

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Olağanüstü Otel

Stanislaw Lem

Seçim ve Matematik - 3

Halil İbrahim Karakaş

Eşparçalama

Cem Tezer

Rolle ve Ortalama Değer Teoremi

Şafak Alpay

Ünlü Kadın Matematikçiler

Hülya Şenkon

Bazı Çokgen Formüllerinin Kolay Kombinatorik Kanıtları

Uluğ Çapar

Olimpiyat Haberleri

Albert Erkip

Sorular – Çözümler

$$\sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ARALIK 1992 / CİLT : 2 / SAYI : 5

İÇİNDEKİLER

Olağanüstü Otel

Stanislaw Lem 1

Seçim ve Matematik - 3 Seçim Paradoksu

Halil Ibrahim Karakaş 10

Eşparçalama

Cem Tezer 12

Rolle ve Ortalama Değer Teoremi

Şafak Alpay 16

Ünlü Kadın Matematikçiler

Hülya Şenkon 19

Bazı Çokgen Formüllerinin Kolay Kombinatorik Kanıtları

Uluğ Çapar 22

Olimpiyat Haberleri

Albert Erkip 24

Sorular 27

Çözümler 28

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

BU SAYIYI YAYINA HAZIRLAYAN
TİMUR KARAÇAY

YAYIN KURULU
OKAY ÇELEBİ, HÜSEYİN DEMİR,
ALİ DOĞANAKSOY, HALİL ERDEM,
YAŞAR ERSOY, İSMAIL GÜMÜŞEL,
TİMUR KARAÇAY, ALEV TOPUZOĞLU

YAZI İŞLERİ MÜDÜRÜ
ABDULLAH KAYGUSUZ

DİZGİ
ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU BASİMEVİ
Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 25.000.-TL., Yurtdışı yıllık 50.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

OLAĞANÜSTÜ OTEL

STANISLAW LEM

E ve oldukça geç döndüm. Andromedalılar kulübündeki toplantı gece yansından çok sonraya dek uzamıştı. Bütün gece kabus gördüm: önceleri dev yaratıklarla uğraştım. Sonra da kendimi yeniden Durtitov gezegeninde buldum. Üstelik, o korkunç makinadan, hani o insanı altıgene çeviren ve asla eski haline dönüştüremeyen makinadan nasıl korunacağımı bilemiyordum. Neyse ki hesapta olmayan bir telefonla uyanarak kabuslarımdan sıyrıldım. Hattın öbür ucunda eski dostum ve yıldızlar arası seyahat arkadaşım profesör Tarantog vardı. Sesinden, gene üstesinden gelemediği bir işle karşılaştığı belliydi:

"-Dostum Mülayim, ilginç bir problemle karşı karşıyayız. Astronomlar bir galaksi boyunca uzanan kara bir bant keşfettiler. Ne olduğunu kimse bilemiyor. En iyi teleskopları ve radyo teleskopları takıp gönderdiğimiz roketler bile bu esrarengiz nesneyi anlayamadan döndüler. Saatlerdir bu işle uğraşıyoruz. artık başka yollardan umudu kestik; seni oraya gönderip olayı yerinde görmen gerektiğine karar verdik. Hemen ACD-1587 takım yıldızına doğru yola çıkmaya hazırlan..."

Ertesi gün emektar foton roketimi tamirciden çektim. Yolculuk için gerekli her şeyi içine yerleştirdim. Özellikle, yıldızlar arası bütün dilleri ve en güzel öyküleri bilen elektronik robotumu göğüs cebime yerleştirmeyi unutmamaya dikkat ettim. Gideceğim yerde, onsuz hiç kimseyle konuşamayacağım gibi, bu uzun yolculukta her an gönlümün dilediği türden öyküler anlatmasa, can sıkıntısından ölebilirim.

Robotum en az beş yıllık bir yolculuğa yetecek kadar öykü bilmektedir.

Yola çıktım.

Her zaman olduğu gibi, önceleri yolculuğum çok iyi geçiyordu. Hatta, dostum Tarantog'un verdiği bu işten memnun bile olmuştum. Ama roketimin zaman ayarındaki bir bozukluk nedeniyle, yolculuk umduğumdan daha çok sürdü. Dönüşte, ya tamircimi değiştireceğim ya da roketimi. Zavallı robotum, ben sıkılmayayım diye enaz on kez devrettiği öyküler arasından, o an için hoşlanabileceğimi sandıklarını bir daha seçmeye uğraşıyordu. *(Bir elektronik robottan bir öyküyü on kez dinlemekten daha berbat bir şey olamayacağını ona ne diye öğretmemişler sanki!)* Neyse ki sonunda hedefimiz uzaktan göründü. Galaksiye yaklaştıkça, ne olduğunu dünyadan anlayamadığımız o kara bantın, hemen hemen her burçta kurulan heyula birer yapı olduğunu gördüm. Uzaktan bakınca biz, bu yapıları galaksiyi boydan boya aşan kara bir bant olarak görmüştük.

Bu yapılardan çoğunu geride bırakarak galaksinin merkezine ilerledim ve bu heyula yapılardan biri olan Kozmoz oteline indim.

Bir zamanlar bu galakside görevliydim. O zamanlar gezginlerin sığınacağı küçük peykler yaptırılmıştı. Ancak, zamanla gezginlerin sayısı çok arttığından, galakside peyk trafiği tehlikeli bir hal almış. Üstelik gelişen evrende bu peykler oldukça ilkel görülmeye başlanmış. Bunun üzerine, peykleri toplayıp onların yerine, hemen hemen her bir burçta sonsuz odalı birer otel

yapmaya karar vermişler. Hemen her burçta diyorum, çünkü inşaat sırasında, galaksideki canlıları biraraya topladıkları bir kaç milyon burç hariç, ötekilerin (ki sonsuz sayıdadır) herbirisine bir otel kurmuşlar. Böylece sonsuz odalı bu oteller, hem bulundukları burcun bölgesindeki bütün yıldızlara hem de başka galaksilerden o yıldızlara gelecek gezginlere yetsin diye düşünülmüş. Yapım sırasında, galaksiye ait öteki yıldızlardan büyük miktarlarda yapı malzemesi taşınmış.

Gerçekten oteller birer harika!.. Sonsuz odalı Kozmoz otelinin her bir odasında, herhangi bir galaksiden gelecek müşterinin yaşam koşullarına ayarlanabilecek her türlü konfor var. Odayı istediğiniz gazla doldurabilir, istediğiniz sıcaklığa ayarlayabilirsiniz. Musluklardan isterseniz sıcak ya da soğuk su, isterseniz istediğiniz kıvamda plazma akar. Dilerseniz, gece sizi atomlarınıza ayırırlar, sabahleyin yeniden birleştirirler. Doğrusu ya bu galakside uygarlık bizimkinden daha ileride. Bizimkilerin, bu gidişle, kalkınma hızını yeniden ayarlamaları gerekecek.

Bütün bunlara karşın otele indiğimde pek talihli sayılmazdım. Otel yeni açılmıştı. Personel henüz işlere iyice alışamamıştı. Üstelik uzay zoologları kongresi burada toplanmıştı. Öteki bütün galaksilerden gelen zoologlar otele benden daha önce inmişlerdi. Sonsuz çokluktaki bu galaksilerden gelen bu müşteriler, sonsuz odalı Kozmoz otelini çoktan doldurmuşlardı bile.

Roketim bakım görmeden ve ben de iyice dinlenmeden ne dünyaya dönebilirdim, ne de bir başka burçta boş otel aramak için yola çıkabilirdim. Otel katibi halden anladı. Önce, telefonla odaları yoklayarak, odasını benimle paylaşacak bir zoolog aradı. Sonunda da, iki gönüllü centilmen buldu. Ne yazık ki bu centilmenlerden birisi odasını flüor gazı ile doldurmuştu, ötekinin de 860° C de uyuması gerekiyordu. Nazik kabulleri için her ikisine de

ayrı ayrı teşekkür ederek, yine katibin yanına döndüm. Katip bu kez otel müdürüne çıktı. Adımı duyan müdür koşarak yanıma geldi. Mutlu bir tesadüf, kendisi buradaki eski dostlarımdan birisiydi. Hemen katibe emretti:

"-Konuğumuzu 1 Nolu odaya al. "

Katip biraz şaşkın cevap verdi:

"-Peki ama 1 Nolu odadaki müşteriyi ne yapayım?"

"- 1 dekini 2 'ye, 2 dekini 3 'e, 3 dekini 4 'e al. Böylece bütün müşterileri birer numara geriye kaydır. "

Bu cevaptan sonra, otelin olağanüstü bir özelliğini anlamıştım. Eğer sonlu sayıda oda olsa idi, her müşteri bir geriye kayınca, en son odadaki müşteriye yer kalmazdı. Ama oda sayısı sonsuz olduğu için, hiçbir müşteriyi otelden çıkarmadan, herkesi birer birer geriye kaydırmak mümkündü.

Ertesi gün 1 000 000 nolu odaya geçmem rica edilince hiç şaşırmadım. Zira VSK-3472 numaralı galaksiden gelen zoologlar benden sonra yetmişlerdi, dolayısıyla, otel müdürü bu guruba dahil 999 999 yeni müşteriye yer açıyordu.

Ertesi gün hesabı ödemek üzere aşağıya indiğimde, katibi çok telaşlı gördüm. Holdeki kayıt bürosunun önünde kuyruğa girmiş olan bir kalabalıktan gürültüler geliyordu:

"-Andromedadan iki pulum var. Sirius'dan iki pul ile değiştirmek istiyorum. . . "

"-Erpean'dan 57 nci uzay yılına ait bir pul arıyorum. . . "

Katibe,

"-Bunlar da kim ?"

diye sordum.

"-Yıldızlar arası pulcular kongresinin delegeleridir."

diye cevap verdi.

"Çok mu kalabalıktırlar ?

"-Hem de nasıl. . . Sonsuz çoklukta. . . Herbir galaksiden bir delege var. "

O an pencereden dışarıya baktım. Holdeki kuyruk, dışarıda taa Macellan bulutuna doğru uzayıp gidiyordu. "

-Peki ama bunlara nasıl yer bulacaksınız şimdi! Üstelik zoologlar yarına kadar otelden ayrılmayacaklar. . . "

dedim.

"-Doğrusu ben de bilmiyorum. Zaten şimdi durumu müldüre anlatmaya gidiyordum. Lütfen beni birkaç dakika bekleyiniz."

diyerek katip odadan çıktı.

Görünüşe bakılırsa bu kez problem daha zor çözülmüştü. Katibin birkaç dakikası bir saati çoktan aşmıştı ki, yorgun ama memnun bir yüzle odasına döndü. Benim varlığımı bile unutarak, adamlarına buyruk vermeye başladı:

"-1 numaradakini 2 numaraya. . . "

diye söze başladı. Ben o an neredeyse içimden kıs kıs gülmeye başlayacaktım. Çünkü bu yöntemi benim için uygulamışlardı ve biliyordum ki bu iş ancak sonlu sayıda yeni müşteriye yer açabiliyordu. Oysa bunların kapısında sonsuz çoklukta müşteri kuyrukta bekliyordu. Ama katip sözünü,

"- 2 numaradakini 4 numaraya, 3 numaradakini 6 numaraya; genel olarak, n numaradakini 2n numaraya yerleştiriniz."

diye bitirince, sorunu gerçekten çözdüklerini anladım. Bu yöntemle sonsuz çoklukta olan bütün tek numaralı odaları boşaltabiliyordu. -

Artık bunlara pulcuları yerleştirebileceklerdi.

Böylece çift numaralı odalar uzay zoologları ve tek numaralı odalar da uzay pulcuları tarafından işgal edilmiş olacaktı.

Roketimin bakımı yapılmış, geri dönüş için herşey hazır olmuştu. Ama dönüş zamanımı biraz daha ertelemeye karar verdim. Erteleme kararımın nedeni, ne Kozmoz otelinin konforu ve ne de uzay zoologları ile kurduğum içten dostluklar idi. Bütün bunlardan daha çok, bu otelin, karşılaştığım bu olağanüstü özellikleri, beni dönüş kararımdan vazgeçirdi. Biraz daha kalırsam, belki Kozmoz otelinin başka olağanüstü özelliklerini daha öğrenebilirdim. Gecikeceğim için dostum Tarantog'un canı sıkılsa bile, bu merakımı yenemeyecektim. Sonunda, ben de, bütün zoologlar gibi, odamı değiştirdim ve 1 000 000 numaralı odadan çıkıp 1 999 999 numaralı odaya yerleştim. Bu arada Samanyolu galaksisinden gelen ve kuyrukta 574 üncü sırada yer alan pulcu bir arkadaşım 1147 numaralı odaya yerleşmişti. Genel bir kural diye söylersek, pulcuların meydana getirdiği kuyrukta n-inci sırada yer alan bir müşteri 2n-1 numaralı odaya yerleşmişti.

Ertesi gün zoologların kongresi bitip herbiri kendi yurduna dönünce otelde bir ferahlama sezildi. Bu arada otel müdürü arkadaşım, beni, kendisine ayrılan lojmandaki boş bir odaya yerleştirmek nezaketinde bulundu. Otelin yarısı boşaldığı için müşteriler kadar otel personeli de memnun görünüyordu. Ama onları memnun eden bu olgunun, otel müdürünü memnun etmediği anlaşılıyordu.

"-Otelin yarısı boşaldı. Bu gidişle işletmemiz zarara girecek!.."

diye dertlendi. Gerçekte, sonsuz müşterisi olan bir otelin nasıl olup ta zarar edebileceğini anlayamadım. Ama konuşmuş olmak için,

"-Öyleyse müşterilerini tekrar sıkıştır;

zoologlarda olduğu gibi otel yeniden dolsun. " dedim.

"-Hay Allah!.. bunu neden düşünemedim şimdiye dek!"

diye hayıflandı. Hemen telefona sarılarak katibe ne yapacağını anlattı. Zaten bu kez problem kolaydı. Pulcular 1, 3, 5, 7, ... , 2n-1, ... gibi tek numaralı odaları doldurmuşlardı. Öyleyse, 1 numaradakinin yerinde bırakarak, 3 numaradakinin 2 numaraya, 5 numaradakinin 3 numaraya; genel olarak, 2n-1 numaradakinin n numaraya yerleştirmek yetecekti. Böylece, yarısı boş olan otele hiçbir yeni müşteri gelmediği halde, mevcut müşterilerle otel yeniden doldurulmuştu.

