

Matematik

D Ü N Y A S I

Dörtgenleri Tanıyalım

Hüseyin Demir

Malfatti Çemberleri

Cem Tezer

Graf Teorisi

Ali Doğanaksoy

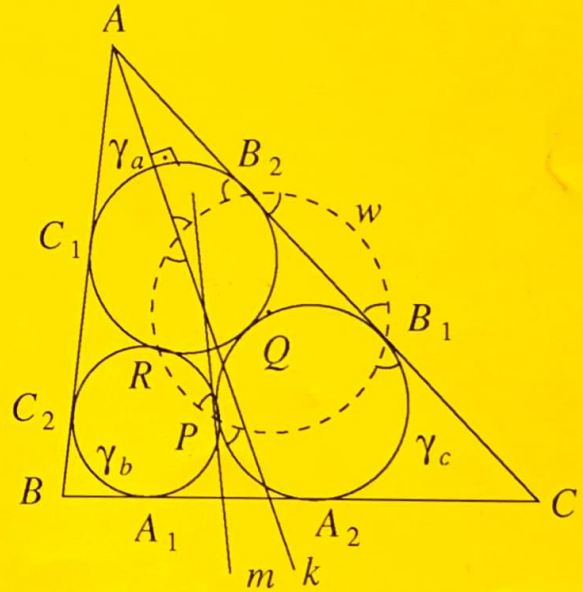
Çinlilerin Kalan Teoremi

İsmail Ş. Güloğlu

Vieta Teoreminin Problem Çözümlerine Uygulanması

Cafer Veliev

Sorular - Çözümler



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
OKAY ÇELEBİ, HÜSEYİN DEMİR,
ALİ DOĞANAKSOY, ALBERT ERKİP
CEMAL KOÇ, CEM TEZER

YAZI İŞLERİ MÜDÜRÜ
VAHDI BİNGÖL

DİZGİ
ABDULLAH CAN

BASKI
ODTÜ BASIM İŞLİĞİ

*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 50.000.-TL., Yurtdışı yıllık 100.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 500.000.-TL.

ADRES
(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)
ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

Dörtgenleri Tanıyalım

Hüseyin Demir 1

Malfatti Çemberleri

Cem Tezer 6

Graf Teorisi

Ali Doğanaksoy 10

Çinlilerin Kalan Teoremi

İsmail Ş. Güloğlu 17

Vieta Teoreminin Problem Çözümlerine Uygulanması

Cafer Veliev 20

Sorular 26

Çözümler 27

Dizin (Cilt II) 32

DÖRTGENLERİ TANIYALIM (I)

HÜSEYİN DEMİR

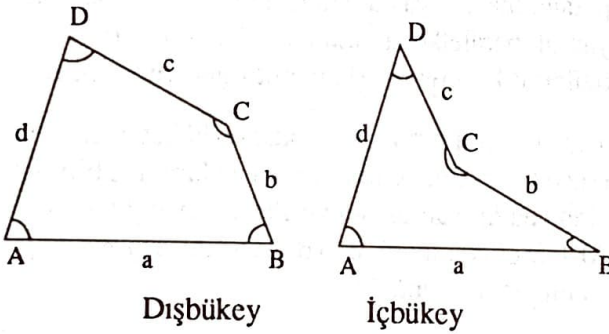
Dörtgenler, üçgenden sonra işlenen çokgenlerdir. Batı dillerinde, üçgenler üzerine birçok kitap ve sayıları 10000'e yakın makale yazılmıştır. Dörtgenler üzerinde de pek çok araştırma yapılarak çok ilginç özellikler elde edilmiştir. Biz bunlardan bazılarına değinmekle yetineceğiz. Uzun dörtgenlerini (aykırı dörtgenleri) konumuzun dışında bırakıyoruz.

SINIFLAMA

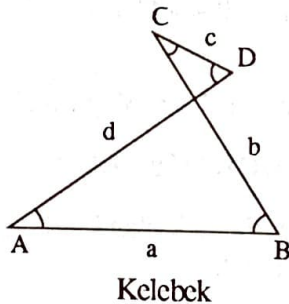
Herhangi üç doğrusal olmayan A,B,C,D gibi sıralı dört nokta verildiğinde [AB], [BC], [CD], [DA] doğru parçalarının birleşimine dörtgen deniliyor. A,B,C,D noktalarına *köşeler*, bu doğru parçalarına *kenarlar* deniyor.

Köşelerin alınışına göre dörtgenler *basit* ve *basit olmayan* dörtgenler olarak iki sınıfı ayrılıyor.

Basit dörtgenler



Basit olmayanlar



Kelebek dörtgenlere, çapraz ya da yıldızlı dörtgenler de denir. Şekilde görüldüğü üzere basit dörtgenler dışbükey ve içbükey olmak üzere ikiye ayrılır. Dışbükey (içbükey) bir dörtgende herhangi bir doğru dörtgeni en çok iki (dört) noktada kesser. Her ikisinin de bir iç ve dış bölgesi vardır. Basit olmayan bir dörtgende komşu olmayan iki kenar kesişirler ve şekil kelebek'e benzediği için kelebek adını alır.

Herhangi bir ABCD dörtgeninde kenar uzunluklarını

$$a=|AB|, b=|BC|, c=|CD|, d=|DA|$$

olarak gösteririz. Karşılıklı köşeleri birleştiren doğru parçalarına da *köşegen* denir. Bunların uzunluklarını da

$$e = |AC|, f = |BD|$$

olarak gösteririz.

Açılara gelince pozitif ölçüleri

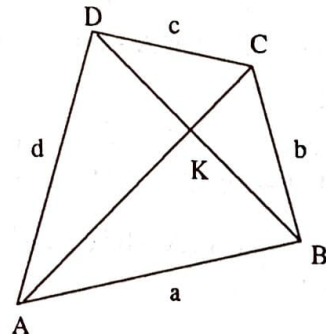
$$A = \angle BAD, B = \angle CBA, C = \angle DCB,$$

$$D = \angle ADC$$

olarak yazarız.

Dışbükey dörtgenlerde bazı simgeler

$$S = |ABCD| \text{ (dörtgenin alanı)}$$



Bir köşegeni kenar kabul eden üçgenlerin alan, çevrel yarıçap ve iç yarıçaplarını S_A, S_B, S_C, S_D ; R_A, R_B, R_C, R_D ve r_A, r_B, r_C, r_D ; ile gösteriyoruz. Örneğin S_A dediğimizde A köşesinin karşısındaki köşegeni kenar kabul eden ABD üçgeninin alanı anlaşılacaktır.

Bir köşesi K köşegen noktası olan üçgenlerin alanları, çevrel yarıçapları ve iç yarıçapları için S_a, S_b, S_c, S_d ; R_a, R_b, R_c, R_d ve r_a, r_b, r_c, r_d simgelerini kullanacağız.

Basit dörtgenlerin alan formülü

Kenarları verilen bir dörtgen çeşitli biçimler alabileceğinden alanının kenarlar türünden ifade edilemeyeceği açık olup

$$\phi = \frac{A+C}{2} \text{ ya da } \phi' = \frac{B+D}{2}$$

parametresini seçelim. $\phi + \phi' = \pi$ olup $\cos^2 \phi = \cos^2 \phi'$ dir.

Teorem : Kenar uzunlukları a, b, c, d , yarı çevresi u ve parametresi $\phi = \frac{1}{2} (A+C)$ olan basit bir ABCD dörtgeninin alanı için

$$S^2 = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd \cos^2 \phi \quad (1)$$

formülü geçerlidir.

İspat: $2S = S_A + S_C = ad \sin A + bc \sin C$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4S^2 &= a^2 d^2 \sin^2 A + b^2 c^2 \sin^2 C + 2abcd \sin A \sin C \\ &= a^2 d^2 (1 - \cos^2 A) + b^2 c^2 (1 - \cos^2 C) + 2abcd \sin A \sin C \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - a^2 d^2 \cos^2 A - b^2 c^2 \cos^2 C + 2abcd \sin A \sin C \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} 1 + \cos(A+B) &= 2 \cos^2 \phi \\ \Rightarrow 1 + \cos A \cos C - \sin A \sin C &= 2 \cos^2 \phi \end{aligned}$$

kullanıldığında

$$\begin{aligned} 4S^2 &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - (a^2 d^2 \cos^2 A + b^2 c^2 \cos^2 C) \\ &\quad + 2abcd (1 + \cos A \cos C - 2 \cos^2 \phi) \\ &= (ad+bc)^2 - (ad \cos A - bc \cos C)^2 - 4 abcd \cos^2 \phi \end{aligned}$$

$$16S^2 = (2ad+2bc)^2 - (2ad \cos A - 2bc \cos C)^2 - 16 abcd \cos^2 \phi$$

elde edilir.

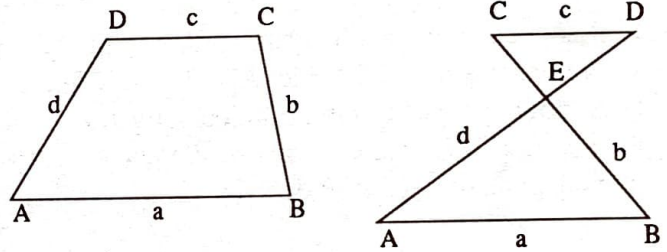
İkinci parantezde kosinüs teoremi uygulandığında $(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$ bulunur ve sağ taraftaki iki kare farkı çarpanlara ayrılıp kısaltmalar yapılırsa (1) elde edilir.

Şimdi, aynı tür elemanlar (kenarlar, köşegenler, açılar) arasına birtakım koşullar koyarak özel bazı dörtgenleri elde edeceğiz.

A. YAMUKLAR

Karşılıklı iki kenar paralel olan bir dörtgene *yamuk* denir.

Bu kenarlar $[AB]$ ve $[DC]$ ise bunlara *taban* adı verilir. Öteki iki kenara da yan kenarlar denir.



İçbükey bir dörtgen yamuk olamayacağından dışbükey ve kebek yamuktan söz edilebilir.

Dışbükey bir yamukta karşılıklı öteki iki kenar paralel olabilir ya da olmayabilir. Olması halinde yamuk paralelkenar adını alır. Bunun da özel halleri dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karedir.

Taban açıları birbirine eş olan dışbükey yamuğa ikizkenar yamuk denir. Taban açılarından biri dik olana da dikyamuk adı verilir. Herhangi bir ABCD dikyamuğunda $AB \perp BC \perp CD$ ise $[DA]$ ya hipotenüs denilebilir.

Dışbükey bir yamuğun alanı

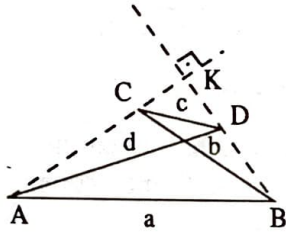
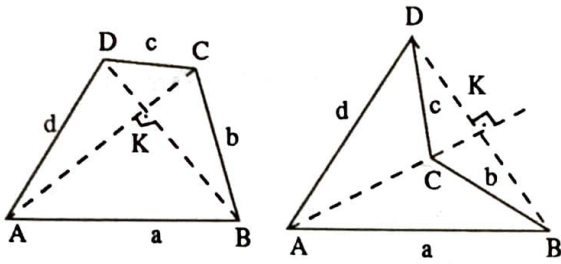
$$S = |ABCD| = |EAB| + |ECD| = \frac{1}{2} \frac{a^2 + c^2}{a+c} h$$

olduğu gösterilebilir (Bkz. Alıştırma 2).

B. DİKGEN DÖRTGENLER

Köşegenleri birbirine dik olan bir dörtgene *dikgen dörtgen* deriz.

Üç sınıfta da dikgen dörtgen var.



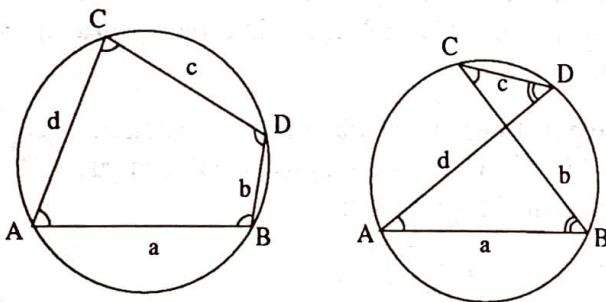
Teorem: Dikg ABCD $\Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

İspat: B ve D nin AC üzerindeki dik izdüşümleri B', D' ise $a^2 - b^2 = |AB'|^2 - |CB'|^2$, $d^2 - c^2 = |AD'|^2 - |CD'|^2$ den dikg ABCD $\Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

C. KİRİŞ DÖRTGENLERİ

Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir dörtgene *kirişler dörtgeni* diyoruz.

Sadece dışbükey ve kelebek dörtgenler kirişler dörtgeni olabilir.



$$A+C=B+D \quad (2) \quad A=C, B=D \quad (3)$$

Kirişler dörtgeninde açılar için (2) ve (3) bağıntıları sarısayla dışbükey ve kelebek dörtgenler için geçerli olup gerek ve yeter koşullardır.

Kirişler dörtgeninde ilginç bir teorem Batlamyus (M.S. 130) teoremidir:

Teorem: (Batlamyus) Dışbükey bir kirişler dörtgeninde, karşılıklı kenarların uzunluklarının çarpımlarının toplamı köşegen uzunluklarının çarpımına eşittir.

$$ac + bd = ef \quad (4)$$

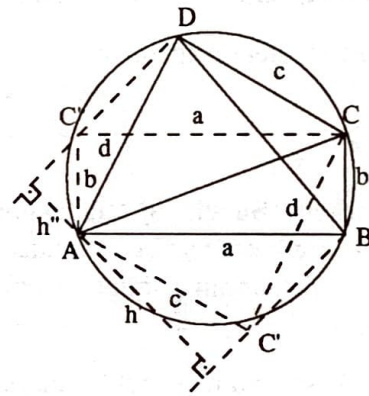
İspat: İspatta, kenar uzunlukları a,b,c olan bir üçgende

$$bc = 2Rh_a \quad (5)$$

bağıntısından yararlanacağız. Bu amaçla C den DA ya paralel [CC'] kirişini çizip [DC] yi [AC'] ye taşıyalım. AC'B üçgeninde (5) i kullanarak

$$ac = 2Rh' \quad (5')$$

yazalım.



Bu sefer C den BA ya paralel [CC''] kirişini çizip [BC] yi [AC''] ye taşıyalım ve ADC'' üçgenine (5) i uygulayalım. Şu eşitlik elde edilir:

$$bd = 2Rh'' \quad (5'')$$

BC' //DC'' olduğu BCD ve C'AC'' yaylarının eşliğinden kolayca görülür. (5') ve (5'') nün taraf tarafa toplanmasıyla

$$ac + bd = 2R(h' + h'') = 2Rh$$

çıkarak. Burada h uzunluğu, paralel olan BC' , DC'' doğrularının uzaklığıdır.

Öte yandan e = |AC| = |DC'| olup DC'B üçgenine (5) uygulandığında

$$ef = 2Rh$$

bulunur ki $ac + bd = ef$ eşitliği ispatlanmış olur.

Batlamyus'tan çok sonraki matematikçiler şu genel teoremi elde etmişlerdir :

Teorem: Basit bir ABCD dörtgeninde

$$ac + bd \geq ef$$

(6)

eşitsizliği geçerli olup eşitlik ancak dörtgenin kirişler dörtgeni olması halinde sağlanır.

Bu teoremin evirtimle yapılan ispatı dergimizde yer almıştır [Cilt II, Sayı 2, s. 8].

Batlamyus teoreminin en basit uygulaması olarak şu teoremi elde edebilirsiniz:

Teorem: Eşkenar bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin A karşısındaki yay üzerinde alınan bir P noktasının A dan uzaklığı, B ve C den olan uzaklıklarının toplamına eşittir.

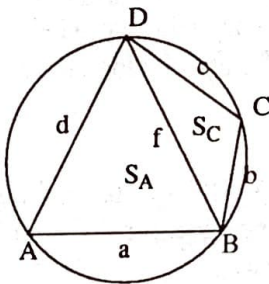
Şimdi bir kirişler dörtgeninde köşegen uzunluklarının e/f oranı ile ilgili teoremi verelim :

Teorem: Bir kirişler dörtgeninde

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \quad (7)^*$$

eşitliği geçerlidir. (Burada sağ taraftaki oranda pay ve payda, ilgili köşegenin uçlarından geçen kenarların uzunluklarının çarpımının toplamını ifade etmektedir.)

