

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyasından

Basit Sonlu Grupların Sınıflandırılması

Mahmut Kuzucuoğlu

Matematiksel Estetik

Uluğ Çapar

Düzgün Çokgenler ve Çizilebilirlikleri

Azize Bastıyalı Hayfavi

Matematikçi Hilesi

Ali Nesin

Fibonacci Sayıları Hakkında Bir Kural

Faramaz Maksudov, Cafer Veliev

Seçim ve Matematik - 2
Toplumsal Seçimler

Halil İbrahim Karakaş

Fonksiyonel Denklemler

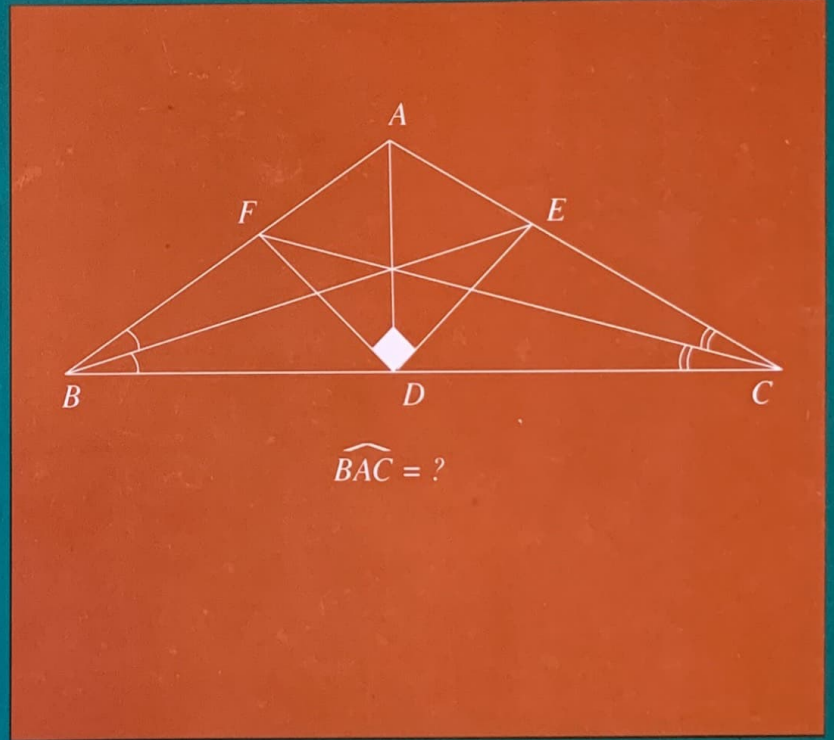
Albert Erkip

Paradokslar Çatışkılar

Talat Tuncer

7,13 ve 19 ile Bölünebilme Kuralı

Nurettin Çalışkan



Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası, bir sonraki sayı ile birlikte, iki yılını tamamlamış olacaktır. Bu iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmaktadır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 20.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abone-lerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte, postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 10.000.- TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri takdirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1993 yılı abone ücreti 50.000.- TL. tane satış fiyatı ise 15.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde, dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

Saygılarımızla

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

BU SAYIYI YAYINA HAZIRLAYAN
ALİ DOĞANAKSOY

YAYIN KURULU
OKAY ÇELEBİ, HÜSEYİN DEMİR,
ALİ DOĞANAKSOY, HALİL ERDEM,
YAŞAR ERSOY, İSMAIL GÜMÜŞEL,
TİMUR KARAÇAY, ALEV TOPUZOĞLU

YAZI İŞLERİ MÜDÜRÜ
ABDULLAH KAYGUSUZ

DİZGİ
ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU BASİMEVİ
Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 25.000.-TL., Yurtdışı yıllık 50.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından	1
Basit Sonlu Grupların Sınıflandırılması	
Mahmut Kuzucuoğlu	2
Matematiksel Estetik	
Uluğ Çapar	5
Düzgün Çokgenler ve Çizilebilirlikleri	
Azize Bastıyalı Hayfavi	7
Matematikçi Hilesi	
Ali Nesin	11
Fibonacci Sayıları Hakkında Bir Kural	
Faramaz Maksudov, Cafer Veliev	14
Seçim ve Matematik - 2 Toplumsal Seçimler	
Halil İbrahim Karakaş	17
Fonksiyonel Denklemler	
Albert Erkip	22
Paradokslar Çatışkılar	
Talat Tuncer	26
Sorular	27
Çözümler	28
7,13 ve 19 ile Bölünebilme Kuralı	
Nurettin Çalışkan	32

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Bu sayımızda yer alan yazılarımız şöyle:

Basit Sonlu Grupların Sınıflandırılması

ODTÜ öğretim üyelerinden Mahmut Kuzucuoğlu dergimizdeki ilk yazısında gruplar teorisinden güzel bir sonucu tarihi gelişimi içinde anlatıyor.

Matematiksel Estetik

Matematikte, estetiği ile büyüleyen bir çok netice vardır. Bilkent Üniversitesi öğretim üyelerinden Uluğ Çapar'ın matematikte estetik anlayış konusunda yazdığı makalesinde böyle sonuçların bazı örneklerini bulacaksınız.

Düzgün Çokgenler ve Çizilebilirlikleri

Sadece pergel ve cetvel kullanarak yapılamayacak çizimlerden önceki sayılarımızda bahsedilmişti. Bu defa ODTÜ öğretim üyelerinden Azize Bastıyalı Hayfavi, sadece pergel ve cetvel kullanarak hangi çokgenlerin çizilebileceği konusunu ele alıyor.

Matematikçi Hilesi

Tek başına oynanabilecek bir oyunun tanıtımı ile birlikte güzel bir analizini bulacağınız bu yazıyı California Üniversitesi'nden Ali Nesin, kendisine özgü hoş bir üslupla kaleme almış. Oyunu anlatırken, matematikte sıkça kullanılan bir yöntemi de anlatmayı ihmal etmiyor.

Fibonacci Sayıları Hakkında Bir Kural

Sürekli yayınlanan her matematik dergisinde Fibonacci sayıları hakkında mutlaka bir ilk yazı bulunur, fakat asla son yazı olmaz. Tanımı ve uygulamaları ile oldukça ilginç olan bu konu ODTÜ'de misafir öğretim üyesi olarak bulunan Azeri matematikçiler Faramaz Maksudov ve Cafer Veliev tarafından ele alınıyor.

Seçim ve Matematik - 2 Toplumsal Seçimler

Geçen sayımızda seçimin matematiksel temellerini incelemeye başlayan H.İ.Karakaş bu sayıda güzel yazısına devam ediyor. Akdeniz Üniversitesi'nde öğretim üyesi olan H.İ.Karakaş'ın bu dizisi gelecek sayıda tamamlanacak.

Fonksiyonel Denklemler

Verilen birtakım bağıntıları sağlayan fonksiyonların bulunması problemi olimpiyat ve benzeri yarışmalarda sık olarak yer almaktadır. Dergimizin aşına isimlerinden Albert Erkip, olimpiyatlara ilgili yazılarına bu konuyla devam ediyor.

Paradokslar Çatışkılar

Emekli öğretim üyelerinden Talat Tuncer bu kez paradokslara değiniyor.

7,13 ve 19 ile Bölünebilme Kuralı

Bir sayının 7,13 veya 19'a bölünebilirliğini ODTÜ'den Nurettin Çalışkan'ın bu yazısını okuduktan sonra kolayca test edebileceksiniz.

BASİT SONLU GRUPLARIN SINIFLANDIRILMASI

MAHMUT KUZUCUOĞLU

Bu yazımızda sonlu gruplar teorisinde ispatlanan çok önemli bir teoremi hiç bir tekniğe girmeden tanıtmaya çalışacağız. Bu teoremi tanıtmak için sizlere bazı tanımlar vereceğiz. Her lise öğrencisinin bildiği grup tanımını kısaca tekrar edelim: Boş olmayan bir G kümesi ve bu küme üzerinde bir ikili işlem " $\cdot$ " verilmiş olsun. Yani, $G \times G \rightarrow G$ bir fonksiyon verilsin ve her $a, b \in G$ için $(a, b) = a \cdot b$ olarak gösterilsin. Bu fonksiyon G kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa G ye grup denir.

- 1) Her $x, y, z \in G$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ dir.
- 2) Her $x \in G$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.
- 3) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır. $y = x^{-1}$ ile gösterilir.

Eğer bir G grubunda her $x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba değişmeli grup denir.

$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ kümesi toplamaya göre bir değişmeli gruptur, burada $\bar{1}$; doğal sayılarda modulo p 'ye göre 1'in denklik sınıfıdır.

Bu yazımızda grup denilince G kümesinde sonlu tane eleman olduğunu kabul edeceğiz.

G grubunun boş olmayan H alt kümesi, her $x, y \in H$ için $x \cdot y^{-1} \in H$ özelliği sağlarsa, H bir altgruptur denir. N altgrubu her $g \in G$ ve her $n \in N$ için, $g^{-1}ng \in N$ özelliğini sağlarsa N 'ye normal alt grup denir. Bir grubun normal altgrupları grupların yapılarını anlamamıza

yardımcı oldukları için normal alt grupların özel bir önemi vardır. N grubu, G nin normal altgrubu ise $G/N = \{xN \mid x \in G\}$ kümesi tekrar bir grup yapısına haizdir. G/N grubu "genellikle" G 'nin sahip olduğu "grup teorik" özelliklerin bir kısmını korur.

Bir tanım daha verip, sonra matematikçilerin uzun yıllar üzerinde çalıştıkları ve sonunda mutlu sona ulaşılan bir problemi tanıtalım. Bir G grubunun birim elemandan oluşan ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa G grubuna basit grup denir. Bu tanım Evariste Galois (1811-1832) tarafından verilmiştir. Basit gruplara örnek vermek gerekirse, mertebesi (gruptaki eleman sayısı) P olan (P asal) her grup basit bir gruptur ve biraz daha dikkatle bakılınca herkesin göreceği gibi değişmeli ve basit olan gruplar yukarıdaki örnekteki gruplarla eşyapılıdır (izomorftur).

Basit grupların, gruplar teorisindeki önemi, asal sayıların sayılar teorisindeki önemine benzer. Bunu anlamak için G grubunun maksimal normal altgrubu G_1 i alalım, G/G_1 grubu basit bir gruptur, şimdi G_1 in maksimal normal altgrubu G_2 yi alalım. G_1/G_2 yine basit bir grup olur. Bu işleme birim elemandan ibaret olan altgruba ulaşıncaya kadar devam edelim.

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \dots > G_n = 1$$

bulunur ve her i için G_i/G_{i+1} basit bir gruptur. Bir grubun yukarıdaki gibi serisi hakkında Jordan-Hölder teoremi ([5] sayfa 43) şunu

söyler: Eğer G grubunun

$$G \geq M_1 \geq M_2 \dots \geq M_k = 1$$

gibi bir başka serisi olsa ve her j için M_j/M_{j+1} basit olsa o zaman $k=n$ 'dir ve her i için öyle bir j vardır ki G_i/G_{i+1} ve M_j/M_{j+1} grupları birbirine izomorftur. Bu açıklama ile sanırım basit grupları asal sayılara benzetme işi biraz daha anlaşılır oldu.

Biz yazımızın bundan sonraki kısmında basit grup denilince değişmeli olmayan basit grupları anlayacağız. Bu kısımdaki basit gruplar yapıları bakımından hiç de isimleri gibi basit değil, tam tersine oldukça karmaşık yapılara sahiptirler.

Galois, 5 sembol üzerindeki alterne permütasyon grubunun basit olduğunu ispatlamıştır. Sonra Camillo Jordan (1838-1922) 1870 yılında yayınladığı bir kitapta 5 ayrı sınıftan oluşan ve herbirinde sonsuz tane basit grup olan, 5 basit grup sınıfını yayınlamıştır.

Bunlardan birincisi alterne permutasyon grupları $Alt(n)$, $n \geq 5$ dir. Jordan diğer dört sınıfı, matrisleri kullanarak sınıflandırmıştır. Bunlardan bir tanesi $m \times m$ 'lik ($m \geq 2$), determinantı 1 olan matrisler grubu ($SL(m, p^n)$) (bu matrislerin elemanları p^n elemanlı bir cisimden alınmaktadır) bu gruptan elde edilen bölüm grubu $PSL(m, p^n) = SL(m, p^n)/Z(SL(m, p^n))$ gruplarıdır. (yukarıda $Z(SL(m, p^n))$ grubu, $SL(m, p^n)$ grubunun merkezidir). Jordan bu grupların (m, p) nin $(2, 2)$ ve $(2, 3)$ den farklı olduğu durumlarda basit olduklarını göstermiştir.

Diğer sınıflarda determinantı 1 olan ve dejenere olmayan belli bir quadratik formu koruyan matrislerin bölüm grubu olarak tanımlanabilir.

Burada sadece problemi ve sonucu tanıtmaya çalıştığımız için birazda magazin kısmına

değinelim.

Bu problemin çözümünde dünyada yaklaşık 30 yıl boyunca çok aktif olarak yüzlerce matematikçi çalışmış ve 5000 ile 10.000 sayfa tutan 300-500 makale yayınlanmıştır.

Problem Şubat 1981'de [3] de belirtildiği gibi tamamen çözülmüş ve basit grupların sınıflandırılması bitmiştir. Yukarda bahsettiğimiz gibi bu problem için yaklaşık 10.000 sayfa makale yayınlanmış ve bu makalelerin çoğu bir öncekini kullanmıştır. Bu bakımdan bazı matematikçiler bu çözüme şüphe ile bakmakta ve yapılan ispatları kısaltmak ve doğruluklarını kontrol etmek üzere kolları sıvamışlardır. Bunlara örnek olarak H. Bender'i verebiliriz.

1962 yılında Walter Feit ve John Thompson tarafından yayınlanan bir makale [2] ile bu problemin çözümü büyük bir hız kazanmıştır. Bu makale 255 sayfa olup Pasific Journal of Mathematics'in bir sayısını kaplamıştır. İspatlanan teoremin ifadesi bir satırdır: Mertebesi tek sayı olan her grup çözülebilir bir gruptur.

Basit grupların sınıflandırılması problemi üzerinde ilk çalışmalar mertebesi 1-660 arasında olan basit grupların sınıflandırılması ile başlamış, her grup teker teker incelenmiş daha sonra bu sınırlar 1092'ye kadar genişletilmiştir. Bu aradaki grupların incelenmesi bazı matematikçilerin doktora tezleri olmuştur. Bu incelemeler sırasında Sylow Teoremleri [2] sabit bir n için, mertebesi n olan bir grubun basit olamayacağını göstermek için oldukça etkili bir şekilde kullanılmıştır. Bu sınırlar daha sonraları bilgisayarlarda kullanılarak çok daha büyük sayılara çıkarılmıştır.

1861 yılında Mathieu 5 tane geçişken permütasyon grubu keşfetti. Bu gruplar, basit

gruplar teorisinde, permutasyon gruplarında ve de kodlama teorisinde çok önemli olmuşlardır. 1895 yılında Cole, mertebesi 7920 olan Mathieu grubunun basit olduğunu; 1900 yılında G.A. Miller diğer dört Mathieu grubunun da basit grup olduğunu gösterdi, ve bu grupların sonsuz elemanlı sınıfların hiçbirisine dahil olmadığı da ispat edildi.

Basit gruplardan hiçbir sonsuz sınıfa dahil olmayan gruplara sporadik basit gruplar denir. Bunlardan 26 tane vardır. Sporadik grupların sayısının sadece neden 26 olması ve hatta sayısının sadece sonlu sayıda olması bile kendi başına ilginç buluşlardır. Bu grupların keşfi sırasında bazen mertebesi iki olan elemanların merkezleyenleri oldukça önemli rol oynamış hatta bazı grupların var oldukları buradan hareketle ve bilgisayar kullanarak ispatlanmıştır. Bu grupların içersinde mertebesi 808 017424 794 512 875 886 459 904 961710757 005 754 268 000 000 000 (yaklaşık 10^{54}) olan ve bu büyük mertebesinden dolayı ejderha (monster) da denen bir grup vardır. Bunların yapıları hakkındaki bilgiler bilgisayar kullanılarak elde edilebilmektedir.

