

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Bir Tane Rasgele Çizgi Var!

Ali Nesin

Ulusal Matematik Olimpiyadı

Albert Erkip

Dinamik Sistemler, Garip Çekerler ve Kaos

H. Turgay Kaptanoğlu

L'Hôpital Kuralı Üstüne

Mefharet Kocatepe

Geometri Problemlerinin
Çözüm Yöntemleri

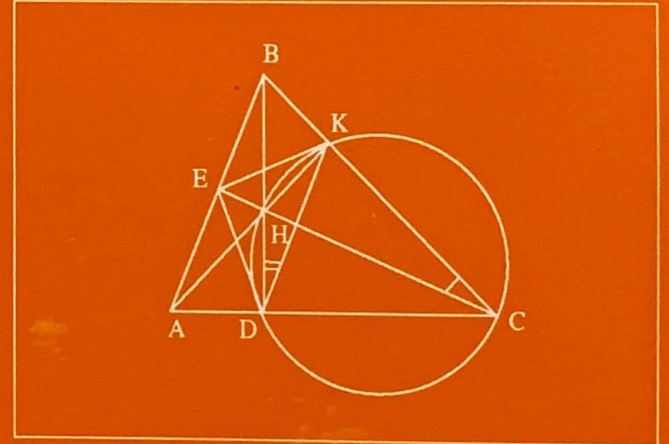
Alparslan Ertuğ

Ünlü Kadın Matematikçiler :
Emmy Noether (1882 - 1935) (I)

Hülya Şenkon

Problemler

Çözümler



SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
TURGAY KAPTANOĞLU, HÜSEYİN DEMİR,
ALİ DOĞANAKSOY, ALBERT ERKİP,
MAHMUT KUZUCUOĞLU,
MEFHARET KOCATEPE

DİZGİ
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI
Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 75.000.-TL, Yurtdışı yıllık 200.000.-TL,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İşerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

Bir Tane Rasgele Çizgi Var!

Ali Nesin 1

Ulusal Matematik Olimpiyadı

Albert Erkip 5

Dinamik Sistemler, Garip Çekerler ve Kaos

H. Turgay Kaptanoğlu 7

L'Hôpital Kuralı Üstüne

Mefharet Kocatepe 15

Geometri Problemlerinin Çözüm Yöntemleri

Alparslan Ertuğ 18

Daireyi Kare Haline Getirmek; π ile ϕ Arasındaki Bağlantı Geçmişle Bugün Arasında Bir Köprü Kurabilir mi?

Mehmet Suat Bergil 23

Ünlü Kadın Matematikçiler : Emmy Noether (1882 - 1935) (I)

Hülya Şenkon 24

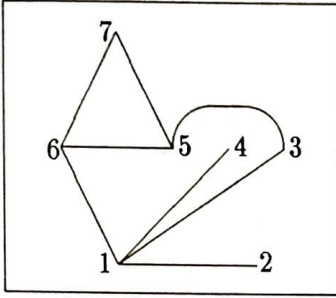
Problemler 29

Çözümler 29

BİR TANE RASGELE ÇİZGE VAR!

Ali Nesin *

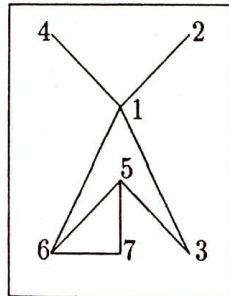
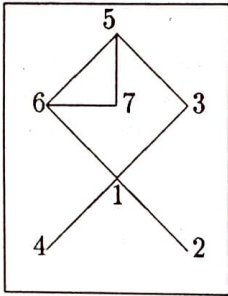
Bir *çizge* (graf), sezgisel olarak, noktalar-
dan ve noktaları ikiye ikiye birleştiren (doğru ya
da eğri) çizgilerden oluşur. Herhangi iki nokta
birleşmek zorunda değildir. Örneğin,



7 noktalı bir çizgedir. Noktalara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
adlarını verdik. Birleştirdiğimiz noktalar şunlar:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \\ \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}.$$

Bu iki ögelik kümeler *bağıntı* adı da verilir. Nok-
taları nasıl bir çizgiyle birleştirdiğimiz önemli de-
ğil. Hatta çizgiler kesişebilir bile (kesiştikleri yere
çizgenin bir noktasını koymayız o zaman). Nok-
taların yerleri de önemli değil. Okur neyin önemli
olduğunu merak edebilir! Önemli olan hangi nok-
tayla hangi nokta arasında çizgi (yada bağıntı)
olduğu. Başka bir şey önemli değil. Örneğin,
yukarıdaki çizgeyle, aşağıdaki çizgeler aynı çizge-
lerdir:



Bu yazıda ilginç olduğu kadar da
şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız. Size sonsuz
tane nokta verdim:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

noktalarını. Bu noktalardan bir çizge yapma-
nızı istiyorum. Her iki nokta için yazı-tura ata-
caksınız. Yazı gelirse noktaları birleştireceksiniz,
tura gelirse birleştirmeyeceksiniz. Her iki nokta
için yazı-tura atmayı bitirdiğinizde (!) nokta-
ların adlarını silin. Hangi noktanın 1 noktası,
hangi noktanın 2 noktası olduğu belli olmasın.
Elinizde adsız noktalar ve bir takım çizgiler kalı-
cak. Ben de aynı şeyi yapacağım. Sizin çizgenize
bakmadan... Böylece adsız iki *rasgele çizge* elde
edeceğiz. Sizin *rasgele çizgeniz* ve benimkisi.
Şimdi çizgelerimizi karşılaştıralım. İki çizgenin de
aynı olduklarını göreceğiz. Tıpatıp birbirine ben-
ziyorlar! Sanki biri öbürünün burnundan düşmüş.
İnanılır gibi değil ama doğru! Ne sihirdir ne
keramet, matematiktir matematik! Dahası var.
Diyelim, ben noktaları birleştirmek için yazı-
tura atmadım da zar attım. 6 geldiğinde nok-
taları birleştirdim, gelmediğinde birleştirmedim.
Sizse yazı-tura attınız. Noktaların adlarını sildi-
ğimizde gene aynı çizgeleri elde ederiz!

'Çizge' kavramının matematiksel tanımıyla
başlayalım. N bir küme olsun. $\mathcal{B}$, N 'nin iki
ögelik altkümelerinden oluşan bir küme olsun¹.
Eğer her $x \in N$ için, $(x, x) \notin \mathcal{B}$ ise, $(N, \mathcal{B})$ çiftine
bir *çizge* denir². Yukarıdaki örnekte,

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ve

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \\ \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$$

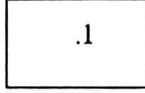
* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

¹ N , 'nokta'nın N 'si, $\mathcal{B}$ ise 'bağıntı'nın $\mathcal{B}$ 'si.

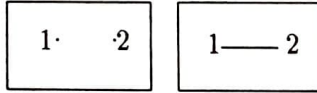
² (x, x) ögesinin $\mathcal{B}$ 'de olmaması, x 'le x arasında bağıntı olmaması demektir. Bu koşulu kabul etmemizin ciddi hiç
bir nedeni yok. 'Çizge'nin tanımında bu koşulu koymayan kitaplar vardır. Bizim bu koşulu kabul etmemizin tek nedeni
çizgelerimizin daha basit olmalarını sağlamak. Matematiksel bir gerekçemiz yok.

olarak alınmıştır. Rasgele çizgeleri tanımlamadan önce az noktalı çizgeleri bulalım.

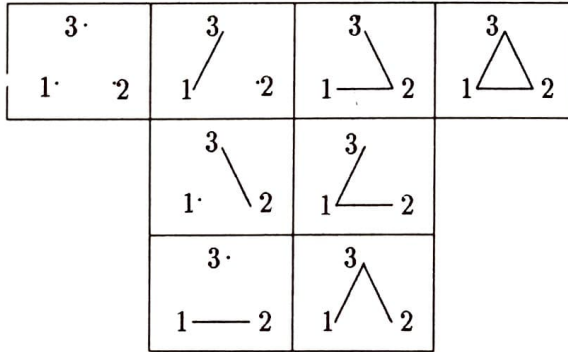
Eğer $N = \{1\}$ ise, yani N 'de bir nokta varsa, $\mathcal{B}$ boşküme olmak zorunda. Dolayısıyla $N = \{1\}$ üzerine bir tek çizge kurulabilir. İşte o çizge:



Şimdi de iki noktalı çizgelere bakalım. $N = \{1, 2\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$ ya boşkümedir yada $\{\{1, 2\}\}$ kümesidir. Demek ki iki noktalı iki çizge var:



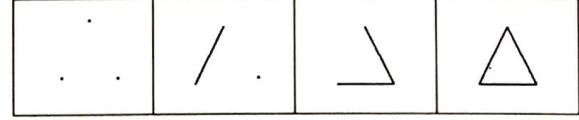
Şimdi amacımız üç noktalı çizgeleri bulmak. Ama bu çizgelerden çok olduğundan, arada unuttuğumuz olmasın diye önce n noktalı kaç tane çizge olduğunu bulalım. n noktalı, $2^{\binom{n}{2}}$ tane çizge olduğunu iddia ediyorum, ve hemen kanıtıyorum: N kümesinin n tane ögesi varsa, $\binom{n}{2}$ tane iki ögelik altkümesi vardır. $\mathcal{B}$ iki ögelik altkümelerden oluştuğundan, $\mathcal{B}$ için $2^{\binom{n}{2}}$ seçeneğimiz var. Demek ki n noktalı $2^{\binom{n}{2}}$ tane çizge vardır. Eğer $n = 3$ olarak alırsak, bundan 3 noktalı 8 tane çizge olduğu çıkar. Bu 8 çizgeyi teker teker bulalım. $N = \{1, 2, 3\}$ olsun. İşte 8 çizge:



Üç nokta arasındaki bağıntıları yazı-tura atarak karar verecek olursak, yukarıdaki çizgelerden birini elde etme olasılığı $1/8$ 'dir.

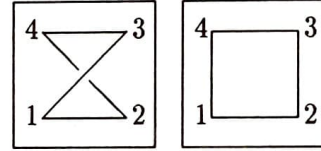
Yukarıdaki çizgelerden noktaların adlarını, yani sayıları silerseniz, çizge sayımız azalır.

Örneğin, bir bağıntısı olan üç çizgenin noktalarının adları silindiğinde bir çizge olurlar. Bunun gibi, iki bağıntısı olan üç çizgiden de bir adsız çizge elde ederiz. Böylece noktaların adını yazmadığımızda dört çizgemiz kalır:



Eğer çizgeyi yazı-tura atarak bulmuşsak, yani her bağıntının olasılığı $1/2$ ise, bu adsız çizgelerin olasılıkları sırasıyla $1/8$, $3/8$, $3/8$ ve $1/8$ 'dir.

İki çizgenin noktalarının adlarını sildiğimizde aynı çizgeyi elde etmek ne demektir? Bunun matematiksel tanımını bilmek bu yazı için gerekli değildir, bu yazı için sezgiler yeterlidir. Bir örnek daha verelim ki kuşkuyla yer kalmasın. Aşağıdaki iki çizgeye bakalım.



