelememiz gerektiğini görüyoruz.

Bu yazımızın kalan kısmında, *ksk* lerle ilgili gösterimleri belirleyecek ve bazı özel *ksk* lerden söz edeceğiz, *ksk* veya *kısıbaların* özelliklerini Matematik Dünyası'nın başka sayılarında ele alacağız.

Kuramsal olarak sonsuz *ksk* lerden söz edilebilir, ancak biz seçimle ilgili tartışmalarımızda sadece sonlu *ksk* leri ele alacağız; başka bir deyimle, ele aldığımız seçim olayında seçenekler kümesi sonlu olacaktır.

S bir *ksk* olsun. S içindeki *kısıba* yı $\geq$ ile gösterelim ve $a, b \in S$, $(a, b) \in \geq$ olması durumunda $a \geq b$ yazalım. $a \geq b$ yi "a, b ye tercih edilebilmektedir" diye okuyabiliriz. Eğer $a \geq b$, fakat $a \neq b$ ise $a > b$ yazacağız. $c, d \in S$ için $c \geq d$ ve $c \not\geq d$ yazılımları, sırasıyla,

$c \geq d$ ve $c > d$ olmadığını gösterirler.

Bir *ksk*, S , nin her hangi iki elemanı a ve b için

$$a > b, a = b, b > a$$

dan bir ve yalnız biri geçerli ise, bu takdirde S ye *tümünden sıralanmış küme* (kısaltılmış olarak, *tsk*) ve $\geq$ e de S içinde bir *tümünden sıralama bağıntısı* (kısaltılmış olarak *tüsüba*) denir. Beraberlik durumunda kazananın bazı puanlama yöntemleri veya kura ile belirlediği turnuvalar *tsk* ye örnek oluştururlar.

Beraberliğe izin verilen bir turnuva, *tsk* olmasa da ilginç bir *ksk* örneği oluşturur. Bu tür bir turnuvada iki oyuncu ya berabere kalmıştır ya da biri diğerine üstünlük sağlamıştır. Kısmi sıralanmış küme gösterimiyle, a ve b nin berabere kalmaları,

" $a \not\geq b$ ve $b \not\geq a$ " yazılarak ifade edilebilir.

S bir *ksk*; $a, b \in S$, $a \not\geq b$ ve $b \not\geq a$ ise, bu takdirde a ve b *ayrimsızdır* denir ve $a \sim b$ yazılır. Ayrimsızlık, S içinde yeni bir bağıntı verir. Bu bağıntı için, daima

her $a \in S$ için $a \sim a$ (Yansıma özelliği),

$a, b \in S$, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (Simetri özelliği)

özellikleri geçerlidir. Eğer ek olarak,

$a, b, c \in S, a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
(Geçişme özelliği)

ise, bu takdirde S ye zayıf sıralanmış küme (kısıtlanmış olarak, zsk) ve $\geq$ e de S içinde bir zayıf sıralama bağıntısı (kısıtlanmış olarak zasıba) denir.

Her tsk bir zsk dır. zsk için bir başka örnek, satın alınacak bir eşyanın sadece fiyatına göre seçilmesidir.

Kısmi sıralanmış kümeler üzerine bazı ek koşullar öne sürerek değişik ksk örnekleri elde edilebilir. Bunlar değişik seçim yöntemlerine karşılık gelirler.

S bir ksk ve $a, b \in S$ olmak üzere, eğer $c > a$ olacak biçimde hiç $c \in S$ yoksa, a ya S nin bir *maksimal* (büyükçe) elemanı denir. Benzer biçimde, S nin $b > s$ olan hiç s elemanı yoksa, b ye S inn bir *minimal* (küçükçe) elemanı denir. Çoğu seçimlerde önemli olan, seçenekler kümesi S nin büyükçe veya küçükçe elemanlarını belirlemektir. Bunun yanında, her seçim olayında, ya da her ksk de, seçenekleri düzeylerine göre ayırmak mümkündür.

S içinde $a_0 > a_1 > \dots > a_k$ biçiminde bir diziye *uzunluğu* k olan bir dizi denir. Eğer $a \in S$ için

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{k-1} > a_k > a$$

biçiminde bir dizi varsa ve bu tür her dizinin uzunluğu k dan küçük veya k ya eşit ise, bu takdirde a elemanı *k-inci düzeyde* bir elemandır denir.

$a \in S$, k ıncı düzeyde bir eleman ve

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{k-1} = a$$

$a \in S$, k -ıncı düzeyde bir eleman ve

$$a_0 > a_1 > \dots > a_k = a$$

ise, a_0 , S nin bir büyükçe elemanıdır ve her

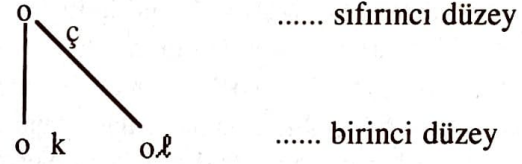
$i = 0, \dots, k-1$ için $a_i > s > a_{i+1}$ olacak biçimde hiç $s \in S$ yoktur.

S nin toplam olarak r elemanı varsa, S nin en çok r -ıncı düzeyde elemanları vardır. Her

$k = 0, 1, \dots, r-1$ için S nin k -ıncı düzeyde

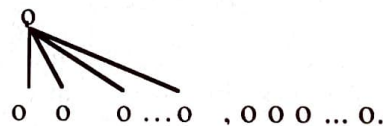
elemanlarını belirlediğimizi ve bu elemanları, sıfırıncı düzeyde olanlardan başlamak üzere, her düzeydeki elemanlar yatay bir sıra oluşturacak biçimde yukarıdan aşağıya doğru sıraladığımızı düşünelim. Ayrıca, $a > b$ ise a ile b yi bir doğru parçası ile birleştirelim. Bu yolla elde edilen çizelgeye S nin *Hasse Çizelgesi* denir. Bir ksk nin Hasse Çizelgesi, onun tüm özelliklerini yansıtır.