İspat: [BD] köşegenini çizmekle oluşan üçgenlerin alanları



$$4RS_A = daf, \quad 4RS_C = bcf$$

olarak bilinmekte olup

$$4RS = 4R(S_A + S_C) = (ad + bc)f$$

Benzer olarak

$$4RS = 4R(S_B + S_D) = (ad + bc)e$$

olup her iki eşitlik taraf tarafa bölünerek (7) elde edilir.

Sonuçlar: Yukarıda elde edilen formülleri kullanarak

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \quad (8)$$

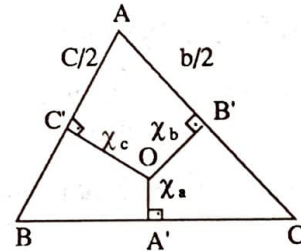
$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

eşitliklerini buluruz.

Uygulama: Batlamyus teoremini kullanarak üçgenler için bilinen (Carnot teoremini) ispatlayabiliriz.

Teorem: (Carnot) Bir ABC üçgeninde çevrel merkezin kenarlardan olan yönlü uzaklıkları toplamı, çevrel ve iç yarıçapların toplamına eşittir.

$$\chi_a + \chi_b + \chi_c = R + r \quad (9)$$



(Not: Örneğin A açısı genişse çevrel O merkezi üçgenin dışında ve A açısı içinde olup χ_a uzaklığı negatif alınır.)

İspat: Üçgenin kenarlarının orta noktaları A', B', C' ise AC'OB' kirişler dörtgenine Batlamyus teoremini uygulayalım.:

$$\frac{1}{2} c \chi_b + \frac{1}{2} b \chi_c = \frac{1}{2} aR$$

$$\Rightarrow c \chi_b + b \chi_c = aR$$

elde edilir. Benzer olarak

$$a \chi_c + c \chi_a = bR$$

$$b \chi_a + a \chi_b = cR$$

geçerli olup üçünün taraf tarafa toplanmasıyla

* Acaba (4)'ün bir genellemesi olan (6)'da olduğu gibi burada da (7) nin bir genellemesi söz konusu olabilir mi? Bu konu üzerinde Cem Tezer çalışmaktadır.

$$a(\chi_b + \chi_c) + b(\chi_c + \chi_a) + c(\chi_a + \chi_b) = 2uR$$

çıkar. Öte yandan

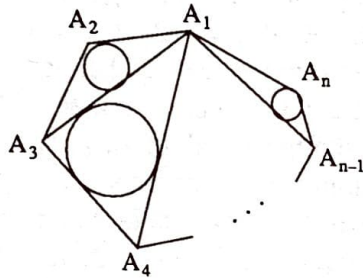
$$a(\chi_a + \chi_b + \chi_c) + b(\chi_a + \chi_b + \chi_c) + c(\chi_a + \chi_b + \chi_c) = 2u(R+r)$$

$$2u(\chi_a + \chi_b + \chi_c) = 2u(R+r)$$

çıkar ki (9) elde edilmiş olur.

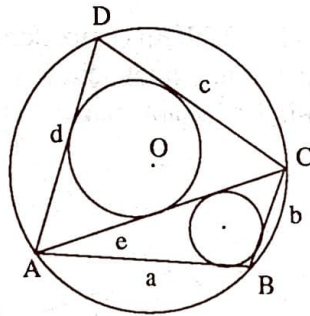
Şimdi kirişler çokgeni için Japon teoremini yazalım.

Teorem : (Japon) Bir kirişler $A_1A_2 \dots A_n$ çokgeninde A_i kirişinden geçen köşegenlerin çizilmesiyle oluşan üçgenlerin iç yarıçapları toplamı i den bağımsızdır.



Teoremi dörtgenler için ispatlayacağız. Bu genel teorem tümevarımla ispatlanabilir.

İspat: ($n = 4$) A dan geçen köşegeni çizdiğimizde ABC, ACD üçgenleri oluşur. Bunlara Carnot eşitliği uygulandığında



$$\chi_a + \chi_b - \chi_e = R + r_B$$

$$\chi_c + \chi_d + \chi_e = R + r_D$$

$$\chi_a + \chi_b + \chi_c + \chi_d = 2R + r_B + r_D$$

$$\text{Buradan } r_C + r_D = (\sum \chi_a) - 2R$$

çıkar. Öteki köşegeni çizmekle benzer olarak

$$(r_A + r_C) = (\sum \chi_a) - 2R$$

bulunur. Böylece iddia ispatlanmış olur.

Sonuç: Basit dörtgenlerden kenar uzunlukları verilen en büyük alanlısı kirişler dörtgenidir:

$$S^2 = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd \cos^2 \varphi$$

olup

$$\max S \Rightarrow \min \cos^2 \varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A+C = \pi.$$

O halde ABCD kirişler dörtgeninin alan formülü

$$S = \sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)} \text{ (Brahmagupta)}$$

(10)

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Dışbükey bir ABCD dörtgeninde

$$S_a S_c = S_b S_d \quad (11)$$

nin geçerli olduğunu gösteriniz.

2. Taban uzunlukları a, c yüksekliği h olan kelebek bir yamuğun alanının (kanatların alanları toplamının)

$$\frac{1}{2} \frac{a^2 + c^2}{a + c} h \quad (12)$$

olduğunu gösteriniz.

3. Dışbükey bir yamukta

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_a} + \sqrt{S_c} \quad (13)$$

olduğunu gösteriniz.

4. Kenar uzunlukları 4,3,5,2 ve parametresi $\varphi = 60$ olan dışbükey dörtgenin alanını hesaplayınız.

5. Ardışık kenar uzunlukları $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{5}, x$ olan bir dörtgen x in hangi değeri için dikgendir?

6. Dikgen bir ABCD dörtgeninde

$$r_a + r_b + r_c + r_d = e + f - u$$

eşitliği geçerlidir. (Alasia)

Devamı sayı 2'de

MALFATTİ ÇEMBERLERİ

CEM TEZER

Konumuzu teşkil eden çemberleri bugün adıyla anmakta olduğumuz Gianfrancesco Malfatti (1737-1807) Ferrara Üniversite'sinde (Kuzey İtalya) fizik profesörü olarak çalışırken 1803 yılında yazdığı ([6]) bir makalede şu ilginç problemi ortaya atmış:

"Herhangi bir maddeden, mesela, mermerden yapılmış bir üçgen dik prizmadan en az malzeme ziyan olacak şekilde üç dairesel dik silindir nasıl çıkarılır?"

Tabii ki bu üç boyutlu sunuş aslında gereksiz. Prizma yerine, onun eksenine dik bir düzlem üzerine dik izdüşümü olan üçgen, silindir yerine de gene aynı şekilde elde edilmiş bir çember alınabilir. O zaman problem, verilen bir üçgen içine alanları toplamı en büyük olacak şekilde birbirinin "üzerine çıkmayan" üç çemberin nasıl yerleştirileceği problemidir.

Bu eski ve elde edilmesi güç makaleyi ben de görmediğim için, Malfatti'nin bu problem üzerindeki çalışmaları hakkında fazla bir şey söyleyemeyeceğim. Kaynağı görenlerin, okuyanların (mesela [3], [5], [1], [2] gibi) yalancısı olduğumu belirterek bu hususta bildiğim birkaç şeyi nakledeyim: Malfatti, sözkonusu problemi yukarıda işaret ettiğimiz gibi bir düzlem geometri problemi haline getirdikten sonra, çözümün *aşıkarak*, (Şekil 1 de $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ ile gösterilen) herbiri diğer ikisine dıştan, gene herbiri üçgenin ilgili iki kenarına içten teğet çemberlerden ibaret olduğunu belirtiyor. Malfatti, bu çemberlerin, üçgenin içinde nasıl bir konuma sahip olduklarını anlamak maksadıyla bazı hesaplar da yaparak, sonuçta işte bugün Malfatti çemberleri olarak andığımız, bu yazıda bir yüzyılı geçen maceralarından birkaç sayfayı nakledeceğimiz çemberleri matematik dünyasına kazandırıyor.

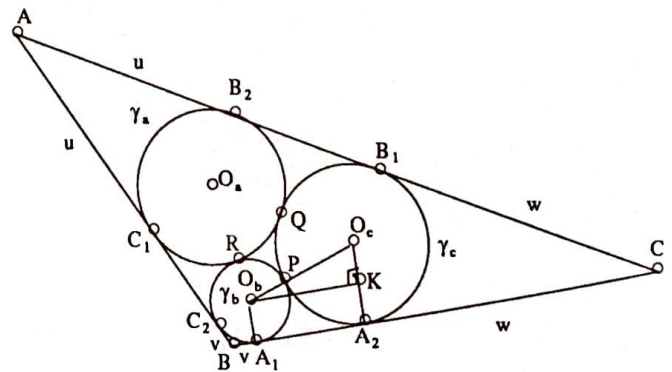
Az evvel söylediğim gibi Malfatti'nin hesaplarını

bilmiyorum. Buna karşılık çağdaş kaynaklarda az tanınmış bir matematikçi ([2], [5]) olan Schellbach'a izafe edilen bazı ilginç hesapları okuyucuya aktarmak istiyorum. Bu hesapların dikkate değer tarafı, küçük bir gözlemle Malfatti çemberlerinin pergel ve cetvelle çizilebilir olduğunu ispat edebilmeleridir.

Her zamanki gibi bir ABC üçgenine bağlı olarak, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ ve $2s = a + b + c$ yazalım. ABC nin içteğet çember yarıçapı r olsun. Malfatti dokusuna ait birkaç gösterimi de Şekil 1 yardımıyla sunalım: $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ çemberlerinin yarıçapları sırasıyla ρ_a, ρ_b, ρ_c , BC, CA, AB ye teğet oldukları noktalar da A_1 ve A_2 , B_1 ve B_2 , C_1 ve C_2 olsun. Ayrıca (bu hesaplarda değil ama sonradan kullanılmak üzere) γ_b ve γ_c , γ_c ve γ_a , γ_a ve γ_b nin birbirlerine sırasıyla P, Q, R noktalarında değdiklerini farz edelim. Nihayet

$$|AB_2| = |AC_1| = u, |BC_2| = |BA_1| = v \\ |CA_2| = |CB_1| = w$$

yazalım. Malfatti çemberlerinin üçgen içindeki konumunu bilmek için u, v, w miktarlarını a, b, c cinsinden hesaplamak tabii ki yeterlidir.



Şekil 1.

O den $O_c A_2$ ye indirilen dikmenin ayağına K dersek, $O_c O_b K$ dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned}
|A_1 A_2|^2 &= |O_b O_c|^2 - |O_c K|^2 \\
&= (\rho_b + \rho_c)^2 - (\rho_c - \rho_b)^2 \\
&= 4\rho_b \rho_c
\end{aligned}$$

yani

$$|A_1 A_2| = 2 \sqrt{\rho_b \rho_c}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\rho_b : v = r : s - b$$

$$\rho_c : w = r : s - c$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|A_1 A_2| &= 2 \sqrt{\rho_b \rho_c} \\
&= r \frac{\sqrt{vw}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}
\end{aligned}$$

ve (ABC nin alanını Δ ile gösterirsek)

$$sr = \Delta = \Delta \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

den

$$|A_1 A_2| = 2 \sqrt{\frac{s-a}{s}} \sqrt{vw}$$

$$\text{bulunur. } |AB_1| + |A_1 A_2| + |A_2 C| = a$$

olduğundan

$$v + w + 2 \sqrt{\frac{s-a}{s}} = a$$

benzer şekilde de

$$w + u + 2 \sqrt{\frac{s-a}{s}} = b$$

$$u + v + 2 \sqrt{\frac{s-a}{s}} = c$$

elde edilir. Buraya kadar herkesin yapabileceği bir hesabı yürüttük. Şimdi zarif nokta :

$$\sin \xi = \sqrt{\frac{u}{s}} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{a}{s}}$$

$$\sin \eta = \sqrt{\frac{v}{s}} \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{b}{s}}$$

$$\sin \zeta = \sqrt{\frac{w}{s}} \quad \sin \gamma = \sqrt{\frac{c}{s}}$$

şeklinde $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ açı-miktarlarını ithal edersek (1), (2), (3) denklemleri

$$\sin^2 \eta + \sin^2 \zeta + 2 \sin \eta \sin \zeta \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (4)$$

$$\sin^2 \zeta + \sin^2 \xi + 2 \sin \zeta \sin \xi \cos \beta = \sin^2 \beta \quad (5)$$

$$\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + 2 \sin \xi \sin \eta \cos \gamma = \sin^2 \gamma \quad (6)$$

şeklini alır. Üçgende kosinüs teoremi hatırlanırsa bu denklemlerin sağlanması için yeter şart olarak

$$\eta + \xi = \alpha \quad (7)$$

$$\zeta + \xi = \beta \quad (8)$$

$$\xi + \eta = \gamma \quad (9)$$

alınabilir. Demek ki $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ olmak üzere (7), (8), (9) denklemlerinden

$$\xi = \sigma - \alpha$$

$$\eta = \sigma - \beta$$

$$\zeta = \sigma - \gamma$$

yazarsak,

$$u = s \sin^2 \xi$$

$$v = s \sin^2 \eta$$

$$w = s \sin^2 \zeta$$

(1)

çıkar. Bilinen a, b, c uzunluklarından s, α, β, γ , bunlardan da ξ, η, ζ ve en nihayet u, v, w miktarları açık bir şekilde pergeli ve cetvelle elde edilebilir. Demek ki Malfatti çemberleri pergeli ve cetvelle çizilebilmektedir.

(2)

(3)

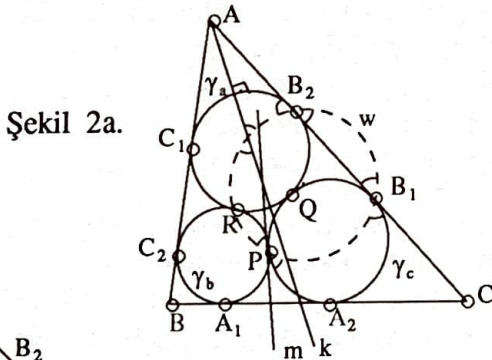
Bu bilgi önemli olmakla birlikte geometriseveri tatmin etmeyecektir. Malfatti'nin makalesinin hemen ardından, matematikçiler hesaba değil, doğrudan geometriye bağlı bir çizimi heyecanla aramış. Herkesi tatmin eden teorem J. Steiner'e ait:

Teorem: ([7], 1826) ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I, CIA, AIB üçgenlerinin içteğet çemberleri Γ_b, Γ_c olsun. Γ_b, Γ_c nin AI doğrusu olmayan iç ortak teğeti aynı zamanda γ_b ,

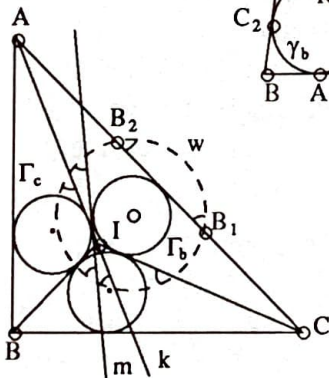
γ_c Malfatti çemberlerinin de ortak teğetidir. (Şekil 2a, b).