Bu iki çizge birbirlerine çok benzerler. Tek ayrımları noktalarının adlarıdır. Soldaki çizgede 3 ve 4 noktalarının yerlerini değiştirirsek (bağıntılarıyla birlikte) sağdaki çizgeyi buluruz. Yani noktaların adları olmasaydı iki çizge arasında bir ayrım olmayacaktı.

Soldaki çizgenin bağıntıları şunlar:

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 1\}\}.$$

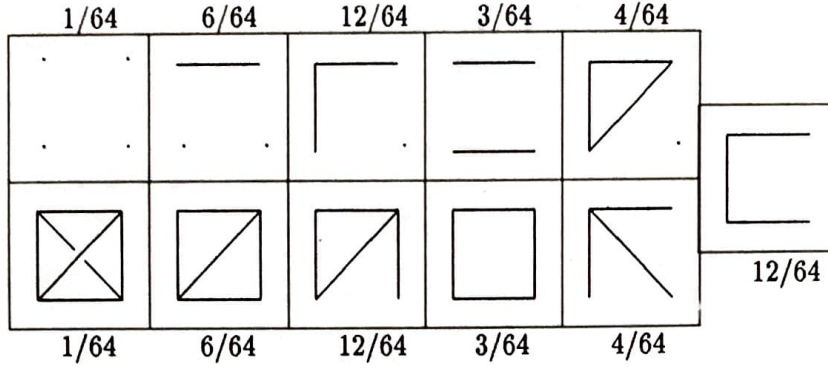
Sağdaki çizgenin bağıntılarıysa,

$$\mathcal{B}' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}.$$

Şimdi, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ göndermesini (fonksiyonunu) ele alalım. Bu gönderme, $\mathcal{B}$ bağıntılarını $\mathcal{B}'$ bağıntılarına gönderiyor. İşte iki çizgenin noktaları silindiğinde aynı çizge bulunması bu demektir³.

Dört noktalı ve adsız çizgeleri bulalım. Bunları bağıntı sayısına göre bulabiliriz: önce hiç bağıntısı olmayanlar, sonra bir bağıntısı olanlar, sonra iki bağıntısı olanlar...

³ Bunu matematiksel olarak ifade edelim: $(N, \mathcal{B})$ ve $(N', \mathcal{B}')$ iki çizge olsunlar. Eğer $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ eşitliğini sağlayan ve birebir ve örten olan bir $f: N \rightarrow N'$ göndermesi varsa, $(N, \mathcal{B})$ ve $(N', \mathcal{B}')$ çizgelerine eşyapısal çizgeler denir. İki eşyapısal çizgenin birbirinden tek ayrımı noktalarının adlarıdır. Bu çizgelerden birindeki noktaların adları uygun bir biçimde değiştirildiğinde (x noktasına $f(x)$ denildiğinde örneğin), öbür çizge bulunur.



Çizgelere iliştilen $1/64$, $6/64$, $3/64$ gibi sayılar, bağıntılara karar vermek için yazı-tura atıldığında, çizgenin elde edilme olasılığıdır. Yukarıda yaptığımız hesaplardan, 4 noktalı çizge sayısının $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ olduğunu biliyoruz. Bir bağıntılı çizge sayısı kaçtır? Dört noktadan ikisini seçip aralarına bir bağıntı koymamız gerekiyor. Demek ki $\binom{4}{2} = 6$ tane bir bağıntılı çizge var. Dolayısıyla bir bağıntılı çizge elde etme olasılığımız $6/64^4$.

Şimdi sonsuz rasgele çizgelere gelelim. N kümesi

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

gibi pozitif doğal sayılardan oluşan küme olsun. Bunlar noktalarımız. İki nokta arasında bağıntı olup olmadığına karar vermek için yazı-tura atacağız. Böylece bir $\mathcal{B}$ bağıntılar kümesi elde edeceğiz. Bu çizgeye $\mathcal{R}$ adını verelim ($\mathcal{R}$, 'rasgele'nin R 'si).

$\mathcal{R}$ çizgesi hakkında ne söyleyebiliriz? Rasgele çizge olduğundan hiç birşey bilmemiz olası değil diye düşünebilir okur. İlk bakışta öyle bile görünse, ikinci bakışta $\mathcal{R}$ çizgesi üzerine çok şey bildiğimiz anlaşılır. Basit bir örneklerle başlayalım.

Rasgele çizgenin herhangi iki nokta arasındaki "uzaklığın" en fazla iki olduğunu kanıtlayayım; yani bir noktadan bir başka noktaya gidebilmek için üçüncü bir noktadan geçilerek gidilebileceğini kanıtlayayım. $\mathcal{R}$ rasgele çizgesinde rasgele iki nokta alalım; diyelim 1 ve 2 noktalarını. Savım şu: öyle bir üçüncü nokta vardır ki, bu üçüncü nokta hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Savımı kanıtlayayım. 3 noktasını ele alalım. Eğer şanslı bir günüm-deysem, 3 noktası dilediğim gibi bir noktadır,

yani hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Bunun böyle olma olasılığı $1/4$. Demek ki $1/4$ olasılıkla 3 noktası varlığını iddia ettiğim noktalardan biri olacak. Öte yandan $3/4$ olasılıkla 3 noktası istediğim gibi bir nokta olmayacak. Şimdi 3 ve 4 noktasını ele alalım. Bu iki noktadan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^2$. Eğer n tane nokta alırsak, bu n noktadan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^n$; en az bir tanesinin dilediğim gibi bir nokta olma olasılığıysa $1 - (3/4)^n$. Ama n büyüdükçe $(3/4)^n$ azalıyor, sıfıra yaklaşıyor. Dolayısıyla $1 - (3/4)^n$ sayısı bire yaklaşıyor. Demek ki, 3, 4, 5, 6, ... noktalarından hiçbirinin benim istediğim gibi bir nokta olmama olasılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0,$$

ve en az birinin benim istediğim gibi bir nokta olma olasılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1.$$

Demek ki 1 olasılıkla dilediğim gibi bir nokta vardır.

Rasgele çizgeler üzerine bir başka sonuç daha çıkaralım. $\mathcal{R}$, rasgele çizgeniz olsun. Noktaların adlarını silin. Sonra rasgele bir sonlu çizge alın, örneğin yazının en başında örnek olarak sunduğumuz 7 noktalı çizgeyi. Onun da adlarını silin. Bu adsız ve sonlu çizgeye $\mathcal{S}$ adını verelim. $\mathcal{S}$ sonlu çizgesi, rasgele çizgenizin bir altçizgesidir, yani $\mathcal{R}$ çizgesinin içinde bulabilirsiniz $\mathcal{S}$ çizgesini. Neden? Şu nedenden: Rasgele çizgenizin noktalarını yedişer yedişer ayırın.

⁴ Yukarıdaki 11 çizge rasgele konulmamıştır. Alt alta gelen çizgeler birbirleriyle ilintilidir. Üst kattaki herhangi bir çizgeyi alalım. Bu çizgenin bağıntılarını silelim ve bağıntı olmayan yerlere bağıntı koyalım. Böylece alt kattaki çizgeyi elde ederiz. En sağdaki çizge için aynı şeyi yapacak olursak gene aynı çizge elde edilir. Alt alta gelen iki çizgenin olasılıkları aynıdır. Yazı-tura atıldığında aynıdır. Eğer zar atarak bağıntılara karar verecek olursak olasılıklar değişebilir. Örneğin, zar attığımızda 6 gelirse bağıntı koymaya, gelmezse bağıntı koymamaya karar verecek olursak, çizgenin bağıntı sayısı çoğaldıkça olasılığı azalır.

Örneğin şöyle (noktaların adlarını silmiştik; aşağıdaki sayılar noktaların adları değil; yalnızca birbirinden değişik noktalar olduğunu vurgulamak için kullanıyoruz bu sayıları):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{1, 2, \dots, 7\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{8, 9, \dots, 14\} \\ &\vdots \\ \mathcal{R}_n &= \{7n+1, 7n+2, \dots, 7n+7\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

$\mathcal{R}_1$ altçizgesine bakalım. Bu çizgenin $\mathcal{S}$ çizgesi olma olasılığı en az $1/2^{(7)}$, olmama olasılığıysa en çok $1 - 1/2^{(7)}$. Bu olasılığa α adını verelim.

$$0 < \alpha \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(7)} < 1$$

eşitsizliklerine dikkatinizi çekerim. $\mathcal{R}_1$ çizgesinin $\mathcal{S}$ çizgesi olmama olasılığı α . $\mathcal{R}_1$ ve $\mathcal{R}_2$ çizgelerinden hiçbirinin $\mathcal{S}$ çizgesi olmama olasılığıysa α^2 . Genel olarak, $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ çizgelerinden hiçbirinin $\mathcal{S}$ çizgesi olmama olasılığı α^n ; en az birinin $\mathcal{S}$ olma olasılığıysa $1 - \alpha^n$. α , 1'den küçük olduğundan, α^n sayıları gittikçe küçülür, sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla $1 - \alpha^n$ bire yaklaşır. Sonsuz tane $\mathcal{R}_n$ çizgesi olduğundan, bunlardan birinin $\mathcal{S}$ olma olasılığı 1'dir. Dolayısıyla, $\mathcal{R}$ çizgesinde $\mathcal{S}$ 'e tıpatıp benzeyen bir altçizge (1 olasılıkla, yani yüzde yüz) vardır.

Son olarak yazının başında iddia ettiğim savı kanıtlayayım. Sizin elinizde rasgele bir çizge var. Bu çizgeye $\mathcal{R} = (N, \mathcal{B})$ diyelim, noktalarınız da

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

olsun. Benim çizgeye $\mathcal{R}' = (N, \mathcal{B}')$ diyelim. Noktalarım

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

olsun. Bu iki çizgenin noktalarının adlarını değiştireceğim. a ve a' noktalarını b ve b' yapacağım, ve bu işi öyle yapacağım ki, noktaların adlarını sildiğimizde iki çizgenin birbirinin aynısı olduğu apaçık belli olacak. Bağıntılara dokunmayacağım. Yalnızca eski adları silip yeni adlar koyacağım yerine, sonradan bu yeni adları da sileceğim.

Adına "gelgit yöntemi" denilen kullanacağım yöntem matematikte az bilinir.

Birinci Adım. $\mathcal{R}$ çizgesinden başlayalım işe. a_1 noktasına b_1 diyelim bundan böyle. $\mathcal{R}'$ çizgesinde b_1 'e benzeyen bir nokta bulabilir miyiz? Elbette! Herhangi bir nokta b_1 'e benzer.

Örneğin a'_1 noktası. Bundan böyle a'_1 noktasına b'_1 adını verelim. Çizgelerimizin noktaları şimdi lik şöyle:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : & b_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \dots \\ \mathcal{R}' : & b'_1 \quad a'_2 \quad a'_3 \quad a'_4 \quad a'_5 \quad \dots\end{aligned}$$

İkinci Adım. Şimdi $\mathcal{R}'$ çizgesine geçelim. a'_2 noktasına b'_2 adını verelim. Ve $\{b'_1, b'_2\}$ altçizgenine bakalım. b'_1 ve b'_2 arasında bağıntı olabilir ya da olmayabilir. $\mathcal{R}$ çizgesinde öyle bir a_n noktası bulmak istiyorum ki $\{b_1, a_n\}$ çizgesiyle $\{b'_1, b'_2\}$ çizgesi - noktalarının adları dışında - birbirinin aynı olsun.