Başlangıçta sunulan içecekler örneğinde, sıfırıncı düzeyde elemanlar kümesi $\{\phi\}$, birinci düzeyde elemanlar kümesi $\{k, \ell\}$ olup, daha yüksek düzeyde eleman yoktur. Böylece, içecekler örneğine karşılık gelen Hasse çizelgesi aşağıdaki gibidir:



Bir ksk nin bazı elemanları atılarak elde edilen bir altkümesi yine doğal olarak bir ksk dir. Bu düşünce ile, bir ksk S nin elemanlarının düzeyleri belirlenirken şu yol izlenebilir: Önce S nin büyükçe elemanları belirlenir; bunlar S nin sıfırıncı düzeyde elemanlarıdır. Sonra, S den büyükçe elemanların atılmasıyla elde edilen kümenin büyükçe elemanları belirlenir; bunlar S nin birinci düzeyde elemanlarıdır. S den tüm 0 -ıncı, 1 -inci, ..., $(k-1)$ -inci düzeyde elemanların atılmasıyla elde edilen alt kümenin büyükçe elemanları S nin k -ıncı düzeyde elemanlarıdır.

Somut bir örnekle yazalım bitiriyoruz. Bir beldede belediye başkanlığı için yapılan seçimde r aday bulunduğunu kabul edelim. Bu takdirde, her seçmen oyunu kullanırken (veya kullanmazken), bu r elemanlı seçenekler kümesi içinde bir kısıba tanımlayacak ve böylece bu kümeyi bir ksk ye dönüştürecek. Yaygın olarak uygulanan seçim yöntemlerinde, seçmenin, adaylardan sadece birini diğerlerine tercih etmesi istenir. Dolayısıyla, bir seçmenin belirleyeceği ksk nin Hasse Çizelgesi aşağıdakilerden biri olacaktır:



OLİMPİYAT HABERLERİ

ALBERT ERKİP

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı bu yıl 13-21 Temmuz arasında Moskova'da yapılacak. Takımımız Selçuk Ateşkan (Bornova Anadolu Lisesi), Oytun Eskiyeentürk (İzmir Fen Lisesi), Barış Fidan (Eskişehir Anadolu Lisesi), Sinan Güntürk (Kadıköy Anadolu Lisesi), Onur Menteş (Bornova Anadolu Lisesi) ve Cem Mutlugün'den (İstanbul Lisesi) oluşuyor. Nisan ayındaki son seçme sınavının ardından belirlenen takım gidene kadar toplam 5 haftalık iki çalışma daha yapacak. Takımımız elemanlarına Moskova'da iyi şanslar dilerken, seçme sınavı sorularına da yer verelim.

1992 Uluslararası Matematik Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı

1. Oturum (3 Saat)

- I-1. Her terimi $2, \leq p \leq 11$ koşulunu sağlayan p asal sayılarından en az biri ile bölünen 14 ardışık pozitif tamsayı bulunup bulunmadığını saptayınız.
- I-2. ABC üçgeninin B köşesinden geçerek AC kenarına E noktasında dik olan doğru, bu üçgenin O merkezli çevrel çemberini D noktasında kesiyor. D den BC kenarına inilen dikmenin ayağı F noktası olduğuna göre BO doğrusunun EF doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

- I-3. $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ pozitif reel sayıları

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

koşulunu sağlıyorsa

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. Oturum (3 Saat)

- II-4. ABCD konveks kırımlar dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası olan x

noktasından, AB, BC, CD, DA kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sıra ile P, Q, R, S noktaları olduğuna göre,

$$PQ + RS = QR + SP$$

eşitliğini ispatlayınız.

- II-5. 1 den n 'ye kadar numaralanmış n kutudan 1 numaralı olanın kapağı açık; diğerlerinin kapakları kapalı bulunmaktadır. Birbirinin eşi m toptan ($m \geq n$) bir tanesi bu açık kutuya koyulunca 2 numaralı kutunun kapağı açılıyor. Şimdi açık bulunan iki kutudan rastgele birine top koyulunca üçüncü kutu açılıyor. Bu şekilde devam edilerek son kutu da açıldıktan sonra geriye kalan top(lar) kutulara rastgele dağıtılıyor. Bu şartlar altında topların kutulara dağıtımını kaç farklı şekilde yapılabilir?

- II-6. Yarıçapı 4 birim olan bir dairenin içinde 251 tane farklı nokta veriliyor. Bu noktalardan en az 11 tanesini içeren, yarıçapı bir birim olan bir daire çizilebileceğini gösteriniz.

Geçen Sayıdaki Sorulara Yanıtlar:

- 1- Toplantıda n kişi olsun ve bunların el sıkıştığı kişilerin sayısını sırasıyla $e_1, e_2, \dots, e_n$ gösterelim. Bir kişi en çok $(n-1)$ kişi ile el sıkışabildiğinden $0 \leq e_i \leq (n-1)$ olacaktır. Bir j değeri için $e_j = (n-1)$ olsun. Bu j -inci kişi herkesle el sıkıştı demektir ki, o halde geri kalanların hepsi en az bir kez el sıkışmışlardır, yani her i için $1 \leq e_i$ olacaktır. Benzer yolla bir j için $e_j = 0$ ise tüm i 'ler için $e_i \leq (n+2)$ olacaktır. Bu dediklerimizden $\{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ ya da $\{1, 2, \dots, n-1\}$ kümelerinden birinin tüm $e_1, e_2, \dots, e_n$ sayılarını içerdiği çıkar. $n-1$ çorap ($e_1, e_2, \dots, e_n$ sayıları), $(n-1)$ çekmecededir; o halde en az iki e_i sayısı birbirine eşit olmalıdır.