Chevalley sonlu cisimler üzerinde Lie cebiri kullanarak sonsuz elemanlı basit grupların bulunduğu yeni sınıflar keşfetmiştir. Daha sonra Chevalley'in metodu 1958-1959 yıllarında Robert Steinberg, Jacques Tits ve D. Hertzig tarafından genişletilmiş ve Chevalley'in bulduklarının da dışında yeni sonsuz elemanlı sınıflar keşfedilmiştir. Bunlardan sonra da

Suzuki ve Ree grupları bulunmuştur. Yukardaki grupların ve Jordan tarafından matrisler yöntemiyle verilen dört sınıfın hepsine birden Lie tipi gruplar denir.

Şimdi basit grupların sınıflandırılması teoremini verelim.

Sonlu basit grupların sınıflandırılması:

Verilen her sonlu basit grup aşağıdakilerden birine izomorftur.

- 1) Mertebesi asal olan gruplar.
- 2) Alterne permutasyon grupları, $Alt(n)$, $n \geq 5$
- 3) Lie tipi gruplar.
- 4) 26 tane sporadic grup.

Basit gruplar ve sınıflandırılması hakkında daha fazla bilgi için [3], [4] ve [1]'e bakılabilir. Basit gruplar üzerinde American Math. Monthly 1973 (sayfa 1028) de yayınlanan bir şarkı bile vardır.

KAYNAKLAR

1. M. Aschbacher Finite Group Theory Cambridge University press (1986).
2. W. Feit - J. G. Thompson Solvability of groups of odd order Pacific. J. Math B (1963) 775-1029.
3. D. Gorenstein Finite Simple Groups University Series (Plenum Press 1982).
4. D. Gorenstein. The Classification of Finite Simple Groups (Plenum Press 1983).
5. M. Suzuki Group Theory I Springer Verlag (1978).

MATEMATİKSEL ESTETİK

ULUĞ ÇAPAR

Ünlü filozof, düşünür ve matematikçi Bertrand Russell "Mysticism and Logic" adlı kitabında matematikteki estetik konusunda şunları yazar:

"Matematik doğru algılandığında sadece gerçeği değil, heykeldeki türden yüceltilmiş, donuk ve süssüz bir güzelliği de içerir. Matematik bu güzelliklere bürünmek için insan doğasındaki zayıflıklara başvurmaz, resim ve müziğin göz kamaştırıcı tuzaklarını da kullanmaz; ona karşı en katıksız bir arılığa ve ancak en yüce sanat eserlerinde görülebilecek ağırbaşlı bir mükemmelliğe erişebilme gücüne sahiptir."

Sayfalar dolusu türev alma ve cebir işlemlerine boğulup bir diferansiyel denklemin seri çözümünün katsayılarını hesaplamağa çalışan ya da çok bilinmeyenli karmaşık bir denklem sistemini çözümlemeğe uğraşan bir matematik öğrencisi kendi kendine : "Russell'in sözünü ettiği güzellik bu mu?" diye sorabilir, satranç ve benzeri bazı zekâ oyunlarındaki ince görüş ve buluşların çok daha fazla pozitif bilim türünde bir estetik içerdiğini düşünebilir. Aslında matematikteki estetik en belirgin biçimde işin çok daha başlarında, bir de sarmal bir gelişim sonunda ulaşılan ileri aşamalarında kendini gösterir.

İlk başlardaki ekstremde matematikçi güzellik yaratma konusunda bir hayli edilgendir, daha çok olanı biteni gözlemeğe, keşfetmeğe çalışır. Fizik, kimya, astronomi v.b. pozitif bilimlerdeki gözlem faaliyetlerine çok benzeyen bu devrede insanlığı ikibin, ikibinbeşyüz yıldan beri uğraştıran gerçel sayılar, iki veya üç boyutlu Euclid geometrisi gibi temel matematik yapılar ya da daha yakın zamanlarda ortaya çıkan karmaşık sayılar, sonsuz seriler, özel fonksiyonlar ve bunun gibi objeler gözlenir. Bu gözlemler sonucu ortaya çıkan bulgular matematikçinin

yaratıcılığından oldukça bağımsız, bazı fiziksel özelliklerinin eşyanın doğasında var oluşu türünde, incelenen matematiksel yapının içeriğinde yeralan gerçekler kümesidir. Bu aşamada estetik, bulgu ifadelerinin yalınlığı ve zarafeti, kullanılan malzemenin azlığı, sonuçların şaşırtıcılığı ve genellik düzeyi ile kendini belli eder. Şimdi bu türden bazı bulguları "The Mathematical Intelligencer" den kısaltarak aktaralım. Söz konusu dergi, okuyucularından bu sonuçlara matematiksel güzellik açısından 0 ile 10 arasında puanlar vermelerini de istemiştir.

1) Çok yüzlüler için Euler formülü :

$K + Y = A + 2$, K: Köşe sayısı, Y : Yüz sayısı
A: Ayırt sayısı.

2) Herhangi bir kare matris kendi karakteristik denklemini sağlar.

3) Sonsuz asal sayı vardır.

4) Karesi 2 olan hiçbir rasyonel sayı yoktur.

5) $4n + 1$ biçimindeki herhangi bir asal sayı, tek olarak belirlenen iki tam sayının kareleri toplamı olarak yazılabilir.

$$6) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$7) \frac{1}{2 \times 3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8} - \dots = \frac{\pi - 3}{4}$$

8) π transandan bir sayıdır.

9) 77 den büyük herhangi bir tamsayı, tersleri toplamı 1 olan tamsayıların toplamı olarak yazılabilir.

10) Köşeleri düzlemsel ağ noktaları ile çıkan hiçbir eşkenar üçgen yoktur.

11) Herhangi bir toplulukta oradaki arkadaş sayıları eşit olan iki kişi vardır.

12) Bir tamsayının tek tamsayılardan oluşan

partisyonları (bölüşümleri) nın sayısı, birbirinden farklı tamsayılardan oluşan partisyonlarının sayısına eşittir.

13) Eğer bir düzlemin noktaları kırmızı, sarı veya mavi renkle boyanırsa aralarındaki uzaklık bir birim olan aynı renkli iki nokta vardır.

14) Her düzlem harita 4 renkle boyanabilir.

15) Kapalı birim daireyi kendi içine çeviren sürekli bir dönüşümün çakılı noktası vardır.

16) $\sqrt{2}$ nin katlarının yalnız tamsayı kısımlarını yazalım, alta da bu dizide eksik kalan tamsayıları sıralayalım :

1,2,4,5,7,8,9,11,12,....

3,6,10,13,17,20,23,27,30,....

Bu takdirde iki dizi arasındaki fark n inci pozisyonda $2n$ olur.

17) Düzgün bu sekizgen içine yerleştirilen düzgün bir yirmi yüzlü kenarları altın oranda böler.

18) Gruplar için kelime problemi çözümsüzdür.

19) Bir altgrubun eleman sayısı grubun eleman sayısını böler.

20) $e^{i\pi} = -1$.

21) 5 düzgün çokyüzlü vardır.

Matematiğin ileri aşamalarındaki uçlarda ise matematikçi yalnızca varolan yapıları gözlemlemekle yetinmez, kendi özgün yapılarını da tasarımıyla kurabilir. Bu, doğayı gözleyerek yinelemekten vazgeçip, kendi iç dünyasına düşer, bazen de soyut bir biçimde yönelen çağdaş ressam örneğinde olduğu gibi ona sonsuz ufuklar ve yaratıcılık zemini sağlar. Bu soyut yapının şekillenişindeki kişisel, seçenekler dizisi ve özgünlük Russell'in sözünü ettiği estetik öğeleri de birlikte getirir.

Matematikte soyutluk gereksinimi asırlar boyunca kazanılan bilgi ve tekniklerin kontrolsüz bir biçimde birikip yağışmasından kaynaklanır. Bu korkunç hacimdeki tanımlar, önermeler ve teknikler yığınını yaklaşılabılır hale getirmek için tekrarların ayıklanması, benzerlerin sınıflandırılması, aynı sınıf içindeki veya sınıflar arasındaki ortak özellik ve yapıların ortaya çıkarılması gerekir. Örneğin doğrusal denklem takımları, doğrusal diferansiyel denklemler, doğrusal integral denklemler ile ilgili problemleri çözmeğe çalışan bir kişi, bir süre sonra birbirinden farklı matematik dallarına ait olarak

bilinen bu problemleri çözümlerinde aslında aynı şeyin yapılmağa çalışıldığını, diğer bir deyişle her üç grupta da doğrusal bir operatörün tersinin elde edilmek istendiğini, veya operatörün spektrumunun ve bunun bazı özelliklerinin arandığını farkeder. Böylece bu problemlerle ayrı ayrı kompartmanlar içinde uğraşılacak yerine doğrusal vektör uzayları, doğrusal topolojik uzaylar, Banach cebirleri gibi soyut yapılar aksiyom grupları ile tanımlanır, bu yapılardaki temel özellikler bu bulgular kümesi tek bir kez elde edilir, fakat bulunanlar bu soyut yapının kapsadığı bütün problem alanları veya altyapılar için geçerli olur. Bu soyut yapı içinde elde edilen sonuçlar, uygulamalı matematiğin değişik dallarında bilinen, kullanılan pekçok bulgunun, özelliğin ortak rezümesi veya imbiikten geçirilerek elde edilen özsuu gibidir. Örneğin bir Banach cebri için kanıtlanan bir teorem gerçekte birçok matris diferansiyel veya integral denklem probleminde gereksinim duyulan has değer (eigen-value) özelliklerini hepsi için geçerli olacak en genel biçimde verir. Fakat burada çok ilginç diğer bir gelişme de izlenir. Matematikçiler bir süre sonra hangi bilinen sonuçlar kümesinin imbiikten geçirilmiş şekli olduğuna dikkat etmeksizin yeni bulgular elde etmeğe başlarlar, diğer bir deyişle bu soyut yapıların salt kendi kuralları içinde yollarına devame derler. Aksiyomlar ve tanımlarla yapay olarak kurulan çatı bunlardan zorunlu olarak elde edilebilen birçok sonuç ve bulguyu da beraberinde getirir. Genelde de geriye dönülüp bunların uygulamaya yönelik yorumları olup olmadığı kaygısı taşınmaz. Böylece yukarıda sözü edilen sarmal gelişim ortaya çıkar. Diğer bir deyişle Russell'in duru, heykelimsi estetiğine sahip soyut matematiksel yapı eğer büyük bir matematiğin elinden çıkmassa 'Fındıkkıran' kalesindeki tılsımlı oyuncaklar örneği canlanır. Artık matematikçi kendisini yine başlardaki edilgen konumunda bulur. Kendi kurduğu fakat canlanan yapı karşısında yeniden bir fizikçi veya biyolog gibi gözlemlerde bulunmak, keşifler yapmak zorundadır. Belki matematikteki gerçek güzelliği de bu çok girift, sarmal gelişim ortamında izlenen yol belirler.

KAYNAKÇA

- 1) Bertrand Russell: *The Study of Mathematics in Mysticism and Logic*, Doubleday & Company Inc. (1960), pp.55-69.
- 2) *Beauty in Mathematics*, Mathematical Intelligencer, Vol. 10, no. 4, (1988), pp. 31.

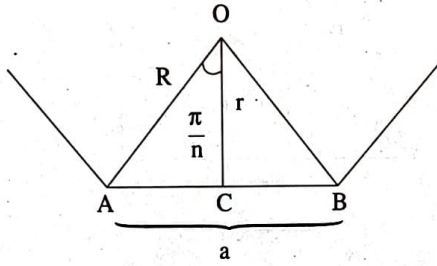
DÜZGÜN ÇOKGENLER VE ÇİZİLEBİLİRLİKLERİ

AZİZE BASTIYALI HAYFAVİ

Düzgün çokgen, tüm kenar uzunlukları eşit ve tüm iç açıları aynı olan çokgenlerdir

n – kenarlı bir düzgün çokgen çember içine çizildiği zaman, merkezden iki komşu köşeye çizilen yarıçapların oluşturduğu merkezi açı

$\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ veya $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ radiandır.



Şekil 1

Şekil 1'de görüldüğü gibi, n – kenarlı bir düzgün çokgenin kenar uzunluğunu, $|AB| = a$, iç çember yarıçapını $|OC| = r$, çevrel çemberin yarıçapını $|OA| = R$, ve alanını da S ile gösterelim. Çokgenimiz n – kenarlı

olduğundan $\widehat{AOB}$ açısı $\frac{2\pi}{n}$ radian ve bunun yarısı olan $\widehat{AOC}$ açısı $\frac{\pi}{n}$ radiandır. Böylece AOC dik üçgenini dikkate alarak hemen :

$$\frac{a}{2} = R \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{a}{2} = r \tan \frac{\pi}{n}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Bu eşitliklerden birisini R 'ye, ikincisini de r 'ye göre çözerek

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \csc \frac{\pi}{n} \quad \text{ve} \quad r = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{n}$$

elde edilir.

Tekrar Şekil 1'e bakarak n –kenarlı bir çokgenin alanı için de:

$$S = n [\text{AOB üçgeninin alanı}] = n \frac{1}{2} |AB| \cdot |OC| = n |AC| |OC|$$

olduğu görülür.

Böylece,

(i) kenar uzunluğu cinsinden :

$$S = n \frac{a}{2} r = n \frac{a^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}$$

olarak

(ii) R cinsinden :

$$S = n R \sin \frac{\pi}{n} R \cos \frac{\pi}{n} = n \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

olarak

(iii) r cinsinden :

$$S = n r \left(\tan \frac{\pi}{n} \right) r = n r^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

olarak ifade edilebilir.

Örneğin, bir düzgün üçgen için, yani bir eşkenar üçgen için yukardaki formülleri kullanarak;

$$a = R \sqrt{3}, \quad r = \frac{R}{2}, \quad R = \frac{a \sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a \sqrt{3}}{6},$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad S = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$$

formüllerini hemen yazabiliriz.

Çokgenlerle ilgili diğer bağıntıları, yazının sonundaki Tablo'da bulabilirsiniz.

Şimdi de hangi düzgün çokgenlerin çizilebilir olduklarını ve nasıl çizilebileceklerine bakalım.

Bazı düzgün çokgenlerin çizimi ta Pythagoras (M.Ö. 530) zamanından beri bilinmektedir. Bunlar, kenar sayıları 3,4,5,6,8,10 veya bu sayıların iki katı olan düzgün çokgenlerdir. Fakat düzgün 7 genin pergel-cetvelle çizilemediğini de farkettiler. Böylece hangi düzgün çokgenlerin Euclid anlamında (yani pergel ve cetvel kullanarak) çizilebilir oldukları konusu gündeme gelmiştir.

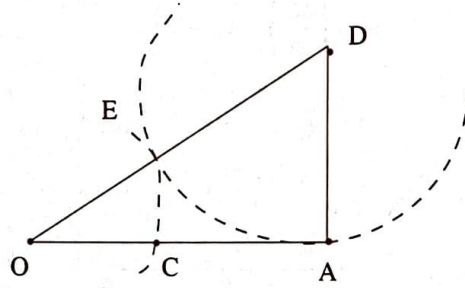
Bu soruya yanıt ancak Gauss (1777-1855) tarafından verilebilmiştir. Bunun için evvela Fermat sayılarına tanımlıyalım. $2^{2^n} + 1$ şeklindeki sayılar *Fermat sayıları* olarak bilinmektedir ve Fermat tüm bu sayıların asal sayılar olduklarına inanmaktaydı. Hakikaten $n = 0$ için $2^{2^0} + 1 = 3$, $n = 1$ için $2^{2^1} + 1 = 5$, $n = 2$ için $2^{2^2} + 1 = 17$, $n = 3$ için $2^{2^3} + 1 = 257$, $n = 4$ için $2^{2^4} + 1 = 65537$ sayıları asal sayılardır. Fakat $n = 5$ için $2^{2^5} + 1$ sayısının asal olmadığı Fermat'dan bir yüzyıl sonra Euler tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca, şimdiye kadar $n = 6,7,8,9$ için de Fermat sayılarının asal olmadıkları ispatlanmıştır. Fakat hala Fermat asal sayılarının sonlu sayıda olup olmadığı sorusu yanıtlanamamıştır.