Diyelim b'_1 ve b'_2 arasında bir bağıntı var. O zaman, $\mathcal{R}$ çizgesinde öyle bir a_n noktası seçmeliyim ki, a_n noktasıyla b_1 noktası arasında bağıntı olsun. Böyle bir a_n noktası bulabilir miyim? 1 olasılıkla bulabileceğimi iddia ediyorum. Çünkü $\mathcal{R}$ çizgesinin hiç bir noktasının b_1 noktasına bağıntılı olmama olasılığı sıfırdır. Bu şöyle anlaşılır. m herhangi bir doğal sayı olsun. $a_2, a_3, \dots, a_{m+2}$ noktalarından hiçbirinin b_1 noktasıyla bağıntısı olmamasının olasılığı $1/2^m$. Dolayısıyla bu noktalardan en az birinin dilediğim gibi bir nokta olma olasılığı $1 - 1/2^m$. Sonsuz tane noktamız olduğundan, noktalardan birinin dilediğim gibi bir nokta olma olasılığı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = 1.$$

Dolayısıyla 1 olasılıkla öyle bir nokta var. Bu nokta a_2 olmayabilir, a_3 olmayabilir, belki a_4 de olmayabilir, ama bir tanesi b_1 'e bağıntılı olacak. $\mathcal{R}$ çizgesinde böyle bir nokta seçelim. Diyelim a_4 noktası b_1 noktasına bağıntılı. a_4 noktasına bundan böyle b_2 diyelim. Şimdi $\{b_1, b_2\}$ altçizgesiyle, $\{b'_1, b'_2\}$ altçizgesi - noktalarının adları dışında - birbirinin aynı.

Eğer b'_1 ile b'_2 arasında bağıntı yoksa, $\mathcal{R}$ çizgesinde b_1 ile bağıntısı olmayan bir nokta seçilir ve bu noktaya b_2 adı verilir.

a_4 noktasına b_2 adını verdiğimizizi varsayarak çizgelerimizin noktalarını yeni adlarıyla sıralayalım:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : & b_1 \quad b_2 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad \dots \\ \mathcal{R}' : & b'_1 \quad b'_2 \quad a'_3 \quad a'_4 \quad a'_5 \quad a'_6 \quad a'_7 \quad \dots\end{aligned}$$

Üçüncü Adım. $\mathcal{R}$ çizgesine geri dönelim. a_2 noktası adı değiştirilmeyen ilk nokta. Bu noktayı b_3 yapalım. $\{b_1, b_2, b_3\}$ altçizgesine bakalım. Diyelim, b_3 ile b_1 bağıntılı, ama b_3 ile

b_2 bağıntılı değil. $\mathcal{R}'$ çizgesinde öyle bir a'_n noktası bulacağız ki a'_n noktası b'_1 ile bağıntılı olacak ama b'_2 ile bağıntılı olmayacak. Eger öyle bir a'_n bulabilirsek, $\{b_1, b_2, b_3\}$ altçizgesiyle $\{b'_1, b'_2, a'_n\}$ altçizgesi, noktalarının adları dışında, aynı çizge olacaklar. Böyle bir a'_n noktası bulabilir miyiz? Evet! Biri olmazsa, bir başkası olmak zorunda. Çünkü $a'_3, a'_4, \dots, a'_{m+3}$ noktalarından hiçbirinin dilediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^m$, ve m sonsuza gittiğinde bu olasılık sıfıra gidiyor. Demek ki dilediğimiz gibi bir a'_n noktası bulma olasılığımız 1. Diyelim a'_6 noktası işimizi görüyor. a'_6 noktasının adı bundan böyle b'_3 olsun. Çizgelerimizin noktaları şimdi şöyle:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{R}: & b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \\ \mathcal{R}': & b'_1 & b'_2 & b'_3 & a'_3 & a'_4 & a'_5 & a'_7 & \dots \end{array}$$

Dördüncü Adım. Bu kez $\mathcal{R}'$ çizgesinden işe başlayacağız. Adını değiştirmedikimiz ilk nokta a'_3 . Bu noktaya b'_4 adını verelim. Şimdi $\mathcal{R}$ çizgesinde öyle bir a_n noktası bulalım ki, $\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$ altçizgesiyle $\{b_1, b_2, b_3, a_n\}$ altçizgesi – noktaların adlarını dikkate almazsak – aynı çizge olsunlar. Öyle bir a_n noktası 1 olasılıkla bulunabilir. Nasıl bulunur? Yukarıdaki

gibi. Hiçbir a_n noktasının istediğimiz gibi bir nokta olmaması olasılığı sıfırdır. Demek ki birinin dilediğimiz gibi bir nokta olma olasılığı birdir.

Böylece sürdürürüz. İpek sayılı adımlarda $\mathcal{R}$ çizgesinden, çift sayılı adımlarda $\mathcal{R}'$ çizgesinden başlarız. Bu yöntemle ne benim çizgemden ne de sizin çizgenizden nokta unutulmaz. Sonsuza dek sürdürdüğümüzde noktalarımız b ve b' harfleriyle yazılmış olur, ve her n için

$$\{b_1, \dots, b_n\}$$

altçizgesiyle

$$\{b'_1, \dots, b'_n\}$$

altçizgesi, adları dışında, birbirinin aynısıdır. Dolayısıyla,

$$\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

çizgesiyle

$$\{b'_1, b'_2, b'_3, \dots\}$$

çizgesi arasında – noktalarının adları dışında – hiç ama hiç bir ayrım yoktur.

Ne kanıtladık? Sizin rasgele çizgenizle benim rasgele çizgem birbirinin eşidir. Bir (1) olasılıkla!

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Albert Erkip *

TÜBİTAK 1993'te Biyoloji, Enformatik (Bilgisayar), Fizik, Kimya ve Matematik dallarında Ulusal Bilim Olimpiyatları programını başlattı. Programa göre bu dallarda her yıl iki aşamalı olarak Ulusal Olimpiyat yarışmaları yapılacak. Tüm liselerin dalına göre 5-6 öğrenci ile katılabildiği I. Aşama sınavı sonunda en başarılı öğrenciler II. Aşamaya katılmaya hak kazanacaklar, II. Aşama sınavı Uluslararası Olimpiyatlar niteliğinde bir yarışma olacak. Programın amacı lise öğrencilerini temel bilimlere yönleltmek, ilgi ve becerilerini geliştirmelerine olanak sağlamak olduğu kadar, Uluslararası Olimpiyatlar için de bir basamak oluşturmaktır.

I. Ulusal Matematik Olimpiyadının ilk

aşama sınavı 9 Mayıs 1993 Pazar günü bir çok merkezde yapıldı. Çoktan seçmeli olan bu sınavın sorularının bir bölümünü Matematik Dünyası'nın Haziran 1993 sayısında vermiştik. Bu sınav sonucu en başarılı olan 38 öğrenci 17 ve 18 Aralık 1993 günleri II. Aşama sınavına girdiler. II. Aşama Uluslararası Olimpiyat niteliğinde olacak demıştik; gerçekten de 16-20 Aralık günleri 300'e yakın öğrenci 5 dalda yarışmak üzere Ankara'ya geldiler; sınavların yanısıra sosyal ve kültürel etkinliklerle dolu bir kaç gün bir arada kaldılar; 20 Aralık günü madalya ve ödülleri de kazanıp evlerine döndüler. Umudumuz gelecek yıllarda da tekrarlanacak bu günlerin bir bilim şölenine dönüşmesi.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

I Ulusal Matematik Olimpiyadı sonucunda alfabetik sırayla Muhammed Altun ve Murat Atlamaz altın; Rıza Ertuğrul, Zafer Şimşek, Bayram Yenikaya ve Bilal Yurdakul gümüş; Halil Bayrak, Murat Kaval, Z. Fatih Oktay, Barış Pekerten, Utku Tülümen ve Nazım Utku da bronz madalya kazandılar.

Ulusal Olimpiyatların, Uluslararası Olimpiyat için bir basamak oluşturacağını söylemiştik. Daha önceki yazılarda da değindiğimiz gibi Uluslararası Matematik Olimpiyatına çeşitli seçmeler ve kamplardan oluşan, iki yıla kadar uzayabilen bir programla hazırlanıyoruz. Olimpiyat komitelerinde alınan karar uyarınca artık Ulusal Olimpiyatlar bu kamplar için bir seçme sınavı niteliği taşıyacak. Ancak daha önceki hazırlık çalışmalarına katılıp, çeşitli nedenlerle 1993'te I. Aşama sınavına giremeyen, dolayısıyla da II. Aşamaya katılma hakkı olmayan bazı öğrencilerimiz vardı. Bu durumdaki 13 öğrenci, 17-18 Aralık sınavlarına madalya değerlendirmesi dışında kalmak koşuluyla çağırıldılar. Böylece Ulusal Olimpiyata paralel olarak, $38 + 13 = 51$ öğrenci aynı sınavı "seçme" niteliğinde aldılar; en başarılı 24 öğrenci 24 Ocak - 4 Şubat 1994'te Side'de yapılan hazırlık kampına çağırıldılar. 1994 Olimpiyat takımımız bu grup içinden Nisan-Mayıs aylarında yapılacak son seçme sınavı ile belirlenecek.

Aşağıda 17-18 Aralık sınavını sorularına yer veriyoruz. Gerek I. Aşamanın, gerekse de bu sınavın yanıtları, puan dağılımları, vb. bilgiler TÜBİTAK'ın I. Ulusal Bilim Olimpiyatları ile ilgili yayınlayacağı bir kitapta bulunacak; o nedenle yanıtları vermeyeceğiz. Sınav sorularını çeşitli üniversitelerden matematikçiler önerdi.

Sınav sonuçlarına kısaca göz atalım. Her soru 7 puan değerinde olup, 51 öğrencinin puan ortalamaları, 1. soru için 3.80, 2. soru için 5.18, 3. soru için 0.43, 4. soru için 0.44, 5. soru için 3.74 ve 6. soru için 0.94'tü. Görüldüğü gibi özellikle 3 ve 4. sorular oldukça zordu; 3. soruyu ancak 2 kişi tam yaparken 4 soruyu tam yapan çıkmadı. Aslında bu sonuçlar Uluslararası Olimpiyatlardaki sonuçlarımıza benziyor; geometri problemlerinde özellikle başarılıyız, ancak 3. ve 4. problem tipi "varlık gösterme" türü soruları iyi yapamıyoruz. İlerideki Olimpiyatlara hazırlanan öğrencilerimiz bu tür problemlere ağırlık verilerse genel başarımız da yükselecektir.

I. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Birinci Gün, 17 Aralık 1993

Süre: 4.5 saat

1. On tabanına göre yazılışı 1994 ile biten ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $1994 \cdot 1993^n$ şeklinde olan bir tamsayının varlığını gösteriniz.
2. Bir ABC ($m\hat{B} = 90^\circ$) üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi, $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırası ile D , E ve F noktalarında değiyor. $[CI] \cap [EF] = \{L\}$ ve $[DL] \cap [AB] = \{N\}$ olduğuna göre $|AI| = |ND|$ olduğunu gösteriniz.
3. n pozitif bir tamsayı ve $A = \{1, \dots, n\}$ olsun. $f : A \rightarrow A$ ve $\sigma : A \rightarrow A$ gibi iki permütasyon için, eğer $(f \circ \sigma)(1), \dots, (f \circ \sigma)(k)$ artan ve $(f \circ \sigma)(k), \dots, (f \circ \sigma)(n)$ azalan bir dizi olacak şekilde bir $k \in A$ var ise, f , σ 'ya göre "tek tepeli" dir diyeceğiz. S_σ ile σ 'ya göre tek tepeli permütasyonların kümesini gösterelim. $n \geq 4$ ise, $S_\sigma \cap S_\pi = \emptyset$ olacak şekilde σ ve π permütasyonlarının var olduğunu gösteriniz.