- 2- Verilen 7 farklı reel sayı $x_1, x_2, \dots, x_7$ olsun; ve $\tan t_i = x_i$ olacak şekilde $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında $t_1, t_2, \dots, t_7$ sayılarına bakalım. t_i 'ler farklı olacaktır. Öte yandan π birim uzunluktaki bir aralıkta yer alan 7 sayıdan en az ikisi birbirlerine $\pi/6$ birimden daha yakın olmalıdır. Bu sayıları t_i ve t_j diye gösterelim, $t_i > t_j$ olsun. Bu halde

$$0 < t_j - t_i < \pi/6 \Rightarrow 0 < \tan(t_j - t_i) < \tan(\pi/6)$$

$$\tan(t_j - t_i) = \frac{\tan t_j - \tan t_i}{1 + \tan t_j \cdot \tan t_i} = \frac{x_j - x_i}{1 + x_j x_i} \text{ ve}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olduğundan istediğimiz özelliği olan x_j ve x_i sayılarını bulmuş olduk.

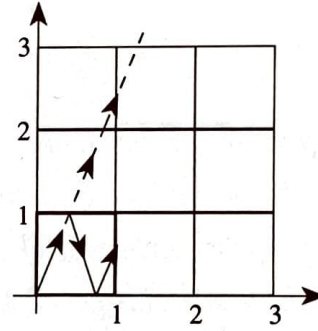
- 3- Önce bir gözlem yapalım: $[0, 4]$ aralığı içinde boyu bir birim olan bir kapalı aralık 1, 2 ve 3 noktalarından en az bir tanesini içermek zorundadır. Şimdi problemi çözelim. Elimizde 10 aralık var ve herbirini 1, 2 ve 3 sayılarından en az birini içeriyor. O halde 1, 2 veya 3 sayılarından biri en az 4 aralıkta olmalıdır.
- 4- Satranç ustası birinci günde a_1 , ikinci günde $a_2, \dots$, yetmişyedinci günde (11 haftanın son günü) a_{77} maç yapsın. $s_1 = a_1$, $s_2 = a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ olsun. Verilenlerden, usta her gün en az bir maç yapmıştır, yani her a_i pozitifdir. Buradan da $1 \leq a_1 < s_2 < \dots < s_{76} < s_{77}$ olduğu görülür. Öte yandan haftada en çok 12 maç yaptığından, 11 haftada en çok $11 \times 12 = 132$ maç yapmıştır. Yani $s_1, s_2, \dots, s_{77}$ birbirinden farklı tam sayılar 1 ile 132 arasındadır. $2 \times 77 = 154 > 132 + 20$ olduğundan, örnek 2'deki yolla $s_j - s_i = 20$ olacak şekilde s_j ve s_i sayılarının olması gerektiği görülür. Bu ise $(i+1)$ -inci günden j -inci güne kadar ustanın tam olarak 20 maç yaptığını söyler.
- 5- 52 farklı tam sayı $a_1, a_2, \dots, a_{52}$ ve bunların 100 ile bölününce kalanları $r_1, r_2, \dots, r_{52}$ ($0 \leq r_i < 99$) olsun. Eğer iki farklı kalan sıfırsa, yani $r_i = r_j = 0$ ise bu $a_i \pm a_j$ 100'le bölünür demektir. Aynı şekilde iki farklı kalan 50'ye eşitse yani $r_i = r_j = 50$ ise

$a_i \pm a_j$ 100'le bölünür. O halde en çok bir r 'nin sıfır, bir r kalanının ise 50 olduğunu kabul edelim; diğer 50 kalan $\{1, 2, \dots, 49, 51, \dots, 99\}$ kümesidir. Bir a sayısı 100'e bölündüğünde kalan r ise, $-a$ sayısı için kalan $100-r$ olacaktır.

Şimdi $\{1, 2, \dots, 49, 51, \dots, 99\}$ kümesindeki 50 tane r kalanı ile 50 tane $(100-r)$ şeklindeki sayıya bakalım.

Çekmece ilkesinden $r_i = r_j$ (ya da $100-r_i = 100-r_j$) veya $r_i = 100-r_j$ olacak şekilde bir $i \neq j$ çifti olması gerektiği görülür. Bu ise ilk durumda $a_i - a_j$; ikinci durumda $a_i + a_j$ sayısının 100'e bölündüğünü söyler.

- 6- Bilardo masasını x - y düzleminde başlangıç köşesi $(0,0)$ diğer köşeler $(1,0)$, $(1,1)$ ve $(0,1)$ noktalarına gelecek şekilde yerleştirelim. Masanın kenarları boyunca simetrilerini alırsak, topun yansıması şekilde görüldüğü gibi simetride doğrusal olacak şekildedir.



Bu bakış açısı altında köşeler tam sayı koordinatlı (q, p) noktalarına karşı geleceğinden problem şuna dönüşür: $(0,0)$ 'dan geçen herhangi bir $y = mx$ doğrusunun tam sayı koordinatlı bir $(q,p) \neq (0,0)$ noktasına $1/20$ birimden çok yaklaşacağını gösteriniz.

Bu son dediğimizi gösterelim. (q, p) noktasının $y = mx$ doğrusuna uzaklığı

$$\frac{|qm - p|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq |qm - p| \text{ dir. Öte yandan geçen}$$

aydaki örnek 4'te verilen bir x reel sayısı ve n tamsayısı için $|qx - p| < 1/n$ olacak şekilde p ve $1 \leq q \leq n$ tamsayılarının varlığını göstermiştik. $n = 20$ ve $x = m$ alırsak istenen (q, p) noktasının varlığını kanıtlamış oluruz.