Fermat sayılarını tanımladıktan sonra tekrar konumuza dönelim. Gauss evvela 17 kenarlı düzgün çokgenin Euclid anlamında çizilebilir olduğunu gösteriyor ve daha sonra da kenar sayıları diğer Fermat asal sayılarına eşit olan düzgün çokgenlerin çizilebildiklerini ispatlıyor. Bununla da kalmayıp, m pozitif bir tam sayı ve $p_1, p_2, \dots, p_r$ farklı Fermat asal sayıları olmak üzere, tüm $N = 2^m p_1 p_2 \dots p_r$ kenarlı düzgün çokgenlerin de çizilebilir olduklarını ispatlamıştır. Böylece, şimdiye kadar kenar sayısı asal olan yalnızca 5 tane düzgün çokgen çizilebilmektedir. İki tanesi M.Ö. 530'lardan beri bilinmektedir (düzgün üçgen ve düzgün

beşgen) üç tanesi de Gauss tarafından keşfedilmiştir. Bunlar kenar sayıları 17, 257 ve 65537 olan düzgün çokgenlerdir.

Biz bunlardan sadece düzgün beşgenin çizimini vermeğe çalışacağız. Bunun için evvela düzgün on kenarlıyı çizeceğiz ve köşelerini birer atlayarak birleştirerek düzgün beşgenimizi elde edeceğiz.

Verilen R yarıçaplı bir çember içine düzgün ongen çizmek için R uzunluğunu "altın oran"* olarak bilinen oranda bölmek gerekiyor. Bunun için evvela verilen bir doğru parçasını geometrik yoldan altın oranda nasıl böleceğimizi görelim.



Şekil 2

OA verilen doğru parçası olsun, buna dik olarak $AD = \frac{1}{2} OA$ doğru parçasını çizelim (Şekil 2). Eğer $|OA| = R$ ise $|AD| = \frac{R}{2}$ olur. Daha sonra O ile D yi birleştirdiğimizde, hipotenüs

uzunluğu $|OD| = \frac{\sqrt{5}}{2} R$ olan OAD dik

ongenini elde ederiz. Şimdi D köşesini merkez olarak alıp, yarıçapı $|DA|$ olan daire yayını çizelim. Bu daire yayı DO kenarını E noktasında kessin.

$$\text{Böylece } |OE| = \frac{\sqrt{5}}{2} R - \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R \\ = (0.618 \dots) R \text{ olur.}$$

* OA doğru parçasını altın oranda bölmek demek, O ve A arasında öyle bir C noktası bulmak demektir ki $OA : OC = OC : CA$ olsun.

Daha sonra OE yi pergelde OA üzerine taşıdığımızda, AO nin altın bölümünü veren C noktasını bulmuş oluruz. Gerçekten :

$$|OA| : |OC| = |OC| : |CA|$$

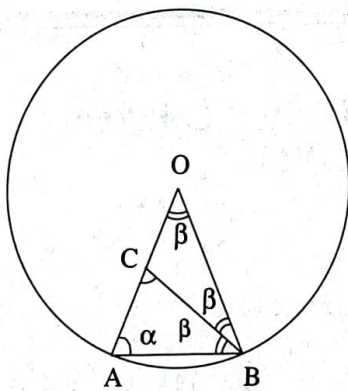
olduğunu hemen gösterebiliriz. Hakikaten :

$$R : \frac{\sqrt{5}-1}{2} R = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R : \left(R - \frac{\sqrt{5}-1}{2} R \right)$$

dir.

Altın oran, bir takım geometrik çizimlerin gerçekleştirilmesinde kullanılmasının yanı sıra, doğada, mimari yapılarda da hep karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, Atinada bulunan Akropolis'deki Parthenon mabedinde bu oranın kullanımına bolca rastlanmaktadır. Altın oranın hem sıkça karşılaşılmışından, hem de bir takım ilginç özelliklerinden dolayı ayrıca ele alınması gerekir.

Şimdi geleyim bizim düzgün ongenimizin çizimine, R yarıçaplı bir çember verilmiş olsun, bunun içine düzgün ongen çizmeğe çalışacağız. Göstereceğiz ki çemberin yarıçapını altın oranda böldüğümüz zaman büyük olan kısmı bu çemberin içine çizilen düzgün ongenin kenar uzunluğuna eşittir.



Şekil 3

Şekil 3'de görüldüğü gibi çemberin yarıçapı $|OA| = R$ uzunluğunda olsun ve C noktası OA yi altın oranda bölen nokta olsun, yani

$$|OA| : |OC| = |OC| : |CA|$$

olsun. Göstereceğiz ki $|OC|$ bu çemberin içine

çizeceğimiz düzgün ongenin kenar uzunluğudur.

Şekil 3'de görüldüğü gibi A noktasından başlayarak kenar uzunluğu $|OC|$ olan düzgün çokgeni çizmeğe başlarsak tam bir düzgün ongen elde ederiz. $|AB| = |OC|$ dir. Bunun düzgün ongen olduğunu göstermek için OAB ikizkenar üçgeninde tepe açısının 36° olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

OAB ikizkenar üçgeninde, taban açılarını α ile gösterelim CD yi birleştirelim.

$$\text{Altın bölmeden dolayı : } \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{CA} \text{ dir.}$$

Fakat $OA = OB$ ve $OC = AB$ olduğundan aynı oranı

$$(**) \quad \frac{OB}{BA} = \frac{BA}{CA} \text{ yazabiliriz.}$$

Şimdi OAB ve CAB üçgenlerini dikkate alalım. Bunlar bir açılarının ortak olmasından ve (**) daki oranların eşitliğinden dolayı, benzer üçgenlerdir. Öyleyse $\widehat{AOB} = \widehat{CBA}$ dir. Şekilde bunları β ile gösterdik. Benzerlikten dolayı CAB de ikizkenar üçgendir, yani $CB = AB$ dir. Demekki $OC = AB = CB$ dir.

Böylece OCB nin de ikizkenar üçgen olduğu görülür. Öyleyse taban açıları :

$$\widehat{OBC} = \widehat{AOB} = \beta \text{ dir.}$$

Bir üçgende iç açılar toplamı 180° olduğundan

$$180^\circ = \widehat{BOA} + \widehat{OBA} + \widehat{BAO} \\ = \beta + \alpha + \alpha$$

Fakat $\alpha = 2\beta$ olduğundan

$$180^\circ = \beta + 2\beta + 2\beta$$

$$180^\circ = 5\beta, \quad \beta = \left(\frac{180^\circ}{5} \right) = 36^\circ$$

olduğu görülür.

AB kirişini gören merkezi açı 36° olduğundan, AB kirişi, R yarıçaplı çemberin

içine çizilen düzgün ongenin kenarıdır. Düzgün ongeni elde ettikten sonra köşelerini bir atlayarak birleştirek düzgün beşgen elde edilmiş

olur. Düzgün 17 kenarlıının çizimini Howard EVS'in "A survey of Geometry" Vol. 1 kitabında bulabilirsiniz.

Düzgün çokgenlerde kenar uzunluğu, iç ve dış çember yarıçapları ve alanları ile ilgili bağıntılar

Düzgün Çokgen	R cinsinden		kenar uzunluğu a cinsinden		Alan S	
	kenar uzunluğu	iç çember yarıçapı r:	genel çember yarıçapı R:	iç çember yarıçapı r:	a kenarı cinsinden	R cinsinden
Üçgen	$a=R \sqrt{3}$	$r=\frac{R}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
Dörtgen	$a=R \sqrt{2}$	$r=\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r=\frac{a}{2}$	$S=a^2$	$S=2R^2$
Beşgen	$a=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$r=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	$R=\frac{a}{10}\sqrt{10+10\sqrt{5}}$	$r=\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$S=\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Altıgen	$a=R$	$r=\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$R=a$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$S=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
Sekizgen	$a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$r=\frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$R=\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$r=a(1+\sqrt{2})$	$S=2a^2(1+\sqrt{2})$	$S=2R^2\sqrt{2}$
Ongen	$a=\frac{R}{2}\sqrt{5}-1$	$r=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$R=\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$r=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$S=\frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$S=\frac{5R^2}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Onikigen	$a=\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$r=\frac{R}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$R=\frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$	$r=\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$	$S=3a^2(2+\sqrt{3})$	$S=3R^2$

HENDESE BİLEN MÜFTÜ İLE HENDESE BİLMİYEN MÜFTÜNÜN FETVASIDIR

KATİP ÇELEBİ

(Mizanü'l - Hakk fi lhtiyaril - Ahakk'tan)

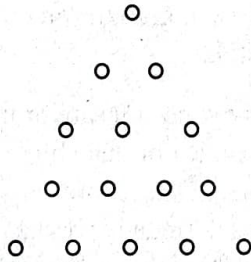
Bir kimse boyu ve eni ve derinliği dört zira bir kuyu kazmak için birini sekiz akçaya tuttu. O da boyu ve eni ve derinliği iki zira olan bir kuyu kazdı ve karşılığında dört akça istedi. Fetva ettirdiler hendese bilmeyen müftü dört akça hakkıdır, dedi. Hendese bilen müftü hakkı bir akçadır diye fetva verdi; doğrusu da budur. Çünkü iki zira kuyu dört zira kuyunun sekizdebirdir; ücretin de sekizde biri olması gerekir. Bunların aslını bilmek isteyen riyaziyat görmeye heves eyleye.

MATEMATİKÇİ HİLESİ

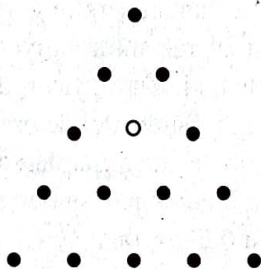
ALİ NESİN

B izim bölümün tam karşısına yeni bir lokanta açılmış. Bana kalırsa kötü bir yer seçilmiş. Kaç kişi gider ki o lokantaya? Yakında batar. Batmadan gidelim dedik ailecek. Gittik de. Her masanın üstüne bir oyun koymuş lokanta sahibi. Herhalde çocukların oyuna dalıp, annelerini babalarını rahat bırakmaları düşüncesiyle konmuş olacak. Güzel bir buluş. Kendimi bildim bileli oyuna düşünürüm. Eşim de oyuna az düşünmüştür. Oyunağı çocukların elinden alıp oynamaya başladık ("Yemekte oyun oynanmadığını bilmiyor musunuz?"). Çocukların sonradan söylediğine göre, biz oyuna dalmışken onlar da rahat rahat "makarna savaşı" yapmışlar.

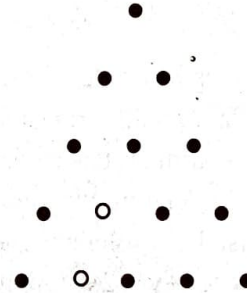
"Yalnızların Oyunu" diye adlandırılan bu oyun, adından da anlaşılacağı gibi, tek kişilik bir oyun. Tahtadan bir üçgenin üstüne $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, yani 15 tane, delik açılmış. Şöyle:



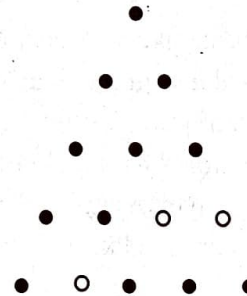
Ve bu deliklere girebilecek büyüklükte 14 tane çubuk var. 14 tane çubuğu deliklere yerleştireceksiniz (deliklerden biri boş kalacak demek ki). Örneğin şöyle (boş kalan deliği beyaz, çubuklu delikleri siyah olarak gösteriyorum):



Yapabileceğiniz bir tür yasal hamle var: çubuklardan birini yanındaki ya da çaprazındaki çubuğun üstünden aşırıp bir sonraki deliğe sokabilirsiniz, ama bu hamleyi yapabilmemiz için çubuğun gireceği deliğin boş olması gerekir. Ve üstünden aşılacak çubuk oyundan çıkartılır. Örneğin yukarıdaki durumda, en alt sıradaki soldan ikinci çubuğu, kuzey doğusundaki çubuğun üstünden aşırıp aşağıdaki durumu elde edebilirsiniz:



Bundan sonra, ikinci sıranın en sağındaki çubuğu solundaki çubuğun üstünden aşırabilirsiniz:



Gitgide, çubuk sayısı azalır. Amaç olabildiğince az çubuk bırakmak. Oyunun arkasında şöyle yazıyor:

Üç çubuk bırakan - eh! şöyle böyle - 10 puan.

İki çubuk bırakan - ortalamanın üstünde - 25 puan.

Bir çubuk bırakan - çok zeki - 50 puan.

Bir çubuğu oyunun başındaki boş delikte bırakan
- çok parlak - 100 puan .

Hiçbiri kımlıdayamayacak biçimde 8 çubuk
bırakan - dahi - 200 puan.

Uzun süre "eh! şöyle böyle"ydik. Neden sonra
"çok zeki" aşamasına geçebildik. Çok
uğraşmamıza karşın "çok parlak" olamadık.
Sıkıldık. "Dahi" aşamasını denedik. Baktık
"dehalik" da kolay değil, hileye baş vurduk.
Başvurduğumuz hile, aslında matematiğe sık
kullanılan bir yöntemdir: kanıtlanacak teoreme
sondan başlanır. Yani kanıt sondan başa doğru
bulunur. Örneğin, diyelim iki pozitif sayı için

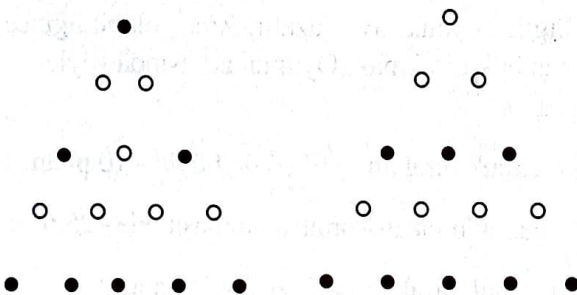
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

eşitsizliğini kanıtlamanız gerekiyor. Kanıtlamak
istediğiniz bu eşitsizliğin karesini alırsanız,

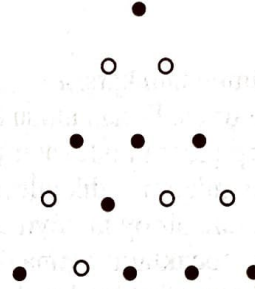
$$x+y \leq x + 2\sqrt{xy} + y$$

bulursunuz. Sadeleştirince de bildiğimiz
 $0 \leq 2\sqrt{xy}$ eşitsizliği bulunur. Kanıtı yazmak
için yukarıdaki çıkarımları ters çevirmek gerekir:
 $0 \leq \sqrt{xy}$ eşitsizliğinden $0 \leq 2\sqrt{xy}$ eşitsizliğini
çıkartırız, bu eşitsizliğin soluna ve sağına $x+y$
ekleyerek, $x+y \leq x+y + 2\sqrt{xy}$ buluruz. Bu son
eşitsizliğin sağ tarafındaki terim $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ ye
eşit. Şimdi iki tarafın da karekökünü alarak,
dilediğimiz eşitsizliği kanıtlamış oluruz". İşte
başvurduğumuz hile bu yöntemden esinlenmişti.