Yazık ki bu sorunun çözümüyle müdürün sevinci uzun sürmedi. Galakside hemen her burçta kurulan herbiri sonsuz odalı sonsuz çokluktaki otellerin hemen boşaltılması buyruğu gelmişti. Otellerin inşaatı sırasında öteki yıldızlardan taşınan yapı malzemeleri nedeniyle galaksi içi yıldızlar arası çekim dengesinin bozulduğu saptanmıştı. Bunun ileride ciddi sorunlar yaratmasından korkuluyordu. Bu nedenle, bu otellerin yıkılıp, herbir yıldızla ait malzemelerin geriye götürülmesi kararlaştırılmıştı. Yıkım işine hemen başlanılacağından, bu otellerin bütün müşterilerinin beş gün içinde Kozmoz oteline yerleştirilmesi öngörülmüştü. Zavallı dostum, Kozmoz oteli müdürü, önüne gelene dert yanıyordu:

"-Önce, her odası dolu otelime yeni bir müşteri geldi. Yer yok demedim. Ona bir oda buldum. Sonra 999 999 yeni müşteri daha geldi. Onları da geri çevirmedim. Her birine bir oda buldum. Daha sonra, tamamen dolu olan otelim odası sayısı kadar yeni müşteri daha geldi. Onlara da yer yok demedim, her birisine bir oda verdim. Ama bu kez ne yapabilirim ben? Sonsuz çoklukta burç, her burçta bir otel, her otelde sonsuz

çoklukta müşteri var. Şimdi bütün bunları, zaten tamamen dolu olan otelime nasıl yerleştiririm? Bu buyruğu verenler beni sihirbaz mı sanıyorlar?"

Müdürün bu şekilde yakınması birkaç saat sürdü. Ne var ki, buyruk buyruktu ve buyruğun yerine getirilmesi için zaman daralıyordu. Baktı ki yakınmanın yararı yok, oturup sorunu ciddi olarak düşündü. Çözüm bulamayınca, problemi bir yarışma ile çözmeye karar verdi. Otelin her yanına duyurular astırdı. Problemi açıkladı. Bu sorunu çözümleyene istediği bir galaksiye gezi yapma olanağı sağlayacaktı. Oteldeki bütün müşteriler ve bütün personel her işi bir yana bırakıp bu problemi düşünmeye başladılar.

Neden sonra aşçılardan birisi heyecanla müdürün odasına daldı ve şu öneride bulundu:

"-Birinci otel bizimki olsun. Bizim otelde, 1 numaradaki müşteriyi yerinde bırakan. 2 numaradakinin 1001 numaraya, 3 numaradakinin 2001 numaraya, 4 numaradakinin 3001 numaraya ... v. b. yerleştiriniz. Sonra ikinci oteldeki müşterileri, bizim otelin 2, 1002, 3002, ... numaralı odalarına yerleştiriniz. Sonra üçüncü otelin müşterilerini bizim otelin 3, 1003, 2003, 3003, 4003, ... numaralı odalarına yerleştiriniz. Artık, bu işe, böylece devam ediniz."

Odadakiler bir an duraksadı. Acaba sorun çözümlenmiş miydi? Müdür, söylenenleri en başından dikkatle yeniden düşünmeye koyuldu. Biraz sonra aşçıya döndü ve şöyle dedi:

"-Bak, sana, bir eski hikaye anlatacağım. Eski Roma senatosu, imparator Tiberius'un onuruna, Eylül ayının adını "Tiberius" olarak değiştirmeyi önerir. (Temmuz=julius ve Ağustos=Augustus adları daha önce imparator adlarını almışlardı.) Tiberius, iğneli bir ifadeyle senatosuna şu cevabı verir: "-Peki ama onüçüncü Sezara ne önereceksiniz?" Şimdi ben de sana şunu soruyorum: Önerdiğin plana göre, öncelikle,

bizim otelin bütün müşterilerini, değişik bir biçimde gene bizim otele yerleştiriyorsun. Sonra ikinci otelin bütün müşterilerini de aynı şekilde Kozmoz'a yerleştirebiliyorsun. Üçüncü, dördüncü, ... , bininci otelin bütün müşterilerini de aynı plana göre yerleştirebileceğimden hiç kuşku yok. Peki ama 1001 inci ve ondan sonraki otellerin müşterilerini ne yapacaksın?"

Aşçının planı ilginçti ama problemi tam çözemiyordu.

Biraz sonra otel muhasebecisi bir başka öneriyle çıkageldi. Bunun önerisi geometrik dizilere dayanıyordu. Birinci oteldeki 2, 4, 8, 16, 32, ... numaralı odalara; başka bir deyişle 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , ... numaralı odalara yerleştirecekti. İkinci oteldeki 3, 9, 27, 81, ... numaralı odalara; başka bir deyişle, 3, 3^2 , 3^3 , 3^4 , ... numaralı odalara yerleştirecekti. Üçüncü oteldeki 4, 4^2 , 4^3 , ... numaralı odalara, ... Böylece devam ediyordu ki, müdür sözünü kesti:

"-Herkes bir oda istiyoruz. Bu plana göre, örneğin, birinci otelin 2 numaralı müşterisi ile üçüncü otelin 1 numaralı müşterisini Kozmoz'un 4 numaralı odasına yerleştirmiş oluyorsunuz."

Bir sessizlik çöktü odaya. Bu umut da mı boş çıkıyordu? Bu noktada söze karıştım. Ne de olsa, Yıldız Akademisinde beş yıllık aritmetik öğretmenliğimin boşuna olmadığını ispatlamak fırsatı doğmuştu:

"-Baylar" dedim yalnız asal sayıları kullanırsak bu yöntem işler. Önce 2 den başlayarak asal sayıları küçükten büyüğe doğru 2, 3, 5, 7, 11, ... gibi sıralayalım. Birinci otelin müşterilerini ilk asal sayının kuvvetleri ile numaralanmış odalara; yani 2, 2^2 , 2^3 , ... numaralı odalara yerleştirelim. İkinci otelin müşterilerini ikinci asal sayının kuvvetleri ile numaralanmış odalara; yani 3, 3^2 , 3^3 , ... numaralı odalara

yerleştirelim. Böylece devam edersek, üçüncü otelin müşterilerini 5, 5^2 , 5^3 , 5^4 , ... numaralı odalara; dördüncü otelin müşterilerini 7, 7^2 , 7^3 , ... numaralı odalara, ... v. b."

Müdür:

-Yani, böyle yaparsak, bir odaya birden çok müşteri girme olasılığı kalkıyor mu?

diye sordu.

"-Elbette" diye cevap verdim "çünkü iki asal sayının pozitif tam kuvvetlerinden herhangi ikisi eşit olamaz; yani p ile q herhangi iki asal sayı ve $p \neq q$ ise, her m, n pozitif tamsayıları için $p^m \neq q^n$ dir."

Müdürün yüzü gülmüştü artık. Sorunun çözüldüğüne inanmıştı. Ancak işin pratik yönüne kolaylık kazandırmak için, son öneriyi şöyle değiştirdi:

-Yalnız 2 ve 3 asal sayılarını kullanalım. n-inci otelin m-inci odasından gelecek müşteriye Kozmoz'un $2^m 3^n$ numaralı odasına yerleştirelim.

Gerçekten bu çok daha kolay uygulanabilir bir yöntemdi. Buna göre, herhangi numaralı bir otelin herhangi numaralı bir odasından gelecek müşteriye, Kozmoz'da hangi numaralı odaya yerleşeceğini, daha girişte kapıcı bile söyleyebilirdi. Tabii, $m \neq p$ ya da $n \neq q$ ise $2^m 3^n \neq 2^p 3^q$ olduğundan, her müşteriye bir tek oda verilecekti.

Artık, herkes memnundu. Çözülemez sanılan problem çözülmüştü! Ama ne ben, ne de müdür ortaya konan armağana hak kazanamıyorduk. Çünkü, bu çözüme göre otelin büyük bir kısmı boş kalıyor, dolayısıyla işletme zararı doğuyordu. Benim çözüme göre, örneğin, 6, 10, 12, ... numaralı odalar; daha genel söylersek, bir asal sayının kuvveti olarak yazılamayan sayılara karşılık gelen bütün odalar boş kalıyordu. Müdürün çözümüne göre, $2^m 3^n$

"Acaba bu kez bütün müşteriler Kozmoz'a sığacak mı?"

diye kuşkuyla sordu.

"Elbette" dedi başkan "Hem bütün müşteriler sığacak, hem de boş yer kalmayacak. Bakınız bu tabloda görüldüğü gibi, ilk n tane otelin ilk n odalarından gelecek n^2 müşteriyi Kozmoz'un ilk n^2 odasına yerleştirmiş olacaksınız. Bütün müşteriler er ya da geç bu karelerden birisine dahil olacaklardır; yani Kozmoz'a yerleşebileceklerdir. Örneğin, 217 inci otelin 136 numaralı müşterisi 217 inci karede yerini alacaktır. Hatta, isterseniz hangi numaraya gideceğini de söyleyebilirsiniz. Bu müşteri $216^2 + 136$ numaralı odaya yerleşecektir. Genel bir kural olarak, m -inci otelin n -inci odasındaki müşteriyi, eğer $n \geq m$ ise Kozmoz'un $(n-1)^2 + m$ numaralı odasına, eğer $n < m$ ise Kozmoz'un $(m^2 - n + 1)$ numaralı odasına yerleşecektir."

Başkanın önerisini şimdi hepimiz iyice anlamıştık. Gerçekten hem bütün müşteriler Kozmoz'a sığıyor, hem de Kozmoz'un hiçbir odası boş kalmıyordu.

Pulsever matematikçi, LCR-287 galaksisine bir gezi kazanmış oldu.

Bu başarılı çözüm onuruna, otel müdürü o akşam bütün müşterilere bir davet verdi. Aksiliğe bakın ki, davette bile problemler çıkmaya başladı. Kozmoz'un tek numaralı odalarındaki müşteriler davete yarım saat geç geldiler. Baktılar ki, bütün sandelyeler, çift numaralı odaların müşterileri tarafından doldurulmuş durumda. Oysa, nazik otel müdürümüz herkese bir sandelye hazırlamıştı. Neyse, artık otel katibi bile bu işin üstesinden gelebilirdi. Daha önceden edindiği bilgiye göre, sandelyelerdeki konukları uygun biçimde geriye kaydırarak yeni gelenlerin hepsine yer açtı. Hem de, dışarıdan tek bir sandelye bile getirmeden...

Biraz sonra konuklara dondurma sunuldu. Her

konuğa ikişer külah dondurma düştü. Oysa, aşçıbaşı, herkese ancak birer külah hazırlamıştı. Sanıyorum ki, bunun nedenini, sizler de benim gibi kolayca anlayabilirsiniz.

Giderek, bu otelde olanaksız sandığımız herşeyin olabileceğine inanmaya başlıyordum ki, nazik dostuma, yeni bir buyruk daha ulaştı. Genel merkezden, müşterilerin, Kozmoz oteline kaç değişik biçimde yerleştirilebileceği soruluyordu. Herbir yerleşme biçimi, boş odalar 0 ile dolu odalar 1 ile gösterilmek üzere, bu iki rakamdan oluşan sonsuz bir satır dizisi ile temsil edilecekti. Örneğin, yalnız tek numaralı odaların dolu olduğu yerleşme biçimi

1010101010 ...

dizisi ile; bütün odaların dolu olduğu yerleşme biçimi

1111111111 ...

dizisi ile; bütün odaların boş olduğu durum (ki bu işletmenin iflası demektir) ise

0000000000 ...

dizisi ile temsil edilecekti.

Otel müdürü problemi bir süre düşündükten sonra şöyle bir yol buldu. Otelin her katında sonsuz çoklukta oda vardı; yani otelin herbir katı, otelin bütün odaları kadar odaya sahipti. Dolayısıyla, her katın, sorumlusundan müşterileri kendi katına nasıl yerleştireceğini belirten bir liste istedi. Farklı iki kattan gelen listelerin aynı olmaması için de gerekli kontrolün yapılmasını buyurdu. Otelde sonsuz çoklukta her kattan, yerleşme biçimini gösteren diziler yazılıp getirildi. Artık müdürün yapacağı iş bu dizileri alt alta yazıp meydana gelen listeyi ilgili yere göndermektir.

Dostuma,

"-Bu listenin tam olduğuna nasıl güveniyorsunuz? Acaba bu listedekilerden farklı

bir yerleşme biçimi olamaz mı?"

diye sordum.

"Doğrusu, bilemiyorum. Elimde sonsuz çoklukta yerleşme biçimi var. Öyleyse, bütün yerleşme biçimleri bu listede var olmalıdır diye düşünüyorum. "

dedi.

"Bu listenin tam olmadığını gösterebilirim. Size, elinizdekilerden farklı bir yerleşme biçimi bulacağım. "

dedim. Otel müdürü bana gülerek şöyle dedi:

"Dostum Mülayım, belki bu liste eksiktir. Ama bunun böyle olduğunu hiç kimse gösteremez. Zaten elimizde sonsuz çoklukta dizi var. Bundan ötesi nasıl olacak?"

Dostumla iddiaya girerek işe koyuldum. Önce her katın sorumlusuna önerdiği yerleşme biçimini ilgili odaların kapısına yazmalarını rica ettim. Yani, boş önerdikleri odaların kapısına 0, dolu önerdikleri odaların kapısına 1 yazmalarını istedim. Sonra birinci kattaki birinci odanın kapısına gittim. Kapıda 0 vardı. Kuracağım dizinin ilk terimini 1 olarak yazdım. Sonra ikinci kata çıktım. Bu kez bu katın ikinci odasının kapısındaki numaraya baktım: 1 idi. Dizinin ikinci terimi olarak 0 yazdım. Sonra üçüncü kata çıktım, üçüncü odanın kapısına baktım: 1 idi. Dizimin üçüncü terimi olarak yine 0 yazdım. Böylece her katta o katın numarasına eşit numaralı odanın kapısında 0 mı, 1 mi yazılı olduğuna bakıyor; 0 ise listeme 1, 1 ise listeme 0 rakamını yazıyordum. Böylece her katta dizimin bir teriminin ne olması gerektiğine karar veriyordum. Buna göre, örneğin, 778 inci katta, yalnızca 778 numaralı odanın kapısına bakıyorum; kapıda 0 varsa, dizimin 778 inci rakamını 1 diye yazıyorum; 1 varsa 0 diye yazıyorum.