- 7- Bu soru örnek 5'in bir benzeri. $e_i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ olmak üzere $p = e_1 |x_1| + e_2 |x_2| + \dots + e_n |x_n|$ şeklindeki sayılara bakalım. Her e_i için k farklı değer koyabileceğimizden k^n tane p tipi sayı yazabiliriz. Öte yandan Cavchy Schwartz eşitsizliğinden

$$0 \leq p$$

$$\leq (e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2)^{1/2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \leq (k-1) \sqrt{n}$$

bulunur. Yani k^n tane p sayısı $[0, (k-1) \sqrt{n}]$ kapalı aralığı içindedir. O halde aralarındaki

fark $\frac{(k-1) \sqrt{n}}{k^n - 1}$ 'den küçük olacak şekilde

p, p' sayısı vardır. $p = e_1 |x_1| + e_2 |x_2| + \dots + e_n |x_n|$ ve $p' = e'_1 |x_1| + e'_2 |x_2| + \dots + e'_n |x_n|$ olsun. Yapılan seçimden $(e_1, e_2, \dots, e_n) \neq (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ olacaktır. $p - p' = (e_1 - e'_1) |x_1| + (e_2 - e'_2) |x_2| + \dots + (e_n - e'_n) |x_n|$ olduğundan; $x_i \geq 0$ ise $f_i = e_i - e'_i$ ve $x_i < 0$ ise $f_i = -(e_i - e'_i)$ alırsak; f_i sayılarının hepsi sıfır değildir; her i için $|f_i| < k$ 'dir ve $|f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n| \leq \frac{(k-1) \sqrt{n}}{k^n - 1}$ 'dir.

ÇÖZMECENİN YANITI

$$\sqrt{5739426081} = 75759$$

YARIŞMA SONUCU

*Yarışma sorularımıza, okuyucularımızın gösterdiği ilgi kıvanç verici bir düzeyde. Bildiğiniz gibi, bir yıl içinde yaptığı çözümlerin tümünü göz önüne alarak, okuyucularımızı ödüllendireceğimizi duyurmuştuk. Süresi içinde elimize geçen yanıtlar esas alınarak yapılan değerlendirmeye göre, birinci ciltte yayınlanan soruları çözen okurlarımız arasında en başarılı olan 6 tanesinin adlarını aşağıda açıklıyoruz. Bu okurlarımıza birer **Başarı Belgesi** gönderilmiştir. Ödülleri de yakın zamanda postalanacaktır.*

		Doğru Çözüm	Yayınlar
C.Alparslan ERTUG	(İstanbul)	14	1
Aydın ÜNVERDİ	(İstanbul)	14	3
Atasayun BAYKAL	(Ankara)	13	2
Murat LİMONCU	(Ankara)	13	—
Erhan GÜREL	(Ankara)	12	9
Doğan MERSİN	(İstanbul)	11	1

SAYILARA İLİŞKİN İLGİNÇ BAĞINTILAR

TALAT TUNCER

B azı sayılar arasında ilginç görünümler bulunmaktadır. Bunlara ilişkin bir kaç örnek verelim.

1. Çarpım ters sırada toplam olabilir:

$$9 + 9 = 18 \quad ; \quad 9 \times 9 = 81$$

$$24 + 3 = 27 \quad ; \quad 24 \times 3 = 72$$

$$47 + 2 = 49 \quad ; \quad 47 \times 2 = 94$$

$$497 + 2 = 499 \quad ; \quad 497 \times 2 = 994$$

2. İki rakamlı sayı çiftlerinde her iki rakam da ters çevrilirse çarpımlar aynı kalır:

$$12 \times 42 = 21 \times 24 \quad , \quad 12 \times 63 = 21 \times 36,$$

$$12 \times 84 = 21 \times 48 \quad , \quad 13 \times 62 = 31 \times 26,$$

$$23 \times 96 = 32 \times 69 \quad , \quad 24 \times 63 = 42 \times 36,$$

$$24 \times 84 = 42 \times 48 \quad , \quad 26 \times 93 = 62 \times 39,$$

$$36 \times 84 = 63 \times 48 \quad , \quad 46 \times 96 = 64 \times 69$$

3. Sayılar kristaller gibi büyüyebilir:

$$16 = 4^2$$

$$1.156 = 34^2$$

$$111.556 = 334^2$$

$$11.115.556 = 3.334^2$$

$$1.111.155.556 = 33.334^2$$

$$111.111.556.556 = 333.334^2$$

Bu 16 sayıdaki gibi $10a + b$ biçiminde iki rakamlı başka ancak bir sayı vardır. Ortada kaç kez $(10a + b - 1)$ kullanılırsa kullanılsın yeni sayı bir karedir. Bu sayı 48 dir.

$$49 = 7^2$$

$$4.489 = 67^2$$

$$444.889 = 667^2$$

$$44.448.889 = 6.667^2$$

4. İki rakamlı sayılarda, bir yandaki sayıların kareleri toplamı, rakamları ters sırada yazmakla elde edilen yeni sayıların kareleri toplamına eşit olur:

$$42^2 + 58^2 + 63^2 = 24^2 + 85^2 + 36^2,$$

$$43^2 + 52^2 + 68^2 = 34^2 + 25^2 + 86^2,$$

$$43^2 + 58^2 + 62^2 = 34^2 + 85^2 + 26^2,$$

$$48^2 + 52^2 + 63^2 = 84^2 + 25^2 + 36^2,$$

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 84^2 + 35^2 + 26^2$$

5. Faktoriyel için ilginç bağıntılar:

$$145 = 1! + 4! + 5! (= 1 + 24 + 120)$$

$$40.585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

$$(=24 + 1 + 120 + 40.320 + 120),$$

$0! = 1$ olduğuna dikkat ediniz.

6. Kökler için ilginç bağıntılar:

$$\sqrt{121} = 12 - 1$$

$$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$$

$$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4}$$

$$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9$$

$$\sqrt{256} = 2 \times 5 + 6$$

$$\sqrt{324} = 3 \times (2 + 4)$$

$$\sqrt{11.881} = 118 - 8 - 1$$

$$\sqrt{1.936} = -1 + 9 + 36$$

Dergimizin bu yeni köşesinde Matematik Öğretimi ile ilgili bir tartışmayı başlatmak istiyoruz. Görüş, eleştiri ve düşüncelerinizi bize iletmenizi diliyoruz.

MATEMATİK ÖĞRETİMİNDEN NE BEKLİYORUZ?

KEMAL DOĞAN*

Matematik öğretiminde amaç, "Matematiksel Düşünme"yi ön plana çıkarmak mı? Yoksa bilgi yüklemek mi olmalı?