İkinci Gün, 18 Aralık 1993

Süre: 4.5 saat

4. Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) pozitif tamsayılar dizisi veriliyor. $0 < x < y < 1$ koşulunu sağlayan her hangi x, y reel sayıları için

$$x < \frac{a_k}{a_m} < y$$

olacak şekilde a_k ve a_m terimleri bulunduğunu gösteriniz.

5. Dışbükey bir dörtgeni alanca iki eşit bölgeye ayıran ve dörtgenin bir köşesinden geçen doğrunun pergel ve cetvelle nasıl çizilebileceğini belirleyiniz.
6. Aşağıdaki koşulları sağlayan $n_1, n_2, \dots, n_k$ ve a pozitif tamsayıları veriliyor.

- i) Her $i \neq j$ için $(n_i, n_j) = 1$.
- ii) Her i için $a^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_i}$.
- iii) Her i için $n_i \nmid a - 1$.

Bu durumda $a^x \equiv 1 \pmod{x}$ denkleğinin gerçekleştiği en az $2^{k+1} - 2$ tane $x > 1$ tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

DİNAMİK SİSTEMLER, GARİP ÇEKERLER VE KAOS

H. Turgay Kaptanoğlu *

A. Dinamik Sistem Nedir?

Hesap makineniz var mı? Varsa hemen şimdi açın ve sizinle kolay bir deney yapalım. Aklınıza gelen ilk sayıyı yazın ve üzerinde $\sin$, $\cos$, x^2 , e^x yazılı düğmelerden birine üst üste basın. Bir ayrık dinamik sistem elde ettiniz. Seçtiğiniz düğme e^x ise ve yazdığınız sayıyı x ile gösterirsek, elde edeceğimiz sayılar

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

olacaktır. (Bilindiği gibi e doğal logaritmanın tabanı olan yaklaşık 2.718281828459045... sayıdır.) Yapılan, e tabanlı üstel fonksiyon $u(x) = e^x$ 'i yinelemektir; diğer bir deyişle u 'nun kendisiyle bileşkesini tekrar tekrar almaktır. Yeteri kadar tekrarlandığında, hangi x ile başlanırsa başlansın, bu deney hesap makinesinin kapasitesinin aşılması ile son bulacaktır; yani e^x fonksiyonunun yinelemeleri sonsuza gider. Elde ettiğiniz sayıları

$$x, u(x), u(u(x)), u(u(u(x))), \dots$$

diye de yazabilirsiniz. Bu diziye x 'in u altındaki *yörüngesi* adı verilir. Hesap makineniz dört işlemden fazlasını yapamıyorsa, seçtiğiniz x 'i hep aynı sayıyla tekrar tekrar çarpmayı deneyebilirsiniz; sonuç değişmeyecektir.

e^x yerine $\sin$ düğmesini kullanırsanız, hangi sayıyla başlarsanız başlayın, elde edilen değerlerin hızla sifıra doğru gittiğini göreceksiniz. $\cos$ kullanırsanız, değerler radyan ölçüsüyle 0.73909... 'a, derece ölçüsüyle 0.99985... 'e yakınsayacaktır. Bu örnekler belki size, hangi fonksiyonu ve hangi başlangıç sayısını ele alırsak alalım, yinelemelerinin her defasında düzenli bir şekilde bir sayıya (veya sonsuza) yakınsadığı fikrini verebilir. Neyse ki durum hep böyle değildir. (Aksi halde bu yazıyı yazmaya gerek kalmazdı.) e^x veya $\sin$ 'den çok daha basit fonksiyonlar, örneğin bir ikinci derece polinom olan

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

çok daha ilginç davranış gösterir yineleme altında. Bunu görmek için $\mu = 4$ koyup 0 ile 1 arasında rastgele x 'ler seçerek fonksiyonu tekrar tekrar uygulayın. (Programlı bir hesap makinesi veya bir bilgisayar işinizi çabuklaştıracaktır.) Pek çok x 'in yörüngesinin anlaşılır hiç bir kurala bağlı kalmadan $[0, 1]$ aralığında rastgele dolandığını göreceksiniz. Şimdi 4 yerine 3.835 koyarak F_μ 'yu yineleyin. Bu sefer, 0 ile 1 arasındaki pek çok x 'in yörüngesinin, ama hepsinin değil, bir-biri ardından tekrarlanan üç sayılık bir çevrime, 0.15207..., 0.49451..., 0.95863... 'a ulaştığını göreceksiniz.

e^x ile F_μ 'nun davranışları arasındaki farkın nedenini görmenin en kolay yolu grafiklerini göz önüne getirmektir. e^x tekdüze artandır ve her başlangıç değerinin yörüngesi eninde sonunda sonsuza kaçar. Fakat F_μ 'nun $[0, 1]$ aralığında önce artan ve sonra azalan olması, bu aralıktaki noktaların yörüngelerin sınırsız büyümesini önler. Tabii grafiği bu tip olan tek fonksiyon F_μ değildir, ama F_μ 'nun gerçekten ilginç olduğu aşağıda görülecektir. Gene de bazı özellikler için önemli olan fonksiyonun ne olduğu değil, bu aralıktaki maksimum değeridir.

Dergimizin bu sayısındaki problemlerden biri (Y84) x ve $g(x)$ reel sayılar olmak üzere, $g(g(x)) = -x$ denkliğini sağlayan bir g fonksiyonu olup olmadığını soruyor. Burada işi zorlaştıran $g(x)$ 'in reel sayı olması şartıdır. Bu şart olmadan, sanal $i = \sqrt{-1}$ sayısını kullanan $g(x) = ix$ işi görür. Benzer şekilde, $h(h(x)) = \frac{1}{x}$ denklemini sağlayan reel değerli bir h fonksiyonu bulunabilir mi? Her iki fonksiyonun dört kere yinelenmesi, her x için bize tekrar x 'i verir. Bir başka deyişle, g ve h her noktada periyodu 4 olan bir çevrim meydana getirir.

B. Neden Biyologlar da Matematik Bilmeli?

Şimdi F_μ 'nun biyolojideki bir uygulamasına bakarak dinamik sistemlerin başka bilim

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

dallarında da ortaya çıktığını görelim. Bir bölgedeki bir yaban hayvanı türünün nüfusunu incelemek istiyoruz. Bu pek çok etmene bağlıdır: yiyecek miktarı, iklimin sertliği, bu türü avlayan diğer türlerin varlığı, Bu etmenler altında ele aldığımız türün nüfusu azalabilir, hatta tür o bölgede yok olabilir; kontrolsüz şekilde artabilir; veya iniş-çıkışlar gösterebilir. Bizim amacımız, bir başlangıç nüfusu verildiğinde uzun vadede olacakları tahmin edebilmek.

Şimdi bu isteğimizi matematiksel bir model haline getirelim. N_0 başlangıçtaki hayvan sayısı, N_n ise n nesil sonraki sayı olsun. En basit şekilde, ne kadar çok hayvan varsa, türün o derece hızlı çoğalacağını kabul edebiliriz. Yani

$$\begin{aligned} N_1 &= \mu N_0 \\ N_2 &= \mu N_1 = \mu^2 N_0 \\ &\vdots \\ N_n &= \mu N_{n-1} = \mu^n N_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

diyebiliriz. Burada μ , türün yavrulama oranı ile bağlantılı pozitif bir sabittir. Eğer $\mu > 1$ ise nesiller geçtikçe N_n sürekli artacaktır ve $0 < \mu < 1$ ise sifıra inecektir.

N_n 'ler arasındaki bağıntıyı bir fonksiyonla da gösterebiliriz. $x = N_0$ ve $f(x) = \mu x$ dersek,

$$f(x) = N_1, f(f(x)) = N_2, f(f(f(x))) = N_3, \dots$$

olacaktır. Yani türün uzun vadedeki nüfusu, f fonksiyonunun yinelenmesinin asimtotik davranışıyla ilişkilidir.

Bu modelin basitliği bazı sakıncaları da beraberinde getirir; örneğin hayvan türü için uzun vadede topu topu iki ihtimal bulunduğunu söyler: $\mu > 1$ ise hiç durmadan artış ve $0 < \mu < 1$ ise soyun tükenmesi. Çoğu durumda böyle olmadığı bellidir. Bazı kısıtlamalar koyarak gerçeğe daha uygun modeller elde edebiliriz. İlk akla gelebilecek fikir, meselâ bölgedeki yiyecek miktarının sabit kalması yüzünden, hayvan nüfusunun belirli bir S sınırının üzerine çıkamayacağıdır. Ama $N_n < S$ olduğu sürece, hâlâ yeterli yiyecek olduğundan, hayvan nüfusu artmaya devam edecektir. Hatta $S = 1$ alabiliriz. N_n o zaman S sınır değerinin yüzdesidir. Bu istediklerimizi sağlayan en basit matematiksel model

$$N_{n+1} = \mu N_n (1 - N_n)$$

denkliğidir; μ gene pozitif bir sayıdır. N_n bire yaklaşırsa, N_n veya $(1 - N_n)$ 'den biri küçük

olacak ve bir sonraki nesilde nüfusun azalmasını sağlayacaktır.

Yukarıda yaptığımız gibi bu bağıntıyı da bir fonksiyonun yinelenmesi olarak görebiliriz. $x = N_0$ ve $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ dersek, gene $N_1 = F_\mu(x)$, $N_2 = F_\mu(F_\mu(x))$, ... olur. Sonunda F_μ fonksiyonunu elde ettik.

İleride kullanmayacaksak da, yukarıdaki iki modeli diferansiyel denklem şeklinde de açıklayalım. Tabii şimdi hayvan nüfusunu nesilden nesile değil de, zamanla sürekli değişen bir N çokluğu olarak görmek zorundayız. O zaman $N_{n+1} = \mu N_n$ ve $N_{n+1} = \mu N_n(1 - N_n)$ yerine sırasıyla

$$\frac{dN}{dt} = \mu N \quad \text{ve} \quad \frac{dN}{dt} = \mu N(S - N)$$

gelir. Burada t zamandır ve μ pozitif veya negatif bir reel sayı olabilir. $\frac{dN}{dt}$ nüfusun artış (veya azalış) hızı demektir. $N_0 = N(0)$ başlangıç nüfusu ise, yukarıdaki diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$N(t) = N_0 e^{\mu t} \quad \text{ve} \quad N(t) = \frac{S N_0 e^{S \mu t}}{S - N_0 + N_0 e^{S \mu t}}$$

şeklinde dir.