Bu teoremin geometri meraklısında yarattığı, eşit miktarlarda, şaşkınlık, hayranlık, vecd ve isyan hislerinin karışımı ruh hali, Steiner'in bir çok başka eserinden de edinilebilir. Bu teoremi daha da dikkate değer hale getiren husus, Steiner'in onu (herhalde çağdaşı geometricileri çileden çıkartmak için) ispatını vermeden yayınlamış olması. Yıllarca birçok matematikçi bu teoremi ispat etmeye çalışmış. J.L. Coolidge'e [1] göre ilk ispat Hart adında az tanınmış bir İngiliz geometrici tarafından verilmiş. Bu ispat, matematik dünyasında, Hart'ın Steiner'in zamanında bilinmeyen bir teknik (yani evirtim) kullandığı gerekçesiyle pek "hüsn-i kabul" görmemiş. J.L. Coolidge bu durumdan, bugün pek yakışık veremediğimiz bir "gayret-i milliyet" ile (herhalde biraz daha Birinci Dünya Savaşı'ndan hemen önceki yılların gerginliği içinde) "Eğer Hart, Steiner'in milletinden olsaydı, işler başka türlü olurdu!" diye yakınır. Her neyse... Okuyucu Steiner'in meçhul ispatının matematikçilere ne kadar dert olduğunu iyice anlamıştır herhalde. Ben Hart'ın Coolidge tarafından nakledilen ispatını, yazıyı yetiştirmek telaşından pek okuyamadım. Yıllarca evvel eski ve şimdi tam hatırlayamadığım bir geometri kitabında okuyup, anlayamayıp, sonra kendimce birkaç ilave ile elde ettiğim, evirtime dayalı bir ispatı sunmak istiyorum. Steiner'in böyle düşündüğü yolunda bir iddiam da hiç yok!

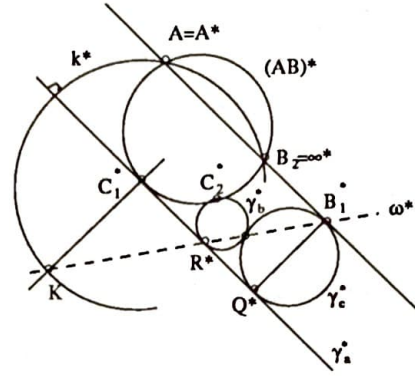
İspat: (Şekil 2a, 2b, 2c)



Şekil 2a.



Şekil 2b.



Şekil 2c.

Önce B_1, B_2, P, R noktalarının çemberde olduklarını hatırlatalım. (Mesela, Problem 1, [8]). Bu noktaların üzerinde kaldığı çember ω olsun, B_2 noktası merkez olmak üzere bir evirtim gözönüne alalım. Herhangi bir geometrik şey X in bu evirtim altındaki görüntüsünü X^* ile gösterelim; A açısının içaçıortayını k ile, γ_b, γ_c nin ortak teğetini m ile gösterelim. İspatımızın ağırlık noktası k ile ω arasındaki açının, AC ile ω arasındaki açıya eşit olduğunu göstermek (Şekil 2a). Bunu yapabilirsek, AC ile ω arasındaki açı m ile ω arasındaki açıya eşit olduğundan (bütün bu münakaşayı bir de C açısının açıortayı için tekrarlayarak!) $CI, AI = k, m$ ve AC doğrularının ω çemberinin merkezine eşuzaklıklı olduklarını, bu suretle de ω ve Γ_b nin eşmerkezli olduklarını ve en nihayet hem k , hem de m nin Γ_b ye teğet olduklarını göreceğiz (Şekil 2b). Aynı münakaşayı bir de ABI için tekrarlayarak m nin Γ_b ye de teğet olduğu görülebilir, ispat biter.

Böylece yapmamız gereken tek şey olarak k ile ω arasındaki açının ω ile AC arasındaki açıya eşitliğini göstermek kalıyor. Evrik şekle geçelim (Şekil 2c): AB doğrusunun evriği olan $(AB)^*$ çemberinin yarıçapı r_1 , sırasıyla γ_b^*, γ_c^* çemberlerinin yarıçapları da r_2, r_3 olsun. Küçük bir hesapla

$$|C_1^* A| = 2 \sqrt{r_1 r_3}$$

$$|Q^* R^*| = 2 \sqrt{r_2 r_3}$$

$$|R^* C_1^*| = 2 \sqrt{r_1 r_2}$$

bulunur. ω^* in C_1^* dan γ_a^* a çizilen dikmeyi kestiği nokta K olsun. $K C_1^* R^*$ ve $B_1^* Q^* R^*$ dik üçgenlerinin benzerliğinden

$$|KC_1^*| : |R^*C_1^*| = |B_1^*Q^*| : |Q^*R^*|$$

olup, buradan

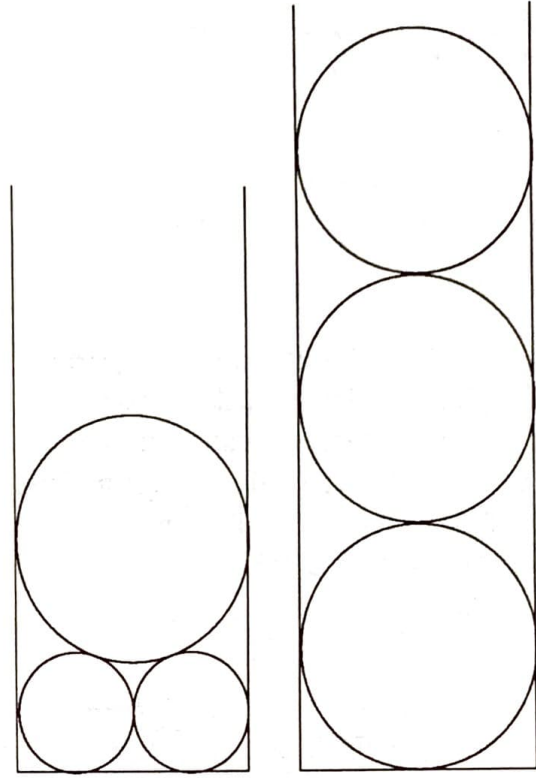
$$|KC_1^*| = \frac{|B_1^*Q^*| |R^*C_1^*|}{|Q^*R^*|} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

bulunur. Demek ki

$$|KC_1^*| = |C_1^*A|$$

dır. O zaman C_1^* merkezli $|C_1^*K|$ yarıçaplı çember A dan geçmelidir. Bu çember γ_a^* a dik olacağından ancak k^* , yani A açısının içaçıortayı k doğrusunun evriği olabilir. K dan k^* a çizilen teğet γ_a^* a, dolayısıyla AB_1^* a paralel olduğundan, ω^* la k^* arasındaki açıya eşittir. Sonuç olarak ω ile k arasındaki açı da $AB_1 = AC$ ile ω arasındaki açıya eşit olmalıdır.

Yazımızı, Malfatti çemberlerinin meydana getirdiği harikulade dokuyla daha yeni tanışmış okuyucumuzu biraz üzerek bitirelim. Ne yazık ki Malfatti çemberleri, asıl Malfatti probleminin çözümü değildir. Hatırlıyalım: Malfatti problemi bir üçgenin içine birbirinin üzerine çıkmadan yerleşip, mümkün olan en geniş alan kaplayan üç çember istiyor. G. Malfatti bu işin "aşikar olarak" Malfatti çemberleri tarafından yapıldığını söyleyip bırakmış. Bir ispat yok! Böyle bir ispatın olmadığı ilk farkına varanlar H.Lob ve H.W. Richmond [5]. Nedense bu işe uzun ve ayrıntılı makalelerinin en son cümlesinde, o da pek mütereddit bir ifadeyle, temas ediyorlar. Halbuki durum gerçekten şaşırtıcı: Malfatti çemberlerinin asıl Malfatti problemine *hiçbir zaman* çözüm teşkil etmediği 1967 de M. Goldberg tarafından gösterilmiştir. Okuyucu için en güzel örnek tepesi "sonsuzda" yani taban açılan 90 ar derece olan bir ikizkenar üçgende Malfatti çemberlerinin toplam alanıyla (Şekil 3a) Şekil 3b deki çemberlerin toplam alanını karşılaştırmak olacaktır.



Şekil 3a

Şekil 3b

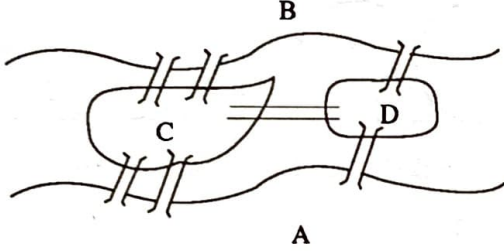
Kaynaklar:

- [1] J.L. Coolidge: "A Treatise on the Circle and the Sphere" Chelsea Publishing Company, New York 1971. (İlk basım: Oxford, 1916)
- [2] H. Dörrie: "100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution" Almanca'dan çeviren D. Antin, Dover Publications, New York 1965.
- [3] H. Eves: "A Survey of Geometry" Allyn and Bacon, Boston 1963.
- [4] M. Goldberg: "The original Malfatti Problem" Mathematics Magazine, 40 (1967) 241-247.
- [5] H.Lob, H.W. Richmond: "On the solutions of Malfatti's problem for a triangle" Proceedings of the London Mathematical Society 30 (1930) 287-304.
- [6] G. Malfatti: "Memoria sopra un problema sterotomica" Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze 10 (1803) 235 - 244.
- [7] J. Steiner: "Einige geometrische Betrachtungen" Crelle's Journal 1 (1826) 161-184, 252-258.
Ben bu yazıyı Steiner'in bütün eserlerinin toplandığı bir kitapta okudum: "Gesammelte Werke" Cilt I, Sayfa 19-76, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York 1971, (İlk basım: Berlin 1881).
- [8] C.Tezzer: "Evritim" Matematik Dünyası, Cilt 2 Sayı 1, Sayfa 12-16.

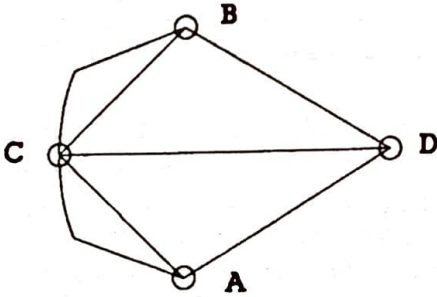
GRAF TEORİSİ

ALİ DOĞANAKSOY

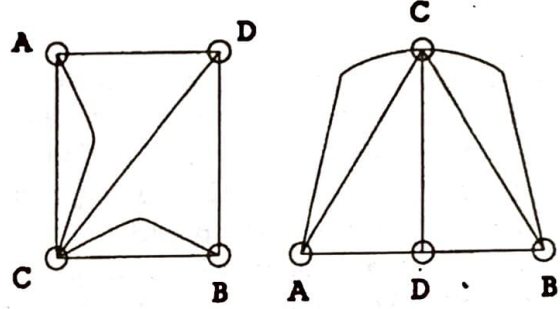
18 inci Yüz yılın ortalarında Königsberg şehri Pregel nehrinin iki yakası ve nehirdeki iki ada üzerine kurulmuştu. Bu adalardan büyük olanı şehrin iki yakasına ikişer köprü; diğeri de birer köprü ile bağlanmıştı. Ayrıca iki ada arasında da bir köprü bulunmaktaydı.



Şehir sakinlerinin cevaplandırmaya çalıştığı bir soru vardı: Her hangi bir noktadan harekete başlayıp, yedi köprü'nün hepsinden bir ve yalnız bir kez geçip, şehrin bütün bölümlerini dolaştıktan sonra başlangıç noktasına varılabilir mi? Bu problemin çözümü olmadığı Leonhard Euler (1707-1783) tarafından gösterildi. Euler, problemi üzerinde daha rahatça oynayabilecek bir şekilde temsil ederek işe başladı. Şehrin dört bölümü birer nokta ve köprüler de bu noktaları bağlayan eğri parçaları ile gösterilirse probleme ait şekil şöyle olur:

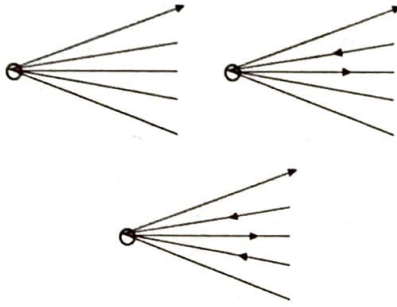


Elbette bu şekli, problemin özelliklerini bozmadan



şeklinde de çizebilirdik. Şehirleri temsil eden noktalara *düğüm* köprülere tekabül eden eğri parçalarına da *kiriş* adını verelim. Königsberg köprüleri problemi bu çizdiğimiz şekiller dilinde şu hali aldı: Her hangi bir düğüm noktasından harekete başlayıp, bütün kirişlerden bir ve yalnız bir defa geçerek, bütün düğümleri ziyaret ettikten sonra başlangıç düğümüne varabilir miyiz? Böyle bir gezintinin imkansızlığını göstermeden önce bir iki tanım daha yapalım. Her kirişin iki ucunda birer düğüm bulunmaktadır. Bu düğümlere o kirişin *uçları* denebilir. Aralarında (en az) bir kiriş bulunan iki düğüme *komşu düğümler* ve ortak bir ucu bulunan iki kırşe de *komşu kirişler* diyelim. Bir düğümü uç kabul eden kirişlerin sayısı, uğraştığımız problemde ve bir çok tartışmada önemli rol oynamaktadır. Bu sebeple bu sayıya da bir isim vermek yerinde olur. Buna (*yerel*) *derece* diyeceğiz. Bu tanımlardan sonra probleme dönmeden önce bir gözlemde bulunalım. Sadece Königsberg köprüleri problemi için çizdiğimiz şekilde değil, düğümler ve kirişlerden oluşan herhangi bir şekilde bir düğümden başlayıp bütün kirişleri bir ve yalnız bir defa kullanarak ve bütün düğümleri ziyaret edip başlangıç noktasına varmak istediğimizi düşünelim. Derecesi tek olan bir düğüm başlangıç düğümü olamaz zira, buna

bağlı kirişlerden birisi harekete başlarken çıkış kirişi olarak kullanılacaktır, geriye bu düğüme bağlı çift sayıda kullanılmamış kiriş kalacaktır. Bu düğümü ikinci kez ziyaret ettiğimizde, buna varmak için bir kiriş daha kullanılmış olacağından geriye tek sayıda (yani en az 1) kiriş kalacaktır, demek ki bu düğüm hareketin biteceği nokta olamaz.



Öte yandan derecesi tek olan bir düğüm ara düğüm de olamaz (neden?). O halde, problemin bir çözümü olabilmesi için bütün düğümlerde derecenin çift olması gerekir. Oysa, Königsberg köprüleri için çizdiğimiz şeklin bütün düğümleri tek dereceli. Yani problemin çözümü yoktur.

Şimdi bir nehrin kenarında lahanası, kuzusu ve kurdu ile düşünen adamın problemine bir bakalım. Adam karşı kıyıya geçmek istiyor ama kuzu ile lahanayı, kurt ile de kuzuyu başbaşa bırakmıyor. Karşıya geçerken kullanabileceği kayık ise o kadar küçük ki, adam her seferinde yanına ancak bir tek şey alabiliyor. Karşımıza çıkabilecek bütün halleri şu şekilde gösterebiliriz:

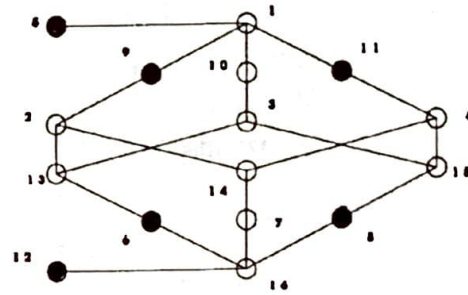
1 $\frac{ALKR}{-}$	2 $\frac{ALK}{R}$	3 $\frac{ALR}{K}$	4 $\frac{AKR}{L}$
5 $\frac{LKR}{A}$	6 $\frac{AL}{KR}$	7 $\frac{AK}{LR}$	8 $\frac{AR}{LK}$
9 $\frac{LKR}{A}$	10 $\frac{LR}{AK}$	11 $\frac{KR}{AL}$	12 $\frac{A}{LKR}$
13 $\frac{L}{AKR}$	14 $\frac{K}{ALR}$	15 $\frac{R}{ALK}$	16 $\frac{-}{ALKR}$

Bu şemalarda başlangıç konumuz 1; varmak istediğimiz konum 16. Adam, lahanası ve kuzuyu baş harfleri ile; kurdu da R harfi ile temsil

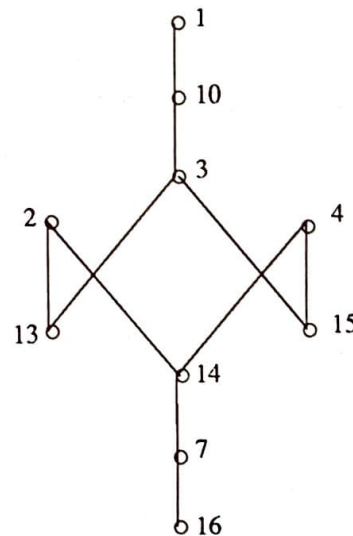
ediyoruz. Kuzunun lahanayı veya kurdun kuzuyu yiyebileceği istenmeyen konumlar ise 5, 6, 8, 9, 11 ve 12. Bir konumdan hangi konumlara geçebileceğimizi gösteren bir tablo hazırlayalım.