Matematiğin; tanımlar, aksiyomlar ve bunlardan elde edilen bazı terimler ile bunları kullanma (problem çözme) olarak özetleyebileceğim sisteminin verilerden sonuçlar çıkarabilme, veriler değiştiğinde sonuçların farklılığını görebilme, böylece olaylara ve olgulara farklı bakış açıları getirebilme yeteneğimizin oluşmasına, düşünme ufkumuzun genişlemesine katkısı beklenmelidir. Bunun için Matematik öğretiminde "kanıt" olgusuna hiç olmazsa Lise-I de biraz daha fazla önem verilmelidir. Bazı temel bilgileri edinmiş olan bu sınıftaki öğrenciye Matematiksel düşünmede "kanıt" kavramının "neden" ve "niçin" sorularının önemi kavratılmalıdır. Bunlar geri plana itilerek sadece bilgi yüklemek biçiminde yapılan Matematik öğretimi öğrenciyi ezbere teşvik edici olup Matematiksel düşünmeyi tanımaya ve özümsemeye engeldir. Gözlemlediğim kadarıyla okullarımızda teoremlerin ispatları gereksiz görülmekte, bunlar birer formül olarak ezberlenerek hemen problem çözümüne geçilmektedir. Sonuçta öğrenci "Matematiğin bir kutsal kitabı var da oradan çıkan tartışmasız hükümler uygulanmaktadır" yargısına kapılmaktadır.

Matematik müfredat programı da gözden geçirilmelidir. "Her öğrencinin Matematiğin her

konusunda bilgili olması gerekir mi? Öklid geometrisi üzerinde bu kadar durulması bir zorunluluk mu acaba?" "Üçgene, çembere ait özelliklerin tüm ayrıntılarıyla bilinmesi çok mu gereklidir?" Koniklerin sentetik incelenmesinin programdan çıkarılması çok mu eksiklik yaratmıştır?" Öklid geometrisi dışında geometriler olduğunu tanıtmak yeni bakış açıları getirmez mi? Bunların tartışılmasında yarar vardır.

Lise-I de Matematiksel düşünmeyi öne çıkaran bir anlayışla temel matematik bilgileri tüm öğrencilere verildikten sonra Matematiğin diğer konuları sadece ilgili ve yetenekli öğrencilere okutulmalıdır. Müfredatın kabarık oluşu, verilen sürede yetişmemesi yanında teoremleri ispatlamaktan vazgeçiren bir neden olmaktadır.

Matematik öğretimine bilgi yükleme anlayışı getiren bir başka etken de Üniversite Seçme Sınavlarıdır. Bu sınavlardaki sorular daha çok bilgi ölçme ağırlıklıdır. Belki test sınavının özelliği bu sonucu getirmektedir, ama Matematiksel düşünceyi ölçen bazı sorular da sorulabilmelidir.

Ülkemizde Matematik öğretiminin en verimli biçimde yapılabilmesi için bu düşüncelerin tartışılmasında yarar görüyorum. Bu konuda da "Matematik Dünyası'na görev düştüğüne inanıyorum.

Saygılarımla,

(*) Matematik Öğretmeni, Gaziantep

ALİŞTIRMA SORULARI

A36. Elemanları sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ aritmetik dizisi için

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

A37. Eksenleri birbirine dik olan iki parabol dört noktada kesişiyorsa bu dört nokta çemberdedir. (Hazırlayan: H. Demir)

A38. Bir çember diliminin sınır yarıçapları ile yayı üzer eş parçaya bölen noktalar çemberde ise dilimin merkez açısını belirleyiniz.

(Hazırlayan: H. Demir)

A39. α, β açıları $0 < \alpha < \beta \leq \pi/2$ eşitsizliklerini sağlıyorsa

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

olduğunu kanıtlayınız. (N. A. Court)

A40. $\tan 1^\circ \tan 61^\circ = \tan 3^\circ \tan 31^\circ$ eşitliğini kanıtlayınız.

YARIŞMA SORULARI

Y36. n doğal bir sayı ise $\tan n\theta$ yı $\tan \theta$ türünden yazınız.

Y37. Bir ABC üçgeninde [BC] ye A' ortasında değen bir çember AC yi B₁, B₂, AB yi C₁, C₂ de keserse B₁, C₂, B₂ C₁ doğruları BC'yi A' ye göre simetrik noktalarda keserler.

Y38. İkişer ikişer kesişen ve

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

denklemleriyle belirli üç doğrunun oluşturduğu üçgenin S alanını katsayılar türünden bulunuz. (Hazırlayan: H. Demir)

Y39. $\arctan \frac{1}{3} + \dots + \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} + \dots$

toplamını hesaplayınız.

Y40. Taban açıları B = 50°, C = 30° olan bir ABC üçgeninin içinde D noktası alınarak oluşturulan BDA üçgeninin taban açıları 10'ar ise DBA açısı kaç derece olur?

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Kasım 1992 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınız-soyadınızı adresinizi, ve öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

DEĞERLENDİREN : ALPER HALBUTOĞULLARI

A26. $\{1, 2, \dots, n\}$ doğal sayılar kümesinin 2 ögeli bütün altkümelerinden geçen sayıların toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM : (Burak Uzun, Ankara; S. Gökçen Şen, Erzurum; Doğan Mersin, İstanbul)

Her eleman diğer $(n - 1)$ elemanın herhangi biriyle birleşerek iki elemanlı alt küme oluşturabilir. O halde her eleman $(n - 1)$ alt kümede mevcuttur. Sayıların toplamına T dersek:

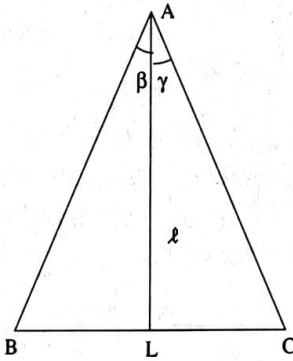
$$T = (n - 1) \cdot [1 + 2 + \dots + n] = \frac{(n - 1) n(n + 1)}{2} \text{ bulunur.}$$

A27. Bir ABC üçgeninde $L \in [BC]$, $\ell = |AL|$, $|AC| = b$, $|AB| = c$,

$\beta = \angle BAL$, $\gamma = \angle CAL$ ise

$$\frac{\sin A}{\ell} = \frac{\sin \beta}{b} + \frac{\sin \gamma}{c}$$

olduğunu ispatlayınız.