İlk denklemde $\mu > 0$ ise, zaman ilerledikçe ($t \rightarrow \infty$), $N(t)$ sürekli artar ($N(t) \rightarrow \infty$); $\mu < 0$ ise sürekli azalır ($N(t) \rightarrow 0$). İkinci denklemde μ pozitif iken, $N = S$ ise, $\frac{dS}{dt} = 0$; $N > S$ ise, $\frac{dS}{dt} < 0$; ve $N < S$ ise $\frac{dS}{dt} > 0$ olur. Bunlar da sırasıyla, sabit kalan, azalan ve artan nüfusa karşılık gelirler. Yani, nüfus S 'nin altında kalmaya zorlanarak kendini dengeler. Yalnız $N_{n+1} = \mu N_n(1 - N_n)$ modelini ilginç kılan çevrimsel davranış artık görülmez.

Dinamik sistemlere bir örnek daha verelim. Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomunun derecesi $n = 1$ veya 2 ise, polinomun köklerini bulmak çok kolaydır; 3 veya 4 ise, kökleri veren formüller vardır, fakat bunları kullanmak zordur; 5 veya daha yüksekse, kökleri veren formüller bile bulmanın imkânsız olduğu gösterilmiştir. Newton metodu, son iki durumda kökleri yaklaşık olarak bulmamızı sağlar. x_0 bir reel sayı olsun.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})} \\ & \vdots \end{aligned}$$

yinelgen işleminin verdiği $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ dizisi, x_0 'in çoğu değeri için P 'nin köklerinden birine yakınsar. Görüldüğü gibi bu metot,

$$K(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

fonksiyonunun yinelemelerinden oluşan bir dinamik sistemdir, $P'(x) \neq 0$ olduğu sürece. Burada da anlaşılacak istenen $K(x)$ 'in değişik x 'ler için yinelemelerinin nereye varacağı ve hangi x_0 'lar için metodun bir köke yakınsamadığıdır.

C. $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$

Bu fonksiyonun önemi nüfus hareketlerini açıklamakla bitmiyor. Dinamik sistemlerin pek çok özelliğini de en basit haliyle gözler önüne sermekte. O yüzden bu yazının büyük kısmı bu fonksiyonun incelenmesine ayrıldı. Aslında elimizde bir değil, sonsuz sayıda fonksiyon var her reel μ 'ya karşılık gelen.

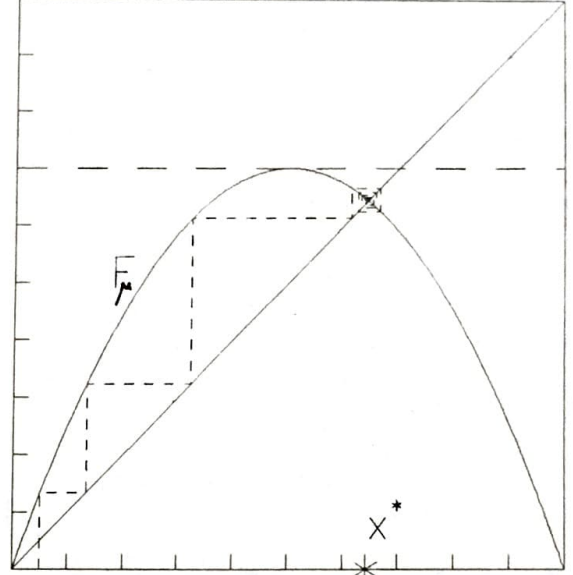
Yukarıda da yaptığımız gibi yalnız $I = [0, 1]$ kapalı aralıktaki x 'lerle ilgileneceğiz. Sürekli olması F_μ 'nun bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerini alacağını, türevli olması ise bu değerlere ya aralığın uç noktalarında, ya da türevinin 0 olduğu noktalarda ulaşacağını söyler. $F_\mu(x) = \mu x - \mu x^2$ ve türevi $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ 'tir. $F'_\mu(x) = 0$, μ 'dan bağımsız olarak yalnız $x = \frac{1}{2}$ noktasında gerçekleşir. Bütün μ 'lar için, $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ ve $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4}$ 'tür; ve bunlar F_μ 'nun minimum ve maksimum değerleridir, çünkü $\mu > 0$. Fonksiyonu yineleyebilmek, yani $F_\mu(F_\mu(x))$ 'i hesaplayabilmek için, $F_\mu(x)$ 'in de I 'da olması gerekir. Bu da μ 'nun 0 ile 4 arasında olmasını gerektirir.

Her ikisi de 0 ile 1 arasında olduklarından, x ve $F_\mu(x)$ birbirlerine eşit olabilirler. Böyle bir x noktasına F_μ fonksiyonunun *sabit noktası* denir. $\mu x - \mu x^2 = x$ ikinci derece denklemini çarpanlarına ayırarak çözer ve $x = 0$ ve

$$(†) \quad x = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

elde ederiz. 0 her μ için sabit noktadır, fakat x^* diyeceğimiz diğer x değeri yalnız $\mu > 1$ iken I 'dadır. Zaten F_μ , ancak $\mu > 3$ iken ilginç olmaya başlar. $\mu = 2.8$ için $x^* = \frac{1.8}{2.8} =$

0.64286... bulunur. Bu noktayı bulmanın en kolay yolu, F_μ 'nun grafiği ile $y = x$ doğrusunu kesiştirmektir, çünkü orada $y = F_\mu(x^*) = x^*$. Sabit noktaların yörüngeleri tek bir noktadan oluşur, kendileri. 1'in yörüngesinde ise yalnız 1 ve 0 vardır.



Şekil 1 ($\mu = 2.8$)

Bu iki sabit nokta arasında temel bir fark vardır. Bunu görmek için, 0'a çok yakın bir noktanın, örneğin $x_0 = 0.05$ 'in yörüngesine bakalım. Gereğinden fazla hesaba boğulmamak için Şekil 1'deki grafik yöntemini kullanacağız. Okuyucu hesap makinesi ile yapılanları kontrol etmelidir. $x = x_0$ 'da çizilen dikey bir doğru F_μ 'nun grafiğini $y_0 = F_\mu(x_0)$ yüksekliğinde keser. $F_\mu(F_\mu(x_0)) = F_\mu(y_0)$ 'i bulmak için, $x = y_0$ 'da dikey bir doğru çizmek gerekir. Bu noktayı ise y_0 yüksekliğinde yatay olarak $y = x$ doğrusunu kestiğimiz noktaya kadar ilerleyerek buluruz; burada $x = y = y_0$. Bu yeni x değerine x_1 diyelim; $x_1 = F_\mu(x_0)$. Şimdi $x = x_1$ 'de dikey yönde çiziceğimiz doğru F_μ 'nun grafiğini $y_1 = F_\mu(x_1) = F_\mu(y_0) = F_\mu(F_\mu(x_0))$ 'da kesecektir. Böylece F_μ 'yu yinelemiş olduk. $\mu = 2.8$ için $x_1 = y_0 = 0.133$ ve $y_1 = 0.32287...$ 'dir. Bundan sonra sırayla yatay ve dikey yönde gitmeye devam ederiz. Görüldüğü gibi, 0'a çok yakın bir yerden bile başlasak, x_0 'in yörüngesi, etrafında dönerek x^* 'a yaklaşır, ona hiç bir zaman ulaşmasa da [6]. Işığın etrafında uçan böcekler geliyor akla. 0, 1 ve x^* dışındaki bütün başlangıç değerleri için böyledir. $F_\mu(x)$ 'in n kere yinelenmiş halini $F_\mu^n(x)$ ile gösterelim; örneğin $F_\mu^2(x) = (F_\mu \circ F_\mu)(x) = F_\mu(F_\mu(x)) = \mu^2 x(1 - x)(1 - \mu x(1 - x))$. Bu gösterim F_μ 'nun n 'nci kuvveti $(F_\mu(x))^n$ 'den farklıdır. Yukarıdaki

cümleyi şimdi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = x^* \quad (x \neq 0, x \neq 1)$$

diye yazabiliriz. Yani x^* çeken ve 0 iten sabit noktalar. Bu fark nereden kaynaklanır? Grafiğe dikkatle bakılırsa, 0'da F_μ 'nin grafiğinin $y = x$ doğrusundan daha dik olduğu görülür; x^* 'daysa tersi doğrudur. Burada *diklikten* kasıt, F_μ 'nin grafiğine teğet olarak çizilen bir doğrunun eğiminin mutlak değeridir; teğetin yönü önemli değildir. $y = x$ doğrusunun dikliği her yerde 1'dir. Bir noktadaki türev o noktadaki eğimi verdiğinden, $|F'_\mu(0)| = \mu = 2.8 > 1$ ve $|F'_\mu(x^*)| = |2 - \mu| = 0.8 < 1$, bize $\mu = 2.8$ için neden 0'ın iten ve x^* 'ın çeken olduğunu gösterir.

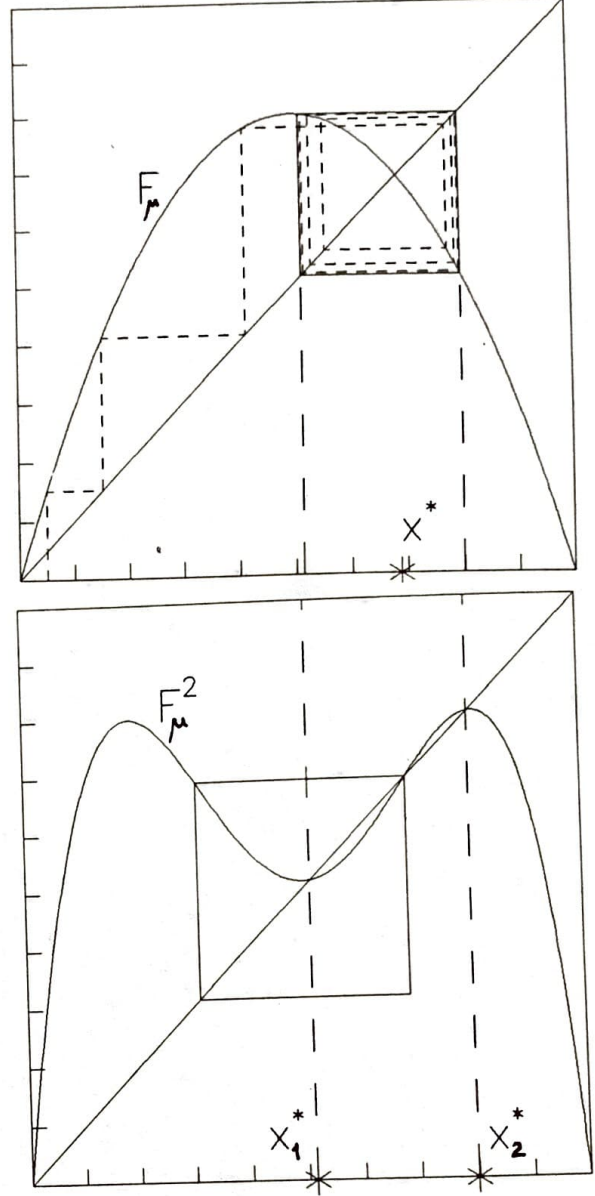
μ 'yu artırdığımızda ilginç bir durumla karşılaşırız. F_μ 'nin maksimum değeriyle birlikte $|F'_\mu(x^*)|$ da artar ve $\mu = 3 = M_0$ iken 1'i geçer. Şimdi $\mu = 3.2 > M_0$ olduğunda Şekil 2'den F_μ 'nin grafiğinin ve yinelemelerinin neler verdiğine bakalım. $x = 0.05$ başlangıç noktasının yörüngesi önce x^* 'a yaklaşır, fakat sonra onun iki yanındaki x_1^* ve x_2^* diyeceğimiz iki noktanın civarında gidip gelmeye başlar. Yani x_1^* ve x_2^* , *periyodu 2* olan bir *çevrim* meydana getirirler. Bu noktalar gene *çeker* olarak adlandırılırlar, çünkü yakınlarındaki noktaları diğerinin etrafına gönderseler de, ikisi birlikte uzaktaki noktaları üzerlerine çekerler.