Oyuna sondan başladık. Oyunun sonundaki
durumların ne olabileceğini bulduk önce. Sekiz
tane çubuğu, hiçbiri kımlıdayamayacak biçimde
nasıl yerleştirebilirdik? Kısa bir denemeden
sonra (simetrisini saymazsak) iki çözümün
olduğunu kolaylıkla anladık:



Çözümleri saptadıktan sonra, çözümlerden bir
önceki hamlelerin ne olabileceklerine baktık.
Örneğin, yukarıdaki birinci duruma gelebilmek
için, en alt sıranın soldan ya ikinci ya da
dördüncü çubuğu oynanmıştır. Bu durumdan bir
önceki durum şöyle olabilir:



Sonra, teker teker daha önceki hamlelerimizin ne
olabileceklerini saptadık. Yani geriye doğru
gittik. Toplam 14 çubuk var, demek ki 8 çubuk
bırakmak için geriye doğru 6 hamle yapmamız
gerekir. Oyunun tam bir şemasının çıkardık.
Bir sonraki sayfada bu şemayı bulacaksınız.
Bazan, geriye gidemedik, yani öyle bir duruma
geldik ki, bir önceki hamle olamaz o durumda. O
zaman durduk elbet. Ama, bir önceki hamle-ya
da hamleler - oldukça, geriye gitmeyi sürdürdük.
Geriye doğru 6 hamle yapabilmemiz
gerekliyordu, yaptık da. Çift çerçeveli resimleri
aşağıdan yukarıya doğru izleyerek "dahi"
ünvanını elde ettik.

Bu "yalnızların oyunu" nu satıyormuş lokantacı.
Aldık elbet. Hem de dört tane birden aldık.
Herkes bir tane... Daha sonra sık sık gittik bu
lokantaya. Her seferinde bir başka oyun vardı.
Hepsinde de zekâ ölçülüyordu: "Zehir gibisiniz!"
"Böylesi görülmemiş!", "Aşkolsun", "Evrenin en
zeki yaratığı!" "Süper, ultra, extra, çok ama çok
üstün zekâ!" Oyunlar da ucuz değil. Ama o kadar
çok emek verdikten sonra almamak da olmuyor.
Önceleri haftada bir gidiyorduk ailecek, sonra
ben tek başıma kaçamaklar yapmaya başladım.
Bölümün de tam karşısında olduğundan gitmesi
kolay oluyor. Ne zaman hergün gitmeye
başladığımı tam olarak anımsamıyorum.
Birdenbire olmadı ki. Yavaş yavaş alıştım. Bizim
bölümünden hocalar, öğrenciler de orada yiyorlar
öğlen yemeklerini. Hatta akşamları aileleriyle
gelenler de var. Yemek parasından başka, bir de
oyuncak parası ödüyörüz...

Günlerden birgün, yine o lokantada "Dehaların dehası" olmaya çalışırken arka masadan bir konuşma kulağıma çarptı. Lokantanın sahibi bir arkadaşıyla konuşuyordu. Arkadaşı,

-Eee? İşler nasıl? diye sordu.

- Yuvarlanıp gidiyoruz işte... diye yanıtladı lokantacı.

- O kadar lokantacı iflas etti, sen nasıl dayanıyorsun şaşıyorum...

- Yemekten pek kazanılmıyor doğrusu...

- Neden kazanılıyor ya?

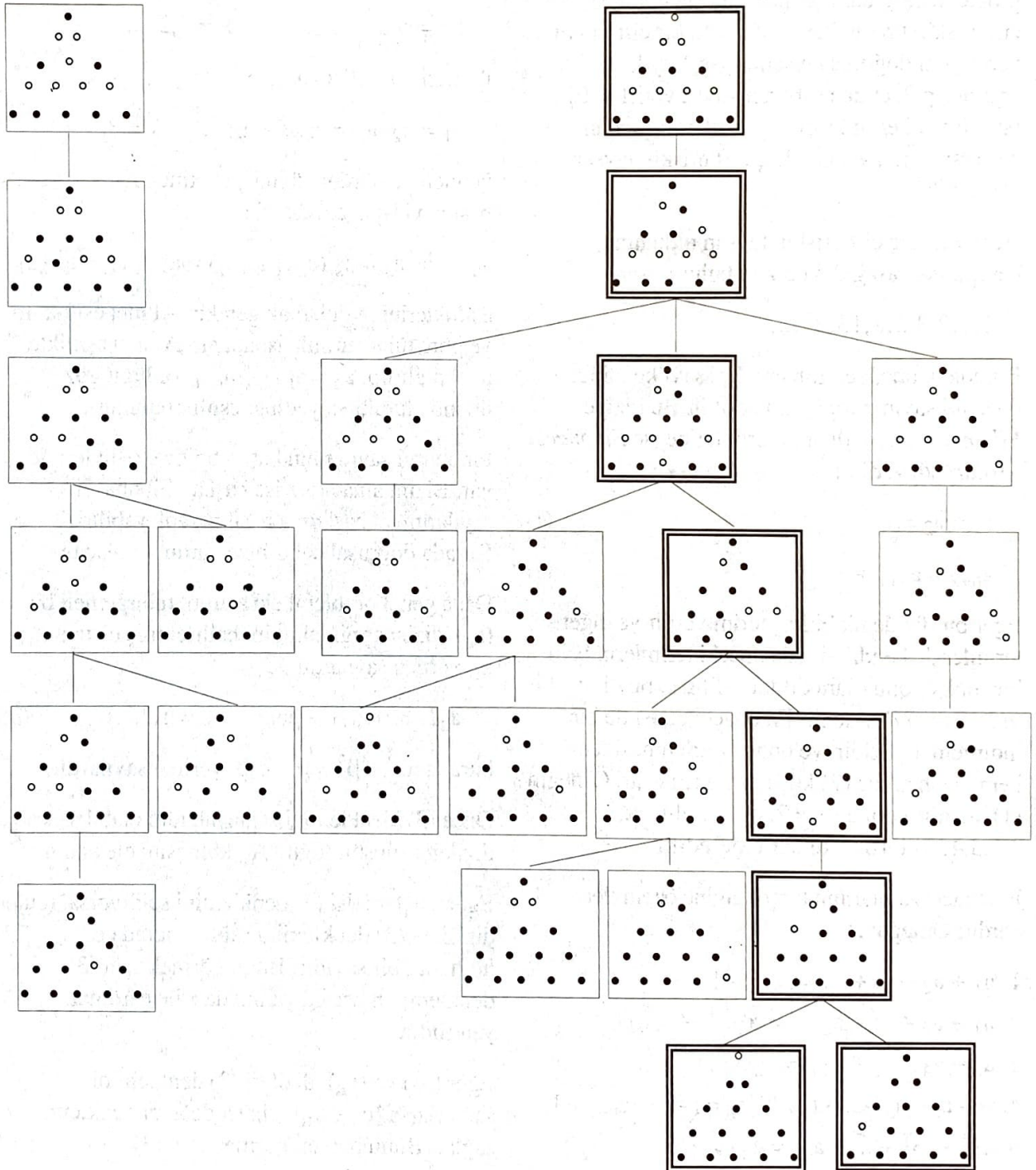
- Oyuncaklardan...

- Oyuncaklardan mı?

- Oyuncaklardan ya! Şu karşıdaki binayı görüyor musun? İşte orası matematik bölümü.

Matematikçilere gururlarına okşayacak oyuncaklar sunuyorum. Sözümona zekâ ölçen oyuncaklar. Sen bu matematikçileri bilmezsin. Dayanamazlar bu tür oyuncaklara ve övgülere...

Kıssadan hisse: Para kazanmanın yolu bir değildir, kimi lokanta işleterek para kazanır. kimi de oyun oynatarak...



FİBONACCİ SAYILARI HAKKINDA BİR KURAL

FARAMAZ MAKSUDOV, CAFER VELİEV

1 202 yılında İtalyan matematikçisi Pisa'lı Leonardi (İakabı Bonacci), "Abak hakkında kitap" isimli eserini yazdı. Bu eserde tavşanların çoğalmasına dair bir problem var. Bu problemi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz: "Bir çift erişkin tavşan her ay bir defa bir çift yavru verir, yeni doğmuş tavşanlar ise 1 ayda erginleşip 2. aydan itibaren yavru verirler. Eğer bir çift yeni erginleşmiş (1 aylık) tavşandan başlarsak, n ay sonra kaç çift erişkin tavşan olacaktır?"

Her ayda kaç çift erişkin tavşan olduğunu hesaplırsak aşağıdaki diziyi buluruz :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Burada üçüncüden itibaren her sayı kendinden önce iki sayının toplamına eşittir. Bu diziyi *Fibonacci dizisi*, dizinin terimlerine ise *Fibonacci sayıları* adı verilir :

$$a_1 = a_2 = 1 \quad (1)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (2)$$

Eğer bir dizide ilk birkaç terim verilir ve diğer terimler de kendilerinden önceki terimlerin belli bir fonksiyonu olarak ifade edilirse, bu diziyi bir *indirgemeli dizi* denir. Fibonacci dizisi de bir indirgemeli dizidir, ve onun belirlenmesi için hem (1), hem de (2) koşulları önemlidir. Örneğin (1) koşulu yerine $u_1 = 2, u_2 = 1$ alırsak, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... dizisi elde edilir.

Fibonacci sayılarının birçok ilginç özellikleri vardır; Örneğin :

1. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$,
2. $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$,
3. $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+2} - 1$,
4. $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1}a_n = (-1)^{n+1}a_{n-1} + 1$,
5. $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$,

$$6. a_{n+m} = a_{n-1}a_m + a_n a_{m+1},$$

$$7. a_{2n} = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2.$$

Birinci eşitliği ispat etmek için

$$a_k = a_{k+2} - a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ikincisini ispatlamak için

$$a_1 = a_2, a_k = a_{k+1} - a_{k-1}, \quad k = 3, 5, \dots,$$

üçüncü ve dördüncüyü ispat etmek için (1) ve (2) beşinciye ispat etmek için

$$a_k^2 = a_k \cdot a_k = a_k (a_{k+1} - a_{k-1}) = a_k a_{k+1} - a_k a_{k-1}$$

eşitliklerini uygulamak gerekir. Altıncı eşitlik m ye göre tümevarımla ispatlanır. Altıncı eşitlikte $m = n$ alınıp, $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ olduğu göz önünde tutulursa yedinci eşitlik bulunur.

Fibonacci sayılarının başka ilginç özellikleri de var. Bizim amacımız ise başka : Fibonacci sayılarını tekbaşlarına nasıl hesaplayabiliriz? Burada doğrusal cebir bize yardımcı olacak.

Daha genel problemi ele alalım. İndirgemeli bir (a_n) dizisi aşağıdaki gibi belirlenmiş olsun: a_1, a_2 verilen sayılardır ve

$$a_{n+1} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

burada $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; α, β verilen sayılardır.

Önce (3) denklemini sağlayan tüm olabilecek dizilerin oluşturduğu A kümesini ele alalım.

Eğer (u_n) dizisi (3) denklemini sağlıyorsa (cu_n) dizisi de (3) denklemini sağlar, burada c herhangi bir sayıdır. Bunu görmek için (3) denkleminin her iki yanını da c ile çarpmak yeterlidir.

Eğer (u_n) ve (v_n) dizileri (3) denklemini sağlarsa $(u_n + v_n)$ dizisi de aynı denklemi sağlar. Bunu hemen görmek için (3)

denkleminde önce $a_n = u_n$, sonra $a_n = v_n$ yazıp, eşitlikleri taraf tarafa toplamak gerekir.

Böylece gördük ki, eğer $(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$ ise, $(c_1 u_n + c_2 v_n) \in A$ dır.

$(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$ olsun. Eğer

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = 0 \quad (4)$$

$$c_1 u_2 + c_2 v_2 = 0 \quad (5)$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde, en az biri sıfırdan farklı c_1, c_2 sayıları varsa (u_n) ve (v_n) dizileri *lineer bağımlıdır*. Tersine, (4) ve (5) i sağlayan en az biri sıfırdan farklı c_1, c_2 sayıları yoksa, bu durumda (u_n) ve (v_n) dizileri *lineer bağımsızdır* denir.

Lemma 1: $(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$ ve $w = u_1 v_2 - u_2 v_1$ olsun. (u_n) ve (v_n) dizilerinin lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul $w \neq 0$ olmasıdır.

İspat : Gereklilik. Aksini kabul edelim: (u_n) ve (v_n) lineer bağımsız ancak $w = 0$ olsun. $u_1 = u_2 = 0$ olamaz, örneğin $u_2 \neq 0$ alırsak (4-5) eşitlikleri sağlanır.

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = u_1 v_1 - u_2 v_1 = w = 0$$

$$c_1 u_2 + c_2 v_2 = u_2 v_2 - u_2 v_2 = 0$$

Bu ise (u_n) ve (v_n) dizilerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir. Böylelikle çelişki elde ederiz, ona göre $w \neq 0$ dır.

Yeterlilik: Aksini kabul edelim: $w \neq 0$ olduğunu ancak (u_n) ve (v_n) dizilerinin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. O halde en az biri sıfırdan farklı olan öyle c_1, c_2 sayıları vardır ki (4-5) eşitlikleri sağlanır $c_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde (4-5) ten

$$v_1 = -c_1 u_1 / c_2, \quad v_2 = -c_1 u_2 / c_2$$

ve

$$\begin{aligned} w &= u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ &= u_1 (-c_1 u_2 / c_2) - u_2 (-c_1 u_1 / c_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

buluruz. Yine çelişkiye ulaştık. Lemma ispat olundu.

Lemma 2. $(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$; (u_n) ve (v_n)

lineer bağımsız olsunlar. (z_n) , A da olan herhangi bir dizi olsun. Bu durumda öyle tek bir c_1, c_2 çifti vardır ki

$$z_n = c_1 u_n + c_2 v_n \quad n = 1, 2, \dots$$

ayrılığı doğrudur.

İspat:

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = z_1 \quad (6)$$

$$c_1 u_2 + c_2 v_2 = z_2 \quad (7)$$

denklemler sistemine bakalım. Lemma 1'den $w = u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ olduğunda (6-7) denklemlerini çözerek

$$c_1 = (z_1 v_2 - z_2 v_1) / w, \quad c_2 = (u_1 z_2 - u_2 z_1) / w$$

buluruz. (6) eşitliğini β ile, (7) yi de α ile çarparak taraf tarafa toplarsak

$$z_3 = c_1 u_3 + c_2 v_3$$

elde ederiz.

Tümevarım yöntemi ile benzer şekilde

$$z_n = c_1 u_n + c_2 v_n$$

olduğu gösterilir.

Şimdi (3) denkleminin iki lineer bağımsız çözümünü bulmak için (3) denkleminde $a_n \lambda^n$ değerini yerine koyalım.

$$\lambda^{n+2} = \alpha \lambda^{n+1} + \beta \lambda^n,$$

her iki tarafı

$$\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta = 0 \quad (8)$$

elde ederiz. (8) denklemini, (3) denkleminin *karakteristik denklemi* diye adlandırılır.

Aşağıdaki halleri ayrı ayrı gözden geçirelim :

$1 - D = \alpha^2 + 4\beta > 0$. Bu halde (8) denkleminin iki farklı kökü var :

$$\lambda_1 = (\alpha + D^{1/2}) / 2, \quad \lambda_2 = (\alpha - D^{1/2}) / 2$$

Bu halde biz (3) denkleminin lineer bağımsız $(u_n) = (\lambda_1^n)$ ve $(v_n) = (\lambda_2^n)$ çözümlerini elde ettik.