ÇÖZÜM :

$$A(ABC) = A(ABL) + A(ACL)$$

$$\frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} c \cdot \ell \cdot \sin \beta + \frac{1}{2} b \cdot \ell \cdot \sin \gamma$$

Her iki tarafı da $b \cdot c \cdot \ell$ çarpımıyla bölerek :

$$\frac{\sin A}{\ell} = \frac{\sin \beta}{b} + \frac{\sin \gamma}{c} \quad \text{elde edilir}$$

Diğer Çözenler :

(Burak Uzun Ankara; Doğan Mersin, İstanbul; Ali İkiz, Konya; Erol Gedikli, Trabzon; Gökhan Andı, Ankara; Atilla Altın, Kırşehir)

A28. Karmaşık sayı düzleminde z , i , iz noktaları doğrudur ise z nin geometrik yeri nedir.

ÇÖZÜM : (Atilla Altın, Kırşehir; Çetin Camcı, İzmir; Erol Gedikli, Trabzon)

$z = x + iy$ olsun. $\Rightarrow$ Noktalar : $A(x, y)$, $B(0, 1)$, $C(-y, x)$ olur.

AB ve BC doğrularının çakışması için eğimleri eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{AB} &= m_{BC} \Rightarrow \frac{y-1}{x-0} = \frac{1-x}{0-(-y)} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y &= 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Geometrik yer $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ merkezli $\frac{\sqrt{2}}{2}$ yarıçaplı bir çemberdir.

A29. Bir ABC üçgeninde $[BE]$ ve $[CF]$ iç iki açıortay ise, BCEF nin bir

a) kirişler dörtgeni

b) teğetler dörtgeni

olup olmayacağını araştırınız ve olması halinde üçgeni belirleyiniz. (Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM : Üçgenin kenar uzunlukları a , b , c ve iç teğet çemberin merkezi I olsun. Aşağıdaki

uzunluklar bilinmektedir :

$$\begin{aligned} b_1 &= |AE| = \frac{bc}{a+c}, & c_1 &= |AF| = \frac{bc}{a+b}, \\ b_2 &= |EC| = \frac{ab}{a+c}, & c_2 &= |FB| = \frac{ac}{a+b}, \end{aligned} \quad (1)$$

a) BCEF kırımler dörtgeni ise A nın bu dörtgenin çevresel çemberine göre kuvvetinden

$$\begin{aligned} b_1 b &= c_1 c \Rightarrow b(a+b) = c(a+c) \\ &\Rightarrow (b-c)(a+b+c) = 0 \\ &\Rightarrow b = c \end{aligned}$$

olmalıdır.

b) BCEF kırımler dörtgeni ise BE doğrusu dörtgende B ve E aıllarının açıortayı olur. Aıortayın oran ezelięinden, $|EF| = x$ olmadığında

$$\frac{x}{b_2} = \frac{|FI|}{|IC|} = \frac{c_2}{a}$$

yazılır. Bu da (1) den

$$x = \frac{abc}{(a+b)(a+c)}$$

değerini verir.

Bu teğetler dörtgeninde $x + a = b_2 + c_2$ olacaęından (1) den ve x in deęerinden

$$\begin{aligned} bc + (a+b)(a+c) &= b(a+b) + c(a+c) \\ \Rightarrow 2bc &= b^2 + c^2 + a^2 \Rightarrow 1 = \cos A \Rightarrow 1 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki (b) denklemi sağlayan hiç bir üçgen yoktur.

A30. Her n doğal sayısı için

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğunu gösteriniz. (Burada $\binom{n}{k}$ simgesi n öğeli bir kümenin k öğeli altkümeleri sayısını göstermektedir)

ÇÖZÜM : Eşitliğin sağ tarafı $2n$ elemanlı kümenin n elemanın kaç farklı yoldan seçilebileceğini göstermektedir. Şimdi bataki kümeyi iki eşit kümeye ayırıp bunlara A ve B ismini verelim, ve n eleman seçme işlemini tanımlayalım; n elemanı u şekilde seçebiliriz :

A dan hiç almayıp, B den n tane alırız, veya

A dan 1 tane alıp, B den $n-1$ tane alırız, veya

A dan 2 tane alıp, B den $n-1$ tane alırız, veya

A dan k tane alıp B den $n-k$ tane alırız, veya

A dan n tane alıp, B den hiç almayız.

Bu işlemin genel basamağını (yani k . basamağını) gerçekleştirmenin $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$ farklı yolu vardır. O halde tüm seçilim

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\ &+ \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} \end{aligned}$$

farklı yoldan yapılır. Ve bu $\binom{2n}{n}$ ifadesine

eşittir. Şimdi $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$

eşitliğini kullanarak ifademizi yeniden yazarsak:

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{n}{k} \\ &+ \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

veya

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{k}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

bulunur.

Y26. $-y^4 - y^4 - z^4 - t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8xyzt$ polinomunu, birinci dereceden tam katsayılı polinomların çarpımı olarak yazınız.

ÇÖZÜM I : Bu çözümde Burak Uzun'un (Ankara) çözümündeki fikirlerden yararlanılmıştır.

Birinci dereceden tam katsayılı genel polinom $(a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i)$ şeklindedir. Verilen polinom bu tip n tane polinomun çarpımına eşittir.