Bütün katlarda aynı işi yaptıktan sonra

hazırladığım diziyi gururla müdürün önüne koydum:

"İşte dostum" dedim "listende olmayan bir yerleşme biçimi ! "

"-Bunun benim listemde olmadığını nasıl bilebiliyorsun?"

"Çok kolay !.. Kurduğum bu dizi, senin listedeki birinci dizi olamaz, çünkü ilk rakamları farklıdır. İkinci dizi de olamaz, çünkü bütün öteki terimler eşit olsa bile ikinci terimlerinin farklı olduğunu görüyoruz. Üçüncü diziyeye bakalım, üçüncü rakamlar farklıdır. . . Genel olarak, benim kurduğum dizi ile senin listedeki n-inci diziyi karşılaştıralım. Bu iki dizinin n-inci terimleri farklıdır, çünkü diziyi, özellikle, böyle olacak şekilde kurdum. Demek ki, bu dizi senin listedeki dizilerden hiçbirisine eşit değildir. "

Müdür, sonsuz çoklukta listesinde yer almayan yeni bir dizi bulmamı, sanki gereksiz bir işgüzarlık olarak gördü:

"-Eh" dedi "öyleyse sizin diziyi de listeye ekleyelim, listemiz tam olsun."

"-Yoo!.. " dedim "Bu liste hiçbir zaman tam olamaz. . . . Bu diziyi listeye eklesen, ne değişecek? Gene elinde numaralanabilen sonsuz çoklukta bir diziler listesi olacak. O zaman, önceki yöntemi kullanarak, bu yeni listede de olmayan yeni bir dizi daha kurabilirim. Hem bu işin sonu hiç gelmez. Her seferinde, listede olmayan yeni bir dizi bulabilirim. "

"-Yani, şimdi bu işin içinden çıkamadık, diye mi bildirelim merkeze?"

diye sordu.

"-Hayır" dedim "tam tersine, sorunu çözümledik. Onların istediği gibi, müşterilerin Kozmoz'a mümkün yerleşme biçimlerini bir listeye sıralamak olanaksızdır. Matematiksel deyişle, bu yerleşme biçimlerini numaralamak;

yani saymak olanağı yoktur. Daha açıkçası, sayılamaz çoklukta yerleşme biçimi vardır. "

Haber merkeze doğru yola çıkarken ben de nazik arkadaşım otel müdürüne veda ederek, emektar roketime atladım. Dönüşte, dostum Tarantog'a, o kara banttan daha çok, Kozmoz otelini, daha doğrusu sonsuz kümelerin karşılaştığı bu olağanüstü özelliklerini anlatacaktım.

UYARI. Bu noktada artık kahramanımız Mülayim'i rahat bırakalım ve ona fiziksel olarak olanaksız bildiğimiz bazı şeyleri nasıl başardığını sormayalım. Örneğin, görecelik (rölativite) kuramına göre 186.000 mil/sn den daha büyük bir hızla herhangi bir sinyal göndermek olanaksızdır. Dolayısıyla, otel müdürünün

buyruklarının bütün odalara ulaşması bile sonsuz zamanı gerektirir. Başka bir deyişle, bu buyruklar hiçbir zaman her yere ulaşamayacaktır. Aynı şekilde, kahramanımızın sonsuz çokluktaki katları dolaşması da hiçbir zaman bitmeyecektir.

Burada, bizim yapmak istediğimiz şey sonsuz kümeleri incelemektir. Dolayısıyla, fiziksel bakımdan olanaksız olan olayların nasıl olduğunu düşünmeyeceğiz.

Bu öykü aşağıdaki kitaptan alınmıştır:

Timur Karaçay: SOYUT MATEMATİĞE GİRİŞ, Modern Matematik ve Fen Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1975.

Seçim ve Matematik - 1 Kısmi Sıralama Bağlantıları (Baskı Hataları)

Sayfa	Sütun	Satır	Hata	Doğru
19	sol	üstten 1	Çeşitli	çeşitli
19	sol	alttan 3	)örnek	).Örnek
19	sağ	üstten 17	varsayılım	varsayalım
19	sağ	alttan 14	belirtmeyiz	belirtmeliyiz
20	sol	üstten 14	seçenek	seçenekler
20	sol	üstten 16	seçenekeler	seçenekler
20	sol	alttan 18	ii) $s, t \in S$; $(s, t) \in K$, $(t, s) \in OK$	if) $s, t \in S$; $(s, t), (t, s) \in K$.
20	sağ	üstten 17	için $c \geq d$ ve $c \leq d$	için $c \geq d$ ve $c \leq d$
20	sağ	alttan 17	belirlediği	belirlendiği
20	sağ	alttan 1	gçerlidir	geçerlidir
21	sol	alttan 15	$a_0 > a_1 > \dots > a_{k-1} > a_k > a$	$a_0 > a_1 > \dots > a_{k-1} > a_k = a$
21	sol	alttan 9 ve 10	bu satırlar tamamen silinmelidir.	
21	sağ	alttan 12	yazamız	yazımızı

SEÇİM VE MATEMATİK - 3

SEÇİM PARADOKSU

HALİL İBRAHİM KARAKAŞ

S, en az üç elemanlı bir seçenekler kümesi. $I_1 = \{1, \dots, n\}$ seçmenler kümesi; S içindeki tüm zayıf sıralama bağıntılarından oluşan küme Z olsun. Diğer tüm gösterimlerimiz önceki yazılarımızdaki gibi olmak üzere,

$$f: Z' \rightarrow Z$$

birinci, ikinci ve üçüncü özellikleri sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu olsun.

Yardımcı Teorem: $\kappa \in Z$; $a, b, c \in S$ olsun. Eğer $a > b$ ise $a > c$ ya da $c > b$ dir.

Kanıt. $a \leq c$ ve $c \leq b$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde dört durum söz konusudur:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $c > a, b > c$; | 2) $c > a, c \sim b$; |
| 3) $a \sim c, b > c$; | 4) $a \sim c, c \sim b$ |

Birinci durumda, geçişme özelliği $b > a$ çelişkisini verir. İkinci durumda, $c > b$; üçüncü durumda, $a > c$ ve dördüncü durumda

$a \sim b$ çelişkileri elde edilir. O halde, ya $a > c$ ya da $c > b$ dir.

Teorem 4 Öyle bir $\delta \in I$ vardır ki $J = \{\delta\}$, her $a, b \in S$, $a \neq b$ için (a, b) nin bir karar kümesidir.

Kanıt. $a, b \in S$, $a \neq b$ olsun. Teorem 2'ye göre, I_1 içinde (a, b) nin bir karar kümesi J vardır. J nin boş olmadığını biliyoruz. (a, b) nin karar kümeleri arasında eleman sayısı en az olan birini seçelim ve bunu D ile gösterelim. D boş olmadığından, $\delta \in D$ vardır. $\kappa \in Z$ yi $a > b$ ve $b > c$ olacak biçimde; her $i \in D \setminus \{\delta\}$ için

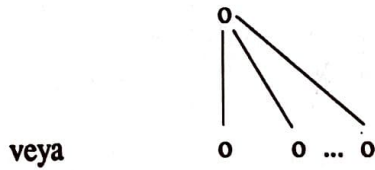
$\kappa_i \in Z$ yi $c > a$ ve $a > b$ olacak biçimde seçelim. Ayrıca, $J \in D$ için ki yi $b > c$ ve $c > a$ olacak

biçimde seçelim. D, (a, b) nin karar kümesi olduğundan ve her $i \in D$ için $a > b$ olduğundan $a > b$ dir. Diğer yandan, $f(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ olduğundan, yukarıdaki Yardımcı Teorem göre ya $a > c$ ya da $c > b$ olmalıdır. Eğer $c > b$ ise, her $i \in D \setminus \{\delta\}$ için $c > b$ ve her $j \in (I_1 \setminus D) \cup \{\delta\}$ için $b > c$ olduğundan, Teorem 1'e göre $D \setminus \{\delta\}$, (c, b) nin karar kümesidir. Teorem 3'e göre de, $D \setminus \{\delta\}$, (a, b) nin karar kümesidir. Bu, D üzerindeki varsayımımızla çeliştiğinden $D = \{\delta\}$ olmalıdır.

Sonuç (Arrow) En az üç farklı elemanı olan bir seçenekler kümesi içinde, arzu edilen dört özelliğin hepsine birden sahip olan bir toplumsal karar fonksiyonu yoktur.

Yukarıdaki olumsuz sonuç, toplumsal karar fonksiyonları hakkında kötümser bir tablo çiziyor gibi görünmekle beraber, durum böyle değildir. Bu olumsuz sonucun ortaya çıkmasının nedeni, istenilen dört özelliğin sağlanmasından çok, seçmenlerin kullanımına izin verilen kısmi sıralama bağıntıları kümesinin Z kadar geniş ve toplumsal karar fonksiyonu f nin değer bölgesinin ise Z kadar dar olmasıdır.

Yüzyıllardır kullanılan ve istenilen dört özelliğin dördünü de sağlayan toplumsal karar fonksiyonları vardır. Bir tek görüş veya aday için yapılan oylama yöntemi, demokrasilerde çok sık uygulanan yöntemdir. Bu yöntemde, eşitlik durumu kura veya başka bir yöntemle bozulmak üzere en çok oyu alan görüş veya aday kazanır ve bu yöntemde adayın kullanımına açık olan kısmi sıralama bağıntıları



biçiminde çizgelere sahip olan bağıntılardır. Son toplumsal kararı gösteren kısmi sıralama bağıntısı ise

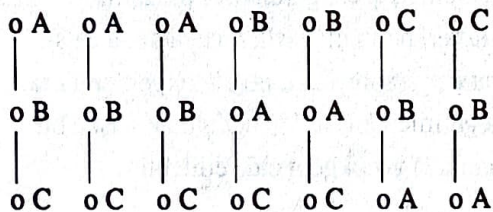


biçiminde bir çizgeye sahiptir. Böylece, bu yöntemde

$$X = \left\{ \begin{array}{c} o \\ | \\ o \end{array} , \begin{array}{c} o \\ | \\ o \end{array} , \begin{array}{c} o \\ | \\ o \end{array} , o \dots o \right\} \text{ olmak üzere}$$

$$f: X \times X \times \dots \times X \rightarrow X$$

toplumsal karar fonksiyonunun arzu edilen dört özelliğe sahip olduğu kolayca görülebilir. Bu toplumsal karar fonksiyonunun iyi tarafı, beraberlik kura veya başka bir yolla bozulmak kaydıyla, daima bir büyükçe eleman (yani kazanan eleman) vermesidir. Bununla beraber, bu yöntemin de iyi olmayan yanları vardır. Başka bir deyimle, istenilen bazı özelliklere sahip değildir. Bu yöntem, seçmenlerin tercihlerini ayrıntılı olarak belirlemelerine imkan vermez. Bu yöntemle ulaşılan toplumsal karar, bireylerin isteklerini tam olarak yansıtmayabilir. Örneğin, yedi seçmenli ve üç adaylı bir seçim olayında adaylar, A, B, C olsun. Seçmenlerin gerçek tercihlerinin, sırasıyla, aşağıdaki çizgelerde verilen tümden sıralama bağıntıları olduğunu kabul edelim:



Yukarıdaki yöntemle göre, bu seçimi A adayı kazanır. Ancak seçmenlerin çoğunluğunun (4/7 si) B yi A ya tercih ettikleri açıktır. Bununla beraber, Teorem 4 te görüldüğü üzere, zayıf sıralama bağıntıları üzerinde arzu edilen dört özelliği sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu yoktur.

Bu yazı dizisi hazırlanırken, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünün çok kısıtlı imkanlara sahip olan kütüphanesinden yararlanıldı. Aşağıda adları verilen kaynaklardan bir kısmı bu kütüphanede bulunmakla beraber bir kısmına ulaşamadım.

Toplumbilimcilerimizin bu konuya ilgi göstereceklerine ve Matematik Dünyası sayfalarında bu konuyu değişik boyutları ile inceleyip katkıda bulunacaklarına inanıyorum.

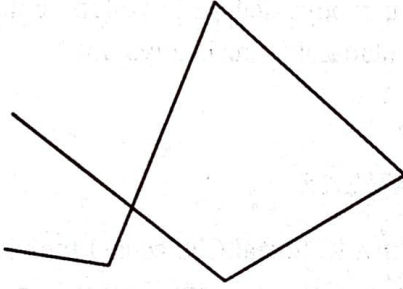
KAYNAKLAR

1. Arrow, K. Social Choice and Individual Values, 2nd ed., New Haven, Conn., Yale University Press, 1963.
2. Cozzens, B.M. and Porter D.R. Mathematics and Its Applications, Massachusetts, D.C. Heath and Company, 1987.
3. Fisher, J.L. Application Oriented Algebra, New York, IEP Series in mathematics, 1977.
4. Luce R.D. and Raiffa, H. Games and Decisions, New York, John Wiley and Sons, 1957.
5. Malkewitch, J. The Mathematical Theory of Elections, Lexington, Mass., HIMAP Module 1, COMAP-1985.

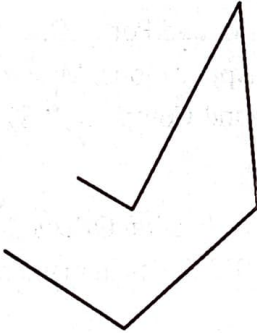
EŞPARÇALAMA

CEM TEZER

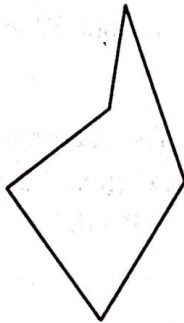
B u yazıda "çokgen" kelimesiyle, kendi kendini kesmeyen, kapalı (yani başladığı noktada biten) bir kırık çizgi tarafından sınırlanmış bir düzlem bölge kastedeceğiz. Bu kavramlara şekillerle açıklık kazandıralım: Şekil 1a, 1b, 1c de sırayla kendini kesen, kendini kesmeyen, kendini kesmeyen ve kapalı birer kırık çizgi görülüyor.



Şekil 1a



Şekil 1b



Şekil 1c

Tabii Şekil 1c deki kırık çizgi istediğimiz özelliklere sahip olup bir çokgen sınırlandırmaktadır. Bazı özel durumlarda, birbirini en fazla sınır noktalarında kesen çokgenlerin birleşimine de çokgen diyeceğiz.