(3) denkleminin istenen (z_n) çözümü için

$$z_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

kuralını bulduk.

$$2 - D = \alpha^2 = 4\beta = 0 \text{ ya da } \beta = -\alpha^2 / 4.$$

Bu halde (8) denklemin kökleri çakışık.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha / 2$$

Bu halde $(u_n) = (\lambda_1^n)$ ve $(v_n) = (n\lambda_1^n)$, (3) denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. (u_n) dizisinin (3) denklemini sağladığını biliyorduk. $a_n = v_n$ yazıp (3) denkleminin doğru olup olmadığını yoklayalım.

$$u_n = n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n, \quad v_{n+1} = (n+1) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1},$$

$$v_{n+2} = (n+2) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2}$$

$$v_{n+2} - \alpha v_{n+1} + \frac{\alpha^2}{4} v_n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n [n+2 - 2(n+1) + n] = 0$$

Yani, (v_n) , (3) denkleminin çözümüdür. (u_n) ve (v_n) lineer bağımsızdır, çünkü:

$$v = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \lambda_1 \cdot 2\lambda_1^2 - \lambda_1^2 \cdot \lambda_1 = \lambda_1^3 \neq 0$$

$$3 - D = \alpha^2 + 4\beta < 0 \text{ ya da } \beta < -\alpha^2/4$$

olduğunda (8) denkleminin reel kökü yoktur. Bu halde aktarılan kuralı elde etmek için karmaşık sayılardan yararlanmak gerekir.

Şimdi n -inci Fibonacci sayısını belirlemek için hesaplama yapalım. (2) denkleminde $a_n = \lambda^n$ yazıp

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

karakteristik denklemini buluruz. Denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Böylelikle, biz (2) denkleminin $(u_n) = (\lambda_1^n)$ ve $(v_n) = (\lambda_2^n)$ lineer bağımsız iki çözümünü bulduk. (a_n) Fibonacci dizisinde $a_1 = a_2 = 1$ olduğunu göz önünde bulundurarak (6-7) denklem sistemini çözüp c_1 ve c_2 sayılarını buluruz:

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1$$

$$c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 = 1$$

$$c_1 = 1/\sqrt{5}, \quad c_2 = -1/\sqrt{5}. \text{ Böylelikle}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

veya kısaca yazarsak

$$a_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}, \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

kuralını bulduk. Bu kural ona ilk bulan matematikçinin adı ile Bine (?) kuralı diye adlandırılır. İlginç alan şudur ki, λ_1 sayısı "altın oran"ı ifade eder. (3) denklemini çözmek için yararlandığımız yöntem sabit katsayılı adı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılır.

Binet formülünü uygulayarak Fibonacci sayılarının aşağıdaki özellikleri ispat edilebilir.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_1,$$

$$2. a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = (a_{3n+2} - 1) / 2,$$

$$3. a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_{3n+2} + (-1)^{n+1} \cdot 6a_{n-1} - 1) / 10.$$

(öncelikle $a_k^3 = (a_{3k} + (-1)^{k+1} \cdot 3a_k) / 5$ olduğu gösterilmelidir.

4. a_n sayısı $\lambda_1^n / \sqrt{5}$ sayısına en yakın tamsayıdır.

$$5. s_n(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ olsun.}$$

O halde :

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{x - a_n x^{n+2} - a_{n+1} x^{n+1}}{1 - x} & \lambda_1 x \neq 1, \lambda_2 x \neq 1, \text{ ise.} \\ \frac{n}{\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}-5}{2} (1+(-1)^{n+1} \lambda_2^{2n}) & \lambda_1 x = 1 \text{ ise.} \\ \frac{n}{\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{10} (1+(-1)^{n+1} \lambda_2^{2n}) & \lambda_2 x = 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

SEÇİM VE MATEMATİK-2

TOPLUMSAL SEÇİMLER

H. İ. KARAKAŞ

S, boş olmayan bir seçenekler kümesi olsun. S nin elemanları, bir toplumun bireylerinin tercihlerini açıklayabilecekleri her hangi bir kişi, nesne veya görüş olabilir. Örneğin, S, (başkanlık sistemi ile yönetilen) bir ülkede başkanlık seçimlerine katılan adayların kümesi veya bir kentte belli bir arsanın hangi amaçla kullanılabileceği konusunda değişik görüşlerin kümesi olabilir.

S içinde tanımlı tüm kısmi sıralama bağıntıları (kısıba) nın kümesini κ ile göstereceğiz. Örneğin, $S = \{a, b\}$ ise, κ nın elemanları Hasse çizelgeleriyle gösterilerek,

$$\kappa = \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} o & a & o & b \\ | & & | & \\ o & b & o & a \end{array}, & o & o \end{array} \right\}$$

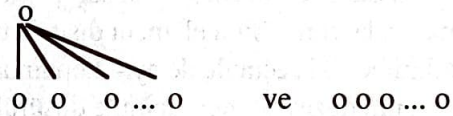
olduğu görülür. S içindeki tüm zayıf sıralama bağıntılarından oluşan kümeyi Z ile göstereceğiz. $S = \{a, b\}$ için $Z = \kappa$ dir. Üç elemanlı bir küme içinde 19 kısmi sıralama bağıntısı bulunduğu ve bunlardan sadece 13 ünün zayıf sıralama bağıntısı olduğu görülebilir.

Bir toplumun her bir bireyinin S yi kendince kısmi sıralaması durumunda, bireylerin görüşlerini de göz önüne alarak, toplumun S yi kısmi sıralarken izleyebileceği yolların neler olduğunu araştırmak istiyoruz. Böylece S hakkında verilecek toplumsal kararı, bireylerin kararlarının bir fonksiyonu olarak düşüneceğiz. Daha açık bir ifadeyle, κ nın iki alt kümesini ele alacağız: X ve Y. Bunlardan X, bireylerin S içinde belirlemelerine izin verilen kısmi sıralama bağıntılarından oluşan altküme, Y ise toplumun (S içinde) belirlemesine izin verilen kısmi sıralama bağıntılarından oluşan altkümedir.

Toplumun S hakkında alacağı bir kararda rolü

olacak bireylerin sayısı n olsun. Bu takdirde, bir toplumsal karar fonksiyonu, tanım bölgesi $X \times X \times \dots \times X = X^n$ ve değer bölgesi Y olan bir fonksiyondur: $f : X^n \rightarrow Y$. Tanım bölgesindeki her $(x_1, \dots, x_n)$ elemanı için x_i , i-inci bireyin S içinde belirlediği kısmi sıralama bağıntısıdır.

Örnek olarak, bir ülkenin başkanlık seçimlerinde, S, adayların oluşturduğu küme, n, oy kullanabilir seçmenlerin sayısı ve X, S içinde izin verilen kısmi sıralama bağıntılarıdır. Bir seçmen, ya bir adayı diğerine tercih edeceği ya da oy kullanmaktan kaçınacağı için X, iki tür kısıba dan oluşur:



Bu tür bir seçimde, toplumsal karar fonksiyonu, yukarıdakilerden, birinci tipte bir kısmi sıralama bağıntısı vermek durumundadır. Toplumsal karar fonksiyonunun verdiği kısmi sıralama bağıntısının büyükçe elemanı en çok oy alan aday olacaktır. Aynı çoklukta oy alan bir kaç aday varsa, bu durumda seçim görevlisi veya görevlileri, sonucu kura ile belirleyebilir.

Çok değişik toplumsal karar verme yöntemleri ya da toplumsal karar fonksiyonları vardır. Bunlar arasında, yukarıdakine ek olarak, ağırlıklı oylama yöntemi ve tercihlili oy yöntemi sayılabilir.

Burada, özel bir toplumsal karar fonksiyonu ele alıp incelenmekten daha çok, toplumsal karar fonksiyonlarının genel özelliklerini, daha önemlisi, bir toplumsal karar fonksiyonunun arzu edilen özelliklerini araştırmak istiyoruz. Bunun için, önce bazı gösterimler belirleyeceğiz.

S, X, Y, f ve n yukarıdaki gibi olmak üzere, seçmenler kümesini

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

ile özdeşleştirilim, $a, b \in S; \kappa_1, \dots, \kappa_n \in X$ için

$$(a, b) \in \kappa_i \text{ ise } a \geq_i b; 1 \leq i \leq n,$$

$$a \text{ ile } b \text{ } \kappa_i \text{ ye göre ayrımsız ise } a \sim_i b; 1 \leq i \leq n,$$

$$a \text{ ile } b \text{ } f(\kappa_1, \dots, \kappa_n) \text{ e göre ayrımsız ise } a \sim b, \text{ ve}$$

$$(a, b) \in f(\kappa_1, \dots, \kappa_n) \text{ ise } a \geq b$$

yazacağız. Benzer biçimde; $\kappa'_1, \dots, \kappa'_n \in X$ için

$$(a, b) \in \kappa'_i \text{ ise } a \geq'_i b, 1 \leq i \leq n$$

$$a \text{ ile } b \text{ } \kappa'_i \text{ ye göre ayrımsız ise } a \sim_i b; 1 \leq i \leq n,$$

$$a \text{ ile } b \text{ } f(\kappa'_1, \dots, \kappa'_n) \text{ e göre ayrımsız ise } a \sim' b,$$

$$\text{ve } (a, b) \in f(\kappa'_1, \dots, \kappa'_n) \text{ ise } a \geq' b \text{ yazacağız.}$$

Aynı seçenekler kümesi üzerinde iki kez seçim yapıldığını düşünelim. Bireylerin seçenekleri sıralamasında, S nin bir a elemanı dışında tüm elemanları her iki seçimde de aynı konumda kalmış, a nın düzeyi ikinci seçimde düşürülmüş ve toplumsal karar fonksiyonu birinci seçimde a yı bir b seçeneğine tercih etmiş ise, ikinci seçimde de a yı b ye tercih etmesi arzu edilen bir özelliktir. Bu özellik, sembolik olarak şöyle ifade edilir.

Birinci Özellik, $a, b \in S; \kappa_1, \dots, \kappa_n; \epsilon X \kappa'_1, \dots, \kappa'_n$ olsun. Her $c, d \in S, c \neq a, d \neq a$ ve $i \in I_n$ için

$$c \geq_i d \leftrightarrow c \geq'_i d$$

olduğunu ve her $e \in S$ için

$$a \geq_i e \Rightarrow a \geq'_i e$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$a \geq b \Rightarrow a \geq' b$$

olur.

Toplumsal karar fonksiyonunun arzu edilen bir diğer özelliği, herhangi iki seçenek arasında yapılacak toplumsal tercihin sadece ve sadece o seçenekler arasında bireylerin yapacakları tercihlerle ortaya çıkmasını sağlamasıdır. Sembolik ifade ile,

İkinci Özellik. $a, b \in S; \kappa_1, \dots, \kappa'_n; \kappa'_1, \dots, \kappa'_n \in X$ olsun. Eğer her $i, j = 1, \dots, n$ için

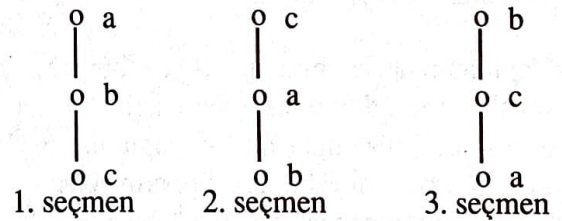
$$a \geq_i b \leftrightarrow a \geq'_i b \text{ ve } b \geq_i a \leftrightarrow b \geq'_i a$$

ise, bu takdirde

$$a \geq b \Leftrightarrow a \geq' b$$

olur.

Herhangi bir seçim sonunda, toplumsal karar fonksiyonu uygulandığında, bir toplumsal tercihin ortaya çıkması arzu edilir. Yukarıdaki iki özelliği sağladığı halde, bir toplumsal tercih ortaya koymayan karar fonksiyonları vardır. Örneğin, bir seçimde a seçeneğini b seçeneğine tercih eden bireylerin sayısı, b yi a ya tercih edenlerin sayısından fazla ise, toplumsal karar fonksiyonunun a yı b ye tercih ettirdiğini kabul edelim. Bu çoğu zaman uygulanan akla yatkın bir yöntem gibi görünse de, bir toplumsal tercih ortaya koymayabilir. Şöyle ki, üç seçenekli, yani $S = \{a, b, c\}$, ve üç seçmenli bir seçimde, seçmenlerin seçenekler kümesini aşağıda verilen Hasse Çizelgelerinde görüldüğü gibi sıraladıklarını varsayalım:



Burada, a yı b ye, b yi c ye ve c yi a ya tercih edenlerin sayıları aynıdır. Bu nedenle, toplumsal karar fonksiyonu ile elde edilecek bağıntı geçişme özelliğine sahip olmaz. Daha açık bir deyimle, bir toplumsal tercih ortaya çıkmaz.

Toplumsal karar fonksiyonunun bir toplumsal tercih ortaya koyamadığı durumlarda, dışardan müdahalelerle toplumsal tercih oluşturulmağa

çalışılır. Örneğin, bazı tabular, dinsel baskılar veya baskı yasaları gibi. Bazan da, toplumsal tercihi bir kişi ya da bir grubun belirlemesi yoluna gidilir. Uygar, demokratik toplumlarda, toplumsal tercihin, müdahaleler veya ayrıcalıklı kişi ya da kurumların isteği doğrultusunda belirlemesi arzu edilmez. Bu nedenle, toplumsal karar fonksiyonunun arzu edilen özelliklerine aşağıdaki iki özelliği de katmak gerekir:

Üçüncü Özellik. Her $a, b \in S$, $a \neq b$, için

$$(a, b) \in f(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$$

olacak biçimde $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in X$ vardır.

Dördüncü Özellik. Seçmenler kümesi I_n , nin boş olmayan bir öz-altkümesi J ve her $j \in J$ için $\kappa_j \in X$ verilmiş olsun. $a, b \in S$, $a \neq b$ ve her $j \in J$ için $a \geq_i b$ ise, bu takdirde

$$(a, b) \notin f(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$$

olacak biçimde $\{\kappa_i \in X : i \in I_n \setminus J\}$ vardır.

Yukarıdaki üçüncü özellik, toplumsal karara dış baskı olmaması, dördüncü özellik ise toplumsal kararı ayrıcalıklı bir kişi ya da grubun belirlememesi gerektiğini ifade etmektedir.

Ne yazık ki, yukarıda verilen özelliklerin hepsini birden sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu yoktur. Şimdi 1951 yılı ekonomi dalında Nobel ödülünü kazanan K. Arrow'a ait olan ve "Seçim Paradoksu" olarak ta bilinen bu sonucun ispatı için hazırlık yapacağız.

Bunun için, dördüncü özellik ile yakından ilgili olan *karar kümesi* kavramını tanımlayacağız.

$a, b \in S$, $a \neq b$ ve $J \subseteq I_n$ olsun. Eğer

$\kappa_1, \dots, \kappa_n \in Z$ ve her $j \in J$ için $a \succ_j b \Rightarrow a > b$ ise, bu takdirde, J ye (a, b) nin karar kümesi denir.

Bir karar fonksiyonunun sahip olması arzu edilen özelliklerden dördüncüsü, I_n nin boş olmayan hiç bir özaltkümesinin (a, b) nin karar kümesi olmaması gerektiğini ifade eder.

TEOREM 1: Birinci ve ikinci özellikleri sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu

$f: Z' \rightarrow Z$ verilmiş olsun. $a, b \in S$, $a \neq b$ $J \subseteq I_n$ ve $K = I_n \setminus J$ olsun. Eğer her $j \in J$ için $a \succ_j b$ ve her $k \in K$ için $b \succ_k a$ olacak biçimde $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in Z$ varsa ve $a > b$ ise, bu takdirde J , (a, b) nin karar kümesidir.