1→5,9,10,11	5→1	9→1,2	13→2,3,6
2→9,13,14	6→13,16	10→1,3	14→2,4,7
3→10,13,15	7→14,16	11→1,4	15→3,4,8
4→11,14,15	8→15,16	12→16	16→6,7,8,12

Bu tabloyu düğümler ve kirişler kullanarak şöyle gösterebiliriz:



T adını verdiğimiz bu şekilde, düğümler problemin konumlarını kirişler de konumların hangileri arasında geçiş olduğunu göstermektedir. Siyah düğümler istenmeyen konumlara tekabül etmektedir. Bunları ve bunlara bağlı kirişleri silerseniz yeni bir T_1 şekli elde edilir.

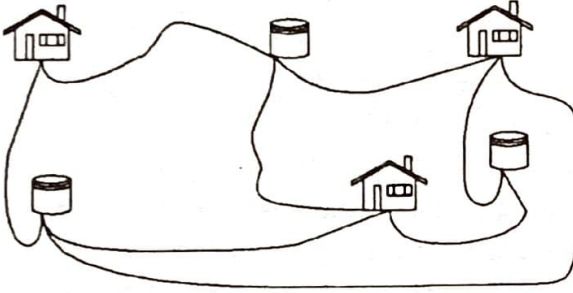


T_1 şeklinden de problemin çözümü okunabilir: birbirine eşdeğer (eş uzunlukta, en kısa) iki çözüm yolu vardır:

1 → 10 → 3 → 13 → 2 → 14 → 7 → 16
1 → 10 → 3 → 15 → 4 → 14 → 7 → 16

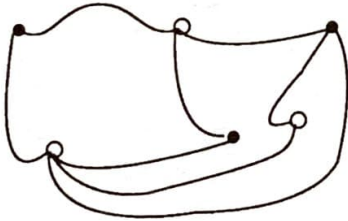
Çok bilinen bir başka problem de 'üç ev - üç kuyu' adıyla tanınan problemdir. Yapılması istenen, üç evi su alabilecekleri kuyulara birer patikayla bağlamaktır. Ancak kuyular zaman zaman kurduğundan her evden her kuyuya bir patika bulunması gerekmektedir. Öte yandan, bu evlerde oturanlar arasında sebebi bilinmeyen bir çekişme vardır ve hiç kimse kendi yolunun kısmen de olsa diğer evlerde oturanlar tarafından kullanılmasını istememektedir.

Dikkat edilirse, problemin sunuluşunda evlerin ve kuyuların konumu hakkında hiç bir şey söylenmemektedir. Bunları istediğimiz şekilde konumlandırabileceğimizi düşünebiliriz.



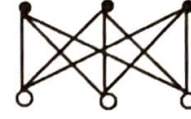
Bir patika eksiği ile üç ev üç kuyu problemi

Bu problemle uğraşırken her defasında ev ve kuyu resimleri çizmemize gerek yoktur. Kuyuları beyaz (içi boş); evleri de siyah noktalarla gösterip, patikaları basit eğri parçaları olarak çizersek yukarıdaki şekil şu daha basit gelir:

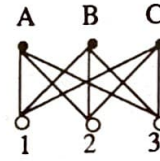


Yine düğümler ve kırışlardan oluşan bir şekil elde ettik. Son çizdiğimiz şekil, probleme bir çözüm getirmemektedir. Bu şekille uğraşmak yerine problemi en başından ele alalım.

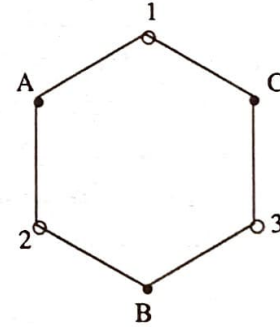
Patikaların kesişmesine aldırmadan, üç kuyuyu evlere bağlayarak problemi şöyle temsil edelim:



İleride anlaşılacak bazı sebeplerden bu şekle $K_{3,3}$ adını veriyoruz. Problemimizin son ifadesi şu; $K_{3,3}$ şeklini düzlemde, düğümlerin konumlarını ve kırışların şeklini değiştirerek, her hangi iki kırış kesişmeyecek tarzda çizebilir miyiz? Evlere A, B, C kuyulara da 1, 2, 3 isimlerini vererek tekrar çizelim $K_{3,3}$ ü.

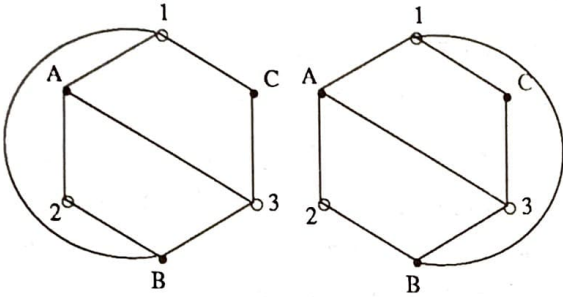


Düğüm ve kırışları nasıl ve nerede çizersek çizelim, (1,A), (A,2), (2,B), (B,3), (3,C) ve (C,1) kırışları ard arda gelecek ve 'kapalı' bir eğri tanımlayacaktır. Bu kapalı eğriyi şöyle çizelim:



$K_{3,3}$ nasıl çizilirse çizilsin, bu kırışlar dizisi daima bir kapalı eğri tanımlayacaktır. Bu sebeple, bu son elde edilen şekil problemin en genel haline denktir. Şimdi çizilmesi gereken üç kırışımız daha var: (A,3), (B,1) ve (C,2). Yukarıdaki kapalı eğri düzlemi iki kısma ayırdı: iç bölge ve dış bölge. (Zaten ispatın özü de bu noktada toplanıyor. Kendisini kesmeyen ve kapalı her sürekli eğrinin düzlemi iki kısma ayırması noktasında. Böyle eğrilere ait bundan başka özellikler de kullanacağız. Doğruluğunu

kabul edeceğimiz bu özelliklerin ispatına girmeyeceğiz.) Yeni çizilecek her kiriş bu kapalı eğrinin iki noktasını birleştirecektir. Bu kiriş eğer daha önce çizilmiş kirişleri kesmeyecekse (uç noktaları hariç) ya tamamen iç bölgede ya da tamamen dış bölgede yerleşmiş olacaktır. (A,3) ve (B,1) kirişlerini ele alalım. Bunların ikisi birden içeriye veya ikisi birden dışarıya, birbirlerini kesmeden, çizilmez. Genellik bozulmadan (A,3) ün içeride, (B,1) in de dışarıda olduğunu düşünebiliriz:



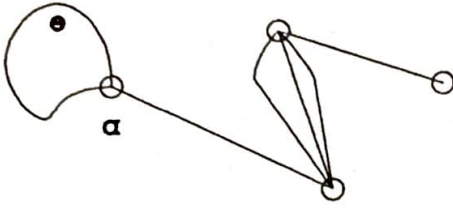
$K_{3,3}$ düzlemde (C,2) kirişi ihmal edilerek çizildiğinde yukarıdaki iki şekilden birine (topolojik olarak) denk olacaktır. Sıra geldi (C,2) kirişinin yerleştirilmesine. Her iki şekilde de (B,1), (1,A), (A,3), (3,B) kirişlerinin kapalı bir eğri tanımladığını; birleştirilmesi gereken 2 ve C düğümlerinin birinin bu eğrinin iç bölgesinde diğerkinin de dış bölgesinde kaldığını görüyoruz. Yani (C,2) kirişinin daha önce çizilmiş bulunan kirişlerden birini kesmeden çizmek mümkün değildir. Böylece 'üç ev - üç kuyu' problemini istenen tarzda yollar çizilemeyeceğini göstererek çözmüş olduk.

Buraya kadar üç problem ele aldık: 'Königsberg Köprüleri', 'Adam, Lahana, Kuzu, Kurt' ve 'Üç Ev-Üç Kuyu' problemleri. Birbirinden çok farklı yapıdaki bu problemlere çözüm ararken kullandığımız ortak şey düğüm ve kirişlerden oluşan bir takım şekiller oldu. Böyle şekillere *graf* adı verilir. Bu yazımızda grafları tanımlayıp temel özelliklerini vermeye çalışacağız. Çok çeşitli sahalara uygulanma imkanı olan grafları inceleyen matematik kuramına *Graf Teorisi* adı

verilmektedir. Bu teoriye ve uygulamalarına zaman zaman sayfalarımızda yer verip, hangi alanlarda nasıl kullanıldıklarını ve bunların kullanımıyla nasıl ilginç sonuçlara ulaşılabileceğini göstereceğiz.

Şimdiye kadar söylediklerimizi göz önüne alarak, bir grafın ne olduğunu ifade edelim. Düğüm adı verilen noktalar ve bunları birbirine bağlayan kiriş adını verdiğimiz eğri parçalarından oluşan bir şekle graf diyoruz. Düğüm yerine *köşe* veya *tepe*; kiriş yerine de *yay* veya *dal* da denmektedir. Kullanış amacımıza uygun olarak bütün düğümlerden oluşan V ile bütün kirişlerden oluşan E kümelerinin ayrı ayrı sonlu veya sonsuz olmasına izin verilebilir. Biz, en azından bu yazımızda, her iki kümenin de sonlu olmaları şartını koyacağız. Yani graf dediğimiz zaman daima düğümleri ve kirişleri sonlu sayıda olan bir graf anlayacağız. Bir grafa V kümesinin boş olması çok anlamsızdır. Bu sebeple, V nin her zaman en az bir elemanı olduğunu kabul edeceğiz. Öte yandan E kümesi boş olabilir. Tanımlarımıza göre, bir G grafının, birlikte düşünülen V ve E kümelerinden meydana geldiğini söyleyebiliriz. Yani, V ve E verildiğinde G grafını $G(V,E)$ şeklinde yazabiliriz. Burada V , grafın düğümlerini; E de bu düğümlerin nasıl bağlanacağını gösterir. $K_{3,3}$ örneğinde olduğu gibi, düzlemde çizilirken kirişlerin kesişmesinden kaçınmadığımız haller olabilir. Bu durumda düğümleri diğer kesişim noktalarından ayırdedecek şekilde çizmek gerekir. Bir grafın iki düğümü arasında hiç kiriş olmayabileceği gibi, bir kiriş veya daha fazla sayıda kiriş de olabilir. İki düğüm arasında en az bir kiriş varsa bunlara komşu düğümler; ortak bir düğümleri bulunan kirişlere de komşu kirişler deneceğini daha önce söylemiştik. Peki, bir düğüm kendisiyle komşu mudur? Eğer düğümü kendisine bağlayan bir kiriş varsa elbette bu düğüm kendisiyle komşu olur. Ama genel olarak, her düğüm kendisine doğal olarak komşudur diyemeyiz. Bir düğümü kendisine

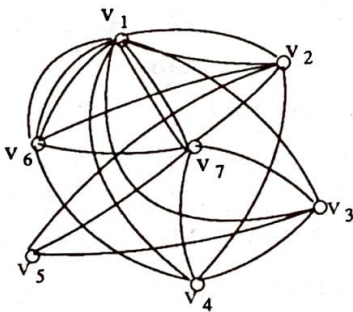
bağlayan bir kirişe, şeklinden dolayı, *ilmek* denir.



a düğümü kendisiyle komşudur
 e kirişi bir ilmektir ve
 a dışında hiç bir düğüm kendisiyle komşu değildir.

Bazı hallerde ilmeklerin bulunması veya iki düğümün birden çok kirişle bağlanmış olması sorun çıkarabilir. Bu haller için, sorun çıkarmayan yani ilmeği ve iki düğümü arasında en çok bir kiriş bulunan graflarla sınırlı kalmak gerekir. Böyle gruplara *basit graflar* denir. Bazı kitaplarda graf tanımı doğrudan doğruya basit graf olarak verilir ve o zaman da iki düğümü arasında birden çok kiriş bulunan graflara özel bir isim verilir: *multigraf*.

Bir düğümdeki kirişlerin sayısına (yerel) derece diyoruz. Eğer v , bir G grafının bir düğümü ise, v deki derece $L(v)$ ile gösterilebilir. $L_{\max}$ ve $L_{\min}$ ile G grafının derecelerinin içinde en büyüğü ve en küçüğü gösterilir. Bir G grafında düğümleri saymak kolaydır, ancak kirişleri tek tek saymaya kalkışırsak işimiz çok kolay olmayabilir. Örneğin aşağıdaki grafta düğümler 7 tanedir ama kirişleri saymaya kalkışmak pek akıllıca görünmüyor.



Fakat şunu biliyoruz ki her kirişin iki ucu vardır

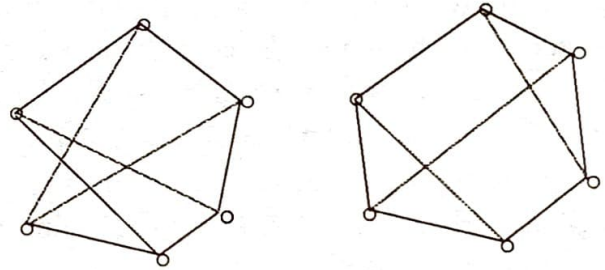
ve bu uçların her biri bir düğüme bağlanmıştır. Her düğümdeki kirişlerin sayısını toplarsak, bütün kirişleri ikişer kez saymış oluyoruz. Yani, bütün düğümlerdeki derecelerin toplamı, kiriş sayısının iki katına eşittir. Bunu şöyle yazabiliriz: Bir G grafında n düğüm ve e kenar bulunsun. Düğümler kümesi

$$V = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \text{ise} \quad 2e = \sum_{i=1}^n L(v_i) \quad \text{olur.}$$

Bunu yukarıdaki grafa uygularsak

$$L(v_1) = 10, L(v_2) = 6, L(v_3) = 5, L(v_4) = 5, \\ L(v_5) = 3, L(v_6) = 6 \text{ ve } L(v_7) = 7$$

olduğundan $2e = 10 + 6 + 5 + 5 + 3 + 6 + 7 = 42 \Rightarrow e = 21$ elde edilir. Bütün lokal dereceleri aynı olan graflara *düzgün (regüler) graflar* denir. Lokal dereceler hep r ise graftan, r -li düzgün graf olarak bahsedilir. $|V| = n$ olan bir r -li düzgün grafta $|E| = e = \frac{1}{2} nr$ olacağı açıkça görülür. Aşağıda 6 şar noktalı 3-lü düzgün graflara iki örnek verilmiştir:



$K_{3,3}$ de düzgün graftır. Tek sayıda düğümü olan bir graf r -li düzgün ise r -nin çift olması gerektiğini görüyoruz. Yani, söz gelimi, 7 noktalı bir 3-lü düzgün graf yoktur. Daha genel olarak n düğümlü bir r -li düzgün graf için r ve n nin en az biri çift olmalıdır.

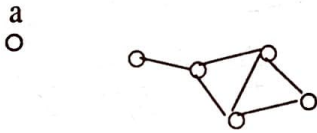
Bir grafta dereceler toplamının, kiriş sayısının iki katı olduğunu gösterdik. Yani $L(v_1) + L(v_2) + \dots + L(v_n)$ toplamı her zaman çift bir sayıdır. Tek sayıda tek sayının toplamı yine tek sayı olduğundan, yukarıdaki toplamda yer alan

tek sayıların çift sayıda olması gerektiği anlaşılır. Yani, bir grafta derecesi tek olan olan düğümlerin sayısı çift olmak zorundadır. Bunu teorem olarak yazabiliriz :

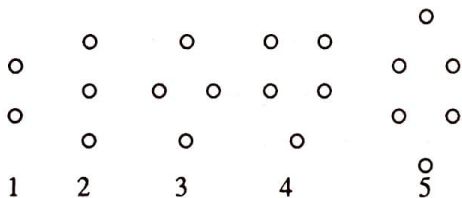
TEOREM 1. Her grafta, derecesi tek olan düğümlerin sayısı çifttir.