Bu ikili çevrimi daha iyi anlamamanın yolu F_μ^2 'nin grafiğine bakmaktır. F_μ 'nin sabit noktaları F_μ^2 'nin de sabit noktalarıdır, çünkü $F_\mu(F_\mu(0)) = F_\mu(0) = 0$ ve $F_\mu(F_\mu(x^*)) = F_\mu(x^*) = x^*$. Ama şimdi iki sabit nokta daha vardır; x_1^* ve x_2^* , çünkü $F_\mu(F_\mu(x_1^*)) = F_\mu(x_2^*) = x_1^*$ ve $F_\mu(F_\mu(x_2^*)) = F_\mu(x_1^*) = x_2^*$. F_μ^2 'nin derecesi 4 olduğundan başka yoktur. İlk iki sabit nokta sayesinde $F_\mu^2(x) - x$ polinomunu çarpanlarına ayırıp diğer ikisini de buluruz:

$$(\dagger) \quad x_{1,2}^* = \frac{(\mu + 1) \mp \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

$\mu = 3.2$ için $x^* = \frac{2.2}{3.2} = 0.6875$, $x_1^* = 0.51304 \dots$ ve $x_2^* = 0.79946 \dots$ 'dır. 0'la birlikte bu dört nokta F_μ^2 'nin grafiğinin $y = x$ doğrusunu kestiği yerlerdir. 0 ve x^* 'da grafik $y = x$ 'ten daha diktir; diğerlerinde değildir. Bu da 0 ve x^* 'ın iten, x_1^* ve x_2^* 'ın çeken olduğunu söyler. Hatta, türevde zincir kuralından, $(F_\mu^2)'(x_1^*) = F'_\mu(F_\mu(x_1^*))F'_\mu(x_1^*) = F'_\mu(x_2^*)F'_\mu(x_1^*) = F'_\mu(x_2^*)F'_\mu(F_\mu(x_2^*)) = (F_\mu^2)'(x_2^*)$;

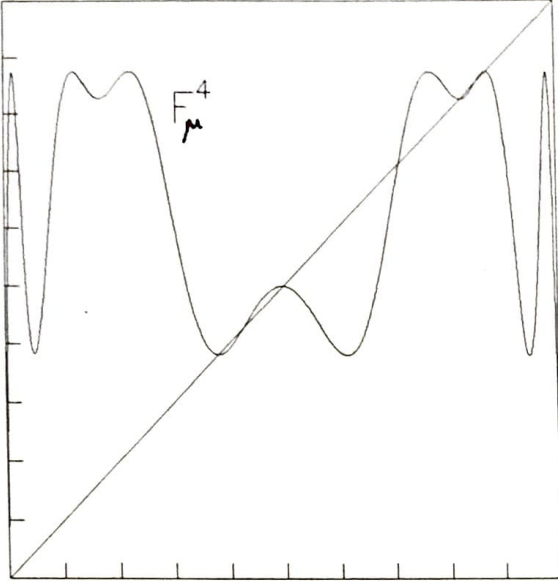
yani F_μ^2 'nin x_1^* ve x_2^* 'daki eğimleri eşittir.



Şekil 2 ($\mu = 3.2$)

x_1^* ve x_2^* , $\mu > M_0$ olduğunda ortaya çıkarlar. Tam $\mu = M_0$ iken $x^* = x_1^* = x_2^*$. Bir başka deyişle, μ M_0 'ı geçerken periyodu 1 olan çeker periyodu 2 olan bir çevrime parçalanır. μ arttıkça da x_1^* ve x_2^* birbirinden uzaklaşırlar. Aynı zamanda, F_μ^2 'nin bu noktadaki dikliği önce azalır, fakat sonra artar ve diyelim $\mu = M_1$ 'de $y = x$ doğrusununkini geçer. x_1^* ve x_2^* 'nin her biri aynı anda kendi ikili çevrimlerini doğurur. Tabii bunlar F_μ^2 için ikili çevrimlerdir; F_μ için hepsi birden periyodu 4 olan bir çevrimdir. M_1 değerini $(F_\mu^2)'(x_1^*) = -1$ eşitliğini çözerek buluruz. Uzun ve sıkıcı hesaplardan sonra bir ikinci derece denklemin çözümlerinden biri olarak $M_1 = 1 + \sqrt{6} = 3.44949 \dots$ çıkar. F_μ 'nin bu dörtlü çevriminin her noktası F_μ^4 'nin birer sabit

noktasıdır. F_μ^4 'nın F_μ^2 ve F_μ 'dan gelen 4 sabit noktası daha vardır. İlk 4 nokta çeker, diğerleri iter. Şekil 3'te $\mu = 3.5$ için F_μ^4 'nın 8 sabit noktası görülüyor.



Şekil 3 ($\mu = 3.5$)

Bundan sonra neler olacağını tahmin etmek zor olmasa gerek. μ çok az daha artırıldığında F_μ^4 'nın çeken sabit noktalarındaki dikliği, $\mu = M_2 = 3.54409 \dots$ 'da aynı anda 1'i geçer ve F_μ için bir sekizli çevrim elde edilir. Bir sonraki parçalanma $\mu = M_3 = 3.56441 \dots$ 'de, ondan sonraki $\mu = M_4 = 3.56876 \dots$ 'da, bunu takip eden de $\mu = M_5 = 3.56969 \dots$ 'da meydana gelir, ve sırasıyla on altılı, otuz ikili ve altmış dördü çevrimler ortaya çıkar. Yalnız artık bu değerleri, polinomların derecesi yükseldiği için bir denklem çözerek elde etmek ya çok güçtür, ya da imkânsızdır. Ama M_2 , M_3 , M_4 ve M_5 , programlı bir hesap makinesi veya bir bilgisayar kullanılarak yineleme ile bulunabilir. Mesela, M_2 'nin tahmini değerinden biraz küçük bir μ alınır ve rastgele bir x başlangıç sayısı girilerek, yineleme ile F_μ 'nın dördü çevrimi bulunur. $x = 0.5$ kullanmak yararlıdır, çünkü F_μ 'nın maksimum noktasıdır ve her μ 'da mutlaka çeken bir çevrime ulaşacağı gösterilebilir. Sonra μ yavaş yavaş artırılarak yineleme tekrarlanır ve F_μ 'nın dördü çevriminin hangi μ 'da sekizli çevrime parçalandığı gittikçe daha hassas olarak bulunur. Bulunan değer M_2 'dir. M_3 , M_4 ve M_5 için de aynı yöntem işler.

Dikkat edilirse, M_k değerleri k artırıldığında artmalarına rağmen birbirlerine yaklaşırlar ve

$$M_\infty = 3.569945671868 \dots$$

değerine yığılırlar. Burada ilginç olan, M_5 'in M_∞ 'a aşırı yakınlığına rağmen, bu dar aralıkta sonsuz kere çevrimlerin periyodu iki katına çıkar ve 2'nin her kuvvetinde periyodu olan çevrimler elde edilir. Diğer ilginç olan şey, $(M_k - M_{k-1}) / (M_{k+1} - M_k)$ oranıdır. İlk bir kaç M_k ile bu oranı hesap ettiğimizde sırasıyla $4.75146 \dots$, $4.65552 \dots$, $4.67126 \dots$ ve $4.67742 \dots$ buluruz. Bu oranın k arttıkça yaklaştığı değer de hesaplanabilir [5]:

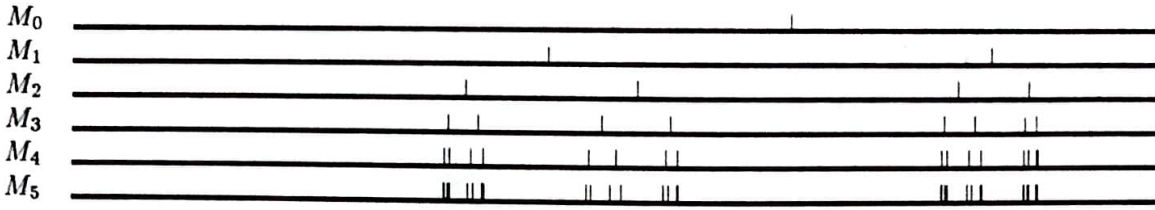
$$\delta = 4.669201660910299097 \dots$$

δ sayesinde, $\frac{M_5 - M_4}{M_6 - M_5} \approx 4.66920 \dots$ yaklaşık eşitliğinden M_6 'yı $3.56989 \dots$ diye, ve benzer şekilde M_7 'yi $3.56993 \dots$ diye tahmin edebiliriz.

Her M_k değerinde periyodu 2^k olan bir çevrim, ikiye parçalanarak periyodu 2^{k+1} olan bir çevrimi doğurur. Bu çevrimleri meydana getiren noktaları tam parçalanma anında hesap edebiliriz. Örneğin, (†)'de $\mu = M_0 = 3$ koyarak, $x^* = \frac{2}{3} = 0.66667 \dots$; ve (‡)'de $\mu = M_1 = 1 + \sqrt{6}$ koyarak,

$$x_{1,2}^* = \frac{2 + \sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{6})} = \begin{cases} 0.43996 \dots, \\ 0.84994 \dots, \end{cases}$$

buluruz. M_2 için, yukarıda tarif edilen yineleme yönteminde parçalanmadan hemen önce elde edilen dört değeri alırız; bunlar yaklaşık $0.36329 \dots$ ve $0.52359 \dots$ ile $0.81979 \dots$ ve $0.88405 \dots$ 'tir. İlk iki sayı yukarıdaki $0.43996 \dots$ 'nın, sonraki iki sayı ise $0.84994 \dots$ 'ün parçalanmasından ortaya çıkarlar. M_3 için aynı yöntemle, $0.34676 \dots$, $0.37477 \dots$, $0.49061 \dots$, $0.55427 \dots$; $0.80741 \dots$, $0.83520 \dots$; $0.88060 \dots$, $0.89079 \dots$ bulunur. M_4 için ise bölünme öncesi çevriminin noktaları $0.34341 \dots$, $0.34795 \dots$; $0.36790 \dots$, $0.37969 \dots$; $0.47834 \dots$, $0.50375 \dots$; $0.54994 \dots$, $0.56090 \dots$; $0.80468 \dots$, $0.80968 \dots$; $0.82992 \dots$, $0.84054 \dots$; $0.87895 \dots$, $0.88329 \dots$; $0.89052 \dots$, $0.89214 \dots$ 'tür. M_5 'teki çevrimin noktalarını vermiyoruz, çünkü tam 32 tane. Hepsinin ikiye ikiye bir önceki gruptaki hangi noktalardan doğdukları bellidir. Çevrim noktalarının $I = [0, 1]$ aralığındaki konumları Şekil 4'te görülüyor. Dikkat edilirse, en alt satırdaki ikinci sekizlik blok iki sıra yukarıdaki bütün noktaların sıkıştırılmış bir kopyasıdır; diğer sıralarda da gözlenebilir bu [6]. Gene yinelgen bir davranış elde ettik elimizdeki sistemden. Bu tip kendini doğuran davranışlar aslında bütün dinamik sistemlerin özelliğidir.