Şimdi yazımızın konusunu teşkil eden eşparçalama kavramına geçebiliriz:

Tanım : ϕ ve ψ gibi iki çokgen ve bir $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ verildiğinde, eğer

$$a) \phi = \phi_1 \cup \phi_2 \cup \dots \cup \phi_n,$$

$$\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \dots \cup \psi_{n'},$$

$$n' \leq n \text{ olacak,}$$

b) Her $i \in \{1, 2, \dots, n'\}$ için, ψ_i , ϕ_i ye izometrik olacak ([2]),

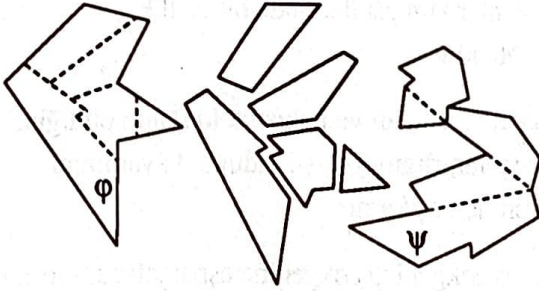
c) Her $i, j \in \{1, 2, \dots, n'\}$, $i \neq j$ için ϕ_i , ϕ_j yi ve ψ_i , ψ_j yi ancak sınır çizgisine ait bir noktada kesecek şekilde bir $n' \in \mathbb{N}$ ve $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n'}$ çokgenleri varsa, " ϕ çokgeni ψ çokgenine n -eşparçalanabilir" diyeceğiz.

Matematiğin bir cilvesi olarak, aslında basit bir fikri böyle çetrefil bir şekilde sunmak zorunda kaldık. Örneklere geçmeden önce eşparçalanmayı daha gündelik bir dille bir daha tarif edelim:

Aslında " ϕ çokgeni ψ çokgenine n -eşparçalanabilir" dediğimizde şunu kastediyoruz:

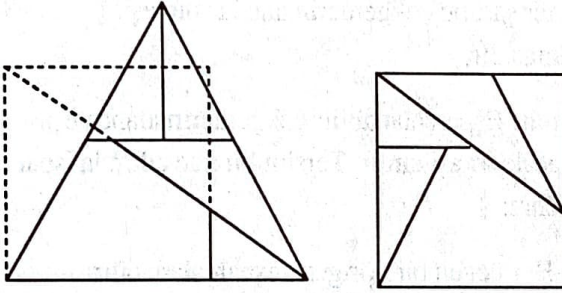
Kağıttan (veya başka bir iki boyutlu malzemeden) ϕ çokgenin bir nüshasını hazırlasak, bunu makasla n veya daha az alt çokgene ayırabiliriz ki, bu altçokgenler tekrar bir araya getirilerek (tabii genel olarak başka bir konumda !) ψ çokgeni elde edilebilir.

Hemen ilk örneğimize geçelim: Şekil 2 de bir ϕ çokgeninin beş altçokgene bölünerek nasıl ψ çokgenine "eşparçalandığı" görülüyor.



Şekil 2

Bir eşkenar üçgen beş altçokgene bölünerek bir kareye (tabii alanca eşit bir kareye) eşparçalanabilir. Okuyucu bunun nasıl yapıldığını Şekil 3 ten çıkarabilir. ([3])

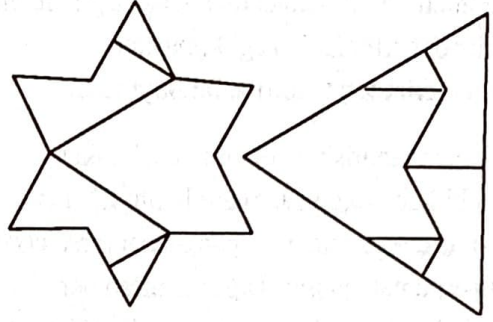


Şekil 3

Belki izaha muhtaç olan tek husus, sözkonusu üçgende yatay çizginin kenar orta noktalarını birleştirmekte olduğudur.

Bu açıklamalardan sonra okuyucu herhalde yeni bir maceranın heyecanını duymaya başlamıştır. Onu daha da tahrik etmek için şu soruyu soralım: Acaba bir eşkenar üçgen beşten daha az sayıda altçokgen kullanılarak bir kareye eşparçalanabilir mi? Bu soruya yazımızın sonunda tekrar döneceğiz.

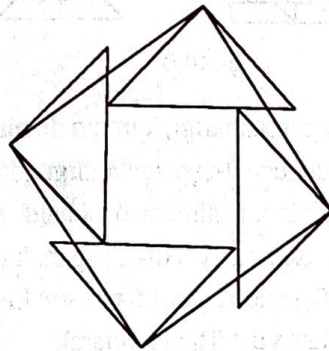
Büyük eşparçalama ustası H. Lindgren'den bir de mühr-i-Süleyman - eşkenar üçgen eşparçalaması sunalım: ([5], s. 85)



Şekil 4

Yazımızın merkezini teşkil edecek olan esas teoreme geçmeden önce eşparçalama konusunun matematikteki yerini biraz belirleyelim. İşin eğlencelik tarafı hakkında uzun uzadıya konuşmaya gerek yok. Bu noktada okuyucuya H. Lindgren'in harikulade kitabını ([5]) ve M. Gardner'ın zarif makalesini ([4]), önemle tavsiye edelim. Ayrıca V.G. Boltyanskii'nin derli toplu kitabı [1] dilimize kazandırılmış olup kıymetli bir kaynaktır. Bundan başka, eşparçalama ve benzeri kavramlar geometrinin ve genel olarak matematiğin temelleri hakkında bir çok çalışmaya konu olmuş. Bu yönde çalışma yapmış matematikçilerden M. Dehn, F. Hausdorff, S. Banach ve A. Tarski akla ilk gelenlerden.

Tarihte eşparçalamanın en eski örneği M.S. 10. yüzyılda yaşamış bir matematikçi olan Ebülvefa'ya ait: Ne yazık ki günümüze kadar ulaşamamış bir kitabından kalan parçalarda, Ebülvefa'nın bir kareyi dokuz altçokgene ayırıp sonra bu çokgenleri birleştirerek üç çeşit kareye dönüştürüldüğü görülüyor. ([3]) Bu zarif ve az önce söylendiği gibi, bilinen en eski eşparçalamanın anafikri Şekil 5 ten anlaşılabilir.



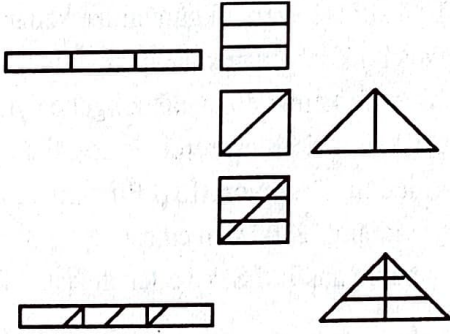
Şekil 5

Bir geometri eğitim aracı olarak eşparçalamanın ne kadar değerli olabileceği konusunu öğretmenlerimizin takdirine bırakıyoruz.

Eşparçalama teorisine dönerek, basit fakat önemli birkaç noktaya temas edelim. Eğer ϕ çokgeni ψ çokgenine n - eşparçalanabilirse ψ de ϕ ye n -eşparçalanabilir. Diğer taraftan her çokgenin kendi kendisine 1-eşparçalanabileceği de aşikardır. Şimdi, bir ϕ çokgeni bir $n \in \mathbb{N}$ için bir ψ çokgenine n -eşparçalanabiliyorsa " ϕ çokgeni ψ çokgenine eşparçalanabilir" diyelim. (Kaç parçada eşparçalandığı mühim değil!). Az evvel söylenenlerin ışığında, eşparçalanabilirliğin düzlemdeki çokgenler kümesi üzerinde yansımali ve bakışık bir bağıntı olduğu görülüyor. Böylece önemli ve teknik bir önermeye sıra geliyor:

Yardımcı Teorem : Eğer ϕ çokgeni ψ çokgenine m -eşparçalanabilir, ψ çokgeni ξ çokgenine n -eşparçalanabilirse, ϕ çokgeni de ξ çokgenine mn -eşparçalanabilir.

Bu yardımcı teoremin ispatı, yazının girişindeki tarif nevinden aslında çok basit bir fikri teknik bir kıyafete sokmaktan ibaret. Anafikri bir örnekle Şekil 6 yardımıyla açıklamakla yetineceğiz: Şekil 6 da ince uzun bir dikdörtgenin



Şekil 6

bir kareye 3-eşparçalandığı, karenin de bir ikizkenar dik üçgene 2-eşparçalandığı görülüyor. Yani burada gözönüne alınana özel halde $m=3$, $n=2$, ϕ , ψ ve ξ ise sırasıyla dikdörtgen, kare ve ikizkenar dik üçgendir. Şekil 6'nın son kısmında bu iki eşparçalama üst üste koyularak dikdörtgen, üçgene 6-eşparçalanmakta. Meraklı

okuyucu bu örnekten yola çıkarak tam bir ispat yazabilir.

Teorem 1: Eşparçalanabilirlik düzlem çokgenler kümesi üzerinde bir eşitlik bağıntısıdır.

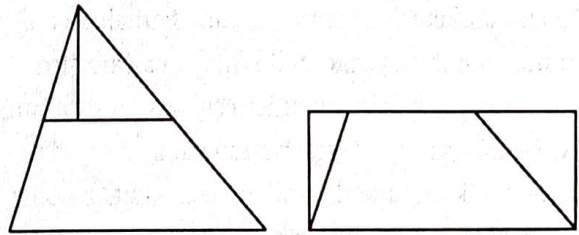
İspat: Yansımali ve bakışık olduğunu bildiğimiz eşparçalanırlığın, geçişli olduğu da yardımcı teoremden aşikardır.

Eğer ϕ çokgeni ψ çokgenine eşparçalanabilirse, ϕ ve ψ nin alanları eşit olmalıdır. Çokgen eşparçalanabilirlik konusunun temel sonucu olan Gerwin-Bolyai teoremi bu gerek şartın aynı zamanda da yeter olduğunu işaret etmektedir.

Teorem 2: (Gerwin - Bolyai Teoremi): İki çokgenin eşparçalanabilir olmaları için gerek ve yeter şart bu çokgenlerin alanlarının eşit olmasıdır.

İspat: Eşparçalanabilir çokgenlerin alanca eşit olacakları aşikardır. Tersini bir kaç adımda ispat edelim:

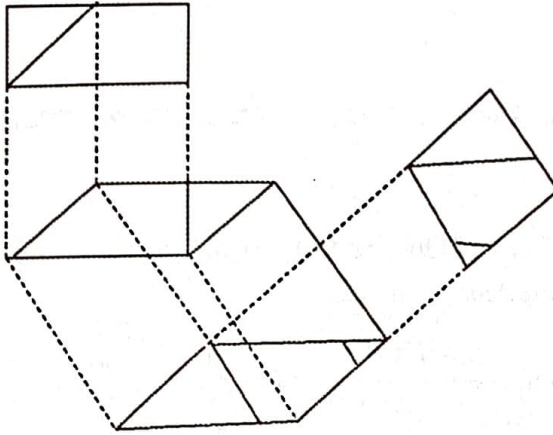
a) Her üçgen bir dörtgene eşparçalanabilir: Üçgenin iki kenarının orta noktaları birleştirilerek elde edilen doğru parçası ve bu doğru parçasına üçüncü köşeden indirilen dikme üçgeni üç altüçgene ayırır. Bu üçgenler hareket ettirilerek kolayca bir dikdörtgen elde edilir. (Şekil 7)



Şekil 7

b) Her dikdörtgen bir kareye eşparçalanabilir: Bu eşparçalanabilirliği Şekil 8 de özetlemeyi yeterli görüyoruz. Söz konusu dikdörtgen ne kadar uzun olursa o kadar çok parçaya gerek duyulacağını

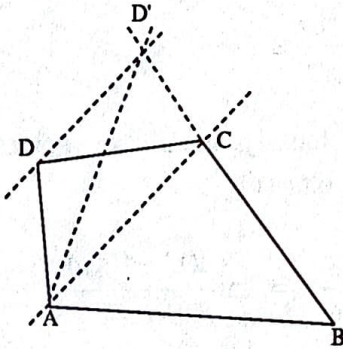
hatırlatalım.



Şekil 8

c) Alanca eşit iki üçgen eşparçalanabilir: Bu artık a) ve b) den dolayı aşıkardır; alanları aynı olan üçgenler aynı karelere eşparçalanabilir.

d) Herhangi bir çokgen bir üçgene eşparçalanabilir: Aslında bu ispatın çokgenin kenar sayısı üzerinde tümevarımla yapılması gerekir. Biz dışbükey bir dörtgenin bir üçgene eşparçalandığını göstermekle yetineceğiz. Bunu genel dörtgenler için yapmayı okuyucuya bırakıyoruz. Bu basit fikri okuyucu beşgenleri dörtgenlere, altıgenleri beşgenlere v.b. eşparçalamakta kullanabilir. ABCD dışbükey bir dörtgen olsun. (Şekil 9)

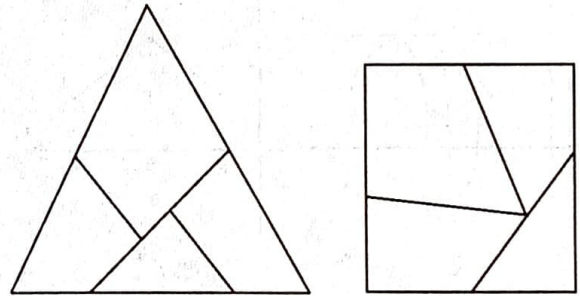


Şekil 9

D den AC ye çizilen paralel BC yi D'de kessin. ADC ve AD'C üçgenleri alanca eşit olup eşparçalanabilirler. Demek ki ABCD dörtgeni de AD'C üçgenine eşparçalanır.

e) Alanca eşit ϕ ve ψ çokgenlerini ele alalım. ϕ ve ψ sırasıyla alanca kendilerine eşit $\hat{\phi}$ ve $\hat{\psi}$ üçgenlerine eşparçalanabilirler. $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$ alanca eşit üçgenler olup birbirlerine eşparçalanabilirler. Demek ki ϕ , ψ birbirlerine eşparçalanabilirler.