- i) Tüm terimlerin kuvvetleri eşit olduğundan sabit terimler sıfırdır. $e_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (Bir terimin kuvveti terimlerinin üsleri toplamıdır.)
- ii) x^4 terimi ancak $(a_i x)$ terimlerinin çarpılmasıyla elde edilir. O halde $a_i \neq 0$ ve benzer şekilde $b_i \neq 0$, $c_i \neq 0$, $d_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) Ayrıca asıl polinom, birinci dereceden 4 polinomun çarpımıdır. ($n = 4$)
- iii) x^4 ün katsayısı : $-1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$
 $\Rightarrow a_i = \mp 1$, benzer şekilde $b_i = c_i = d_i = \mp 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$)
- iv) Katsayılar toplamı $x = y = z = t = 1$ alınarak 16 bulunur. 1. dereceden polinomunki sadece 0, ∓ 2 , ∓ 4 olabileceği için, 16 çarpımı sadece ∓ 2 çarpanları ile elde edilebilir. Negatif olan parantezler çift sayıda olduğundan bunları da (-1) lerle çarparsak tüm parantezlerdeki katsayıların toplamı 2 olmak zorunda olur. Yani üçü $+1$, biri -1 .

(iii)'ten dolayı bir değişkenin en az bir katsayısı -1 olduğundan :

$$P(x) = (x + y + z - t)(x + y - z + t)(x - y + z + t)(-x + y + z + t) \text{ bulunur.}$$

ÇÖZÜM II : (Bilal Yurdakul, İzmir)

$$-x^4 - y^4 - z^4 - t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2t^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8xyzt$$

$$\begin{aligned} &= -(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - (z^4 - 2z^2t^2 + t^4) \\ &\quad + 2x^2z^2 + 2x^2t^2 + 2y^2t^2 + 2y^2z^2 + 8xyzt \\ &= -[(x^2 - y^2)^2 + (z^2 - t^2) - 2x^2(z^2 + t^2) \\ &\quad - 2y^2(t^2 + z^2) - 8xyzt] \\ &= -[(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 - 2(x^2 - y^2)(z^2 - t^2) \\ &\quad - 2x^2(z^2 + t^2) - 2y^2(t^2 + z^2) - 8xyzt] \\ &= -[(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 - 4(x^2z^2 + t^2y^2 + 2xyzt)] \\ &= -[(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 - (2xz + 2ty)^2] \\ &= -(x^2 + z^2 - 2xz + z^2 - t^2 - 2ty)(x^2 + z^2 + 2xz \\ &\quad - y^2 - t^2 - 2yt) \\ &= -[(x - z)^2 - (y + t)^2][(x + z)^2 - (y - t)^2] \\ &= (x - y - z - t)(x + y - z + t)(x - y + z + t)(-x + y + z + t) \end{aligned}$$

Diğer Çözenler :

Murat Beyboğa, İzmir. Çetin Camcı, İzmir; Ö. Serdar Şahin, İzmir; Okay Çalışkan, İzmir; Atasagun Baykal, Ankara; Murat Limoncu, Ankara; İlyas Küreli, İstanbul

Not: S.Gökçen Şen, Erzurum; Erol Gedikli. Sadece sonuç gönderen yarışmacıların kağıtları değerlendirilmeye alınmamıştır.

Y27. Bir ABCDEF dışbükey kirişler altıgeninde

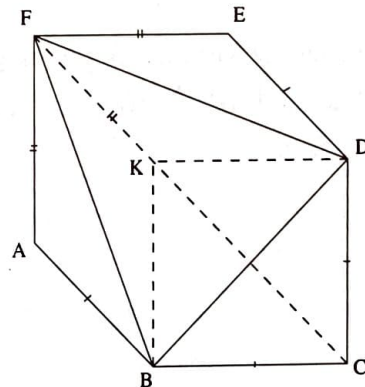
$$|AB| = |BC|, |CD| = |DE|, |EF| = |FA|$$

ise alanlar için

$$|BDF| = \frac{1}{2} |ABCDEF|$$

eşitliğini ispatlayınız.

ÇÖZÜM : (Bilal Yurdakul, İzmir, Murat Limoncu-Ankara)



$|FC|$ üzerinde $|AF| = |FK|$ olacak şekilde bir K noktası alalım. $ABCDEF$ kirişler çokgeni olduğundan, eşit yayı gören açılar eşittir. $\widehat{CFD} \cong \widehat{EFD} \Rightarrow |EF| = |FK|$ ve $|FD|$ ortak olduğundan $\widehat{FKP} \cong \widehat{FED}$ ayrıca $|KD| = |ED|$ elde edilir.

Benzer şekilde $\widehat{BKD} \cong \widehat{BCD}$ ve $\widehat{BKF} \cong \widehat{BAF}$ bulunur.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} A(ABCDEF) &= \frac{1}{2} [A(FBD) + A(BAF) \\ &+ A(BCD) + A(DEF)] \\ &= \frac{1}{2} [A(FBD) + A(FBD)] \\ &= A(FBD) \end{aligned}$$

Diğer çözenler :

(Atasagun Baykal, Ankara; İlyas Küreli, İstanbul; Okay Çalışkan, İzmir; Özgür Cem Avcı, Ankara; Burhan Biner, Malatya; S.Gökçen Şen, Erzurum)

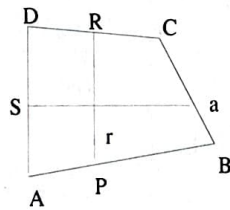
Y28. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin kenarları üzerinde

$$\lambda = \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|RD|}{|RC|}, \quad \mu = \frac{|QB|}{|QC|} = \frac{|SA|}{|SD|}$$

olmak üzere P, Q, R, S noktaları alınıyor. $PR \cap QS = T$ ise

$$\frac{|TS|}{|TQ|} = \lambda, \quad \frac{|TP|}{|TR|} = \mu$$

olduğunu ispatlayınız.