Şekil 4

k sonsuza giderken 2^k periyotlu noktaların oluşturduğu küme, daha önce bu dergideki bir yazıda [7] anlatılan bir genelleştirilmiş Cantor kümesidir. Yalnız burada kümemiz açık aralıklar atılarak değil, noktalar eklenerek inşa edilir. Dinamik sistemler gibi Cantor kümeleri de küçültülmüş kopyalarını sonsuz kere içlerinde barındırırlar. Böylece Cantor kümelerinin inşasına da bir dinamik sistem gözüyle bakabiliriz. Aynı noktadan doğan ikizlerin aralarındaki fark da gittikçe azalır, ama düzgün bir şekilde. Her gruptaki $\frac{1}{2}$ 'ye en yakın nokta sırasıyla $0.66667\ldots$, $0.43996\ldots$, $0.52359\ldots$, $0.49061\ldots$, $0.50375\ldots$ ve $0.49850\ldots$ 'dir. Bunların $\frac{1}{2}$ ile aralarındaki uzaklık düzgün şekilde azalır. Bir önceki uzaklığın bir sonrakine oranı α_k her defasında hemen hemen aynıdır ve

$$\alpha = 2.5029078750958928485\ldots$$

değerine yaklaştığı bulunmuştur. α , çevrim noktalarının I 'daki sıklığının bir göstergesidir. Aynı oran, bazı ikizler ile onları doğuran nokta ve onun ikizi arasında da görülür. α ve δ sayılarının değişik fonksiyonlarla bile ortaya çıkması şaşırtıcıdır.

Elimizdeki dinamik sistemin kendi kendisini doğurduğunu değişik bir açıdan tekrar görelim. Şekil 2'de, F_μ^2 'nin grafiğinin ortasındaki kareye dikkatle bakalım. Bu karenin sağ üst köşesi F_μ 'nin sabit noktası x^* 'dir. Sol üst köşesi F_μ 'nin, yüksekliği x^* 'daki yüksekliğine eşit diğer noktasıdır. $\mu x(1-x) = \frac{\mu-1}{\mu}$ eşitliğinden, orada $x = \frac{1}{\mu}$ 'dur. F_μ^2 'nin grafiğinin bu karenin içinde kalan kısmı, daha küçük bir μ için F_μ 'nin grafiğinin ters çevrilmiş küçük bir kopyasından başka bir şey değildir. Dolayısıyla F_μ^2 'yu, bu kareyi büyük kareye yayan bir normalleştirme operatörü altında dönüştürerek, F_μ 'ymuş gibi incelemek de mümkündür. Üstelik buradan, M_∞ değerinden önce F_μ 'nin çekere periyodunun sonsuz kere ikiye katlandığını görmek daha kolaydır. Şekil 3'teki F_μ^4 grafiğinin orta kısmının F_μ^2 'nin grafiğinin tepetaklak hali olduğunu görmek şaşırtıcı olmasa gerek artık.

D. Kaos ve Türbülans

Peki $\mu > M_\infty$ iken neler olur? Çoğu başlangıç değerinin yörüngesi gene bir çekere yakınsar, ama çekerin periyodu çok yüksek olabileceğinden, bunu sayılarla fark etmek imkânsızlaşır. Fakat artık bazı başlangıç değerlerinin yörüngeleri kaotiktir, yani sonlu hiç bir çekere yaklaşımadan I 'da dolanırlar. Mitolojide dünya kurulmadan önceki karışık ve belirsiz durumu anlatan kaos kelimesi bu yörüngeleri oldukça iyi betimliyor. Daha da ilginç olanı, birbirine çok yakın iki başlangıç değerinin yörüngeleri birbirinden tamamen farklı yerlere ulaşabilir. Bu özelliğe başlangıç şartlarına hassas bağımlılık denir ve kimi yazarlara göre kaos tanımlayan üç özellikten biridir [3]. Diğer ikisi de şöyledir: Fonksiyonumuz her hangi bir küçük aralıktaki noktaları yinelemeyle diğer her hangi bir küçük aralığa taşıyabilmelidir (topolojik geçişlilik); ve de fonksiyonumuzun periyodik noktaları tanım aralığında yoğun olmalıdır, yani tanım aralığındaki her noktaya istenildiği kadar yakın bir periyodik nokta bulunabilmelidir. Bu özelliklerden son ikisinin ilkinin gerektirdiği de biliniyor [1]. Bu özelliklerin şaka yollu bir açıklaması da şöyle: Çin'de bir kelebek kanatlarını çırpıp; günler sonra Meksika Körfezi'nde bir kasırga patlar.

Bazı $\mu > M_\infty$ değerleri için ise periyodu 3 olan noktalar ortaya çıkar. A kısmında baktığımız $\mu = 3.835$ bunlardan biridir. Periyodu 3 olan noktaların önemi bu dergide daha önce çıkan bir yazıda [2] verilen bir teoreme gösterilmişti. O teoreme göre, eğer sürekli bir fonksiyonun periyodu 3 olan bir noktası varsa, diğer her hangi bir periyotlu noktası da vardır. $\mu = 3.835$ 'in üçlü çevrimi çekendir, çünkü $|(F_\mu^3)'(0.15207\ldots)| = 0.39497\ldots < 1$. Dikliğün çevrimin diğer iki noktasında da aynı olduğunu biliyoruz artık. Yalnız periyodu 3'ten farklı noktaların hiç birisinin meydana getirdiği çevrimin çeken olmadığı biliniyor. Başlangıç değerlerine hassas bağımlılık yüzünden, hesap makinesi veya bilgisayarla bu çevrimleri bulmak imkânsızdır. μ ,

üçlü çevrimi veren değerlerin biraz ötesine geçtiğinde, bu çevrimler de ikiye parçalanırlar; sonra gene ikiye parçalanırlar, ve M_∞ 'dan önceki durum tekrarlanır. Sonunda $\mu = 4$ olduğunda, F_μ I 'nin her noktasında kaotiktir ve her x başlangıç değerinin yörüngesi sonlu bir çevrime ulaşmadan bu aralıkta gezinip durur.

Periyodik noktalar hakkında bir önceki paragrafta bahsettiğimiz teoremden daha çok bilgi veren bir teorem daha vardır ve doğal sayıların aşağıdaki sıralamasıyla ilgilidir:

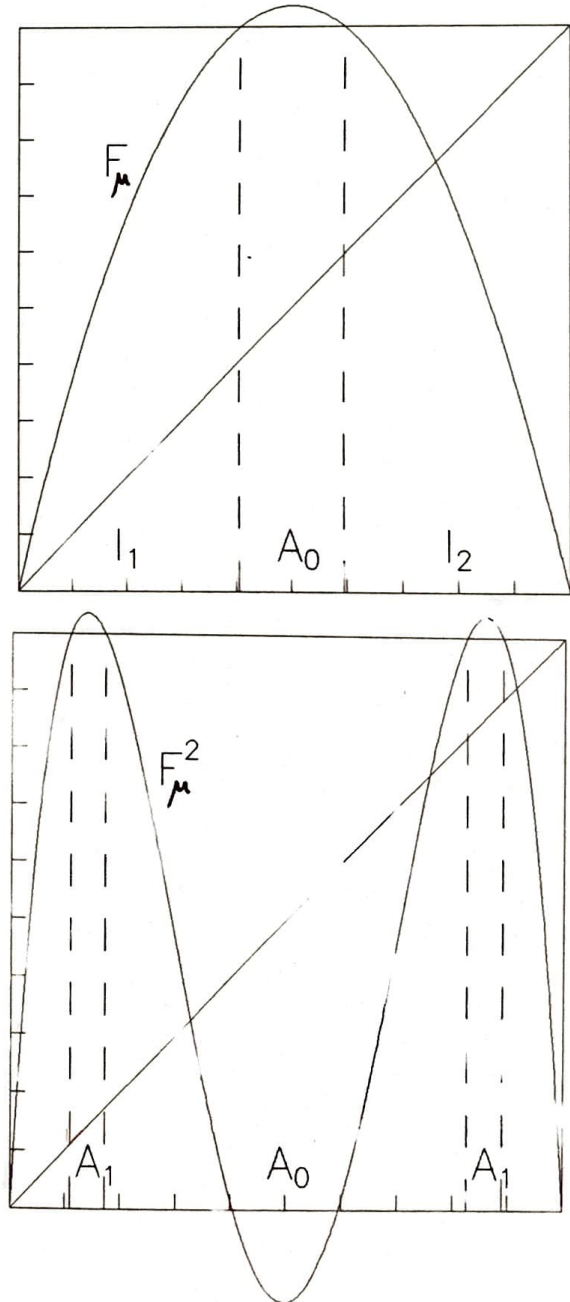
$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Bu sıralamada önce 3 ile başlayarak tek sayılar dizilir, sonra tek sayıların 2 ile çarpımları, sonra 2'nin karesi ile çarpımları, ve böyle devam edilir. Geriye yalnız 2'nin kuvvetleri kalır ve bunlar da ($2^0 = 1$ dahil) ters sıra halinde sona konur. Sarkovski tarafından keşfedilmiş olan teoreminiz, sürekli bir fonksiyonun her hangi bir doğal sayıda periyodu olan noktası varsa, sıralamamızda onun sağındaki bütün sayılarda da periyotlu noktaları olacağını söyler [3]. 3 en başta olduğundan, önceki teoremin doğruluğu bir defa daha görülür. Yukarıda baktığımız $\mu = 3.5$ halinde ise, dörtlü bir çevrim olduğu için, ikili çevrimlerin ve sabit noktaların da olacağı bellidir.

Artık dinamik sistemlerle akışkanlar mekaniği arasındaki ilişkiden söz edebiliriz. Rüzgârsız bir yerde tablada yanık duran bir sigaranın dumanına veya çok açmadığınız bir musluktan akan suya bakın. Akışkan (duman veya su) önce sakin ve düzgün akacak, kaynaktan uzaklaştıkça salınıp titreşmeye başlayacak ve sonunda karmakarışık bir şekilde akmaya başlayacaktır. Bu son duruma türbülans (çalkantı) adı verilir. Bizi asıl ilgilendiren, aradaki geçiş evresindeki salınımların F_μ 'nin periyodik noktaları arasındaki gidiş gelişlere benzediğidir. Bu konuda genel bir teori henüz yoktur. Bu derginin bir önceki sayısındaki bir yazıda [4], kaos ve türbülans teorilerinin daha geniş bir tartışması bulunuyor.