Gerwin-Bolyai teoremi gerçekten de alanları eşit iki verilmiş çokgeni eşparçalamakta doğrudan kullanılabilir. Fakat genel olarak, bu teoremi takip ederek elde edilen eşparçalamalarda çok sayıda, bu yüzden de çok ufak altçokgenler ortaya çıkar. Bu bizi "Alanca eşit iki çokgen en az kaç alt çokgen kullanılarak eşparçalanabilir?" sorusuna götürüyor. Bu, hakkında mütehasşsıların "sokaktaki adam" dan daha fazla birşey bilmediği çok zor bir konudur. Durumu en iyi kare-eşkenar üçgen problemi ile örnekleyebiliriz: Yazımızın başında bu çokgenlerin beş altçokgen kullanılarak eşparçalanabildiğine dikkat çekmiştik. Aynı işin dört altçokgenle yapılabileceği 1902 de H.E. Dudeney tarafından gösterilmiştir. ([5]). Şekil 10 da Dudeney'in harikulade eşparçalanmasını sunarak yazımız bitirelim.



Şekil 10

KAYNAKLAR:

- 1) V. G. Boltyanskii: "Eşdeğer ve Eşparçalanabilir Şekiller", Aluntaş Büke tarafından Türkçe'ye çevrilmiş. Türk Matematik Demeği Yayınları, İstanbul 1964.
- 2) H. Demir "İzometrilere", Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 2. 1991
- 3) H. Eves "A Survey of Geometry" Allyn and Bacon, Boston 1968
- 4) M. Gardner "Mathematical Games" Scientific American, 205 158-169 1961.
- 5) H. Lindgren "Recreational. Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them" Dover Publications, Inc., New York 1972.

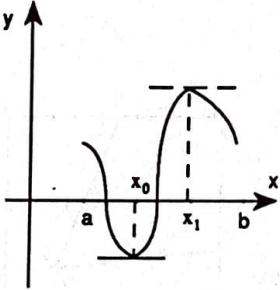
ROLLE ve ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

ŞAFAK ALPAY

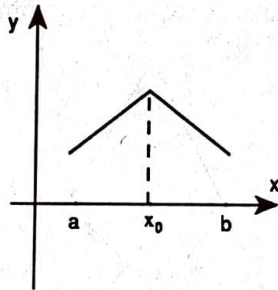
Matematikte varlık teoremleri olarak sınıflandırılan teoremler vardır. $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, gerçel değerli ve sürekli $f=f(x)$ fonksiyonu bu aralık üzerinde aldığı en büyük değere (maksimum) bu aralığın bir noktasında ulaşır.

Benzer şekilde yukarıda anılan özelliklere sahip $f=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında aldığı en küçük değere (minimum) $[a,b]$ aralığının bir noktasında ulaşır.

Sürekli bir fonksiyon için özellikleri olan noktaların varlığını söyleyen bu önermeler varlık teoremleridir.



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de grafiği görülen $f = f(x)$ fonksiyonunun minimum değerini aldığı x_0 , maksimum değerini aldığı x_1 noktalarında eğriye çizilen teğet eğimlerinin 0, başka bir deyişle teğetlerin x-eksenine paralel olduklarını görüyoruz.

Önerme: $x_0 \in [a,b]$, sürekli $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun maksimum (veya minimum) değerini aldığı bir nokta olsun. f , x_0 noktasında türevlenebilir ise, x_0 f' (türev) fonksiyonunun bir köküdür, yani $f'(x_0) = 0$ dır.

Kanıt : f fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olması

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (+)$$

limitinin olması demektir. x_0 noktasına sağdan yani x_0 dan büyük değerler boyunca veya x_0 dan küçük değerler boyunca yani soldan yaklaşılabilir. (+) daki limitin var olması sağ ve sol limitlerin eşitliği ile tanımlanır.

Genellikten kaybetmeden x_0 noktasında maksimumun alındığını kabul edebiliriz. x_0 noktasına soldan yaklaşırken $x - x_0 \leq 0$ ve $f(x) \leq f(x_0)$ olacağından

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ olacaktır. (Niçin?)}$$

x_0 noktasına, x_0 dan büyük değerler boyunca yaklaşırken alınan limit

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

olacaktır. f fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olması

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \end{aligned}$$

olduğundan, $f'(x_0) \leq 0$ ve $f'(x_0) \geq 0$, yani $f'(x_0)=0$ olmalıdır.

1652-1719 yılları arasında yaşayan Fransız matematikçi Michel Rolle çağdaşları Newton ve Leibniz'in yaratıp geliştirdikleri Diferansiyel ve Integral Hesap kuramının karşıtlarından biri olarak ün yapmıştır. Polinomların köklerini araştırırken kanıtladığı aşağıdaki teoremin bu kuramın temel yapı taşlarından biri olması kaderin bir cilvesi herhalde.

Rolle Teoremi : $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir olan $f = f(x)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = 0$ koşulunu sağlasın. (a,b) aralığında $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan x_0 noktası vardır.

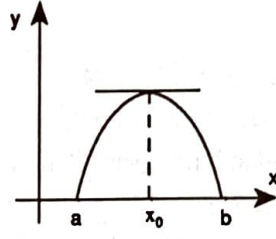
Kanıt: f sabit 0 fonksiyonu ise teorem açıktır. Aksi halde $f(x)$ fonksiyonunun maksimum değerini aldığı noktayı x_1 , minimum değerini aldığı noktayı x_2 ile gösterelim. $f(a) = f(b) = 0$ olduğundan x_1 veya x_2 den biri (a,b) içinde olmalıdır.

Teoremlerin hipotezleri olan varsayımları düşünmemizde yarar vardır. Örneğin, Şekil 2'de grafiği verilen fonksiyonun neden Rolle Teoremine bir çelişki olmadığını ve $[-1,1]$ aralığında $f(x) = |x| - 1$ olarak tanımlanan fonksiyonu düşünerek teoremdeki türevlenebilirlik varsayımından vazgeçilemeyeceğini görmeliyiz.

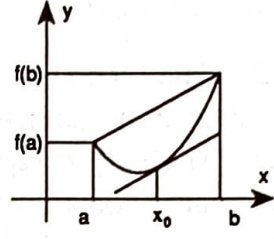
Rolle Teoreminin aşağıdaki sonucu aynı anda ipe göğüsleyen iki atletin hızlarının yarış süresince en az bir kez eşit olması gerektiğini söylüyor!

Sonuç: f_1 ve f_2 , $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ve $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(b) = f_2(b)$ olsun. (a,b) aralığında $f'_1(x_0) = f'_2(x_0)$ denklemini sağlayan bir x_0 sayısı vardır.

Kanıt: Sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların farkları da aynı özellikleri taşır! (a,b) aralığındaki her x için $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ ile tanımlanan fonksiyon Rolle Teoreminin koşullarını sağlar ve istenileni verir.



Şekil 3



Şekil 4

Rolle Teoremi $x_0 \in (a,b)$ için eğriye $(x_0, f(x_0))$ noktasında çizilen teğetin x -eksenine paralel olduğunu söylüyordu. (Şekil 3). Fransız matematikçisi Joseph Louis Lagrange (1736-1813) tarafından kanıtlanan Ortalama Değer Teoremi benzer koşullarda bir $x_0 \in (a,b)$ için $(x_0, f(x_0))$ noktasında çizilen teğetin (Şekil 4), $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğruya paralel olacağını söylüyor.

Ortalama Değer Teoremi (ODT): $f = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. (a,b) deki bir x_0 sayısı için

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

sağlanır.

Kanıt: $[a,b]$ aralığındaki her x için

$$g(x) = f(a) + (x - a) \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$$

ile tanımlanan g ve f fonksiyonları Sonuçta ki hipotezleri sağlar. Dolayısı ile (a,b) içindeki bir x_0 için

$$f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

elde edilir.

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında, $h(x) = \tan x$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında, $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında ODT nin hipotezlerini sağlamadığını görmeliyiz. Verilen fonksiyonlar için belirtilen aralıklarda

ODT doğru mu?

Uygulamalar : 1) $4x^3 - 27x^2 + 52x - 24$ polinomunun (0,2) aralığında en az bir kökü olduğunu hiç işlem yapmadan bulabiliriz. Çünkü bu polinom $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ polinomunun türevidir ve $f(0) = f(2) = 0$ vardır. Polinomlar türevlenebilir olduklarından istenilen Rolle Teoreminden elde edilir.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunu [100,101] aralığında düşünerek $\sqrt{101}$ sayısını yaklaşık olarak bulabiliriz. ODT den $100 < m < 101$ olan bir m sayısı için

$$\frac{\sqrt{101} - \sqrt{100}}{101 - 100} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \text{ veya}$$

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

elde ederiz. $10 < \sqrt{m} < \sqrt{101}$ bize

$$20 < 2\sqrt{m} < 2\sqrt{101} = \sqrt{404} = 21 \text{ ve}$$

$$\frac{1}{21} < \frac{1}{2\sqrt{m}} < \frac{1}{20} \text{ verir. Dolayısı ile}$$

$$\sqrt{101} \text{ in, } 10 + \frac{1}{21} \text{ ve } 10 + \frac{1}{20}$$

arasında bir sayı olduğunu söyleyebiliriz.

3) Eğer f in türevi f' fonksiyonunun [a,b] aralığında aldığı minimum değer m, maksimum değer M ise ODT den $(b-a)m < f(b) - f(a) < (b-a)M$ elde edilir. Bu eşitsizliği $f(x) = \sin x$ fonksiyonu için kullanarak her a,b için $|\sin b - \sin a| < |b - a|$ elde edebiliriz.

ODT giderek artan otoyollarımız üzerinde hız denetimi yapmak içinde kullanılabilir. $f = f(t)$ t birim zamanında alınan yolu gösterebilir $f = f(t)$

nin türevlenebilir olduğunu varsayarsak, $f'(t)$ bize t anındaki hızı verecektir.

4) Son model BMW i ile saat 12.01 de Ankara-Istanbul otoyoluna giren Bay HIZLI saat 12.46 da 120 km ötedeki Gerede çıkış turnikesine girer. Bilete bakan memur, Bay Hızlı'nın şaşkın bakışları arasında Trafik polisini çağırır. Polis, Hızlı'nın karşı çıkışlarına rağmen, ODT gereğince

$$\frac{f(3/4) - f(0)}{\frac{3}{4} - 0} = \frac{120 - 0}{\frac{3}{4} - 0} = 160 = f'(c)$$

denkleminde Hızlı'nın saat 12.01 ile 12.46 arasında 160 km/saat hız yaptığını söyleyerek gerekli cezayı keser.

Yazımızı yanıtlarını beklediğimiz sorular ile bitirelim.

1. f bir polinom olsun a ve b sayıları f in ikişer kez kökü olduğu sayılar ise, f' nün [a,b] aralığında en az üç kökü olduğunu gösterebilir misiniz?

2. f ve g [a,b] aralığında tanımlı, türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. [a,b] deki her x için $f'(x) = g'(x)$ ise, bir c sayısı için $g(x) = f(x) + c$ olduğunu gösterebilir misiniz?

3. $a < b$ koşulunu sağlayan a ve b sayıları arasında $m^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$ eşitliğini sağlayan m sayısının varlığını gösterebilir misiniz?

4. (0,1) aralığı içinde $\tan x = 1 - x$ denklemini sağlayan bir noktanın varlığını kanıtlayınız.

ABCTİK

BİR + BİR = İKİ ABC tiğini çözünüz.

ÜNLÜ KADIN MATEMATİKÇİLER

HÜLYA ŞENKON

İlk profesyonel kadın matematikçi Sonja Wassiljewna Kowalewsky (1850-1891) olmakla birlikte, ondan önce matematik dünyasında dikkati çekmiş olan altı bayan daha vardır ki, bunlar, yaşadıkları çağlarda ancak çok az sayıda erkek matematikçinin başarabildiği işleri başarmışlardır. Bu yazı dizisinde önce söz konusu altı kadın matematikçiyi, daha sonra da Sonja W.Kowalewsky'yi ve 20. yüzyıl matematiğine damgasını vurmuş en ünlü kadın matematikçi olan Emmy Noether'i tanıtmaya çalışacağız.

Hypatia (370-415)

Matematik ile uğraştığı bilinen ilk kadın, 370 yılında İskenderiye'de doğmuş olan ünlü Hypatia'dır. Babası Theon, seçkin bir matematik yayımcısı idi ve Hypatia'nın Yunan felsefesi ve matematik öğrenimi görmesini sağladı. Hypatia babasına, Ptolemy'nin "Syntaxis" inin yorumunu ve Öklid'in "Elements" inin gözden geçirilmiş metnini yazarken önemli ölçüde yardımcı oldu. Eldeki kaynaklara göre, Apollonius'un "Conic Sections", Ptolemy'nin "Syntaxis" ve Diophantus'un "Arithmetica" sına ilişkin yorumlar yazdı, ancak bunlar günümüze kadar korunamadı. İskenderiye Müzesi'nde Plotinus ve Iamblichus'un Neoplatonik doktrinleri üzerine konferanslar verdi ve 400 yılında, hristiyanların şiddetle karşı çıktığı, İskenderiye'deki Neoplatonik okulun başına getirildi. Halkın en seçkin bölümü, konferanslarını izledi ve doktrinlerini benimsedi. Aynı zamanda güzelliği ile de ünlü olan ve pek çok kimsenin hayranlık duyduğu Hypatia,

kendisini felsefeye ve matematiğe adanmıştı. Kirene'li piskopos filozof Synesius, kendisine saygı ve hayranlığını ifade eden sayısız mektup yazdı. Bu mektuplarından birinde bir "astrolabe" (yıldızların yüksekliklerini ölçmeye yarayan eski bir astronomi aleti) ve bir hidroskopun nasıl inşa edileceğini sordu ve bunun üzerine Hypatia bir tür planisfer (düzlem küre) icad etti. 415 yılında azgın bir softa grubu, Hypatia'ya karşı bir suikast düzenledi. Bir akşam eve geldiği sırada üzerine hücum eden saldırganlar, kendisini yakalayarak kiliseye götürdüler ve öldürdükten sonra vücudunu parçalayarak Cinaron adlı meydana götürüp yaktılar.

Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Chatelet (1706-1749)

Marquise du Chatelet, 17 Aralık 1706'da Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil olarak dünyaya geldi. Babası, Fransa'nın en zengin ve güçlü kişilerinden biriydi. Kızının zekasını çok erken farkederek onun çeşitli yabancı diller öğrenmesini ve en çok ilgisini çeken matematik konusunda iyi bir öğrenim görmesini sağladı. Émilie 19 yaşında iken Marquis du Chatelet ile evlendi. Marki, rejime sıkı sıkıya bağlı, ordudan başka hiçbir şeyle ilgilenmeyen ve zamanının büyük bir kısmını eşinden ayrı geçiren bir subaydı. Émilie uzunca bir süre Paris yüksek sosyetesine mensup kişilerle gününü gün etti, fakat 3. çocuğunu dünyaya getirdikten sonra, 27 yaşında ciddi bir şekilde matematikle uğraşmaya başladı. O sıralarda hayran olduğu tek kişi,

Decartes'a karşı Newton'un fiziğini hararetle savunan matematikçi Maupertuis (1698-1759) idi. Èmilie 1733 yılında, o zaman 39 yaşında olan ünlü şair Voltaire ile karşılaştı ve kendisiyle birlikte yaşamaya başladı. Marki, eşinin böylesine seçkin bir arkadaş bulmuş olmasından ötürü çok memnundu. Bazı akşamlar Èmilie'nin ziyaretine gidiyor, o çocuklarıyla yemek yerken, Èmilie ile Voltaire felsefi tartışmalarını sürdürüyorlardı. Èmilie güzel olmaktan çok alımlı, zarif olmaktan çok zengin ve rüküş giyimliydi, fakat Voltaire onun zekasını, Newton'unki ile karşılaştırıyordu. Voltaire'in ünlü "Memoires"ı, yaşamının dönüm noktası olarak nitelendirdiği, Èmilie'ye rastlaması olayı ile başlamaktadır. Paris sosyetesinin çılgınlıklarından, ve yazılarından ötürü Voltaire'i sürekli izleyen polisten kaçmak için Èmilie ile Voltaire, 1734 te Voltaire'in Cirey'deki malikanesine taşındılar ve bundan sonraki yaşamlarının büyük bir bölümünü orada geçirdiler. Evleri, Avrupa'nın en önemli ve ziyaret edenlerde hayranlık uyandıran bir entellektüel merkezi haline geldi. Yoğun bir biçimde çalışıyor ve yazılar yazıyorlardı. Èmilie, İncil'in uzun süre şüphe ile karşılanan ve yayınlanamayan bir yorumunu yazdı, bu arada felsefe ve bilim üzerine çeşitli denemeler yayınladı. Voltaire onu ateşli bir Newton savunucusu yapmıştı, fakat Èmilie 1740 yılında yazdığı "The Institutions of Physics" adlı kitabıyla herkesi şaşırttı. Èmilie'nin, oğlunu eğitmek amacıyla yazdığı bu kitap, Leibniz'in fiziğinin olağanüstü güzel ve akıcı bir sergilenişi olarak çok beğenildi ve tam üç kez basıldı. Voltaire, fiziğin son derece dikkatli ve ayrıntılı bir tarihi ve felsefi anlatımını yapmasına karşın eşini, Newton'un fikirlerine karşı Leibniz'in fikirlerini savunarak zamanını ziyan etmekle suçluyordu. Èmilie, Avrupa'nın ileri gelen birçok matematikçisi ile birlikte bir tartışmaya katıldı ve bu tartışma, Leibniz'in kinetik enerji kavramının açıklığa kavuşmasına önemli ölçüde

katkıda bulundu. Fakat Èmilie 1745 yılında tekrar Newton fiziğine döndü ve bütün enerjisini Newton'un "Principia Mathematica" sını Latineden Fransızcaya çevirmeye hasretti. Geniş çapta değerli yorumları ve ekleri de içeren bu çeviriyi yaparken kendisine fizikçi Clairaut yardımcı oldu. 1748 yılında Èmilie, kendisinden çok genç birisiyle ilişki kurdu ve onunla birlikte yaşamaya başladı. 42 yaşında 4. çocuğunu beklerken, ölümü halinde Newton'un çevirisinin basılabilmesi için her türlü düzenlemeyi yapmıştı. 2 Eylül 1749 da kızını dünyaya getirdikten bir hafta sonra aniden öldü. Eseri 1759 yılında Voltaire'in övgü dolu bir önsözüyle yayınlandı. Principia Mathematica'nın tek Fransızca çevirisi olan bu kitap, günümüze kadar pek çok kez basıldı.

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799)

Maria Gaetana Agnesi, 16 Mayıs 1718 de Milano'da dünyaya geldi. Bologna Üniversitesi'nde matematik profesörü olan babası, Maria'nın eğitim ve öğretimini titiz bir şekilde planladı. Maria henüz 9 yaşında iken Latince, Yunanca ve İbranice ile birçok modern dili gayet iyi bir şekilde konuşuyordu. 13 ve 19 yaşları arasında özel eğitim görerek Fermat, Descartes, Newton, Leibniz, Euler ve Bernoulli'nin matematiğini öğrendi. Babasının düzenlediği salonlarda birçok bilimsel ve felsefi konuda tartışmalara ve seminerlere katılıyor, kozmopolit dinleyici kitlesi karşısında daima Latince konuşuyor, fakat yabancı dinleyicilerin yönelttikleri soruları, onların kendi dillerinde yanıtlıyordu. 20 yaşında iken, bu seminerlere dayanan ve kadınların yüksek öğrenim görmeleri gerektiğini savunan "Philosophical Propositions" adlı Latince bir kitabı yayınladı. Çok mahcup ve çekingen bir tabiata sahip olan Maria babasını, kendisini mucizevi bir entellektüel olarak sergilemekten vazgeçmesi konusunda ikna etti, fakat manastıra kapanma isteğini ona bir türlü kabul ettiremedi. Bunu izleyen 10 yıl boyunca,

1748 de 1000 i aşkın sayfadan oluşan iki dev cilt halinde yayınlanan "Analytical Institutions for the use of Italian Youth" adlı eserini yazmakla meşgul oldu. İtalyanca yazılmış olan bu eser, o tarihlerde yalnızca Avrupa'nın ileri gelen matematikçileri tarafından öğretilen diferansiyel ve integral hesap konusunda ilk ders kitabı olup, 1. cildinde cebir, denklemler teorisi ve geometri, 2. cildinde ise diferansiyel ve integral hesap, sonsuz seriler ve diferansiyel denklemler bulunuyordu. Agnesi'nin kendi orijinal çalışmaları ile birçok matematikçinin fikirlerini açık ve sistemli bir biçimde birleştirdiği bu eser hakkında Fransa Bilimler Akademisi'nden bir heyet, 1749 yılında şu raporu verdi: "Bu kitap, dikkatli düzenlemesi, açık ve kesin olma özellikleri ile karakterize edilebilen bir eserdir. Herhangi bir dilde, okuyucunun analizdeki temel kavramlara bu derece çabuk ve derinlemesine nüfuz edebileceği başka hiçbir kitap yoktur. Dolayısıyla eser, kendi türünde en geniş kapsamlı ve en iyi yazılmış kitaptır". Bu rapor üzerine kitabın 2. cildi Fransızcaya çevrilerek 1750 yılında yayımlandı. Aynı akademinin bir üyesi, Agnesi'ye şunları yazıyordu: "Matematikte sizin kitabınızdan daha açık, daha metodlu ve daha anlaşılabilir bir esere rastlamadım. Özellikle, geometricilerin çalışmalarında dağınık bir şekilde görülen ve tamamen farklı yöntemlerle erişilen değişik sonuçları düzgün yöntemler altında toplama tarzınıza hayran oldum". Bütün bunlara rağmen Fransız Akademisi Agnesi'yi üyeliğe kabul etmedi, fakat Bologna Bilimler Akademisi,

kendisini üye seçti. Agnesi'nin kitabı yıllarca, giriş mahiyetinde standart bir "calculus" kitabı olarak kaldı. 1801 yılında Cambridge Üniversitesi Matematik Profesörlerinden John Colson, kitabın İngilizce çevirisini yayınladı. Editörün açıklamasına göre Colson, kitabı o derece mükemmel buldu ki, İtalyan gençliği gibi İngiliz gençliğinin de bu kitaptan yararlanabilmesini sağlamak amacıyla, ileri yaşına rağmen İtalyancayı öğrendi ve kitabı İngilizceye çevirdi. 1749 yılında Papa, Agnesi'ye kitabından dolayı bir tebrik mesajı, bir altın madalya ve değerli taşlarla süslü bir taç gönderdi. Agnesi, 2 Eylül 1750 de Bologna Üniversitesi'nde Matematik ve Felsefe Kürsüsü Başkanlığına getirildi. 1752 yılında babasını kaybettikten sonra bilimsel çalışmalarına son verdi. 1762 yılında Torino Üniversitesi, kendisinin genç matematikçi Lagrange'in varyasyonlar hesabı ile ilgili bazı çalışmalarına ilişkin görüşlerini sordu. Fakat Agnesi, artık böyle şeylerle ilgilenmediği cevabını verdi. Bütün zamanını, çevresindeki fakir ve yaralıların bakımına hasrediyordu. Bir hastalar ve acizler enstitüsünün kayıtlarında Agnesi'den "9 Ocak 1799 tarihinde 81 yaşında ölene dek, hasta ve yaralı kadınları teselliye koşan bir melekti!.." şeklinde söz edilmektedir. Agnesi, bu enstitünün eski sakinlerinden 14 ü ile aynı mezarlıkta yatmaktadır. Adına kız öğrenciler için burs veren bir fon kurulmuş olup, İtalya'nın üç büyük kentinde birer sokak ve Milano'da bir okul, kendisinin adını taşımaktadır.

BAZI ÇOKGEN FORMÜLLERİNİN KOLAY KOMBİNATORİK KANITLARI

ULUĞ ÇAPAR

Konveks, n kenarlı bir çokgenin bütün köşegenlerinin çizildiğini düşünelim. Bu yazıda şu iki problemin yanıtı aranacaktır :

- A) Çokgen içinde en fazla kaç kapalı alt bölge ortaya çıkar?
- B) Çokgenin köşegenleri en fazla kaç doğru parçasına bölünürler?

Çokgen içinde herhangi bir noktadan en fazla iki köşegen geçtiği varsayımı yapılırsa bu sorular şöyle de sorulabilir : Bütün köşegenlerinin çizilmesi ile

A') Çokgen içinde kaç kapalı alt bölge meydana gelir?

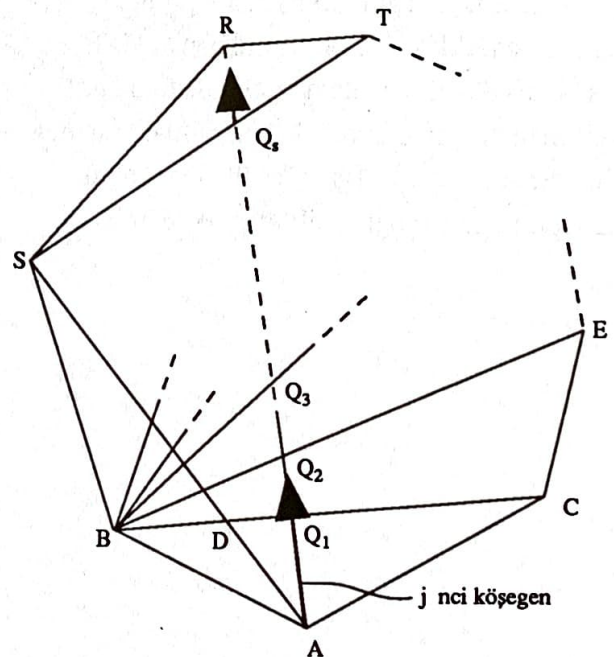
B') Köşegenler toplam olarak kaç doğru parçasına bölünürler.

Yukardaki soruların cevabı olan formüller önce çetrefil bir sayma işlemi sonucu n e göre indirgeme bağıntılarının bulunması, daha sonra da bu indirgeme bağıntıları üzerinde bir hayli cebrik işlem yapılması ile elde edilebilir. Bu bize n e göre 4 üncü dereceden polinomlar verir. Oysa aynı formüller kombinatorik olarak aşağıda açıklanan biçimde çok kolay olarak çıkarılabilmektedir.

A') nın yanıtı :

Köşegenleri herhangi bir biçimde numaralayalım. (Toplam köşegen sayısı $\binom{n}{2} - n$ dir, (Niçin ?)). Bu köşegenlerin teker teker çizildiğini varsayalım ve bu sırada ortaya çıkan alt bölgeleri izleyelim. Başlangıçta tek bir bölgemiz vardır. (Çokgen kenarları ile sınırlanan kapalı bölge). 1

no.lu köşegenin çizilip karşı köşeye ulaşması ile iki alt bölge yaratılmış olur, dolayısı ile bölge sayısı bir artar. Daha sonra köşegen çizim işlemine devam ederek j 'inci köşegene kadar geldiğimizi düşünelim. (Şekle bakınız). j inci köşegenin çizimi sırasında daha önce çizilmiş bulunan köşegenlerle her kesişmemizde alt bölge sayısını bir artırmış oluruz. Örneğin j inci köşegenin daha önce çizilmiş bulunan BC köşegeni ile Q_1 noktasında kesişmesinden sonra ADC bölgesi, ADQ_1 ve AQ_1C olarak iki alt bölgeye bölünür, diğer bütün alt bölgeler ise aynı kalır. Dolayısı ile toplam alt bölge sayısı bir artar. j inci köşegenin daha önce çizilmiş olan köşegenlerle $Q_2, Q_3, \dots$ gibi diğer kesişme noktalarında da alt bölge sayısı birer artmağa devam eder. Sonuncu kesişme noktası, (diyelim ki Q_s)'ten başlayıp karşı köşeye ulaşım sırasında da alt bölge sayısı bir artar. (SRT bölgesi, SRQ_s ve Q_sRT olarak iki alt bölgeye bölünür).



Bütün köşegenler çizildikten sonra şu sonuca varılır :

i) Bu çizim sırasında bütün köşegen kesişme noktaları elde edilir, ayrıca varsayımımızın sonucu olarak da her bir köşegen kesişme noktası bir ve yalnız bir kere gözönüne alınır. (Köşegen kesişme noktaları sayısı $\binom{n}{4}$ tür. (Niçin ?)).

ii) Her bir köşegen kesişme noktası ortaya çıktıkça alt bölge sayısı bir artar. Her bir köşegenin karşı köşeye ulaşması ile de alt bölge sayısı yine bir artırılmış olur.

Karşı köşeye ulaşma işlemi köşegen sayısı kadar yinelenir.

Böylece başlangıçta tek bir bölge ile yola koyulduğumuzdan :

Alt Bölge Sayısı = 1 + Köşegen Kesişme Noktası Sayısı + Köşegen Sayısı

bağıntısı elde edilir. Diğer bir deyişle A') sorusunun yanıtı

$$1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n$$

dır.