İspat: Her $j \in J$ için $a \succ_j b$ olan $\kappa'_1, \dots, \kappa'_n \in Z$ düşünelim. J nin (a, b) nin karar kümesi olduğunu, yani $a > b$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için, varsayımda verilen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ yi öyle yeni $\kappa''_1, \dots, \kappa''_n \in Z$ ile değiştireceğiz ki aşağıdaki iki şart olsun.

i) her $i \in I_n$ ve $c, d \in S$, $c \neq a$, $d \neq a$ için

$$c \succ_i d \Leftrightarrow c \succ_i'' d \text{ ve her } e \in S \text{ için } a \succ_i e \Rightarrow a \succ_i'' e$$

(böylece, birinci özellikten $a >'' b$) dir.

ii) her $i \in I_n$, için

$$a \geq_i'' b \Leftrightarrow a \geq_i' b \text{ ve } b \geq_i'' a \Leftrightarrow b \geq_i' a$$

Parçalar	J	L	M	H
$\kappa_1, \dots, \kappa_n$ 'nin etkisi	$\begin{array}{cc} oa & oa \\ & \\ ob & ob \end{array} \dots$	$\begin{array}{cc} ob & ob \\ & \\ oa & oa \end{array} \dots$	$\begin{array}{cc} ob & ob \\ & \\ oa & oa \end{array} \dots$	$\begin{array}{cc} ob & ob \\ & \\ oa & oa \end{array} \dots$
$\kappa'_1, \dots, \kappa'_n$ nin etkisi	$\begin{array}{cc} oa & oa \\ & \\ ob & ob \end{array} \dots$	$\begin{array}{cc} oa & oa \\ & \\ ob & ob \end{array} \dots$	$\begin{array}{cc} ab & ab \\ oo & oo \end{array} \dots$	$\begin{array}{cc} ob & ob \\ & \\ oa & oa \end{array} \dots$

(böylece, ikinci özellikten $a > b$) dir.

Bunu gerçekleştirmek için, I_h nin aşağıdaki alt kümelerini düşünelim:

$$L = \{ l : b \succ a \text{ ve } a \succ' b \}$$

$$M = \{ m : b \sim_m a \text{ ve } a \sim'_m b \}$$

$$H = \{ h : b \succ_h a \text{ ve } b \succ'_h a \}.$$

Açıkça görüldüğü üzere $K = L \cup M \cup H$ olup $\{J, L, M, H\}$ I_n nin bir parçalanışıdır.

a ve b ye $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ nin ve $\kappa'_1, \dots, \kappa'_n$ nin etkileri I_n nin her parçası için yukarıdaki çizelgelerle gösterilmiştir.

Şimdi $\kappa''_1, \kappa''_2, \dots, \kappa''_n$ yü J, L, M ve H deki seçmenler için ayrı ayrı aşağıdaki gibi tanımlayalım. Her $\ell \in J$ ve $h \in H$ için $\kappa_j = \kappa''_j$ ve $\kappa_h = \kappa''_h$ olsun. $l \in L$ için κ''_l , a nın κ_l nin çizelgesindeki konumu b nin hemen üzerine gelecek şekilde değiştirilip, başka hiç bir seçeneğin yeri değiştirilmeden, aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi, elde edilsin:

κ_l nin çizelgesinde düzeyler	κ''_l nin çizelgesinde düzeyler
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
bo _____	ao _____
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
ao _____	bo _____
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Daha açık bir ifadeyle, $c \neq a$ ve $d \neq a$ için $c \succ_x d$ ise $c \succ_x'' d$ tanımlayalım, $b \succ_x e$, $e = b$ veya e ile b ayrımsız ise $a \succ_x'' e$ tanımlayalım; ve son olarak, $e \succ_x b$ ise $e \succ_x'' a$ tanımlayalım.

Son olarak $m \in M$ için κ''_m yi aşağıdaki çizelgelerde gösterildiği gibi tanımlayalım:

κ_m nin çizelgesinde düzeyler	κ''_m nin çizelgesinde düzeyler
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
bo _____	ao bo _____
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
ao _____	_____
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Çizelgelerden de görüldüğü üzere κ''_m , a nın κ_m nin çizelgesindeki konumu b nin düzeyine getirilip başka hiçbir seçeneğin yeri değiştirilmeden elde edilmiştir. Bunu biraz açarsak, $c \neq a$ ve $d \neq a$ için $c \succ_m d$ ise $c \succ_m'' d$ tanımlıyoruz, her hangi bir e için $b \succ_m e$ ise $a \succ_m'' e$ ve $e \succ_m b$ ise $e \succ_m'' a$ tanımlıyoruz.

Böylece tanımlanan $\kappa''_1, \dots, \kappa''_n$ zayıf sıralama bağıntıları olup, birinci özelliğin hipotezi, $a, b \in S$ ve $\kappa_1, \dots, \kappa_n, \kappa''_1, \dots, \kappa''_n$ için sağlanmaktadır. O halde $a > b$ dir. Ayrıca, $\kappa''_1, \dots, \kappa''_n$ nün tanımından dolayı her $t = 1 \dots n$ için

$$a \succ_t b \Leftrightarrow a \succ_t b \text{ ve } b \succ_t a \Leftrightarrow b \succ_t a$$

dir. İkinci özellik sağlandığından, $a > b$ olduğu sonucu çıkar. Bu, teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 1, (a, b) nin bir karar kümesine sahip olması için bir yeter şart içermektedir. Aşağıdaki teorem, üçüncü özelliğin Teorem 1 deki şartın sağlanması için yeterli olduğunu göstermektedir.

TEOREM 2: $a, b \in S$, $a \neq b$ ve $f : Z' \rightarrow Z$ birinci, ikinci ve üçüncü özellikleri sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu ise, bu takdirde (a, b) nin bir karar kümesi vardır.

İspat: Üçüncü özellikten dolayı, $a > b$ olacak biçimde $\kappa_1, \dots, \kappa_n, \varepsilon \in Z$ vardır. Şimdi, I_n nin

$$K = \{k \in I_n : b \succ_k a\}, \quad J = \{j \in I_n : a \succ_j b\},$$

$$G = \{g \in I_n : a \sim_g b\}$$

altkümelerini düşünelim. $\kappa'_1, \dots, \kappa'_n$

FONKSİYONEL DENKLEMLER

ALBERT ERKİP

limpiyatlarda ve benzeri yarışmalarda sık olarak fonksiyonlarla ilgili problemler yer almakta. Bu problemlerde fonksiyonel denklem adı verilen birtakım bağıntılar veriliyor ve bu denklemleri sağlayan fonksiyonların bulunması isteniyor. Çözüm için genellikle şu adımlardan bir veya birkaçı yararlı oluyor :

- Verilen bağıntıdan fonksiyonun bazı özel değerlerini hesaplamak.
- Fonksiyonun birebir, örten, artan, azalan olma gibi bazı özelliklerini aramak.
- Fonksiyonun sağlanması gereken başka bağıntılar bulmak.
- Fonksiyonel denklemin bazı özel tip çözümlerine bakmak.

Bu arada birkaç noktaya dikkat etmek gerek. Öncelikle tanım ve değer kümeleri önemli rol oynayabiliyorlar. Bir başka husus ise özel birtakım kabuller yapmamak. Örneğin istenen fonksiyonun türevlenebileceği verilmemişse ya da türevlenebildiğini bir yolla ispatlamamışsak çözümde türevi ve ilgili özellikleri kullanmamamız gerekiyor.

Bu dediklerimize bazı örneklerde bakalım. Öncelikle bazı kümeleri belirleyelim; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sırasıyla tamsayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar kümelerini gösterecek; $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$ ve $\mathbb{R}^+$ ise yine sırasıyla pozitif tamsayılar, pozitif rasyonel sayılar ve pozitif reel sayılar kümeleri.

1. Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$

bağıntısını sağlayan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(1)

Bu örnekte çözümü doğrudan bulmak mümkün. Herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için (1) bağıntısında $x = y = \frac{t}{2}$ alalım. $f(t) - f(0) = t^2$ buluruz. $f(0)$ değerini bir c reel sayısı ile gösterirsek $f(t) = t^2 + c$ buluruz. Öte yandan herhangi bir c sabiti için $f(t) = t^2 + c$ (1) bağıntısını gerçekler. O halde tüm çözümleri elde etmiş olduk.

Tanım kümesinin önemli olduğunu söylemiştik; bu problemi biraz değiştirelim :

Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$ (1') bağıntısını sağlayan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Yukarıdaki çözüm geçerli olmaz çünkü herhangi bir $t \in \mathbb{Z}$ için $x = \frac{t}{2}$ alamayız, $\frac{t}{2}$ tamsayı olmayabilir. Bu durumda çözümü okuyuculara bırakıp (1)'deki problemten farklı olarak

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ çift ise} \\ x^2 + 1 & x \text{ tek ise} \end{cases}$$

fonksiyonun (1') bağıntısını sağladığını belirtelim.

2. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ve $f(1) = 1$ (2)

bağıntılarını sağlayan $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(2) fonksiyonel denklemlerin en klasik örneği. Öncelikle x ve y ye özel değerler vermeye çalışalım.

$x = 1, y = 0$ alırsak $1 = 1 + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

$$x = 1, y = 1 \text{ alırsak } f(2) = 1 + 1 = 2$$

$$x = 1, y = 2 \text{ alırsak } f(3) = 1 + 2 = 3$$

gibi değerler buluruz. Biraz genelleylelim.

$x = y$ alırsak

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

$2x = y$ alırsak

$$\begin{aligned} f(3x) &= f(x + 2x) = f(x) + f(2x) \\ &= f(x) + 2f(x) = 3f(x) \end{aligned}$$

vb. bulduk. Burdan kolayca genelleyerek (ve tümevarım kullanarak) her $n \in \mathbb{Z}_+$ için $f(nx) = nf(x)$ olduğunu gösterebiliriz. Negatif tam sayılar için $-x = y$ alarak

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

yani $f(-x) = -f(x)$ olduğunu gözleyerek, (ve $f(0) = 0$ olduğundan) $f(nx) = nf(x)$ bağıntısının her $n \in \mathbb{Z}$ için doğru olduğunu buluruz. Şimdi bir $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısına bakalım. Yukarıda bulduğumuzdan

$$p f(x) = f(p x) = f\left(q \cdot \frac{p}{q} x\right) = q f\left(\frac{p}{q} x\right)$$

o halde, her $p, q \neq 0$ tamsayısı için

$$f\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} f(x)$$

bağıntısını bulduk. Şimdi $x = 1$ alırsak, $(f(1) = 1$ olduğundan) her $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$ için

$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ olduğunu bulduk. Bu fonksiyonun (2) bağıntısını sağladığı için kolayca görülür.

Aynı problemi biraz değiştirelim.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ve $f(1) = 1$ (2')

bağıntısını sağlayan, **sürekli** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Burada öncelikle tanım kümesi değişti; bir de istenen fonksiyonun **sürekli** olduğu verildi. Rasyonel sayılar için (2)'deki yöntem bize her

$r \in \mathbb{Q}$ için $f(r) = r$ olduğunu söyler. Şimdi f nin sürekli olduğu bilgisini kullanalım: Bir x reel sayısına rasyonel r sayıları ile istediğimiz kadar yaklaşabiliriz. f sürekli olduğundan r x e yakinken $f(r)$ de $f(x)$ e yakın olacaktır. (bunu limitlerle daha iyi ifade edebiliriz.) O halde $r \in \mathbb{R}$ x e yaklaşıırken $f(r) = r$ değeri $f(x)$ e yaklaşıacaktır, yani $f(x) = x$ olacaktır.

Akla şöyle bir soru geliyor; (2') bağıntısını sağlayan f nin sürekli olduğu verilmeseydi yine de her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x$ olduğunu gösterebilir miydik? Bunun yanıtı hayır ama bu yanıt ağırca bir matematik temeli gerektiriyor. Soyut yollardan (2') bağıntısını sağlayan süreksiz (ve her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x$ ten farklı) fonksiyonların olduğunu gösterebiliyoruz, ama böyle bir fonksiyonu burada açık seçik yazmak olanaksız.

Şimdi fonksiyonel denklemden birebir, örten vb. olma gibi bazı özelliklerin nasıl elde edileceğine bakalım.

3. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(1 + f(x)) = 3x + 2$ (3) bağıntısını sağlayan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

Birebirlik için $f(a) = f(b)$ olduğunu kabul edelim. İki tarafa da 1 ekler ve f uygularsak $f(1 + f(a)) = f(1 + f(b))$ buluruz. (3) bağıntısından bu $3a + 2 = 3b + 2$ yani $a = b$ elde ederiz. O halde f birebirdir.

Örtenlik için herhangi bir $y \in \mathbb{R}$ alalım. $f(a) = y$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ arıyoruz. (3) bağıntısında $x = \frac{1}{3}(y - 2)$ alırsak, $f(1 + f(x)) = y$ buluruz; yani $a = 1 + f\left(\frac{1}{3}(y - 2)\right)$ için $f(a) = y$ dir. O halde f örtendir.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x^2 + y) = x^2 + f(y)$ (3') bağıntısını sağlayan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz.

Bunun için $a < b$ reel sayılarına bakalım. (3') bağıntısında $y = a$ ve $x = \sqrt{b - a}$ alırsak:

$$f(b) = f(b - a + a) = f((\sqrt{b - a})^2 + a) = (\sqrt{b - a})^2 + f(a)$$

ve $b - a > 0$ olduğundan ; $f(b) > f(a)$ buluruz. O halde f artandır.

Şimdi bu tür özel bilgilerin nasıl kullanıldığını görelim.

4- Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $f(xf(y)) = f(x)f(y)$ ve $f(1) = 1$ (4)

bağıntısını sağlayan,

a) **birebir** $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

b) **örten** $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

c) ve her $x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) \leq 10$ koşulunu sağlayan $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

d) **sürekli** $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

a) (4) bağıntısında $x = 1$ alalım. Her $y \in \mathbb{R}^+$ için $f(f(y)) = f(y)$ olduğunu bulduk. Yani $a = f(y)$ ve $b = y$ alırsak $f(a) = f(b)$. f nin birebir olduğu verilmiş; O halde $a = b$ yani her $y \in \mathbb{Z}^+$ için $f(y) = y$ olmalı. Gerçekten de $f(y) = y$ fonksiyonu (4) bağıntısını sağlıyor.

b) Yine $x = 1$ alalım, her $y \in \mathbb{R}^+$ için $f(f(y)) = f(y)$ olduğunu bulduk. Herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ alalım. f örten olduğundan $f(y) = t$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}^+$ vardır. Yukarıda bu y değerini kullanırsak, $f(t) = f(f(y)) = f(y) = t$, yani her $t \in \mathbb{R}^+$ için $f(t) = t$ çözümünü elde ettik.

c) Bir $a_1 \in \mathbb{R}^+$ için $f(a_1) = \alpha$ olsun. (4) bağıntısında $x = y = a_1$ alalım, $f(a_1 f(a_1)) = f(a_1) f(a_1) = \alpha^2$; yani $a_2 = a_1 f(a_1)$ için $f(a_2) = \alpha^2$ elde ettik. Şimdi $a_3 = a_2 f(a_1)$ olsun. (4)'te $a = a_2$, $y = a_1$ olarak, $f(a_3) f(a_2 f(a_1)) = f(a_2) f(a_1) = \alpha^2$. $\alpha = \alpha^3$; benzer yolla devam ederek, uygun a_k değerleri için $f(a_k) = \alpha^k$, $k = 1, 2, \dots$ olduğunu buluruz. Bir de tersine

bakalım; $a_1' = \frac{1}{f(a_1)}$ olsun. (4)'te $x = a_1'$, $y = a_1$ alalım,

$f(a_1') f(a_1) = f(a_1') f(a_1)$, ancak $f_1' f(a_1) = 1$ ve $f(1) = 1$ olduğundan $f(a_1) f(a_1) = 1$ yani $f(a_1') = \frac{1}{\alpha}$ çıktı. Yukardaki yolu sürdürürsek yine $k = 1, 2, \dots$ için

$f(a_k') = \frac{1}{\alpha^k}$ olacak şekilde uygun α_k' sayıları elde ederiz.