Şu ana kadar, dünya üzerinde yaşamış olan bütün insanları düşünelim. Her insan ömrü boyunca diğer insanlarla zaman zaman el sıkışmaktadır. Elbette hiç kimse kaç kere el sıkışmış olduğunu bilemez. Hatta çift sayıda veya tek sayıda el sıkışmış olduğunu dahi bilemez. Ancak, yukarıdaki teoremimizi kullanarak, şu ana kadar yaşamış olan insanların içinde tek sayıda el sıkışmış olanların sayısının çift olduğu sonucuna varırız.

Bir grafta yalnız başına kalmış düğümler bulunabilir. Yani, ne kendisine ne de başka düğümlere komşu olan düğümler bulunabilir. Diğer düğümlere küsmüş böyle düğümlere *izole* düğümler denir. Aşağıdaki grafta a düğümü bir izole düğümdür.



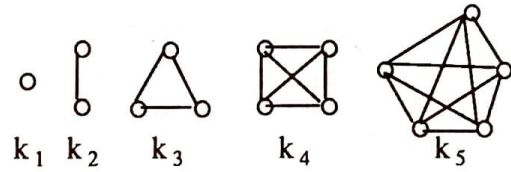
Bütün düğümleri izole olan bir grafa da *boş graf* adı verilir. Dikkat edilirse bir grafın boş olması kirişler kümesi E'nin boş olması manasını taşımaktadır. n düğümlü boş graf O_n ile gösterilir.



Bir grafın düğüm kümesinin boş olmasına izin vermiyoruz. Buna izin verseydik, $V = \emptyset$ olduğunda $E = \emptyset$ olması da kaçınılmaz olacaktı. O zaman da böyle bir grafa (boş olmasından da

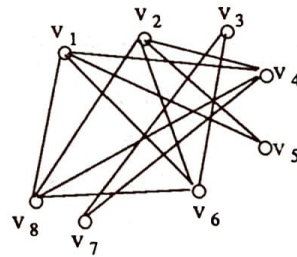
öteye), bomboş graf diyecektik.

Bir yanda hiç kirişi olmayan graflar varken, diğer yanda da bütün düğümleri birbirine bağlı graflar vardır. Herhangi iki düğümü komşu olan basit graflara *tam graf* denilmektedir. Yani bir tam graf, iki düğümü arasında en fazla bir kiriş olması ve hiç ilmek bulunmaması şartları ile mümkün olan en çok sayıda kirişle donatılmış graftır. Düğüm sayısı n olan bir tam graf K_n ile gösterilir.



K_n grafı tabii olarak (n-1)-li düzgün graftır ve $\frac{1}{2} (n-1)$ kirişe sahiptir.

Bazı graflarda düğüm kümesi boş olmayan öyle alt kümelerle parçalanabilir ki, her bir parçaya düşen düğümler kendi aralarında komşu olmazlar. Örneğin aşağıdaki G grafını ele alalım.

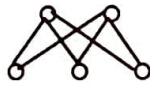


Görülüyor ki, $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, v_5, v_2\}$ ve $\{v_1, v_8\}$ kümelerinde yer alan düğümler kendi aralarında komşu değildir. Bir grafın düğüm kümesi bu şekilde parçalanabiliyorsa ve bu parçalanmalar için en az t küme gerekiyorsa grafa t-parçalı denir. Örneğin, yukarıdaki G grafı için bir başka parçalanma $\{v_1, v_3\}$ $\{v_2, v_5\}$ $\{v_4, v_8\}$ $\{v_6, v_7\}$ dir ama bu halde parçalamayı 4 küme ile yaptık. G kümesi bu şekilde parçalandığında en az 3 altküme kullanmak

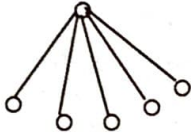
gerekir, yani G , 3-parçalıdır. İki parçalı ve mümkün olan en fazla sayıda kirişi olan bir basit grafa 2-parçalı tam graf denir, ve böyle bir graf $K_{p,q}$ ile gösterilir. Burada p ve q düğüm kümesinin parçalandığı kümelerin düğüm sayılarıdır. O halde $K_{p,q}$ öyle bir graftır ki, bir tarafta p tane; diğer tarafta da q tane düğüm bulunmaktadır. İki düğüm eğer aynı taraftaysa aralarında kiriş yoktur, eğer ayrı taraftalarsa aralarında tam bir tane kiriş vardır. Tanımlardan anlaşıldığı üzere $K_{3,3}$ bir 2 - parçalı tam graftır.



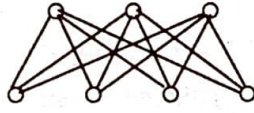
$K_{2,2}$



$K_{2,3}$



$K_{1,5}$



$K_{3,4}$

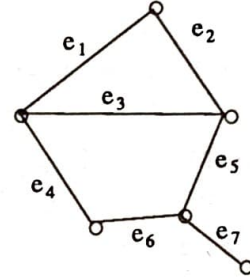
Bazı 2-parçalı tam graflar

$K_{p,q}$ grafinde düğüm sayısı $p + q$ olacaktır. Kiriş sayısının pq olduğu da hemen gösterilebilir.

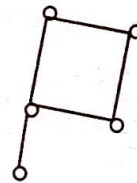
(Kiriş Dizileri)

Bir G grafinde kirişlerden meydana gelen sıralanmış bir diziyi göz önüne alalım. Örneğin aşağıdaki G grafi için $e_1 e_3 e_7 e_6 e_3$ böyle bir sıralanmış dizidir. Eğer ardışık kenarların bir ortak ucu varsa böyle bir diziyeye "gezinti" denir. Örneğin $e_1 e_3 e_5 e_6 e_4 e_3$ bir gezintidir. Bu gezintide e_3 kirişi iki kere kullanılmaktadır. Böyle bir halin olmadığı, yani bir kirişin en fazla bir kere kullanıldığı gezintilere *dolaşım* diyoruz. Yukarıdaki grafa $e_3 e_2 e_1 e_4 e_6 e_5$ bir dolaşımdır. Bu sefer her 1 kiriş bir kez kullanıldı fakat bazı düğümler iki defa ziyaret edildi. Buna da izin verilmezse; yani her düğüm en fazla bir kez ziyaret edilirse dolaşıma *yol* diyoruz. Bir gezinti veya dolaşım başladığı noktada biterse kapalı olarak nitelendirilir. Bir yolda her düğüm bir kereden fazla kullanılamıyordu. Hareketin

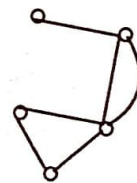
başlangıç noktasında bitirilebilmesi amacıyla bir istisna yapılırsa ortaya bir *kapalı yol* veya *devre* çıkar. Kapalı dolaşıma Euler dolaşımı da denmektedir. Bir grafa bütün kirişlerin ve düğümlerin kullanıldığı bir Euler dolaşımı varsa yani grafin kendisi bir Euler dolaşımı ise, grafa bir *Euler grafi* deriz.



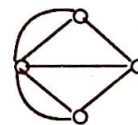
Her hangi iki düğümü arasında bir yol bulunan graflara bağlantılı graflar denir. Bağlantılı olmayan graflara bir örnek, izole düğümleri olan bir graftır. Aşağıdaki graf da bağlantısız bir graftır. Bağlantısız bir grafa, bağlantılı olan maksimal parçalara grafin bileşenleri denir. Bileşenlerin sayısını da c ile gösteriyoruz. Böylece, bağlantılı bir grafa $c = 1$ olur.



$c = 2$



Königsberg köprüleri problemine geri dönüyoruz. Buraya kadar geliştirdiğimiz terminolojiyle problemi şöyle ifade edebiliriz. Aşağıda verilen graf Euler grafi midir?

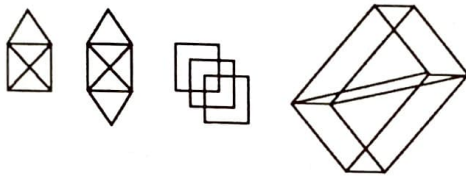


Problemi tartışırken vardığımız sonuç, bir grafin Euler grafi olabilmesi için bütün düğümlerinin çift dereceli olması gerektiği idi. Bu şart aynı zamanda yeter şarttır.

TEOREM: Bağlantılı bir grafın Euler grafi olabilmesi için gerek ve yeter şart bütün düğümlerdeki derecelerin çift olmasıdır.

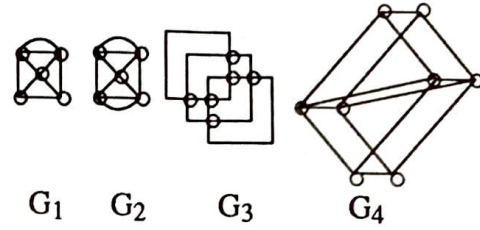
TEOREM: Bağlantılı bir grafta sadece iki düğüm tek dereceli; diğerleri çift dereceli ise, tek dereceli düğümlerin birinden başlayıp diğerinde bitecek şekilde bir dolaşım vardır.

Bu teoremler yardımı ile düzlemde verilen bir şeklin, kalem kağıttan kaldırılmadan ve çizilen çizgilerin üzerinden gitmeden çizilip, çizilmeyeceği tayin edilebilir. Aşağıda verilen şekilleri ele alalım.

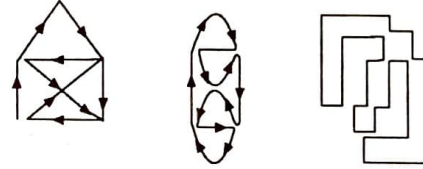


Bu şekillerden hangilerini kalemi kağıttan kaldırmadan ve çizdiğimiz çizgilerden tekrar geçmeden çizebiliriz? Önce bu şekilleri, düğüm

ve kırışlar daha belirgin olacak şekilde tekrar çiziyoruz.



G_1 -de tek dereceli iki düğüm vardır. Bunların birisinden başlayıp diğerinde duracak şekilde, bu şekil çizilebilir G_2 - ve G_3 de bütün düğümler çift dereceli olduğundan, her iki şekilde her hangi bir noktadan başlayıp, yine orda duracak şekilde çizilebilir. G_4 de ise tek dereceli dört düğüm olduğundan bu şekil çizilemez.



Devamı sayı 2'de

ÇİNLİLERİN KALAN TEOREMİ

İSMAİL Ş. GÜLOĞLU

Eski Çin bilgelerinden Yih-Ling (Ölümü 717)'den bize kadar gelebilen problemlerden birinin bugünkü matematik dilimiz ve gösterim tarzımızla ifadesi şudur:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{6} \\ x &\equiv 5 \pmod{12} \end{aligned}$$

kongrüans denklemlerinden oluşan sistemin ortak çözümleri kümesini bulunuz!

Yukarıdaki problemde x tamsayısı $x \equiv 5 \pmod{12}$ şartını sağlarsa $x \equiv 5 \pmod{6}$ ve $x \equiv 1 \pmod{2}$

2) denklemleri de sağlanmış olacağı için soru

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{12} \end{aligned}$$

denklemlerinden oluşan sistemi çözmeğe denktir.

Bu yazımızın konusu olan meşhur Çinlilerin Kalan Teoremi bu sistemin en az bir çözümü olduğunu ifade eder.

Çinlilerin Kalan Teoremi: $m_1, m_2, \dots, m_k$ ikişer ikişer aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a_1, a_2, \dots, a_k$ herhangi tamsayılar ise

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

...

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

kongrüans denklemlerinden oluşan sistemin bir ortak çözümü vardır.

Ayrıca x tamsayısı bir çözüm ise y tamsayısının da bir çözüm olması için gerek ve yeter şart $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ için

$$x \equiv y \pmod{M}$$

olmasıdır; özel olarak verilen sistemin $0 < x \leq M$ koşullarına uyan tam bir tane çözümü vardır.

Bu teoremi anlamanızı sağlayacak ve ispatını yapmanızı kolaylaştıracak bir kaç ipucu verelim:

(i) $m_1, m_2, \dots, m_k$ sayılarının en küçük ortak katı M olduğu için teoremin, çözümün tekliği hakkındaki ikinci kısmının doğruluğu kolayca görülebilir.

(ii) $a_1, a_1+m_1, a_1+2m_1, \dots, a_1 + (m_2 - 1)m_1$ sayıları m_2 modülüne göre farklı kongrüans sınıflarındadırlar (Niçin?). Şu halde $a_1 + i m_1 \equiv a_2 \pmod{m_2}$ olacak şekilde bir i için $0, 1, \dots, m_2$ vardır. $x_1 = a_1 + i m_1$ dersek, $x_1, x_1 + m_1 m_2, x_1 + 2m_1 m_2, \dots, x_1 + (m_3-1)m_1 m_2$ sayıları m_3 modülüne göre farklı kongrüans sınıflarındadırlar (Niçin?) Şu halde $x_2 = x_1 + j m_1 m_2 \equiv a_3 \pmod{m_3}$ olacak şekilde j tamsayısı vardır ve

$$x_2 \equiv a_3 \pmod{m_3}$$

$$x_2 \equiv x_1 \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$x_2 \equiv x_1 \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

denklemleri sağlanır. Artık ispatı tamamlamayı okuyucuya bırakabiliriz.

Diğer bir ispat fikri şu gözleme dayanır: Herhangi bir $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ için çözümün varlığı problemi $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ özel durumlarında çözümün varlığına indirgenebilir, yani her $i = 1, \dots, k$ için

$x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ ve $x_i \equiv 0 \pmod{m_j}, j \neq i$ olacak şekilde bir x_i tamsayısı bulunabilirse,

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k$$

sayısı verilen sistemin bir çözümü olur.

Diğer taraftan m_i ve $M_i = \frac{M}{m_i} = m_1 m_2 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_k$ tamsayıları aralarında asal oldukları için $u m_i + v M_i = 1$ olacak şekilde u ve v tamsayıları vardır. $x_i = v \cdot M_i$ dersek $x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ ve $x_i \equiv 0 \pmod{m_j}, j \neq i$ elde edilir.

Çinlilerin Kalan Teoremi bazı özelliklere sahip uygun tamsayıların ve tamsayı dizilerinin varlığını göstermek için akıllıca kullanılabilir. Zaman zaman olimpiyat soruları arasında da böyle uygulamalara rastlanıyor.

Örnek 1: Her biri uygun bir tam sayının karesine bölünebilen 1000 tane ardışık tamsayı var mıdır?

Bir tamsayının karesine bölünebilme, bir asal sayının karesine bölünebilmeye denk olduğu için problem $p_i^2 | (N+i), i = 1, \dots, 1000$ olacak şekilde p_i asal sayıları ve N tamsayısının bulunup bulunamayacağını sormaktadır.

Sonsuz tane asal sayı olduğu için 1000 tane farklı asal sayı bulabiliriz. Bunları

$p_1, p_2, \dots, p_{1000}$ ile gösterelim ve $m_i = p_i^2, i = 1, \dots, 1000$ diyelim. Aşikâr olarak m_i sayıları ikişer ikişer aralarında asaldırlar ve dolayısı ile Çinlilerin Kalan Teoremine göre

$$x \equiv -1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv -2 \pmod{m_2}$$

...

$$x \equiv -1000 \pmod{m_{1000}}$$

denklemleri sağlanacak şekilde bir $x = N$ tamsayısı vardır. $N+1, N+2, \dots, N+1000$ ardışık tamsayılarının her biri bir tam sayının karesine bölünür.

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatları'nda (1989) şu soru sorulmuştur:

Örnek 2: Her pozitif n tam sayısı için hiç biri uygun bir asal sayının kuvveti olmayan n tane ardışık tamsayının bulunduğunu kanıtlayın.

Ve önerilen çözüm şu idi: $N = [(n+1)!]^2 + 1$ diyelim. Elbette her $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $1+j$ sayısı $N+j$ nin bir bölenidir. Uygun bir j için $N+j$ bir p asal sayısının kuvveti olsa $1+j = p^r$ ve $N+j = p^s$ olacak şekilde r ve s pozitif tamsayıları bulunur. $r < s$ dir. $N+j = (1+j) + ((n+1)!)^2$ ve $p^{r+1} | [(n+1)!)^2$ olduğunda $p^{r+1} | (1+j)$ elde ederiz ki bu mümkün değildir. Şu halde $N+1, N+2, \dots, N+n$ ardışık tamsayıları istenen koşulu sağlayan bir dizi oluştururlar.