B') Benzer bir akıl yürütme ile :

Köşegenler Üzerindeki Doğru Parçası Sayısı=

2 x Köşegen Kesişme Noktası Sayısı + Köşegen Sayısı,

bağıntısı veya B') sorusunun yanıtı olarak

$$2 \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n$$

formülü bulunur.

Bu defa çizime sıfır doğru parçası ile başlanmakta, $Q_1, Q_2, \dots, Q_3$ gibi kesişme noktalarında ise doğru parçası sayısı iki artmaktadır. (Örneğin Q_1 kesişiminde DC doğru parçası yerine AQ_1, DQ_1 ve Q_1C gibi üç doğru parçası ortaya çıkmaktadır). Bunun gibi karşı köşeye ulaşım da yeni bir doğru parçası yaratmaktadır, (Q_3R gibi).

Okuyucu ikiden fazla köşegeni aynı noktadan geçmeyen konveks çokgenler çizerek aşağıdaki sayısal değerleri kontrol edebilir :

n	4	5	6	7	8	9
Alt Bölge	4	11	25	50	91	154
Doğru Parçası	4	15	39	84	160	279

Bu değerlerin bazılarını kristallografi ve mineraloji-de kullanılmaktadır.

EĞLENCE

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 33 \\ 55 & 69 \end{bmatrix}$$

eşitliğini ilginç buluyorsanız, bu özelliği sağlayan matrisler bulmaya çalışınız.

OLİMPİYAT HABERLERİ

ALBERT ERKİP

2000 yılı Olimpiyatına talip olan İstanbul 1993 yazında bir başka olimpiyata ev sahipliği yapacak. 13-24 Temmuz tarihlerinde yaklaşık 75 ülkeden 450 öğrenci ile 200 matematikçi ve eğitimci 34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı için İstanbul'da buluşacaklar.

34. Olimpiyatın organizasyonunu TÜBİTAK yürütüyor. ODTÜ ilgili bakanlıklar, başta İstanbul Büyükşehir olmak üzere belediyeler bu organizasyona destek verecekler. Türk Matematik Demeği özellikle bilimsel konularda yardımcı olacak. Kamu ve özel kesimden çok sayıda kuruluşun da Olimpiyatı desteklemesi bekleniyor.

Matematik Olimpiyatları yalnızca bir yarış olmakla kalmıyor, değişik ülkelerden öğrencilerin ve uzmanların bir araya geldiği, başta eğitim olmak üzere pek çok konunun tartışıldığı bir platform oluşturuyor. Öte yandan sosyal ve kültürel etkinlikleriyle program bir şölen niteliğinde. Öğrencilerimizin, öğretmenlerimizin, eğitimcilerimizin, matematikçilerimizin ve tüm kamuoyunun böyle bir olayı yakından izlemeleri ilginç olacak.

34. Olimpiyat için bir yandan ev sahipliği hazırlıkları sürerken, bir yandan da takım hazırlık çalışmalarımız devam ediyor. Aralık ayında bir ara seçme sınavı yapıldı. Bu sınavın sorularını aşağıda vereceğiz. Sınav sonucu belirlenen bir grup öğrenci Şubat ayında iki haftalık bir hazırlık kampı yapacaklar. Takım bu grup içinden son seçme sınavı ile belirlenecek.

1993 yılında bir diğer gelişme de Türkiye

Olimpiyatları. Bundan böyle TÜBİTAK matematik, fizik, kimya, biyoloji ve informatik (bilgisayar) dallarında her yıl Türkiye Olimpiyatları düzenleyecek. İki aşamalı olacak bu yarışmaların ilk aşamasına tüm liseler birer takımla katılacak. Bu aşama sonunda hem bölgesel dereceler verilecek hem de ikinci aşamaya katılmaya hak kazananlar belirlenecek. İkinci aşama tam bir Olimpiyat niteliği taşıyor. 1993'te ilk aşama Mayıs, ikincisi ise Aralık ayında yapılacak.

Olimpiyatlar gerek TÜBİTAK gerekse de yarışmaya katılan öğrenciler ve onlara yardımcı olanlar açısından zahmetli, masraflı olaylar. Bu etkinliklerin amacı yalnızca ülkenin en iyilerini belirleyip uluslararası yarışmalarda en iyi şekilde temsil edilmemizi sağlamak diye görülmemeli. Bu süreç içinde çok sayıda okul ve öğrencinin katılımı gerçekleşiyor. Günümüzde lise eğitiminin tek amacı ve tek ölçütü üniversite giriş sınavlarında başarı olarak görülüyor. Bu görüş hem eğitimi anlamsızlaştırmakta hem de öğrenciyi, öğretmeni yanlış yönlendirmekte. Olimpiyat yarışmaları ve benzer etkinlikler farklı bir ilgi alanı sunarak okul-müfredat-dershane tekdüzeliğini değiştirebiliyor. Öğrencilerin değişik alanlara merak duymalarını, yeteneklerini keşfetmelerini ve geliştirmelerini, okulların da programlarını gözden geçirerek öğrencilerine bu tür olanaklar yaratmalarını sağlıyor. Bu ise öğrencilerin iyi yetişmelerinde çok önemli bir etken.

34. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI HAZIRLIK EKİBİ SEÇME SINAVI

(19 Aralık 1992, 09.00)

1. Beş çiftin katıldığı bir partide, katılanların bir bölümü birbirleriyle el sıkışırlar. Hiç kimse doğal olarak ne kendi kendisiyle ne de eşiyile el sıkışır. Partiye katılanlardan biri, kendi dışındaki (eşi de dahil olmak üzere) dokuz kişiye kaç kişiyle el sıkışmış olduklarını sorar. Aldığı yanıtlara bakınca, bu dokuz kişi içinde eşit sayıda kişiyle el sıkışmış herhangi iki kişinin bulunmadığını görür. Diğerlerine kaç kişiyle sıkıştıklarını soran kişinin eşinin kaç kişiyle el sıkışmış olduğunu bulunuz.

2. a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

$$3. x^2 + y^2 + z^2 = 361$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

$$x - y + z = 11$$

denklemlerinin tüm (x, y, z) reel çözümlerini bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninin B açısının iç açıortayına CE dikmesi, C açısının iç açıortayına da BD dikmesi indiriliyor. DE doğrusu, [AB] kenarını P noktasında ve [AC] kenarını Q noktasında kestiğine göre

$$|AP| = |AQ|$$

olduğunu ispatlayınız.

5. Bir ABC üçgeninin [BC] kenarına paralel olan d doğrusu, AB ve AC doğrularını sıra ile D ve E noktalarında kesiyor. BE doğrusu ile CD doğrusunun kesim noktası P olduğuna göre, P noktasının geometrik yerini bulunuz.

6. Hiç bir n pozitif tamsayı için

$$n^4 + 3n^2 + 1$$

sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

Not: Sınav süresi 3 saattir.

FONKSİYONEL DENKLEMLER:

Geçen sayıdaki problemlerin yanıtları.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (2') bağıntısını sağlasın. 2. den, her $r \in \mathbb{Q}$ için $f(r) = r$ olduğunu biliyoruz. Bir $x \in \mathbb{R}$ alalım, x e sırasıyla alttan ve üstten yaklaşan (r_n) ve (s_n) rasyonel sayı dizileri bulabiliriz. Yani $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \leq x \leq s_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$. f artan bir fonksiyon olduğundan, $f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n)$ buluruz. Ancak $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$, o halde $f(r_n) = r_n$, $f(s_n) = s_n$. Yani her n için $r_n \leq f(x) \leq s_n$ olduğunu gösterdik n'yi sonsuza götürürsek, $x \leq f(x) \leq x$, yani $f(x) = x$ çıkar.

2. $a < b$ olsun (2') bağıntısında $x = a$, $y = b - a$ alalım. $f(b) = f(a) + f(b-a)$ elde ettik. $b - a > 0$ olduğundan, verilen koşula göre $f(b-a) > 0$ yani $f(b) > f(a)$ olacaktır, f artandır.

3. 4(e) deki örneği geliştireceğiz. Bunun için her r pozitif rasyonel sayısının bir $m \in \mathbb{Z}$ ve t, s tek tamsayıları ile $r = 2^m \cdot \frac{t}{s}$ şeklinde yazılabileceğini gözlemleyelim. (Bu gösterim tektir, yani $2^m \cdot \frac{t}{s} = 2^{m'} \cdot \frac{t'}{s'}$ ise $m=m'$, $t=t'$ ve $s=s'$ olacaktır.). Şimdi $f(r) = f(2^m \cdot \frac{t}{s}) = 2^m$ olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun verilen bağıntıyı sağladığı kolayca gösterilebilir.

4. Bir $t \in \mathbb{R}$ için $x + y = t$, $x - y = 1$ olacak şekilde x, y alalım. (yani $x = \frac{1}{2}(t+1)$, $y = \frac{1}{2}(t-1)$). Bağıntıda yerine koyarsak:

$f(t) - tf(1) = (t^2 - 1)t$ yani $f(t) = t^3 + (f(1)-1)t$ ve $f(1) - 1 = c$ dersek, $f(t) = t^3 + ct$ buluruz. Tersine her c sabit değeri için $f(t) = t^3 + ct$ fonksiyonu verilen bağıntıyı sağlar.

5. Bu aslında bir dizi sorusu. n tamsayısı için $f(n) = a_n$ dersek, bağıntı :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = a_2 = 1$$

indirgeme denkleminde dönüşür ki buradan (a_n) dizisinin Fibonacci dizisi olduğunu görürüz. (Cilt 1, Sayı 1'e bakınız.)

6. Önce f nin birebir olduğunu gösterelim : $f(y_1) = f(y_2)$ ise, her x için $\frac{f(x)}{y_1} = \frac{f(x)}{y_2}$ yani $y_1 = y_2$ buluruz.

Şimdi $y = 1$ alalım. $f(xf(1)) = f(x)$ bulduk, f birebir o halde $xf(1) = x$, yani $f(1) = 1$.

$x = 1$ alırsak, $f(1) = 1$ den dolayı

$$(A) \text{ Her } y \in \mathbb{Q}^+ \text{ için } f(f(y)) = \frac{1}{y}$$

bağıntısını elde ettik.

Verilen bağıntıda y yerine $f(\frac{1}{y})$ koyalım.

$$f(xf(f(\frac{1}{y}))) = \frac{f(x)}{f(\frac{1}{y})}$$

$$\text{buluruz (A)'dan } f(f(\frac{1}{y})) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y, \text{ ve}$$

$$f(y) = f(f(f(\frac{1}{y}))) = \frac{1}{f(\frac{1}{y})}$$

elde ederiz, bu ise :

$$(B) \text{ Her } x, y \in \mathbb{Q}^+ \text{ için } f(xy) = f(x) f(y) \text{ bağıntısını verir.}$$

O halde istenen koşulu sağlayan f fonksiyonu, (A) ve (B) koşullarını da sağlayacaktır. Tersine (A) ve (B) yi sağlayan her f verilen koşulu da sağlar, bu yerine koyarak kolaylıkla

gösterilebilir.

Problemimiz (A) ve (B) koşullarını sağlayacak bir $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ bulmaya indirgendi. İlk olarak 3. problemdekine benzer yollar, $p_1, p_2, p_3, \dots$ sırasıyla asal sayıları göstermek üzere (yani $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$) her $r \in \mathbb{Q}^+$ rasyonel sayısının uygun $m_1, m_2, m_3, \dots$ tam sayıları ile

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_N^{m_N}$$

şeklinde yazılabileceğini gözleyelim. $f(p_1) = p_2$,

$$f(p_2) = \frac{1}{p_1}, f(p_3) = p_4, f(p_4) = \frac{1}{p_3}, \dots,$$

$$f(p_{2k-1}) = p_{2k} \text{ ve } f(p_{2k}) = \frac{1}{p_{2k-1}}$$

olarak ve

$$f(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_N^{m_N}) = [f(p_1)]^{m_1} \dots [f(p_N)]^{m_N}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bağıntılarını sağlar.

7. (1990 Olimpiyatı diye yazılmış, 1992 olacak!)

Verilen bağıntıyı sağlayan fonksiyonun birebir olduğu 6. dakine benzer yolla kolayca görülür. Verilen bağıntıda x yerine $-x$ alırsak $x^2 = (-x)^2$ olduğundan $f(-x) = -f(x)$ olmalıdır.

$f(x) = x$ fonksiyonunun istenen bağıntıyı sağladığı hemen görülür. Bundan başka çözüm olmadığını gösterelim : Bir $a \in \mathbb{R}$ için $f(a) < a$ ise, verilen bağıntıda $y = a$ ve $x = \sqrt{a-f(a)}$ alırsak:

$$f(a) = f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 = a + (f(x))^2 \text{ buluruz. } (f(x))^2 \geq 0 \text{ olduğundan, bu } f(a) \geq a \text{ çelişmesini verir.}$$

Eğer bir $a \in \mathbb{R}$ için $f(a) > a$ ise $\bar{a} = -a$ için $f(-a) = -f(a)$ olduğundan, $f(\bar{a}) < \bar{a}$ buluruz ki bu aynı çelişkiyi verir.

ALİŞTIRMA SORULARI

A46. $p > 3$ bir asal sayı ise $p^2 + 2$ nin asal olamayacağını gösteriniz (H. Demir).

A47. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) = \ln 3$ olduğunu gösteriniz.

A48. $n - 1$ ve $n + 1$, 10 dan büyük iki asal sayı olsun. $n^3 - 4n$ sayısının daima 120 ye bölündüğünü gösteriniz. (G.E. Andrews)

A49. Bir kenarının ortanoktası ve diğer iki kenarına ait yüksekliklerin ortanoktaları verilen üçgeni pergel ve cetvelle çiziniz. (H. Demir)

$$A50. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

özdeşliklerini ispat ediniz.

YARIŞMA SORULARI

Y46. Odakları F, F' olan bir elips ve bu elipsin F den geçen bir AB kirişi verilsin. A ve B den elipse çizilen normaller N noktasında kesişsin. N den FF' ne çizilen paralelin $[AB]$ doğru parçasının orta noktasından geçtiğini gösteriniz.