Şimdi, her $x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) \leq 10$ koşulunu kullanalım. $x = a_k$ ve $x = a_k'$ değerlerini kullanarak, her $k = 1, 2, \dots$ için $\alpha^k \leq 10$ ve $\frac{1}{\alpha^k} \leq 10$ eşitsizliklerini buluruz ki $\alpha > 0$ olduğundan bu durumda ancak $\alpha = 1$ durumunda doğru olur. O halde $f(a_1) = 1$ olmalıdır. Öte yandan a_1 herhangi bir pozitif reel sayı olabilir; yani aradığımız fonksiyon $f = 1$ sabit fonksiyonu olmalıdır. Sabit $f = 1$ fonksiyonu (4) bağıntısını sağlar.

Bu örneği biraz daha düşünelim; (4) eşitsizliğinde 10 sayısının hiç bir önemi yok, daha genel olarak şunu göstermiş olduk : (4) bağıntısını sağlayan tek sınırlı $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $f = 1$ sabit fonksiyonudur. Burada sınırlı demekle, uygun bir M sayısı için her $x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) \leq M$ koşulunu sağlayan fonksiyonları kastediyoruz.

d) Bu çözümde (c)'deki sonucu kullanacağız. Eğer aradığımız fonksiyon sınırlı ise (c)'den dolayı $f = 1$ sabit fonksiyonu olmalıdır. Eğer f fonksiyonu sınırlı değilse $f(x)$ olabildiğince büyük değerler alacaktır. Öte yandan (c) çözümündeki gibi $x' = \frac{1}{f(x)}$ alırsak, $f(x') = \frac{1}{f(x)}$ olacaktır. Birleştirirsek, (4) bağıntısını sağlayan bir fonksiyon sınırlı değilse $f(x)$ bağıntısını sağlayan bir fonksiyon sınırlı değilse $f(x)$ olabildiğince büyük ve olabildiğince küçük (sıfıra yakın) değerler alacaktır. Şimdi f nin sürekli olduğu bilgisini kullanalım. Sürekli fonksiyonlar bir değerden diğerine sıçrayamaz, aradaki tüm değerleri alır (Ara Değer Teoremi). O halde (4)'ü sağlayan, sınırlı olmayan, sürekli bir f $(0, \infty)$ aralığındaki tüm değerleri alır. Yani

böyle bir f örtendir; o halde (b)'den dolayı $f(x) = x$ fonksiyonudur.

- e) Aynı (4) fonksiyonel denkleminin değişik koşullar altında farklı yaklaşımlarla değişik çözümlerini elde ettik. Şimdi benzer bir bağıntıyı sağlayan oldukça farklı bir fonksiyon görelim. "Tek sayıları sevmeyen fonksiyon" diye adlandırabileceğimiz fonksiyon şöyle tanımlanıyor. Önce bir hatırlatma yapalım : her pozitif tamsayı, t bir tek tamsayı olmak üzere $2^k \cdot t$ şeklinde ifade edilebilir. Örneğin $7 = 2^0 \cdot 7$, $16 = 2^4 \cdot 1$, $20 = 2^2 \cdot 5$. Yukarıdaki gösterimle $n = 2^k \cdot t$ ise, $f(n) = 2^k$ olarak tanımlansın. $f(7) = 2^0 = 1$, $f(16) = 2^4 = 16$, $f(20) = 2^2 = 4$ gibi. Bu f fonksiyonu kolayca görülebileceği gibi,

Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için, $f(xf(y)) = f(x)f(y)$ ve $f(1)=1$ bağıntılarını sağlar.

5. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$p(x+y)p(x-y) = (p(x))^2 - (p(y))^2 \quad (5)$$

bağıntısını sağlayan p polinomlarını bulunuz.

Önce $x=y=0$ alalım; $(p(0))^2 = 0$, yani $p(0)=0$ bulduk. Şimdi p polinomunun bir α kökünü ele alalım, $p(\alpha) = 0$. (5) te $x = 2\alpha$, $y=\alpha$ alırsak; $p(3\alpha)p(\alpha) = (p(2\alpha))^2 - (p(\alpha))^2$, $p(\alpha) = 0$ olduğundan, $(p(2\alpha))^2 = 0$. yani $p(2\alpha) = 0$ bulduk. Yine (5)'te $x = 3\alpha$, $y = 2\alpha$ alırsak, aynı yolla $p(3\alpha) = 0$ ve benzer şekilde $k = 1, 2, \dots$ için $p(k\alpha) = 0$ bulduk. O halde α , $2\alpha, 3\alpha, \dots, k\alpha, \dots$ p polinomunun kökleri. Bir polinomun en çok derecesi kadar farklı kökü olmalı, o halde $\alpha = 0$ yani p nin tek reel kökü sıfır olmalı. Öte yandan (5) bir polinom özdeşliği, o halde x, y karmaşık sayıları için de doğru olacak, yani polinomun tek (reel veya karmaşık kökü) sıfır. Bu da $p(x) = cx^n$ şeklinde

demek. Bu ifadeyi (5)'te yerine koyarsak, $n = 1$ yani $p(x) = cx$ çıkıyor.

Bu örnekte p fonksiyonunun polinom olma özelliğini kullandık. Bu bilgi olmasaydı başka çözümler de bulabilirdik. Örneğin $p(x) = \sin x$ fonksiyon (5) bağıntısını sağlar.

Problemler :

1. $(2')$ bağıntısını sağlayan, artan tek $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

2. $(2')$ bağıntısını sağlayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ayrıca her $x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) > 0$ koşulunu da sağlıyorsa, f nin artan olduğunu ispatlayınız.

3. 4(e)'deki örneğe benzeterek

Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xf(y)) = f(x)f(y)$ ve $f(1) = 1$ koşulunu sağlayan $f(x) = x$ ve $f = 1$ den farklı bir $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ fonksiyonu tanımlayınız.

4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2-y^2)$ bağıntısını sağlayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$ ve $f(1) = f(2) = 1$ bağıntısını sağlayan $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

6. (1990 Olimpiyatı) Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ koşulunu sağlayan bir $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ fonksiyonu tanımlayınız.

7. (1990 Olimpiyatı) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ bağıntısını sağlayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

OLİMPİYAT HABERLERİ

Temmuz ayında Moskova'da yapılan 33. Uluslararası Matematik Olimpiyatında takımımızdan Sinan Güntürk ve Cem Mutlugün bronz madalya kazandılar. Takım elemanlarımız ve madalya kazananlar ayrıca Başbakan Yardımcısı ve Devlet Bakanı Sayın Erdal İnönü ve TUBİTAK tarafından ödüllendirildiler.

PARADOKSLAR, ÇATIŞKILAR

TALAT TUNCER

Burada bazı ilginç paradokslardan söz edeceğim. Önce kavramlara açıklık getirelim. *Paradoks*, felsefe bakımından soyut muhakemenin, bazı hallerde sona erdiği çelişki. *Çatışkı* (antinomie) ise, iki felsefe yasası, iki felsefe ilkesi arasındaki çelişki. *Çelişki* (contradiction), daha önce söylenen ya da yapılabilecek aykırı düşme eylemi. Matematikte çok paradoks ve çatışkı mevcuttur. Burada ancak bir ikisini söyleyeceğiz. Cantor, matematikteki paradoksları gidermek için "Kümeler Kuramı"nı ortaya attı; bu kuram bir çok şeye çözüm getirmekle birlikte kendisi de paradokslar doğurdu. Bazılarını ünlü İngiliz matematikçi ve felsefecisi Bertrand Russel giderdi. Ama eksikler konumunu koruyor.

Zenon ya da Aşil (Akhilleus) veya Kaplumbağa paradoksu:

Aşil önünde ilerleyen bir kaplumbağayı hiç bir zaman yakalayamayacaktır. Çünkü Aşil önce kaplumbağanın bulunduğu yere gelmelidir. Oraya gelince kaplumbağa burayı bırakmış ve ilerisinde bulunmuş olacaktır. Bu muhakeme yinelenerek anlaşılır ki kaplumbağa daima Aşil'in önünde kalacaktır.

Russel Paradoksu:

Z kendilerini eleman olarak almayan bütün kümelerin kümesi olsun, yani;

$$Z = \{ X \mid X \notin X \}$$

tir. Z kendine ait midir, değil midir? Z, Z'ye ait olmasa, Z'nin tanımına göre Z kendisine ait olur. Bundan başka Z, Z'ye ait olsa, Z'nin tanımına göre Z kendine ait değildir. Her iki hal de bir çelişkiyle sonuçlanır.

Bunun halk arasında benzeri *berber paradoksudur*: Bir köydeki berber, ancak kendi kendine traş olamayan bütün erkekleri traş ediyor ve başkalarını etmiyor. Berber kendini traş eder mi? (Ya da berberi kim traş eder?)

Gerçekten berber kendini traş etse, kendi kendine traş olamayan erkekleri traş etmesine aykırı düşmüş bulunur. Kendini traş etmese, "ancak başkalarını traş etmemesine" aykırı düşmüş

bulunur.

Paradoksal Problem:

M. V. Berry'ye göre (*Principles of Cosmology*, Cambridge University Press, 1976, sayfa 122) gözlemlenebilen evrenin çapı kabaca 10^{26} m olarak bilinmektedir, dolayısıyla hacmi $5 \cdot 10^{77}$ m³ eder, ($\pi \approx 3$ alındı). Bir tavşan yaşamı boyunca ortalama 5 yavru yapsa, kaç kuşak sonra tavşanlar evrenden fazla yer tutarlar? Mevcut 100 tavşan olduğu kabul edilecek ve bir tavşanın hacmi ortalama 1 dm³ alınacak.

Çözümü: n nci kuşakta tavşanlar evren kadar yer tutsun. Tavşan sayısı geometrik diziye göre artsın. n nci terim $a_n = a_0 \cdot q^{n-1}$ dir, a_0 ilk terim, q ortak çarpan. Buna göre $a_0 = 100$, $q = 5$ olduğundan

$$100 \cdot 5^{n-1} \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{77} \Rightarrow 5^{n-2} = 10^{78},$$

logaritma alırsak (10 tabanına göre),

$$(n-2) \log 5 = 78 \Rightarrow n = 2 + \frac{78}{0,69897} \approx 114$$

çıkır. Demek ki 114 kuşak sonra tavşanlara yer kalmayacak.

Bütün kümelerin kümesi. Cantor paradoksu:

Bütün kümelerin kümesini C ile gösterelim. Bu durumda C'nin her alt kümesi C'nin bir elemanı (ya da üyesi) dir. Buna göre C'nin kuvvet kümesi (yani alt kümeler kümesi) de C'nin bir alt kümesidir. C'nin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(C)$ ya da 2^C ile gösterilir. Demek ki

$$2^C \subset C$$

dir. Bundan

$$(1) \quad \text{card}(2^C) \leq \text{card}(C)$$

yazılır, çünkü alt kümenin kardinali asıl kümenininkinden küçüktür. (1)'e göre kuvvet kümesinin kardinali, bütün kümeler kümesinin kardinalinden geniş anlamda küçüktür. (card, kardinalin yani sayma sayısının sembolüdür). Oysa Cantor teoremine göre

$$(2) \quad \text{card}(C) < \text{card}(2^C)$$

dir. (1) ile (2) birbiriyle çelişki oluşturur.

Not: Cantor teoremi: Herhangi bir E kümesi için

$$E < 2^E$$

dir (yani E kümesi, kendinin kümeler kümesini önceler) ve dolayısıyla

$$\text{card}(E) < \text{card}(2^E) \quad \text{dir.}$$

ALİŞTIRMA SORULARI

A41. Bir ABC dik üçgeninde [BC] hipotenüsü, D_1, D_2, D_3, D_4 noktalarıyla eş beş parçaya bölünmüştür. $[AD_i] = d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) olmak üzere,

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$$

toplamını $a = |BC|$ türünden hesaplayınız.

(Hazırlayan : Bahri Ünal)

A42. Kenar uzunlukları $|AB| = b\sqrt{2}$, $b = |BC|$ olan dik bir dörtgende [CD] üzerine dıştan bir yarıçember çizilmiştir. Yay üzerindeki bir P olmak üzere PA, PB doğruları CD yi ve F de keserse

$$|CE|^2 + |DF|^2 = |CD|^2$$

olduğunu gösteriniz.

(P. Fermat)

A43. $\sqrt[6]{4 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 5 \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

eşitliğini kanıtlayınız.

(Ramanujan)

A44. Bir ABC üçgeninin kenarları üzerine dıştan BCXX', CAYY' ABZZ' kareleri çizilirse alanlar için

$$|XYZ| = |X'Y'Z'|$$

eşitliğini gösteriniz.

(Hazırlayan : H. Demir)

A45. Bir ABC üçgeninde [BC] kenarının orta noktası D_0 a göre simetrik iki nokta D ve D' olsun. Bu noktalardan geçen d ve d' doğruları CA ve AB kenarları E, F, E', F' de kessin. EF' ve E'F doğrularının, BC yi D_0 a göre simetrik iki noktada kestiklerini gösteriniz.

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Şubat 1993 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir

YARIŞMA SORULARI

Y41. [AB] çaplı bir çemberin AB ye K noktasında dik bir [CD] kirişi çiziliyor ve [BD] yayında bir P noktası alınıyor. PK doğrusunun çemberi kestiği diğer nokta E ve $PA \cap CD = F$ ise $|EK| < |AF|$ olduğunu gösteriniz.

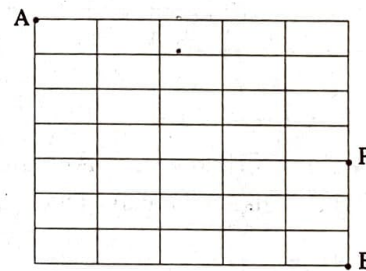
(P.Erdös)

Y42. Aşağıdaki denklemi sağlayan m ve n pozitif tam sayılarını bulunuz :

$$1! + 2! + \dots + n! = m^2.$$

Y43. Bir ABCD paralelkenarında [AB] tabanına paralel bir doğru [AD] ve [BC] kenarlarını E ve F noktalarında kesiyor. G, [AF] üzerinde seçilmiş herhangi bir nokta olmak üzere, $CG \cap AB = P$ ve $DG \cap EF = Q$ ise $PQ \parallel BC$ olduğunu gösteriniz.

Y44. Aşağıdaki 5 x 7 lik ızgara üzerinde sadece sağa ve aşağıya hareket edebilen bir nokta A dan yola çıkıp B ye varacaktır. Her kavşakta sağa veya aşağı eşit olasılıkla yönelen bu noktanın P den geçme olasılığı nedir.



Y45. İç aç ı ortayları [AD], [BE], [CF] olan bir ABC üçgeninde $\angle EDF = 90^\circ$ ise A açısı kaç derecedir.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınız-soyadınızı adresinizi, ve öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

A31. Elemanları pozitif olan $a_1, \dots, a_n, \dots$ aritmetik dizisinde

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

eşitliğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: (Çağatay Candan, Ankara)

Aritmetik dizinin genel terimi $a_k = a_1 + (k-1)d$ yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) \\ &= \frac{1}{d} (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) \\ &= \frac{1}{d} \frac{a_n - a_1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer çözenler : Erhan Gürel, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; Doğan Mersin, İstanbul.

A32. n tam ve 1 den büyük bir sayı olduğuna göre

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < n \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız

(Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM: (Burhan Biner, Malatya)

$a_k, b_k \geq 0$ $k = 1, 2, \dots, n$ gerçel sayıları için

geçer olan ve ancak her k için $a_k = b_k$ olması halinde bir eşitlik haline gelen

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden, söz konusu kesin eşitsizlik $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k = \sqrt{k}$, $b_k = 1$ yazılarak ve her iki tarafın artı karekökü alınarak elde edilir.

Diğer çözenler: Erhan Gürel, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; Doğan Mersin, İstanbul.

A33. Hangi üçgenlerde kenarlar üzerine çizilen karelerin merkezleri doğrudur?