Çinlilerin Kalan Teoremi'nden istifade ile şöyle bir çözüm de verebiliriz:

Bir tamsayının bir asal sayının kuvveti olmaması demek en az iki farklı asal böleni bulunması demektir. $2n$ tane farklı asal sayı alalım. Bunları $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2n}$ ile gösterelim ve

$$m_i = p_{2i-1} p_{2i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

diyelim. m_i sayıları ikişer ikişer aralarında asaldırlar. Çinlilerin Kalan Teoremi'nden

$$N \equiv -1 \pmod{m_1}$$

$$N \equiv -2 \pmod{m_2}$$

$$\dots$$

$$N \equiv -n \pmod{m_n}$$

olacak şekilde bir N (pozitif) tam sayısının bulunduğunu biliyoruz. $N+1, N+2, \dots, N+n$ istenen özelliklere sahip bir dizi olur.

Bu yazıyı, konuyu ne kadar kavradığınızı anlamanıza ve uygulamadaki becerinizi tanımanız ve geliştirmenize vesile olacak alıştırma ve problemlerle tamamlayalım.

Alıştırma 1.

$$2x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$5x \equiv 2 \pmod{11}$$

sistemini sağlayan en küçük pozitif tamsayıyı bulunuz. Bu ömekten hareketle Çinlilerin Kalan Teoreminin daha genel olarak nasıl ifade ve ispat edilebileceğini düşününüz.

Alıştırma 2. m ve n pozitif tamsayılar, d ve e sırasıyla bunların en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı olsun. a ve b tamsayılar olmak üzere

$$x \equiv a \pmod{m} \text{ ve } x \equiv b \pmod{n}$$

denklemlerinin bir ortak çözümünün bulunması için gerek ve yeter şart

$$a \equiv b \pmod{d}$$

olmasıdır. Eğer bir çözüm varsa, $0 < x \leq e$ koşulunu sağlayan tam bir tane çözüm vardır.

İspatlayın.

Problem 1. Her n pozitif tam sayısı için ardışık öyle n tane tamsayının bulunabileceğini gösterin ki bunların her biri için onu bölüp diğerlerini bölmeyen bir tamsayı bulunsun.

Problem 2. n ve d pozitif tamsayılar olsun. Ardışık terimleri arasındaki fark $2d$ ve uzunluğu n olan ve tek sayılardan oluşan öyle bir $a_1, a_2, \dots, a_n$ aritmetik dizisi var mıdır ki, her $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için bu dizinin j -inci terimi a_j 'yi bölen, diğer terimleri bölmeyen j tane asal sayı bulunsun.

İşte size zor bir problem:

Problem 3. Uygun n pozitif tamsayısı için 2^{n+1} sayısının asal olduğunu biliyoruz ($n = 1, 2, 4$). Acaba k pozitif bir tamsayı olmak üzere $(k \cdot 2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin terimleri arasında muhakkak en az bir asal sayı bulunur mu? Başka bir deyişle $(k \cdot 2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin hiç bir terimi asal sayı olmayacak şekilde bir k tamsayısı var mıdır?

İyi çalışmalar!

VIETA TEOREMİNİN PROBLEM ÇÖZÜMLERİNE UYGULANMASI

CAFER VELİEV

Vieta teoremi bir çokterimlinin (polinomun) kökleri ile katsayıları arasındaki bağıntıları ifade eder. Önce çokterimlilerin bazı özellikleri üzerinde kısaca duralım.

Gerçel ya da (karmaşık) x değişkeninin

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklinde olan bir fonksiyonuna, x değişkeninin çokterimlisi (daha doğrusu çokterimli fonksiyon) denir. Burada

$n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ dir. $a_0, a_1, \dots, a_n$ $P(x)$ çokterimlisinin katsayıları olarak isimlendirilir. $a_n \neq 0$ olduğunda başkatsayı adını alır ve n sayısına $P(x)$ çokterimlisinin derecesi denir.

$P(x) = 0$ denkleminin çözümüne $P(x)$ çokterimlisinin kökü denir.

Teorem: $P(x)$ ve $Q(x)$ herhangi iki çokterimli ve $Q(x) \neq 0$ olsun. Bu halde öyle bir tek $S(x)$ ve $R(x)$ çokterimlileri vardır ki

$P(x) = S(x) Q(x) + R(x)$ eşitliği doğrudur ve burada $R(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden küçüktür. Eğer burada $P(x)$ ve $Q(x)$

çokterimlilerin katsayıları gerçel ise $S(x)$ ve $R(x)$ in katsayıları da gerçeldir. Eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ in katsayıları rasyonel sayılar ise $S(x)$ ve $R(x)$ in katsayıları da rasyonel sayılardır. Eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ in katsayıları tamsayılar ise ve buna ek olarak $Q(x)$ in baş katsayısı 1 ya da -1 ise, $S(x)$ ve $R(x)$ in katsayıları da tam sayılardır.

$Q(x) = x - a$ olsun. Bu halde

$$P(x) = (x - a) S(x) + r, \quad r = P(a)$$

dir, yani $P(x)$ çokterimlisi $x - a$ ikiterimlisine bölündüğünde kalan $P(a)$ dır. Buradan şöyle bir sonuç ortaya çıkar : $P(x)$ çokterimlisinin $x - a$ ikiterimlisine bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul a sayısının $P(x)$ in kökü olmasıdır.

Eğer $P(x)$ çokterimlisi $(x - a)^k$ çokterimlisine bölünürse, ancak $(x - k)^{k+1}$ çokterimlisine bölünemezse a sayısına $P(x)$ çokterimlisinin k katlı kökü denir. Çokterimlinin köklerinin tümünü yazarken, bir kök kaç katlı ise o kadar tekrarlayarak ifade edilir.

Çokterimliler cebirinin esas teoremi aşağıdaki gibidir:

$n \geq 1$ dereceli her çokterimlinin en az bir karmaşık kökü vardır.

Bu teoremden de şöyle bir sonuç çıkar.

$n \geq 1$ dereceli her çokterimlinin n karmaşık kökü vardır. $P(x)$, n inci dereceden bir çokterimli, $x_1, x_2, \dots, x_n$ onun kökleri ise $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ kuralı geçerlidir.

Vieta teoremi ve onun tersi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Diyelim ki $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ çokterimlisinin kökleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayılandır. O halde

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

...

$$x_1 x_2, \dots, x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

yazılabilir ve tersine $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayıları için yukarıdaki eşitlikler doğru ise, bu halde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayıları $P(x)$ çokterimlisinin kökleridir.

İkinci derece üçterimlisi için Vieta

teoremi ve tersi aşağıdaki gibi ifade olunur.

Eğer x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + px + q$ üçterimlisinin kökleri ise $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ dur ve tersine x_1 ve x_2 sayıları için $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ olursa, x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + px + q$ üçterimlisinin kökleridir. Bu teorem okullarda matematik derslerinde ispat edilir.

n = 3 hali: Eğer x_1, x_2, x_3 sayıları $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ çokterimlisinin kökleri ise,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q$$

$$x_1 x_2 x_3 = -r$$

eşitlikleri ve bu ifadenin tersi doğrudur.

İspat: x_1, x_2, x_3 $P(x)$ in kökleri ise

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

olur. Bu yazılıştaki parantezleri çarparak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$P(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3.$$

$P(x)$ in bu ifadesini $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ifadesi ile karşılaştırsak istenilen eşitlikler bulunur.

Tersine, x_1, x_2, x_3 sayıları için Vieta teoreminin ifadesinde verilen eşitlikler doğru ise

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + px^2 + qx + r \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ &\quad + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

yazabiliriz ve $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ dır, yani x_1, x_2, x_3 sayıları $P(x)$ in kökleridir.

Şimdi Vieta teoreminin, bazı alıştırmaların çözümüne uygulanmasına bakalım.

Bu alıştırmaların bir kısmı olimpiyat problemleridir.

Problem 1. Köklerinden biri $(3 + \sqrt{5})/2$ sayısı olan tam katsayılı ikinci derece denklemini kurunuz.

Çözüm : İkinci derece denkleminin ikinci kökü olan x_2 sayısı öyle olmalıdır ki, hem $x_2 + (3 + \sqrt{5})/2$ hem de $x_2 (3 + \sqrt{5})/2$ sayıları tamsayılar olsun. Böyle bir sayı $(3 + \sqrt{5})/2$ sayısının "eşleniği" olan $(3 - \sqrt{5})/2$ sayısıdır. Kökleri $x_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ ve $x_2 = (3 - \sqrt{5})/2$ olan ikinci derece denklemi şöyle olur:

$$p = -(x_1 + x_2) = -3, \quad q = x_1 x_2 = 1;$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Problem 2. $u = (3 + \sqrt{5})/2$ için $u^5 - 2u^4 + 3u^3 - 10u^2 - 7u + 4$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm : $(3 + \sqrt{5})/2$ nin beşinci kuvvetini hesaplamak zor olduğu için bu sayının sağladığı $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminde yani $u^2 = 3u - 1$ den yararlanacağız. Bu yolla u^3, u^4 ve u^5 i u ya göre doğrusal olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} u^3 &= u^2 \cdot u = (3u - 1)u = 3u^2 - u \\ &= u(3u - 1) - u = 8u - 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^4 &= u^3 \cdot u = (8u - 3)u = 8u^2 - 3u \\ &= 8(3u - 1) - 3u = 21u - 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^5 &= u^4 \cdot u = (21u - 8)u = 21u^2 - 8u \\ &= 21(3u - 1) - 8u = 55u - 21. \end{aligned}$$

$$u^5 - 2u^4 + 3u^2 - 10u^2 - 7u + 4 = 55u - 21$$

$$- 2(21u - 8) + 3(8u - 3) - 10(3u - 1) - 7u + 4 = 0$$

Problem 3. $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^9 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^9$ sayısının

tamsayı olduğunu ve 3 e bölündüğünü ispatlayınız.

Çözüm: $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ olsun.

Bilindiği gibi α ve β sayıları $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin kökleridir. Yani $\alpha^2 = 3\alpha - 1$, $\beta^2 = 3\beta - 1$ dir. Şimdi $a_n = \alpha^n + \beta^n$, $n=0,1,2,\dots$ dizisine bakalım.

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (3\alpha - 1) + (3\beta - 1) = 3(\alpha + \beta) - a_0$$

$$3a_{n+1} - a_n = 3(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)$$

$$= \alpha^n(3\alpha - 1) + \beta^n(3\beta - 1)$$

$$= \alpha^n \cdot \alpha^2 + \beta^n \cdot \beta^2$$

$$= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}$$

yani

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$$

dir. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ tamsayılar olduğundan, $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ indirgeme bağıntısına göre, bütün a_n ler tamsayılardır. Diğer taraftan $a_1 = 3$ dür ve 3 e bölünebilir. Buna göre $a_3 = 3a_2 - a_1$ de 3 e bölünebilir ve tüme varım yöntemini uygulayarak, a_{2n-1} 3 e bölündüğünden $a_{2n+1} = 3a_{2n} - a_{2n-1}$ de 3 e bölünür. Yani n tek sayı ise a_n 3 e bölünebilir. O halde a_9 da 3 e bölünebilir.

Problem 4. $a_n = [(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n] / 2\sqrt{3}$ veriliyor. a_n , $n \geq 0$ değerlerinin tamsayı olduğunu ispatlayınız. a_n sayısının 3 e bölündüğü bütün n leri bulunuz.

Çözüm : $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2 - \sqrt{3}$ olsun;
 $a_n = (u^n - v^n) / 2\sqrt{3}$. u, v sayıları $x^2 - 4x + 1 = 0$

denkleminin kökleridir, yani $u^2 = 4u - 1$, $v^2 = 4v - 1$ dir. Bu denklemlerden yararlanarak, üçüncü örnekte olduğu gibi, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ bağıntısı ispatlanabilir. Burada ilk birkaç terimini elde edelim.

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 15, a_4 = 56,$$

$$a_5 = 209, a_6 = 780, \dots$$

a_n sayılarının 3 e bölünmesiyle ortaya çıkan kalanlar şunlardır :

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 0, r_4 = 2, r_5 = 2,$$

$$r_6 = 0, \dots$$

Yani

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \pmod{3} \quad \text{için kalan}$$

$$r_{n+2} = \begin{cases} r_{n+1} - r_n & \text{eğer } r_{n+1} \geq 0 \text{ ise} \\ r_{n+1} - r_n + 3 & \text{eğer } r_{n+1} - r_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Bu kuraldan

$$r_{6k} = r_0 = 0, r_{6k+1} = r_1 = 1, r_{6k+2} = r_2 = 1$$

$$r_{6k+3} = r_3 = 0, r_{6k+4} = r_4 = 2, r_{6k+5} = r_5 = 2$$

ve $r_{6k} = r_{3k} = r_0 = r_3 = 0$ elde edilir. Böylece 3 e bölünen n ler için a_n de 3 e bölünür.

Problem 5. $x^3 - 6x^2 + ax + a$ çokterimlisinin x_1, x_2, x_3 kökü

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

denklemini sağlıyorsa, a sayısını bulunuz.

Çözümü : $x = y + 3$ konumundan sonra çokterimli aşağıdaki şekli alır :

$$P_1(y) = P(y + 3) = (y + 3)^3 - 6(y + 3)^2 + a(y + 3) + a$$

$$= y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + (4a - 27).$$

Vieta teoremine göre, $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 3$, $y_3 = x_3 - 3$ ve $P_1(y_1) = P_1(y_2) = P_1(y_3) = 0$ olmak üzere

$$y_1 + y_2 + y_3 = -3, y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a - 9,$$

$$y_1y_2y_3 = 27 - 4a$$

dır.

$$y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + (4a - 27) = 0$$

denklemden

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = -3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + (9 - a)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(27 - 4a)$$

yazabiliriz.

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)$$

ve

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

olduğunu kullanarak

$$-3(27 - 2a) + (9 - a)(-3) + 3(27 - 4a) = 0$$

ve $a = -9$ buluruz.

Problem 6. a, b, c tamsayılar ve $a > 0$ olduğuna göre $ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin $(0,1)$ aralığında iki farklı kökü varsa $a \geq 5$ olduğunu ispatlayınız. $a = 5$ olduğunda yukarıdaki koşula uyan bir çift b, c sayısı bulunuz.

Çözüm : Kabule göre katsayıları tamsayı olan $P(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin a katsayısı pozitifdir, ve kökleri farklı olup $(0,1)$ aralığındadır :

$$0 < x_1 < x_2 < 1, \quad b^2 - 4ac > 0.$$

Vieta teoremine göre

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 \in (0,1), \quad -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0$$

yani

$0 < c < a$, $b < 0$ dir. Diğer taraftan $a > 0$ ve $x_1, x_2 \in (0,1)$ olduğundan $P(1) = a + b + c > 0$ ve dolayısıyla

$$a + c > -b > 0, \quad (a + c)^2 > b^2, \quad (a - c)^2 > b^2 - 4ac > 0$$

bulunur. a, b, c nin tamsayılar olduğunu hatırlarsak $b^2 - 4ac \geq 1$ ve $(a - c)^2 \geq 2$ buradan $a - c \geq 2$ elde edilir. $a \leq 4$ olduğunu

varsayarsak a, c çiftinin alabileceği değerler.

$$1) a = 4, c = 2; \quad 2) a = 4, c = 1, \quad 3) a = 3, c = 1$$

olabilir. $(a - c)^2 > b^2 - 4ac > 0$; eşitsizliğinden şunlar bulunur:

$$1) 4 > b^2 - 32 > 0, \quad 36 > b^2 > 32;$$

$$2) 9 > b^2 - 16 > 0, \quad 25 > b^2 > 16;$$

$$3) 4 > b^2 - 12 > 0, \quad 16 > b^2 > 12.$$

Yukarıdaki üç eşitsizliğin, tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

Demek ki $a \geq 5$ olmalıdır. $a = 5$ olduğunda

$$1) c = 3, \quad 4 > b^2 - 60 > 0, \quad 64 > b^2 > 60;$$

$$2) c = 2, \quad 9 > b^2 - 40 > 0, \quad 49 > b^2 > 40;$$

$$3) c = 1, \quad 16 > b^2 - 20 > 0, \quad 36 > b^2 > 20.$$

Üçüncü eşitsizlikten $b = -5$ çözümü bulunur.