ÇÖZÜM : (Ankara; Atasagun Baykal, Ankara; S.Gökçen Şen, Erzurum)

$$\frac{|RD|}{|RC|} = \lambda \rightarrow \frac{|RD|}{|DC|} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \rightarrow |DR| = \frac{\lambda}{\lambda+1} |DC|$$

Koordinatlara göre yazarsak :

$$x_r - x_d = \frac{\lambda}{\lambda+1} (x_c - x_d) \text{ ve } y_r - y_d = \frac{\lambda}{\lambda+1} (y_c - y_d)$$

$$\rightarrow x_r = \frac{x_d + \lambda \cdot x_c}{\lambda+1}, \quad y_r = \frac{y_d + \lambda \cdot y_c}{\lambda+1}$$

Aynı şekilde :

$$x_p = \frac{x_d + \lambda \cdot x_c}{\lambda+1}, \quad y_r = \frac{y_d + \lambda \cdot y_c}{\lambda+1}$$

T_1 noktası, $\overline{RP}$ yi $\frac{|T_1P|}{|T_1R|} = \mu$ olacak şekilde

ikiye ayıran nokta olsun. Yukarıdaki metotla T_1 in koordinatlarını bulalım :

$$x_{t_1} - x_p = \frac{\mu}{\mu+1} (x_r - x_p),$$

$$y_{t_1} - y_p = \frac{\mu}{\mu+1} (y_r - y_p)$$

$$\begin{aligned} x_{t_1} &= \frac{x_p + \mu \cdot x_r}{\mu+1} = \frac{\frac{x_d + \lambda \cdot x_c}{\lambda+1} + \mu \cdot \frac{x_d + \lambda \cdot x_c}{\lambda+1}}{\mu+1} \\ &= \frac{x_d + \lambda \cdot x_c + \mu \cdot x_d + \mu \cdot \lambda \cdot x_c}{(\mu+1)(\lambda+1)} \end{aligned}$$

Aynı şekilde :

$$y_{t_1} = \frac{y_a + \lambda \cdot y_b + \mu y_d + \mu \cdot \lambda \cdot y_c}{(\mu+1)(\lambda+1)}$$

Bu defa işlemleri $\overline{DA}$ ve $\overline{CB}$ doğru parçaları için yapalım.

$$x_q = \frac{x_b + \mu \cdot x_c}{\mu+1}, \quad y_q = \frac{y_b + \mu \cdot y_c}{\mu+1},$$

$$x_s = \frac{x_a + \mu \cdot x_d}{\mu+1}, \quad y_s = \frac{y_a + \mu \cdot y_d}{\mu+1}$$

T_2 noktası $\overline{SQ}$ yi $\frac{|T_2S|}{|T_2Q|} = \lambda$ olacak şekilde

ikiye ayıran nokta olsun.

$$\begin{aligned} x_{t_2} &= \frac{x_s + \mu \cdot x_q}{\lambda+1} = \frac{\frac{x_a + \mu \cdot x_d}{\mu+1} + \mu \cdot \frac{x_b + \mu \cdot x_c}{\mu+1}}{\lambda+1} \\ &= \frac{y_a + \mu \cdot y_d + \lambda \cdot y_b + \mu \cdot \lambda \cdot y_c}{(\mu+1)(\lambda+1)} \end{aligned}$$

$x_{t_1} = x_{t_2}$, $y_{t_1} = y_{t_2}$ olduğuna ve kesişen iki doğrunun ancak bir ortak noktası olduğuna göre,

$$T_1 \equiv T_2 \equiv T$$

Demek ki T noktası $\overline{SQ}$ ve $\overline{RP}$ doğru parçalarını λ ve μ oranında bölüyor.

Y29. p asal sayı, $p > 2$ ve

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p-1}; m, n \in \mathbb{Z}^+$$

ise m nin p ile bölünebileceğini gösteriniz.

CÖZÜM : (Burak Uzun, Ankara)

$p > 2$ için p tek sayıdır.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1}$$

toplamı $p-1$ çift sayı olduğu için çift sayıda terim içerir. Toplamı, baştan ve sondan karşılıklı terimleri gruplandırarak yazarsak

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right)$$

" k ve $p-k$ toplamının en ortasındaki iki terim".

$$\frac{m}{n} = p \left(\frac{1}{1(p-1)} + \frac{1}{2(p-2)} + \dots + \frac{1}{k(p-k)} \right)$$

p : m nin çarpanlarından biridir.

n : $(p-1)!$ ya da $(p-1)!$ in çarpanlarından oluşur ve p terimi içermez.

$$\frac{m}{n} = \frac{p \cdot t}{(p-1)!}$$

t , Parantez toplamı; p , m nin bir çarpanı.

Diğer Çözenler :

Bilal Yurdakul, İzmir; Ö.Serdar Şahin, İzmir; Atilla Altın, Kırşehir; Atasagun Baykal, Ankara)

Y30. A, B, C bir üçgenin açıları olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 C & \cos^2 B \\ \cos^2 C & 1 & \cos^2 A \\ \cos^2 B & \cos^2 A & 1 \end{vmatrix}$$

determinantını üçgenin S alanı ve R çevrel yarıçapı türünden hesaplayınız.

(Hazırlayan : C Koç, H. Demir)

CÖZÜM : (Bilal Yurdakul, İzmir)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 C & \cos^2 B \\ \cos^2 C & 1 & \cos^2 A \\ \cos^2 B & \cos^2 A & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 2\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C - \cos^4 A - \cos^4 B - \cos^4 C \\ &= 1 + 2(1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C) \\ &\quad - (1 - \sin^2 A)^2 - (1 - \sin^2 B)^2 - (1 - \sin^2 C)^2 \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R; \quad \frac{abc}{4R} = S$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} &= -\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2 b^2}{16R^2} + \frac{8S^2}{16R^4} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{16R^4} - \frac{8S^2}{16R^4} \end{aligned}$$

Bilindiği gibi

$$\begin{aligned} \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} &= S \\ u(u-a)(u-b)(u-c) &= S^2 \\ (b+c-a)(a+b+c)(a+b-c)(a+b+c) &= 16S^2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{16S^2 - 8S^2}{16R^4} = \frac{S^2}{2R^4}$$

Diğer Çözenler :

Atasagun Baykal, Ankara; Erol Gedikli, Trabzon; Osman Nuri Okumuş, İzmir; Murat Limoncu, Ankara; Çetin Camcı, İzmir; Burak Uzun, Ankara)

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,*
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,*
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,*
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,*
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,*
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,*
- * Matematik dünyasından güncel haberler.*

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