Y47. Bir üçgende içteğet çemberin merkezi I , yüksekliklerin kesişim noktası H ("ortosantr"), çevrel çember merkezi de O olsun. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c , içteğet çemberin yarıçapı da r ise IOH üçgeninin alanının

$$\left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r} \right|$$

olduğunu gösteriniz. (W.J. Blundon)

Y48. İkizkenar bir ABC üçgeninin (B ve C açıları eşit!) A tepe noktasından geçen değişken bir doğru $[AB]$ kenarını D noktasında, çevrel çemberin A köşesi karşısındaki yayını da E noktasında kessin. $[DE], [DB]$ doğru parçalarına ve çevrel çembere içerden değen çemberin yarıçapı r_1 , $[DE], [DC]$ doğru parçalarına ve çevrel çembere içerden değen çemberin yarıçapı r_2 olsun. $\ell = |AD|$ ise $\ell + \sqrt{r_1 r_2}$ nin sabit, yani değişken AD doğrusunun konumundan bağımsız olduğunu gösteriniz. (H. Demir)

Y49. ... $\Gamma_{-n}, \Gamma_{-n+1}, \Gamma_{-1}, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n \dots$

çemberler dizisinde ardışık iki çember birbirlerine dıştan teğet ve dizinin bütün çemberleri ölçüsü 2α olan bir açının kenarlarına teğettir. Γ_n in yarıçapına r_n vee $\rho_n = \frac{r_n}{r_0}$ yazarsak

$$\rho_{m+n} = \rho_m \rho_n$$

olduğunu gösteriniz. (H. Demir)

$$Y50. \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

özdeşliğini ispat ediniz.

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Nisan 1993 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınız-soyadınızı adresinizi, ve öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

DEĞERLENDİREN: ALPER HALBUTOĞULLARI

A36. Elemanları sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ aritmetik dizisi için

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Çözüm: Ruhi Tabur, İzmit

d artı bir sayı olmak üzere $a_n = (n-1)d + a_1$ yazarak

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{d} \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer çözenler :

Burhan Biner, Malatya; Çağatay Candan, Ankara; Ahmet Ceyhan, Ankara; Erhan Gürel, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; Hakan Özkahraman, Manisa; S. Gökçen Şen, Erzurum.

A37. Eksenleri birbirine dik olan iki parabol dört noktada kesişiyorsa bu dört nokta çemberdedir. (Hazırlayan: H. Demir)

Çözüm: Erhan Gürel, Ankara

Sözkonusu paraboller xy -düzleminde, $a, a' \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ x &= a'y^2 + b'y + c' \end{aligned}$$

veya sırasıyla

$$x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} = 0$$

$$y^2 - \frac{1}{a'}x + \frac{b'}{a'}y + \frac{c'}{a'} = 0$$

denklemleriyle gösterilebilir. Bu iki eğrinin de üzerinde bulunan bir (x, y) noktası yukarıdaki denklemlerin toplamı olan

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{1}{a'} \right)x + \left(\frac{b'}{a'} - \frac{1}{a} \right)y + \frac{c}{a} + \frac{c'}{a'} = 0$$

denklemini sağlamalıdır. Bu bir çember denklemdir.

A38. Bir çember diliminin sınır yarıçapları ile yayı üzer eş parçaya bölen noktalar çemberde ise dilimin merkez açısını belirleyiniz. (Hazırlayan: H. Demir)

Çözüm: Merkezi O ve yarıçapı 2 birim uzunluk (kolaylık!) olan bir çember üzerinde A, B noktaları alalım. A ve B noktasının sınırlandırdığı yayı gören merkez açı θ

(kolaylık!), bu yayı A dan B ye doğru üç eşit parçaya bölen noktalar da F, G olsun. Aynı şekilde [OA] ve [OB] doğru parçalarını O dan başlayarak üç eşit parçaya bölen noktalar sırasıyla K, L ve M, N olsun. S, [MN] nin orta noktası, P de [MN] ve [KL] nin ortadikmelerinin kesim noktası olsun. Eldeki dokunun OP doğrusuna göre tamamen bakışık olması itibarıyla, F, G, K, L, M, N noktaları, eğer kalırlarsa, ancak P merkezli bir çember üzerinde kalabilirler. Diğer bir deyişle, sözkonusu altı noktanın çemberdeş olabilmesi için gerek ve yeter şart $|MN| = |GP|$ dir. MSP dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|MP|^2 = \frac{1}{9} + \tan^2 3\theta,$$

OGP üçgeninde kosinüs teoreminden de

$$|GP|^2 = 4 \sec^2 3\theta - 4 \sec 3\theta \cos \theta$$

bulunup, bu iki miktar $\tan^2 3\theta = \sec^2 3\theta - 1$ olduğu hatırla tutularak eşitlenirse

$$\frac{1}{9} - 1 = 4 - 4 \sec 3\theta \cos \theta$$

ve ufak bir hesapla da

$$\frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = \frac{9}{11}$$

bulunur. $\cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ gözönünde bulundurularak

$$4 \cos^2 \theta - 3 = \frac{9}{11}$$

bundan da

$$\cos^2 \theta = \frac{21}{22}$$

bulunur.

A39. α, β açıları $0 < \alpha < \beta \leq \pi/2$ eşitsizliklerini sağlıyorsa

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

olduğunu kanıtlayınız. (N.A. Court)

Çözüm: Bu soruyu birçok okuyucumuz "taraf tarafa bölme" ile yanlış çözmüş.

O merkezli birim yarıçaplı bir çemberde $0 < \theta < \pi/2$ olacak şekilde 2θ ölçülü bir merkez açı tarafından görülen ve A, B noktaları tarafından sınırlandırılan bir yay alalım. Yayın orta noktası C, C den çembere çizilen teğetin OA, OB doğrularını kestiği noktalar sırasıyla P, Q olsun. Sırasıyla OAB üçgeninin, A ve B tarafından sınırlandırılan yayı gören dilimin ve OPQ üçgeninin alanları karşılaştırılarak $0 < \theta < \pi/2$ için

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

eşitsizliği bulunur. Her taraf $\sin \theta$ ya bölünerek

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

veya

$$\theta \cos \theta - \sin \theta < 0$$

elde edilir.

$$\text{Şimdi } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ aralığında } f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

fonksiyonunu ele alalım;

$$f'(\theta) = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2} < 0$$

olup, sözkonusu aralıkta f kesin eksilen bir fonksiyon olup herhangi $0 < \alpha < \beta < \pi/2$ için

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}$$

veya

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

bulunur. $\beta = \pi/2$ hali için de aynı kesin eşitsizlik doğrudur.

A40. $\tan 1^\circ \tan 61^\circ = \tan 3^\circ \tan 31^\circ$ eşitliğini kanıtlayınız.

Çözüm : Hasan Kullap, İstanbul

$x = \tan 1^\circ$ yazarak

$$\tan 61^\circ = \tan (60^\circ + 1^\circ) = \frac{\sqrt{3} + x}{1 - x\sqrt{3}}$$

$$\tan 31^\circ = \tan (30^\circ + 1^\circ) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + x}{1 - \frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + x\sqrt{3}}{\sqrt{3} - x}$$

ve bu suretle de

$$\frac{\tan 61^\circ}{\tan 31^\circ} = \frac{3 - x^2}{1 - 3x^2}$$

bulunur. Diğer taraftan da

$$\frac{\tan 3^\circ}{\tan 1^\circ} = \frac{1}{x} \left[\frac{x + \frac{2x}{1 - x^2}}{1 - \frac{2x^2}{1 - x^2}} \right] = \frac{3 - x^2}{1 - 3x^2}$$

Diğer çözenler:

Burhan Biner, Malatya; Ahmet Ceyhan, Ankara; Hasan Çetinkaya, Ankara; Erhan Gürel, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; Hakan Özkahraman, Manisa; S. Gökçen Şen, Erzurum.

Y36. n doğal bir sayı ise $\tan \theta$ yı $\tan \theta$ türünden yazınız.

Çözüm: S. Gökçen Şen, Erzurum

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta (i \sin \theta)^k$$

eşitliğinde gerçel ve sanal kısımlar karşılaştırılarak (veya başka şekilde!)

$$\cos n\theta = \sum_{0 \leq 2m+1 \leq n} \binom{n}{2m} \cos^{n-2m} \theta (-1)^m \sin^{2m} \theta$$

$$\sin n\theta = \sum_{0 \leq 2m+1 \leq n} \binom{n}{2m+1} \cos^{n-2m-1} \theta (-1)^m \sin^{2m+1} \theta$$

bulunur. Bu ifadelerin oranı alınıp, pay ve payda da $\cos n\theta$ ya bölünerek

$$\tan n\theta = \frac{\sum_{0 \leq 2m+1 \leq n} (-1)^m \binom{n}{2m+1} \tan^{2m+1} \theta}{\sum_{0 \leq 2m \leq n} (-1)^m \binom{n}{2m} \tan^{2m} \theta}$$

bulunur. Bir örnekle durumu belirgin hale getirmek gerekirse :

$$\tan 5\theta = \frac{5 \tan \theta - 10 \tan^3 \theta + \tan^5 \theta}{1 - 10 \tan^2 \theta + 5 \tan^4 \theta}$$

Diğer çözenler: Emre Alkan, İstanbul; Hasan Çetinkaya, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; Hasan Kullap, İstanbul.

Y37. Bir ABC üçgeninde [BC] ye A' ortasında degen bir çember AC yi B₁, B₂, AB yi C₁, C₂ de keserse B₁, C₂, B₂, C₁ doğruları BC yi A ye göre simetrik noktalarda keser.

Çözüm: Emre Alkan, İstanbul

B₁C₂, B₂C₁ doğruları BC doğrusunu sırasıyla X, Y noktalarında kessin. ABC üçgeni ve B₁C₂, B₂C₁ doğrularına göre Menelaus teoreminden

$$\frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} \cdot \frac{XB}{XC} = +1$$

$$\frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{YB}{YC} = +1$$

bulunur. Sırasıyla A, B, C noktalarının eldeki çembere göre kuvvetleri alınarak

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$$

$$BC_1 \cdot BC_2 = (BA')^2 = (CA')^2 = CB_1 \cdot CB_2$$

elde edilir. En baştaki denklemleri, bu bağıntılar ışığında taraf tarafa çarparak

$$\frac{XB}{XC} = \frac{YC}{YB}$$

elde edilir.

Diğer çözenler: Çağatay Candan, Ankara; Saim Ericek, İstanbul; E. Gürel, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; S. Gökçen Şen, Erzurum.

Y38. İkişer ikişer kesişen ve

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

denklemleriyle belirli üç doğrunun oluşturduğu üçgenin S alanını katsayılar türünden bulunuz. (Hazırlayan: H. Demir)

Çözüm: Hakan Özkahraman, Manisa

Önce matris ve determinantlar hakkında birkaç basit hususu işaret edelim : $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ şeklindeki bir $n \times n$ matrisin determinantını $|a_{ij}|$ veya $\det(a_{ij})$ şeklinde gösterelim. A_{ij} de $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matrisinde i nci satır j inci sütun silinerek elde edilen matrisin determinantının $(-1)^{i+j}$ ile çarpımı olan " (i, j) nci kofaktörü" olsun. $\det(A_{ij}) = \det(a_{ij})^{n-1}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi probleme gelelim :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

denklemleri sırasıyla k, l, m doğrularını temsil etsin. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ noktaları sırasıyla l ve m, m ve n, n ve k doğrularının kesişim noktaları ise, ufak bir hesaplama

$$x_1 = \frac{A_{11}}{A_{13}}, \quad y_1 = \frac{A_{12}}{A_{13}}$$

$$x_2 = \frac{A_{21}}{A_{23}}, \quad y_2 = \frac{A_{22}}{A_{23}}$$

$$x_3 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad y_3 = \frac{A_{32}}{A_{33}}$$

bulunur.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\det(A_{ij})}{A_{13}A_{23}A_{33}} = \frac{\det(a_{ij})^2}{A_{13}A_{23}A_{33}}$$

veya açık şekilde

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Y39. $\arctan \frac{1}{3} + \dots + \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} + \dots$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm: Ülkü Öztaş, Ankara

$$\frac{\tan A \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \tan(A - B)$$

olduğundan

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{(n+1) - n}{1+n(n+1)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\sum_{k=1}^{n+1} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(1)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{1}{1+n+n^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Diğer çözenler: Emre Alkan, İstanbul.

Y40. Taban açıları $B = 50^\circ$, $C = 30^\circ$ olan bir ABC üçgeninin içinde D noktası alınarak oluşturulan BDA üçgeninin taban açıları 10 ar ise DBA açısı kaç derece olur?

Not: Bu problemde ikizkenar BDC üçgeni BDA üçgeni olarak, BAD açısı da BDA açısı olarak yanlış yayınlanmıştır. Buna rağmen bir çok okuyucumuz problemi kendi kendilerine düzelterek çözmeyi başarmış. Teşekkür ederiz.

Çözüm: Hasan Çetinkaya, Ankara

[BC] nin ortadikmesi AC yi E de kessin. EBC ikizkenar bir üçgen olup $\angle CBE = 30^\circ$,

$\angle DCE = \angle DBE = 20^\circ$ dir. Ufak bir hesaplama $\angle EBD = 20^\circ$ bulunur. Gene ufak bir hesaplama

$\angle BDE = \angle BAE = 100^\circ$

elde edilir. Böylece görülüyor ki D ve A noktaları AE doğrusuna göre bakışık olup, BDA ikizkenar üçgeninde

$\angle BAD = 70^\circ$ dir.

Diğer Çözenler: Atalay Akyürek, Ankara; Emre Alkan, İstanbul; Çağatay Candan, Ankara; Dilek Çağırğan, İstanbul; Barış Dündar, Ankara; Özgür Ergen, Ankara; Saim Ericek, İstanbul; Erhan Gürel, Ankara; Tamer Kahveci, Ankara; Hasan Kullap, İstanbul; Osman Küçükler, Çorum; Ülkü Öztaş, İstanbul; Burak Uzun, Ankara.

BAZI İLGİNÇ SAYILAR

Doğan Mersin

İTÜ Endüstri Mühendisliği Bölümü 1. Sınıf Öğrencisi

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$

$$5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3$$

$$17576 = (1 + 7 + 5 + 7 + 6)^3$$

$$19683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3$$

ABC on tabanına göre üç basamaklı bir sayı olmak üzere aşağıdaki denklemi sağlayan bir ABC sayısı bulabilir misiniz?

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} = ABC$$

Sayın Okurlarımız,

Matematik dünyası, bu sayı ile birlikte, iki yılını tamamlamış oluyor. Bu iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 20.000.- TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar hemen postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 10.000.- TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri taktirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1993 yılı abone ücreti 50.000.- TL. tane satış fiyatı ise 15.000.- TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde, dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

Saygılarımızla

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