$5x^2 - 5x + 1 = 0$ üçterimlisinin kökleri olan $(5 - \sqrt{5})/10$ ve $(5 + \sqrt{5})/10$ sayıları $(0,1)$ aralığına aittir.

Problem 7. x_1, x_2, x_3 sayıları

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{a}$$

denklemlerini sağlasın. x_1, x_2, x_3 sayılarından en az birinin a ya eşit olduğunu ispat ediniz.

Çözümü : İkinci denklemden

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 / a$$

buluruz. Şimdi kökleri x_1, x_2, x_3 olan üçterimliyi kuralım :

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3) = -a,$$

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3/a = -\frac{r}{a}$$

$$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - ax^2 - \frac{r}{a}x + r = (x - a) \left(x^2 - \frac{r}{a} \right)$$

Buradan $P(a) = 0$, yani çokteriminin köklerinden birinin a olduğu elde edilir.

2. Çözüm yolu : $x_3 \neq a$ olduğunu varsayalım. $x_1 + x_2 + x_3 = a$ olduğundan $x_1 + x_2 \neq 0$ dır. $x_1 + x_2 + x_3 = a$ denkleminde x_3 sayısını x_1 ve x_2 cinsinden ifade edip

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{a}$$

denklemleri ile birlikte gözönüne alalım.

$$a[x_1x_2 + x_3(x_1+x_2)] = x_1x_2x_3 ;$$

$$a[x_1x_2 - (a - (x_1 + x_2))(x_1 + x_2)] = x_1x_2(a - (x_1+x_2))$$

$$a^2 - a(x_1+x_2) + x_1x_2 = 0, (x_1 - a)(x_2 - a) = 0$$

Yani x_1, x_2 sayılarından en az biri a ya eşittir.

Problem 8. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ifadesini çarpanlara ayırınız.

Çözümü : Kökleri x, y, z olan

$P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ çokterimlisine bakalım.

$t = x, t = y, t = z$ için $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ olduğuna göre

$$x^3 + y^3 + z^3 + p(x^2 + y^2 + z^2) + q(x + y + z) + 3r = 0,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3r = -p(x^2 + y^2 + z^2) - q(x + y + z)$$

dir. p, q, r yi x, y, z cinsinden ifade edersek

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - (xy + xz + yz)(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \end{aligned}$$

bulunur.

Not: Dikkat ediniz ki

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz &= [(x - y)^2 + (y - z)^2 \\ &\quad + (z - x)^2]/2 \geq 0 \end{aligned}$$

dir. Eğer $x, y, z \geq 0$ olursa

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \text{ olur. } x = \sqrt[3]{a}, z = \sqrt[3]{b},$$

$z = \sqrt[3]{c}$ konumunu yaparsak, bilinen

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Problem 9. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ve

$x + y + z = 1$ olduğunda

$$0 \leq xy + xz + yz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

eşitsizliklerini ispat ediniz.

Çözümü : Soldaki eşitsizlik kolaylıkla ispat olunabilir :

$$\begin{aligned} xy + xz + yz - 2xyz &= xy(1 - z) \\ &\quad + xz(1 - y) + yz \geq 0 \end{aligned}$$

Kökleri x, y, z olan çokterimli

$$P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r = (t - x)(t - y)(t - z)$$

dir. Burada $q = xy + xz + yz, r = -xyz$ ve dolayısıyla

$$xy + yz + zx - 2xyz = q + 2r$$

dir. İkinci eşitsizliği ispat etmek için $q + 2r \leq \frac{7}{27}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$1) x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}, z \leq \frac{1}{2} \text{ olursa}$$

$$3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c \text{ eşitsizliğini de kullanarak}$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - (x + y + z)\right)\right]^3 = \frac{1}{6^3}$$

$$\frac{q + 2r}{2} \leq \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8} = \frac{7}{2 \cdot 27}; q + 2r \leq \frac{7}{27}$$

yazabiliriz.

2) x, y, z sayılarından biri $\frac{1}{2}$ den büyük olsun. $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ ve } x + y + z = 1 \text{ olduğundan } x, y, z \text{ sayılarından ikisi aynı anda } \frac{1}{2} \text{ den büyük olamaz). Bu halde}$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leq 0$$

ve

$$\frac{q + 2r}{2} < \frac{1}{8}, q + 2r \leq \frac{1}{4} = \frac{7}{28} < \frac{7}{27}$$

bulunur.

Problem 10.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\x^5 + y^5 + z^5 &= 1\end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözümü : Kökleri, x, y, z olan çokterimliyi düşünelim. $p = -(x + y + z) = -1$,

$$q = xy + yz + zx = [(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)]/2 = -1$$

$$P(t) = t^3 - t^2 - t + r; r = -xyz.$$

Henüz sabit terim belli değil. x, y, z sayıları $P(t) = 0$ denkleminin çözümleri olduğundan, bu sayılar için $t^3 = t^2 + t - r$ denklemini doğrudur. O halde

$$\begin{aligned}t^5 &= t^2 t^3 = t^2(t^2 + t - r) = t^3(t + 1) - rt^2 \\&= (t^2 + t - r)(t + 1) - rt^2 \\&= t^3 + t^2 + (t - r)(t + 1) - rt^2 \\&= t^2 + t - r + t^2 + (1 - r)t - r - rt^2 \\&= (3 - r)t^2 + (2 - r)t - 2r\end{aligned}$$

sonucunu $t = x, t = y, t = z$ için kullanarak

$$x^5 + y^5 + z^5 = (3 - r)(x^2 + y^2 + z^2) + (2 - r)(x + y + z) - 6r$$

ya da

$$1 = (3 - r)3 + (2 - r)1 - 6r; \quad r = 1.$$

buluruz. Böylece

$$P(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t - 1)^2(t + 1)$$

olur. $P(1) = P(-1) = 0$ dır ve 1, $P(t)$ nin iki katlı bir köküdür. Demek ki sistemin çözüm kümesi $\{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$ olacaktır.

Problem 11. $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözümü : $x - y = u, y - z = v, z - x = w$ konumunu yaparsak $u + v + w = 0$ olur.

Kökleri u, v, w olan çokterimliyi kuralım:

$$P(t) = t^3 + qt + r, \quad q = uv + vw + wu, \quad r = -uvw.$$

$$t = u, t = v, t = w \text{ için } t^3 = -(qt + r) \text{ olduğundan}$$

$$t^5 = t^2 t^3 = -(qt + r)t^2 = -qt^3 - rt^2 = q(qt + r) - rt^2$$

ve

$$t^5 = -rt^2 + q^2t + qr$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}u^5 + v^5 + w^5 &= -r(u^2 + v^2 + w^2) + q^2(u + v + w) + 3qr \\&= -r(u^2 + v^2 + w^2) + 3qr \\&= uvw(u^2 + v^2 + w^2) - 3(uv + vw + wu)uvw\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= uvw \left[u^2 + v^2 + w^2 - 3 \frac{(u + v + w)^2 - (u^2 + v^2 + w^2)}{2} \right] \\&= \frac{5}{2} uvw (u^2 + v^2 + w^2)\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\begin{aligned}&(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 \\&= \frac{5}{2} (x - y)(y - z)(z - x) [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \\&= 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)\end{aligned}$$

bulunur.

Problem 12. x, y, z pozitif sayıları $xyz > 1$,

$$x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ eşitsizliklerini}$$

sağlıyor. Bu sayılardan birinin 1 den küçük olduğunu ispat ediniz.

Çözümü : Kökleri x, y, z olan çokterimli

$$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + pt^2 + qt + r$$

olsun. Varsayımımıza göre

$$x, y, z > 0, \quad -r = xyz > 1,$$

$$-p = x + y + z < \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{q}{-r}, \quad q > pr$$

dir. Demek ki

$$P(1) = 1 + p + q + r > 1 + p + pr + r = (1 + p)(1 + r)$$

olur. $-r > 1$ olduğundan $1 + r < 0$ dır. Diğer

tarafından $-p = x + y + z \geq 3\sqrt{xyz} > 3 > 1$ den

$1 + p < 0$ ve $P(1) = (1 + p)(1 + r) > 0$ yani

$(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 0$ dır. Bu eşitsizlikten $x,$

y, z nin pozitif sayılar olmasını ve $xyz > 1$

koşulunu sağlamasını kullanarak bu sayılardan

birinin 1 den küçük, ikisinin ise 1 den büyük

olduğunu görürüz.

Dilimiz türkçesine Okay ÇELEBİ tarafından çevrilmiştir.

ALİŞTIRMA SORULARI

A51. U ve V noktalarında kesişen α ve β çemberleri verilmiş olsun. U noktasından geçen değişken bir k doğrusu α ve β çemberlerini sırasıyla E ve F noktalarında kessin. [EF] doğru parçasının orta noktasının geometrik yerini bulunuz...

A52. a, b, c > 0 olmak üzere

$$ax + by + cxy = a + b + c$$

$$by + cz + ayz = a + b + c$$

$$cz + ax + bzx = a + b + c$$

denklem sisteminin $x, y, z \geq 0$ olacak şekilde bir tek çözümü olduğunu gösteriniz, bu çözümü bulunuz.

A53. Bir ABCD kirisler dörtgeninde [AD] ve [BC] kirislerinin ortadikmeleri AC ve BD köşegenlerini sırasıyla E ve F noktalarında keserse EF nin AB ye paralel olduğunu gösteriniz. (H. Demir)

A54. 1, x, x^2 sayıları bir üçgenin kenar uzunluklarını temsil edebilecek şekildeki bütün x gerçel sayılarını bulunuz. (H. Demir)

A55. Her biri diğer ikisine dik üç birim yarı çaplı çemberin üçünün de içinde kalan noktaların teşkil ettiği bölgenin alanını bulunuz. (H. Demir)

ABC tik

$$SHE = (HE)^2$$

tek çözümü vardır!

Bu sayıda yer alan problemlere ait çözümlerin 1 Mayıs 1993 tarihinden önce elimizde olacak şekilde gönderilmesi gerekmektedir

YARIŞMA SORULARI

Y51. Odakları F, F' olan bir elips üzerinde FP ve F'P' paralel olacak şekilde alınan değişken P ve P' noktalarından elipse çizilen teğetlerin kesişme noktalarının geometrik yerini bulunuz. (H. Demir)

Y52. Bir ABCD teğetler dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegen doğru parçalarının orta noktalarının ve içteğit çemberin merkezinin doğrudan olduklarını gösteriniz. (H. Demir)

Y53. $2^{33} - 2^{19} - 2^{17} - 1$ in 1000 ile 5000 arasında bir çarpanı olduğunu gösterip, bu çarpanı bulunuz.

Y54. Yarı çapları r_1, r_2, r_3 olan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ çemberleri ,

$$\gamma_2 \cap \gamma_3 = \{O, A_1\}$$

$$\gamma_3 \cap \gamma_1 = \{O, A_2\}$$

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{O, A_3\}$$

olacak ve O noktası $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde kalacak şekilde kesiştikleri takdirde

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}$$

olduğunu ve eşliliğin ancak $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar ve

$$r_1 = r_2 = r_3$$

olması halinde mümkün olduğunu gösteriniz. (C. Tezer)

Y55. Bir ABC üçgeninde ağırlık merkezi G olsun. GA, GB, GC doğruları üçgenin çevrel

çemberini sırasıyla A ve X, B ve Y, C ve Z noktalarında keserse

$$\frac{|GA|}{|GX|} + \frac{|GB|}{|GY|} + \frac{|GC|}{|GZ|} = 3$$

olduğunu gösteriniz.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kâğıdın sağ üst köşesine adınız-soyadınızı adresinizi, ve öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

DEĞERLENDİREN: CEM TEZER

A41. Bir ABC dik üçgeninde [BC] hipotenüsü, D_1, D_2, D_3, D_4 noktalarıyla eş beş parçaya bölünmüştür. $[AD_i] = d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) olmak üzere,

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$$

toplamını $a = |BC|$ türünden hesaplayınız.
(Hazırlayan : Bahri Ünal)

Çözüm : AD_2D_3 ve AD_1D_4 üçgenlerinde kenarortay teoreminden sırasıyla

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{5} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 = d_2^2 + d_3^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3a}{5} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 = d_1^2 + d_4^2$$

bu denklemleri toplayarak da

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = \frac{6}{5} a^2$$

bulunur.

A42. Kenar uzunlukları $|AB| = b\sqrt{2}$, $b = |BC|$ olan dik bir dörtgende [CD] üzerine dıştan bir yay çember çizilmiştir. Yay üzerindeki bir P olmak üzere PA, PB doğruları CD yi ve F de keserse

$$|CE|^2 + |DF|^2 = |CD|^2$$

olduğunu gösteriniz.

(P. Fermat)

Çözüm: PA, PB doğruları CD yi sırasıyla E, F noktalarında kesmekte. Yarımçemberin merkezini O, P den CD ye indirilen dikmenin ayağını Q ile gösterelim. Gösterimde bir kolaylık olmak üzere $x = |QF|$, $y = |FC|$ yazalım. $\angle COP$ açısının da

ölçüsünü α ile gösterelim. Diğer bir kolaylık olarak $b = \sqrt{2}$ yani $|AB| = |CD| = 2$ alalım. Böylece

$$\frac{x}{|PQ|} = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{x+y}{\sin \alpha + \sqrt{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha + \sqrt{2}}$$

buradan da

$$y = \frac{(1 - \cos \alpha) \sqrt{2}}{\sin \alpha + \sqrt{2}}$$

bulunur. Buradan da

$$|DF| = 2 - y = 2 - \frac{(1 - \cos \alpha) \sqrt{2}}{\sin \alpha + \sqrt{2}}$$

benzer şekilde

$$|CE| = 2 - \frac{(1 - \cos \alpha) \sqrt{2}}{\sin \alpha + \sqrt{2}}$$

bulunur. Bu suretle

$$|CE|^2 + |DF|^2 = 8 - 8 \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha + \sqrt{2}} + \frac{4(1 - \cos \alpha) \sqrt{2}}{\sin \alpha + \sqrt{2}}$$

buradan da

$$1 + \cos^2 \alpha = 2 - \sin^2 \alpha = (\sqrt{2} + \sin \alpha)(\sqrt{2} - \sin \alpha)$$

gözönünde tutularak

$$|CE|^2 + |DF|^2 = 4 = |CD|^2$$

bulunur.

$$\mathbf{A43.} \sqrt[6]{4 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 5 \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(Ramanujan)

Çözüm (!): Okuyucu bu satırlarda bir çözümden ziyade, bir yanlışlıklar komedyası bulacak. Bir kere hemen işaret edelim ki büyük

matematikçi S. Ramanujan'a (1887 -1920) ait olup, aslında

$$\sqrt[6]{4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

şeklinde olan denklemi biz

$$\sqrt[6]{4\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

olarak yayınlamışız. Sadık ve Çilekeş okuyucularımız yanlış veya eksik basılmış problemlerle uğraşmaya alışık olduğundan bu beyan o kadar şaşırtıcı olmayabilir. Sonra, bir çözüm bulup yayınlamak zamanı gelince (zaten gecikmiş sayıları yetiştirme telaşı içindeydik !) perişan problem dosyamızda bu denkleme ait esas metinden başka bir kayıt, bir çözüm v. b. olmadığını gördüm. Kendim bir ispat vermeye çalışırken önce basım hatasını buldum ; arkadan da "doğru" sunun da yanlış olabileceğini düşünmeye başladım.

S. Ramanujan bu denklemi bir problem olarak Journal of Indian Mathematical Society'de (cilt 11, sayfa 199) yayınlamış. Ortadoğu Teknik Üniversitesi kütüphanesinde bu dergini 26. cildinden öncekileri bulunmadığı için, bu bilgiyi ve denklemi ben Ramanujan'ın yayınlamış bütün eserlerinin toplandığı "Collected Works of Srinivasa Ramanujan" (G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar ve B. M. Wilson'ın editörlüğü altında, Chelsea Publishing Company, New York 1962, ilk basım 1927) adlı kitapta buldum. Ramanujan'ın problem şeklinde yayınladığı 30-40 kadar denklem büyük ilgi görmüş, tanınmış, tanınmamış birçok matematikçi çözüm göndermiş. Hayretle gördüm ki çözüldüğüne dair bir kayıt olmayan çok az sayıda problem arasında bizimki de var !