ÇÖZÜM: (Yaman S. Duruman, İstanbul)

Problem bu haliyle biraz belirsiz. Kenarlar üzerindeki karelerden her biri "içeride" veya "dışarıda" olacak şekilde iki türlü kurulabilir. Bütün karelerin içeride olması halini ele alalım : ABC üçgeninde sırasıyla [BC], [CA], [AB] kenarlarının orta noktaları A', B', C' , gene bu kenarlar üzerinde "içeriye" doğru çizilmiş karelerin merkezleri de α, β, γ olsun. Üçgenin çevrel merkezi O ile gösterilerek, OBA' dik üçgeninden

$$|OA'| = \frac{a}{2} |\cot A|$$

ve

$$|O\alpha| = \frac{a}{2} |1 - \cot A|$$

benzer şekilde de

$$|O\beta| = \frac{b}{2} |1 - \cot B|$$

$$|O\gamma| = \frac{c}{2} |1 - \cot C|$$

bulunur. Herhangi bir XYZ üçgeninin (yönlü) alanını $\Delta(XYZ)$ ile gösterirsek

$$\begin{aligned} \Delta(O\beta\gamma) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} (1 - \cot B) \cdot \frac{c}{2} (1 - \cot C) \sin A \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cot B) (1 - \cot C) \Delta(ABC) \end{aligned}$$

olacağı görülür. Benzer şekilde, $\Delta(O\beta\gamma)$, $\Delta(O\gamma\alpha)$ da hesaplanarak

$$\frac{\Delta(\alpha\beta\gamma)}{\Delta(ABC)} = \frac{1}{4} [3 - 2(\cot A + \cot B + \cot C) + \cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B]$$

ve bir üçgende

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

özdeşliğinden

$$\frac{\Delta(\alpha\beta\gamma)}{\Delta(ABC)} = \frac{1}{2} [2 - (\cot A + \cot B + \cot C)]$$

bulunur. Demek ki α, β, γ noktalarının doğrudan olması için gerek ve yeter şart

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2$$

dir.

Notlar :

1. "Yönlü olan" sözünden zihni karışan okuyucu, A, B, C açılarının dar veya geniş olma hallerini ayrı ayrı incelemelidir.
2. $\cot w = \cot A + \cot B + \cot C$ denklemi ile verilen w açısı, üçgenin "Brocard açısı" olarak anılır. İlgili doku ve $\tan w = \frac{1}{2}$ özelliğine sahip üçgenler büyük üstad V. Thébault tarafından incelenmiştir.
3. Bu problemin önce V. Thébault sonra da J.M.Quoniam tarafından American Mathematical Monthly'de yayınlandığına dikkat çekelim.
4. Bu probleme gönderilen çözümlerin büyük kısmında gerek şartlar elde edilip, bu şartların yeter olup olmadığı araştırılmamıştır.

A34. Bir ABCD dik yamuğu veriliyor ($AB \perp BC \perp CD$). Bunun içine, dış teğet doğruları BC, DA olan, birer tabana ve birbirine teğet iki çember çiziliyor |AD| uzunluğunu çemberlerin u, v yarıçapları türünden hesaplayınız.

(Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)

Yarıçapı u olup [AB], [BC] ve [DA] ya teğet olan çemberin merkezi O bu çemberin [BC] ye değdiği nokta P olsun. Aynı şekilde, yarıçapı v olup [CD], [DA] ve [BC] ye, hem de yukarda ele alınan çembere teğet olan çemberin merkezi O' , bu çemberin [BC] ye değdiği nokta Q olsun. $v \geq u$ kabul ederek, O dan $O'Q$ ya indirilen dikmenin ayağına K diyelim. $\angle ABC$ açısının ölçüsü de 2α olsun. $|OO'| = u + v$, $|O'K| = v - u$ olduğundan

$$|PQ|^2 = |OK|^2 = (u + v)^2 - (v - u)^2 = 4uv$$

bu suretle de

$$\begin{aligned} |BC| &= |BP| + |PQ| + |QC| \\ &= u + 2\sqrt{uv} + v \\ &= (\sqrt{u} + \sqrt{v})^2 \end{aligned}$$

bulunur. $\angle KO'O$ açısının ölçüsü $\frac{1}{2} + \alpha$ olduğundan

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha + \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sin 2\alpha} \\ &= \frac{u - v}{u + v} \end{aligned}$$

olup, bundan da

$$1 + \sin 2\alpha = 2 \left(\frac{u - v}{u + v} \right)^2$$

ve

$$\sin 2\alpha = \frac{6uv - u^2 - v^2}{(u + v)^2}$$

olur. Böylece

$$|AD| = \frac{|BC|}{\sin 2\alpha} = \frac{(u + v)^2 (\sqrt{u} + \sqrt{v})^2}{6uv - u^2 - v^2}$$

bulunur.

A35. Bir ABCD dışbükey kirişler dörtgeninde bir kenara ait yüksekliği, karşı kenarın ortasından bu kenara dik olarak ulaşan doğru parçası olarak tanımlayalım.

a) Dört yükseklik doğrusu bir H noktasında kesişirler. (H ye dörtgenin ortosantrı diyebiliriz.)

b) Kenar uzunlukları a, b, c, d ve yükseklikleri h_a, h_b, h_c, h_d ise dörtgenin alanı

$$S = \frac{1}{4} (ah_a + bh_b + ch_c + dh_d)$$

dir.

(Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM: (Erhan Gürel, Ankara)

a) P, Q, R, S sırasıyla [AB], [BC], [CD], [DA] nın orta noktaları olsun. PQRS bir paralelkenardır. R den AB ye indirilen dikme ile P den CD ye indirilen dikme T noktasında kesişsin. O, ABCD nin çevrel merkezi ise OPTR bir paralelkenar olup, merkezi PQRS paralelkenarının merkezi ile çakışktır. Bu ortak merkezi Z ile gösterelim. T noktası O nun Z ye göre bakışığı olup, diğer bütün yükseklikler de T den geçmelidir.

b) Z nin AB, BC, CD, DA doğrularına uzaklıkları sırasıyla $h_a/2, h_b/2, h_c/2, h_d/2$ dir. ABCD nin alanı ZAB, ZBC, ZCD, ZDA üçgenlerinin alanlarının toplamı olacağından

$$S = \frac{1}{2} \left[a \frac{h_a}{2} + b \frac{h_b}{2} + c \frac{h_c}{2} + d \frac{h_d}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4} [ah_a + bh_b + ch_c + dh_d]$$

bulunur.

Y31. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi DC, CA, AB doğrularına sırasıyla D, E, F noktalarında değiyor. $EF \cap BC = D'$ ve iç merkez I ise $ID' \perp AD$ olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜM: (Cem Acar, Merzifon)

D' noktasından içteğet çembere çizilen ikinci teğet AB yi K, AC yi L noktasında kesip içteğet çembere M noktasında değsin. CK ve BL doğruları T noktasında kesişsin. B den AC ye çizilen paralel D'E yi U da keserse BUF bir ikizkenar üçgen olup

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{|BU|}{|CE|} = \frac{|AF|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|DC|} = -\frac{DB}{DC}$$

dir. Benzer şekilde

$$\frac{D'K}{D'L} = -\frac{MK}{ML}$$

bulunur. ABC üçgeninde D'L doğrusuna nazaran Menelaus teoreminden

$$\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{LC}{LA} \cdot \frac{KA}{KB} = 1$$

veya

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{LC}{LA} \cdot \frac{KA}{KB} = -1$$

bulunur. Ceva teoreminden BL, CK, AD doğrularının noktadaş oldukları, yani AD doğrusunun T den geçtiği görülür. Aynı şekilde, Menelaus teoremini AKL üçgeni ve D'C doğrusuna uygulayarak, bu sefer de AM doğrusunun T den geçtiği, yani A, M, T, D noktalarının doğrudaş olduğu görülür. Demek ki AD doğrusu içteğet çemberin [MD] kirişini içine almakta olup D'I ye dik olmalıdır.

Diğer çözenler: (Emre Alkan, İstanbul)

Y32. Bir ABCD dışbükey dörtgeninde kenar uzunlukları $a = |AB|, b = |BC|, c = |CD|, d = |DA|$ ve köşegen uzunlukları $e = |AC|, f = |BD|$ dir. P, dörtgenin dışında bir nokta ise ortak köşeleri P ve tabanları, dörtgenin kenar ve köşegenleri olan üçgenlerin alanları arasında

$$S_a S_c + S_b S_d = S_e S_f$$

bağıntısının varlığını gösteriniz.

(Hazırlayan : H. Demir)

ÇÖZÜM: (Gültekin Pulat, Bakırköy-İstanbul)

Problemin genelliğini bozmaksızın AP ve BP doğrularının [DC] doğru parçasını D den C ye doğru sıralanmış iki noktada kestiğini farzediyoruz. $\angle DPA, \angle APB, \angle BPC$ açılarının ölçülerini sırasıyla α, β, γ ile $|AP| |BP| |CP| |DP|$ çarpımını da F ile gösterelim.

$$S_a S_c = \frac{1}{2} |AP| |BP| \sin \beta \cdot \frac{1}{2} |CP| |DP| \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

ve

$$S_b S_d = \frac{1}{2} |BP| |CP| \sin \gamma \cdot \frac{1}{2} |DP| |AP| \sin \alpha$$

olduğundan

$$S_a S_c + S_b S_d = \frac{1}{4} F [\sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin \gamma \sin \alpha]$$

$$= \frac{1}{8} F [\cos(\alpha + \gamma) - \cos(2\beta + \alpha + \gamma) + \cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)]$$

$$= \frac{1}{8} F [\cos(\alpha - \gamma) - \cos(2\beta + \alpha + \gamma)]$$

$$= \frac{1}{4} F \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)$$

$$= \frac{1}{2} |AP| |CP| \sin(\beta + \gamma) \cdot \frac{1}{2} |BP| |DP| \sin(\alpha + \beta)$$

$$= S_e S_f$$

bulunur.

Diğer çözenler: Burhan Biner, Malatya; Çağatay Candan, Ankara; Erhan Gürel, Ankara; İlyas Küreli, Ankara; Doğan Mersin, İstanbul.

Y33. Bir ABCD karesi katlanarak A köşesi [DC] üzerindeki bir A' noktasına getirilmiştir. Bu katlamada [AD] kenarı [A'D'] durumunu almışsa ve $A'D' \cap CD = E$ ise CEA' üçgeninin r iç yarıçapının |ED'| ye eşit olduğunu gösteriniz.

Not: Bu soruda $A'D' \cap CD = E$ olması gereken eşitlik, $AD' \cap CD = E$ şeklinde hatalı olarak yayınlanmıştır. Hatayı düzelten ve aşağıdaki güzel çözümü gönderen Tamer Kahveci'ye teşekkür ederiz.

ÇÖZÜM : (Tamer Kahveci, Ankara)

A'CE üçgeninin içteğet çember yarıçapını r ile gösterelim. A merkezli, |AB| yarıçaplı çember [A'D'] ye bir K noktasında teğet olup

$$|DE| = |EK|$$

ve

$$|A'B| = |A'K|$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} 2|D'E| &= 2|CD| - 2|EA'| \\ &= 2|CD| - |EK| - |A'K| - |EA'| \\ &= |CD| - |DE| + |BC| - |A'B| - |EA'| \\ &= |EC| + |CA'| - |EA'| \\ &= 2r \end{aligned}$$

ve

$$r = |D'E|$$

olmalıdır.

Y34. Ölçüsü derece türünden tam sayı olan bir açının cetvel ve pergelle çizilebilmesi için gerek ve yeter koşulun, ölçüm açısının 3'ün katı olduğunu kanıtlayınız (İpucu: $\tan 3^\circ$ yi hesaplayınız).

ÇÖZÜM: (İlyas Küreli, İstanbul)

$$x = \sin(18^\circ) \text{ yazarsak}$$

$$\begin{aligned} \cos(18^\circ) &= \sin(72^\circ) = 2\sin(36^\circ) \cos(36^\circ) \\ &= 4x \cos(18^\circ) (1 - 2x^2) \end{aligned}$$

$$\text{olup } \sin(18^\circ)$$

$$8x^3 - 4x + 1 = (4x^2 + 2x - 1)(2x - 1) = 0$$

denkleminin bir köküdür. Bu miktar eksi bir sayı veya 1/2 olmayacağından

$$\sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

olmalıdır ki bu sayı pergel ve cetvelle çizilebilir bu uzunluk ifade eder. Diğer bir deyişle 18° lik açı, pergel ve cetvelle çizilebilir. Diğer taraftan 60° nin dörttebiri olan 15° de pergel ve cetvelle çizilebileceğinden $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ de aynı şekilde çizilebilir. Buna karşılık 60° nin üçtebiri olan 20° pergel ve cetvelle çizilemediğinden bu miktarın tam çarpanları olan 1° ve 2° lik açılar da pergel ve cetvelle çizilemez.

Diğer çözenler : (Emre Alkan, İstanbul)

Y35. $n > 1$ için $n!$ sayısının tam kare olup olmayacağını araştırınız.

ÇÖZÜM: (Burhan Biner, Malatya)

Bir tamsayının tam kare olabilmesi gerek ve yeter şart sayısının her asal çarpanının o sayının çift bir sayı kere çarpanı bulunmasıdır. Şimdi her m sayısı için m ve $2m$ arasında bir asal sayı olduğunu hatırlayalım. (Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 5: "Yaşayan bir dahi: Paul Erdös", Öner Çakar.) p, n ve $n/2$ arasında bir asal sayı ise $p \mid n!$ in de bir asal çarpanıdır. Buna karşılık p nin bütün katları n den büyük olup $n!$ in çarpanı olamaz. Demek ki $p, n!$ in sadece bir defa asal çarpanıdır. Bu yüzden $n!$ tam kare olamaz.

Diğer Çözenler : (Emre Alkan, İstanbul; Tamer Kahveci, Ankara; İlyas Küreli, İstanbul)

7,13 VE 19 İLE BÖLÜNEBİLME KURALLARI

NURETTİN ÇALIŞKAN

● ndalık şekliyle verilmiş bir tam sayının 2, 3, 4, 5, 9, 10 ve 11 e bölünebilirliği hakkında kolay yöntemler yaygınlık kazanmıştır. Burada aynı işi 7, 13 ve 19 için yapacağız.

19'a bölünebilme :

Verilen, n basamaklı bir x sayısının 19 a bölünebilmesi x in son hanesinin 2 ile çarpılarak x in son hanesi atılarak elde edilen sayıya eklenmesinden oluşan sayının 19 a bölünebilmesi ile eşdeğerdir.

Örnek olarak 10279 sayısının 19 a bölünebilirliğine bakalım

$$1027 + (2).9 = 1027 + 18 = 1045$$

$$104 + (2).5 = 104 + 10 = 114$$

$$11 + (2).4 = 11 + 8 = 19$$

yani, 10279 sayısı 19 a bölünebilir.

19 için kullanılan 2 sayısına yerine 13 için 4 ve 7 için de -2 sayıları kullanılmalı. Yani, bir sayının 13 e bölünebilmesi için, sayının son hanesinin 4 ile çarpılarak geri kalan kısmına eklenmesiyle oluşan yeni sayının 13 e bölünebilmesi; 7 ye bölünebilmesi için de son hane 2 ile çarpılarak geri kalandan çıkarılmasıyla oluşan sayının 7 ye bölünebilmesi gerekir.

Örneğin 4751 sayısının 7 ye bölünebilirliğine bakalım

$$475 - (2).1 = 473$$

$$47 - (2).3 = 41$$

41 sayısı 7 ye bölünemez, o halde 4751 sayısı da 7 ye bölünemez.

Bu örneklerle bir genellemeye varılabilir mi?

Bu konuda, Matematik Dünyası, Sayı 3 te Fahrettin Akbulut'un "Bölünebilmede Yeni Yöntemler" makalesini okumanızı öneririz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,*
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,*
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,*
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,*
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,*
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,*
- * Matematik dünyasından güncel haberler.*

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