Denklemin doğru olmadığı şöyle görülebilir:

Denklemin sağ ve sol taraflarını sırasıyla X_{sa} ve X_{so} şeklinde gösterelim. Kolaylık olarak

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$ yerine sırasıyla a ve b yazalım. Artı miktarlar üzerinde çalışacağımız için kuvvet ve (artı) kök alma işlemlerini serbestçe kullanacağız.

Hemen

$$X_{sa} = \frac{a^2 - a + 1}{b^2} = \frac{a^3 + 1}{b^2(a + 1)} = \frac{b}{a + 1}$$

buradan da

$$X_{sa} = (X_{sa}^3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{a^3 + 3a^2 + 3a + 1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{3 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + a + a^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a - 1}{a^3 - 1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a - 1)^{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{2} - 1)^{\frac{1}{3}}$$

bulunur. Ramanujan'ın eşitliğinin doğru olması için gerek ve yeter şart

$$X_{sa}^{18} = X_{so}^{18}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} X_{so}^{18} &= (4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3 \\ &= 64\frac{2}{3} - 240\frac{\sqrt[3]{4}}{3} + 300\frac{\sqrt[3]{2}}{3} - 125\frac{1}{3} \\ &= 1 + 100\sqrt[3]{2} - 80\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

dür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} X_{sa}^{18} &= (\sqrt[3]{2} - 1)^6 \\ &= 4 - 6.2\sqrt[3]{4} + 15.2\sqrt[3]{2} - 20.2 + 15.\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} + 1 \\ &= -35 + 24\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Demek ki Ramanujan' ın denklemi doğru olsaydı

$$1+100 \sqrt[3]{2} - 80 \sqrt[3]{4} = -35 + 24 \sqrt[3]{2} + 3 \sqrt[3]{4}$$

olması veya

$$83 \sqrt[3]{4} - 76 \sqrt[3]{2} - 36 = 0$$

olmalı, yani $3\sqrt[3]{2}$, $83y^2 - 76y^2 - 36 = 0$ denkleminin bir kökü olmalıdır ki, bunun imkansız olduğunu biliyoruz.

Teorinin tatmin etmediği okurları da rahatlatalım : Ali Doğanaksoy bilgisayarla $X_{sa} \sim 0.638...$, $X_{so} \sim 0.549$ değerlerini buldu.

A44. Bir ABC üçgeninin kenarları üzerine dıştan BCXX', CAYY' ABZZ' kareleri çizilirse alanlar için

$$|XYZ| = |X'Y'Z'|$$

eşitliğini gösteriniz.

(Hazırlayan : H. Demir)

Çözüm: Bir UVW üçgeninin alanını |UVW| ile gösterelim. (Aslında yönlü alan kullanmak gerekiyor. Biz üçgenin hiç bir açısının 45° den küçük olmadığı en basit hali alıyoruz.) Her zaman ki gibi $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ yazarsak

$$|XYZ| = |ABC| + |BCX| + |CAY| + |ABZ| + |XYC| + |YZA| + |ZXB|$$

$$= |ABC| + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+ \frac{1}{2} a(b\sqrt{2}) \sin\left(\frac{5\pi}{4} - C\right)$$

$$+ \frac{1}{2} b(c\sqrt{2}) \sin\left(\frac{5\pi}{4} - A\right)$$

$$+ \frac{1}{2} c(a\sqrt{2}) \sin\left(\frac{5\pi}{4} - B\right)$$

ve benzer şekilde de

$$|X'Y'Z'| = |ABC| + |BCX'| + |CAY'| + |ABZ'| + |X'Y'C| + |Y'Z'A| + |Z'X'B|$$

$$= |ABC| + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+ \frac{1}{2} (a\sqrt{2})b \sin\left(\frac{5\pi}{4} - C\right)$$

$$+ \frac{1}{2} (b\sqrt{2})c \sin\left(\frac{5\pi}{4} - A\right)$$

$$+ \frac{1}{2} (c\sqrt{2})a \sin\left(\frac{5\pi}{4} - B\right)$$

bulunur ki, bundan da

$$|XYZ| = |X'Y'Z'|$$

olduğu aşikardır.

A45. Bir ABC üçgeninde [BC] kenarının orta noktası D_0 a göre simetrik iki nokta D ve D' olsun. Bu noktalardan geçen d ve d' doğruları CA ve AB kenarları E, F, E', F' de kessin. EF' ve E'F doğrularının, BC yi D_0 a göre simetrik iki noktada kestiklerini gösteriniz. **Çözüm:** $EF' \cap \{BC\} = \{Y\}$ ve $E'F \cap \{BC\} = \{Z\}$ olsun. ABC üçgeninde EF, E'F' doğrularına nazaran Menelaus teoreminden sırasıyla

$$\frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} = 1$$

$$\frac{E'C}{F'A} \cdot \frac{F'A}{F'B} \cdot \frac{D'B}{D'C} = 1$$

gene ABC üçgeninde EF', E'F doğrularına nazaran Menelaus teoreminden sırasıyla

$$\frac{EC}{EA} \cdot \frac{F'A}{F'B} \cdot \frac{YB}{YC} = 1$$

$$\frac{E'C}{E'A} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{ZB}{ZC} = 1$$

Bulunur. Bu denklemlerden,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$$

olduğu da hatırlanarak kolayca

$$\frac{YB}{YC} = \frac{ZB}{ZC}$$

elde edilir.

Y41. [AB] çaplı bir çemberin AB ye K noktasında dik bir [CD] kirişi çiziliyor ve [BD] yayında bir P noktası alınıyor. PK doğrusunun çemberi kestiği diğer nokta E ve $PA \cap CD = F$ ise $|EK| < |AF|$ olduğunu gösteriniz.
(P.Erdös)

Çözüm: Çemberin yarıçapını R ile, $\angle PAB$ açısının ölçüsünü de α ile gösterelim. Sunuşu kolaylaştırmak maksadıyla,

$$\begin{aligned} x &= |KE| \\ y &= |FA| \\ u &= |PK| \\ v &= |PF| \\ q &= |AK| \end{aligned}$$

yazalım. Kolaylıkla

$$y + v = 2R \cos \alpha$$

$$y = \frac{q}{\cos \alpha}$$

yazılabilir. Ayrıca K nin çembere göre kuvvetinden

$$xu = q(2R - q)$$

ve AKP üçgeninde kosinüs teoreminden

$$u^2 = (y + v)^2 + q^2 - 2q(y + v) \cos \alpha$$

bunu ilk denklemlerle birleştirerek de

$$u^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + q^2 - 4Rq \cos^2 \alpha$$

veya

$$u^2 = (2R - q)^2 \cos^2 \alpha + q^2 \sin^2 \alpha$$

elde ederiz. Böylece

$$y^2 - x^2 = \frac{q^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{q^2 (2R - q)^2}{(2R - q)^2 \cos^2 \alpha + q^2 \sin^2 \alpha}$$

ve nihayet

$$y^2 - x^2 = q^4 \frac{\tan^2 \alpha}{(2R - q)^2 \cos^2 \alpha + q^2 \sin^2 \alpha} \geq 0$$

bulunur. Eşitliğin ancak ve yalnız $q = 0$ yani $K = A$ halinde mümkün olduğunu belirtelim.

Y42. Aşağıdaki denklemi sağlayan m ve n pozitif tam sayılarını bulunuz :

$$1! + 2! + \dots + n! = m^2.$$

Çözüm: Denklemin $n = 1, m = 1$ ve $n = 3, m = 3$ şeklinde iki basit çözümü olduğunu işaret ettikten sonra başka bir çözüm olmadığı kolayca görülebilir : $n = 2, 4$ hallerinde $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ in tamkare olmadığını biliyoruz. Diğer taraftan da $n \geq 5$ için, $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ sayısının onlu yazılımda son hanesi daima $1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 33$ in onlu yazılımda son hanesi olan 3 olmalıdır. Halbuki hiçbir tamkare tamsayının onlu yazılımda son hanesi 3 olamaz.

Y43. Bir ABCD paralelkenarında [AB] tabanına paralel bir doğru [AD] ve [BC] kenarlarını E ve F noktalarında kesiyor. G, [AF] üzerinde seçilmiş herhangi bir nokta olmak üzere, $CG \cap AB = P$ ve $DG \cap EF = Q$ ise $PQ \parallel BC$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: FAB üçgeni ve PC doğrusuna Menelaus teoremi uygulanarak

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{GF}{GA} = 1$$

gene EAF üçgeni ve QD doğrusuna Menelaus teoremi uygulanarak

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{GF}{GA} \cdot \frac{DA}{DE} = 1$$

bulunur. Bu iki denklemden

$$\frac{CB}{CF} = \frac{DA}{DE}$$

kullanılarak

$$\frac{PA}{PB} = \frac{DE}{DF}$$

buradan da PQ nun AD ye paralelliği elde edilir.

Y44. Aşağıdaki 5 x 7 lik ızgara üzerinde sadece

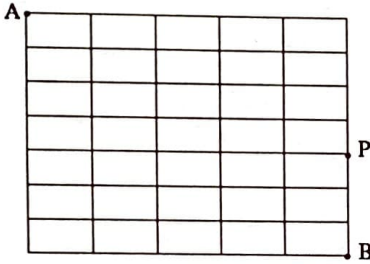
sağa ve aşağıya hareket edebilen bir nokta A dan yola çıkıp B ye varacaktır. Her kavşakta sağa veya aşağı eşit olasılıkla yönelen bu noktanın P den geçme olasılığı nedir.

$\binom{p+q}{q}$ ile verilir. Bu durumda, A dan B ye

giden yolların sayısı $\binom{12}{5} = 792$, P ye giden

yolların sayısı da $\binom{9}{5} = 126$ olur. Ancak, A dan

Çözüm : $p \times q$ boyutlarındaki bir ızgarada sol üst köşeden, sağ alt köşeye, yalnızca sağa ve aşağı yönelerek giden yolların sayısı tabii ki



B ye giden bir yolun P den geçme olasılığı

$\frac{126}{792} \sim 0.159$ değildir. Zira bu yolların seçimi eşit ağırlıklı değildir. Örneğin, önce üst kenarı sonra da sağ kenarı takip eden yolun seçilme olasılığı

$\frac{1}{32}$, önce sol kenarı sonra da alt kenarı takip eden yolun seçilme olasılığı $\frac{1}{128}$ dir. Bu göz önüne

alınarak hesap yapılırsa A dan B ye giden

yolların P den geçme olasılığı $\frac{1}{2}$ olarak

bulunur.

Y45. İç açı ortayları [AD], [BE], [CF] olan bir ABC üçgeninde $\angle EDF = 90^\circ$ ise A açısı kaç derecedir.

Çözüm : $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ yazalım. $\angle BAC$ açısının ölçüsünü de α ile gösterelim. A noktasını başlangıç noktası olarak vektör

gösterimiyle,

$$\vec{E} = \frac{c}{a+c} \vec{C}$$

$$\vec{F} = \frac{b}{a+b} \vec{B}$$

$$\vec{D} = \frac{b}{b+c} \vec{B} + \frac{c}{b+c} \vec{C}$$

olup

$$\vec{DF} = \vec{F} - \vec{D} = \frac{c}{a+c} \vec{C} - \frac{b}{b+c} \vec{B} - \frac{c}{b+c} \vec{C}$$

$$= \frac{c(b-a)}{(a+c)(b+c)} \vec{C} - \frac{b}{b+c} \vec{B}$$

aynı şekilde de

$$\vec{DE} = \vec{E} - \vec{D} = \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} \vec{B} - \frac{c}{b+c} \vec{C}$$

bulunur. Böylece, $B.B = c^2$, $C.C = b^2$, $B.C = bc \cos \alpha$ da kullanılarak, küçük bir hesapla

$$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = \frac{b^2 c^2}{(b+c)^2 (a+b)(a+c)} \cdot A$$

$$A = (2a^2 + 2bc) \cos \alpha - (b^2 + c^2 - 2a^2)$$

buradan da

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha$$

hatırlanarak

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

yani

$$\alpha = 120^\circ$$

çıkar.

DİZİN (CİLT II)

Yazar	Yazı	Sayı	Sayfa
AKDENİZ, F.	Öğrenci Gözü İle Matematik Nedir?	1	31
ALKAN, E.	Geometrik Eşitsizlikler	1	22
ALPAY, Ş.	Rolle ve Ortalama Değer Teoremi	5	16
AYTUNA, A.	Orta Öğretimde Matematik Eğitimi Üzerine Bazı Düşünceler	2	19
ÇALIŞKAN, N.	7, 13, ve 19 ile Bölünebilme Kuralları	4	32
ÇAPAR, U.	Matematiksel Estetik	4	5
ÇAPAR, U.	Bazı Çokgen Formüllerinin Kolay Kombinatorik Kanıtları	5	22
DEMİR, H.	Bir Üçgende Noktadaş Dikmeler	1	5
DEMİR, H.	Karmaşık Düzlemde Analitik Geometri	3	2
DEMİR, H.	Bazı Kavram, Tanım, Bağıntı ve Simgeler Üzerine	2	4
DOĞAN, K.	Matematik Öğretiminden Ne Bekliyoruz?	3	26
EROĞLU, M.S.	Matematikte Tanım ve Kanıtlar	1	2
ERKİP, A.	Çekmeceler, Çoraplar ve Matematik Problemleri	2	22
ERKİP, A.	Olimpiyat Haberleri	3	22
ERKİP, A.	Olimpiyat Haberleri	5	24
ERKİP, A.	Fonksiyonel Denklemler	4	22
GÜRSES, M.	Prof.Dr. Feza Gürsey	2	2
HACILAROV, E., MAKSUDOV, F.	Geçişken Olmayan Zarlar Hakkında Teorem	3	16
HAYFAVİ, B.A.	Düzgün Çokgenler ve Çizilebilirlikleri	4	11
KADEROĞLU, B.	Akıldan Çarpma Tekniği	3	13
KARAKAŞ, H.İ.	Seçim ve Matematik - I		
	Kısmi Sıralama Bağıntılar	3	19
KARAKAŞ, H.İ.	Seçim ve Matematik - II		
	Toplumsal Seçimler	4	17
KARAKAŞ, H.İ.	Seçim ve Matematik - III		
	Seçim Paradoksu	5	10
KOÇ, C.	Bir Üçgene Ait Çemberler	1	17
KUZUCUOĞLU, M.	Basit Sonlu Grupların Sınıflandırılması	4	2
LEM, S.	Olağanüstü Otel	5	1
MAKSUDOV, F., VELİEV, C.	Fibonacci Sayıları Hakkında Bir Kural	4	14
MAKSUDOV, F., HACILAROV, E.	Geçişken Olmayan Zarlar Hakkında teorem	3	16
MERSİN, D.	Bazı İlginç Sayılar	5	32
NESİN, A.	Pokerin Matematiği	1	8
NESİN, A.	Matematikçi Hilesi	4	11
ÖNDER, H.	Başarıya Doğru Bir Başka Yol	2	15
ŞENKON, H.	Ünlü Kadın Matematikçiler	5	19
TERZİOĞLU, T.	Gauss Formülünün Genelleştirilmesi	3	11
TEZER, C.	Evirtim (I)	1	12
TEZER, C.	Evirtim (II)	2	8
TEZER, C.	Eşparçalama	5	12
TUNCER, T.	Sayılarla İlişkin İlginç Bağıntılar		
TUNCER, T.	Bourbaki Nicolas	2	13
TUNCER, T.	Paradokslar, Çatışkılar	4	26
VELİEV, C., MAKSUDOV, F.	Fibonacci Sayıları Hakkında Bir Kural	4	14

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası, bir önceki sayı ile iki yılını tamamladı. Bu iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 20.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte, postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 10.000.-TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri takdirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1993 yılı abone ücreti 50.000.-TL. tane satış fiyatı ise 15.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar :

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