Bazı akışkanlar mekanikçileri, türbülansa geçişin F_μ 'nin M_∞ 'dan önceki davranışına benzettiler. Geçiş evresinde gittikçe daha fazla periyotta titreşimlerin ortaya çıktığını, ve M_∞ gibi bir noktada aniden başlayan tam türbülansın, sonsuz sayıda değişik periyotlu salınımların bir bileşkesi olduğunu ileri sürdüler. Diğer bazıları ise üçlü periyot üzerinde durdular ve önce sonlu sayıda değişik periyotlu titreşimlerin olacağını,

sonra da aniden üçlü bir periyodun doğurduğu bir garip çekerin tam türbülansı oluşturacağını iddia ettiler [8]. Garip çeker denilen şey, bizim şimdiye kadar gördüğümüz çekerlerden farklıdır ve en az iki boyutlu sistemlerde ortaya çıkar. Bizim çekerlerimizde (kaotik bölgede değil), birbirine yakın iki noktanın ikisinin de yörüngesi ya çekere yakınsar, ya da $\mp\infty$ 'dan birine kaçar. Garip çekerlerde böyle iki noktanın yörüngeleri sonsuza kaçmadan birbirinden uzaklaşabilir ve çekerin civarında ayrı ayrı yoğun kümeler oluşturabilir; bu çekerler kaotiktir. Garip sıfatı bunlara konuyu ilk inceleyenlerce verilmiştir ve matematiksel bir anlam ifade etmez.



Şekil 5 ($\mu = 4.15$)

E. Cantor Kümelerine Dönüş

Son olarak kabullenmelerimizden birinin dışına çıkıp $\mu > 4$ haline bakalım. Artık F_μ 'nın I üzerindeki maksimumu $\frac{\mu}{4} > 1$, ve Şekil 5'te de görüldüğü gibi, I 'nın tam ortasındaki bir A_0 açık aralığındaki x 'leri F_μ , I dışına taşır. Bu noktaların yörüngesi $-\infty$ 'a kaçar. Diğer bir yazışla, $x \in A_0$ ise $F_\mu(x) > 1$, $F_\mu^2(x) < 0$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = -\infty.$$

I 'nın geri kalan noktaları, bir kere F_μ uygulandığında I 'da kalırlar. Bunların A_1 kümesi diyeceğimiz bir kısmı, F_μ altında A_0 'a taşınırlar; bir kere daha F_μ uygularsak I 'nın dışına çıkarlar ve sonunda $-\infty$ 'a giderler. Geri kalanların bir kısmı (A_2), F_μ 'nın iki kere yinelenmesiyle A_0 'a girer, üçüncü yinelemede I dışına çıkarlar. Genelleyerek

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in I : F_\mu^n(x) \in A_0\} \\ &= \{x \in I : F_\mu^k(x) \in I \ (k \leq n), F_\mu^{n+1}(x) \notin I\} \end{aligned}$$

diyebiliriz. I 'dan bütün A_n 'lerin atılmasıyla kalan ve yörüngeleri I 'dan kaçmayan noktalardan meydana gelen

$$C = I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

kümesini daha iyi anlamak istiyoruz.

$$\mu > 4 \text{ ve } F_\mu(x) = \mu x(1-x) = 1 \text{ ise}$$

$$x = a_{1,2} = \frac{\mu \mp \sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu} \in I$$

olur. O halde $I \setminus A_0$ iki kapalı aralığın bileşimidir: $I_1 = [0, a_1]$ ve $I_2 = [a_2, 1]$. Hem I_1 'in hem de I_2 'nin F_μ altındaki görüntüsü I 'yı tamamen örter: $F_\mu(I_1) = F_\mu(I_2) = I$. I_1 (I_2) üzerinde F_μ tekdüze artandır (azalandır), yani bire birdir. Dolayısıyla, hem I_1 'in hem de I_2 'nin ortasında, F_μ altında A_0 'a taşınan birer açık aralık vardır; bileşimlerine A_1 deriz. $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ dört tane kapalı aralıktan meydana gelir ve F_μ her birini tekdüze olarak I_0 veya I_1 üzerine, F_μ^2 ise gene tekdüze I üzerine gönderir. Önceki adımdaki gibi, bu dört aralığın her birinin ortasında, F_μ^2 tarafından A_0 'a gönderilen birer açık aralık bulunur, ki bunlar A_2 dediğimiz kümedir. Bahsedilen aralıklar Şekil 5'te F_μ 'nın grafiği ile birlikte görülüyor. Genel olarak A_n , 2^n tane ayrık açık aralıktan oluşur, $I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$

ise 2^{n+1} tane kapalı aralıktan. F_μ^{n+1} bu kapalı aralıkların her birini tekdüze ve üzerine olarak I 'ya gönderir, ve her birinde değişmeli olarak artan ve azalandır. F_μ^{n+1} 'nin grafiği 2^n hörgüçlüdür ve $y = x$ doğrusunu en az 2^n yerde keser. Buradan da F_μ^n 'nin en az 2^n sabit noktası olduğu, ya da F_μ 'nın periyodu n olan en az 2^n noktası olduğu ortaya çıkar. Şimdiye kadar yaptığımız iş [7]'de anlatılan Cantor kümesi inşasından farksızdır ve C bir genelleştirilmiş Cantor kümesidir.

C 'deki bir noktanın F_μ altındaki yörüngesi tamamıyla C 'de kalır, çünkü dışarı kaçan noktalar A_k 'lerin birindedir. Dahası da var. F_μ 'nın a_1 ve a_2 'deki dikliği $\beta = |F'_\mu(a_1)| = |F'_\mu(a_2)| = \sqrt{\mu(\mu-4)}$. Şekil 5'teki grafikten de görüleceği gibi, eğer β 'nın 1'den büyük olmasını sağlarsak, F_μ 'nın I_1 ve I_2 üzerindeki dikliği 1'den büyük olur. $C \subset I_1 \cup I_2$ olduğundan, aynı şartlar altında, C noktalarındaki diklik de 1'den büyüktür. Sonuç olarak, $\beta > 1$ eşitsizliğinin sağlandığı

$$\mu > 2 + \sqrt{5}$$

değerlerinde, C kümesinin tamamı iten noktalar-dan oluşur.

KAYNAKÇA

- [1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis & P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, *American Mathematical Monthly*, **99**, 332-334 (1992).
- [2] B. Demir, *Ara Değer Teoremi ve Periyodik Noktalar*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 5, 7-9 (1993).
- [3] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2 baskı, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [4] A. Eden, *Katastrof ve Kaos Teorileri Hakkında*, *Matematik Dünyası*, **4**, sayı 1, 6-11 (1994).
- [5] M.J. Feigenbaum, *Universal Behavior in Non-linear Systems*, *Los Alamos Science*, **1**, Yaz, 4-27 (1980).
- [6] D.R. Hofstadter, *Mathematical Themes*, *Scientific American*, **245**, Kasım, 16-29 (1981).
- [7] H.T. Kaptanoğlu, *Cantor Kümeleri*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 4, 15-23 (1993).
- [8] P.C. Martin, *Instabilities, Oscillations, and Chaos*, *Journal de Physique*, **37**, C1, 57-66 (1976).

L'HÔPITAL KURALI ÜSTÜNE

Mefharet Kocatepe *

Belirsiz limit hesaplarında oldukça yaygın olarak kullanılan bir kural vardır: L'Hôpital Kuralı. Bu yazımın konusu olan bu kuraldan önce biraz tarihçesinden söz edelim.

Bu kuralın aslında John Bernoulli'ye ait olduğunu biliyor muydunuz? [2] numaralı kaynakta çıkan bir yazıya göre, 1694 yılında John Bernoulli (1667-1748), soylu bir Fransız ailesinden gelen ve amatör bir matematikçi olan eski öğrencisi l'Hôpital (1661-1704) ile bir anlaşma yapar. Bu anlaşmaya göre Bernoulli, l'Hôpital için problemler çözecek ve onu analiz (calculus) konusundaki güncel gelişmelerden haberdar edecek, buna karşılık olarak l'Hôpital kendisine yılda 300 pound verecektir. Bu problemlerden birisi de 0/0 problemi olarak bilinen limit problemidir ve anlaşmaya göre Bernoulli bu problemi çözer. l'Hôpital 1696 yılında analiz notlarını bir kitap halinde yayınladığında 0/0 kuralı da bir teorem olarak bu kitapta görülür. Ancak l'Hôpital, kitabında bu kuralın Bernoulli'ye ait olduğunu belirtmiştir. Ayrıca kitaptaki tüm malzemenin kendisine ait olduğu izlenimini vermemek için de kitaba kendi adını koymamıştır. Fakat yine de Bernoulli, l'Hôpital'i kopyacılıkla suçlamıştır. Bu suçlamadan haberdar olmayan yayınevi l'Hôpital'in ölümünden sonra, kitabı l'Hôpital'in adıyla tekrar yayınlayıp yangına körükle gitmiştir. Ancak yakın geçmişte, tarih Bernoulli'nin iddiasını kabul etmiştir, ama kural yine de l'Hôpital Kuralı olarak anılmaktadır.

l'Hôpital Kuralı çok kullanışlı ve popüler bir kuraldır. Ancak bazı durumlarda yanlış kullanılmaktadır. Bu yazımızda bu noktaya da dikkatinizi çekmek istiyoruz.

Bu kuralın kanıtı için önce Rolle Teoremi gereklidir (bakınız [1]).

Rolle Teoremi. $[a, b]$ üzerinde sürekli, (a, b) üzerinde türevlenebilir olan f fonksiyonu, $f(a) = f(b)$ koşulunu sağlarsa, (a, b) aralığı içinde, $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir x_0 noktası vardır.

Cauchy Ortalama Değer Teoremi. $[a, b]$ üzerinde sürekli, (a, b) üzerinde türevlenebilir olan f ve g fonksiyonları için, (a, b) aralığında,

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

eşitliğini sağlayan bir x_0 noktası vardır.

Kanıt. $g(a) = g(b)$ ise Rolle Teoremini $[a, b]$ üzerinde g fonksiyonuna uygulayarak, $g'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a, b)$ sayısı buluruz. Bu durumda yukarıdaki eşitlik, her iki tarafı da 0 olduğu için sağlanır.

$g(a) \neq g(b)$ ise

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ve $F(x) = f(x) - Kg(x)$ olsun. F fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir. $F(a) = F(b)$ koşulu da K 'nin tanımından dolayı sağlandığı için Rolle Teoremini F fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde uygulayabilir ve $F'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a, b)$ sayısı buluruz. $F'(x_0) = 0$ eşitliği teoremin ifadesindeki eşitlikle eş anlamlıdır.

L'Hôpital Kuralı. f ve g fonksiyonları

(i) (a, b) üzerinde türevlenebilir,

(ii) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$,

(iii) her $x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$,

(iv) $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

ise, $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ dir.

Kanıt. $f(a) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = 0$ ve aynı şekilde $g(a) = 0$ olarak tanımlayalım ve f ve g fonksiyonlarını $[a, b)$ aralığına sürekli olarak

* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

genişletelim. Herhangi bir $a < x < b$ noktası alalım ve Cauchy Ortalama Değer Teoremini, $[a, x]$ aralığı üstünde f ve g fonksiyonlarına uygulayalım. Buna göre,

$$(f(x) - \underbrace{f(a)}_0)g'(x_0) = (g(x) - \underbrace{g(a)}_0)f'(x_0)$$

eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a, x)$ sayısı vardır. Hipotez gereği $g'(x_0) \neq 0$. $g(x) = 0$ olsaydı, Rolle Teoremini $[a, x]$ aralığı üstünde g fonksiyonuna uygulayarak, $g'(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (a, x) \subset (a, b)$ bulabilecektik. Bu da hipotezle çelişeceğinden, $g(x) \neq 0$ olmak zorundadır. Böylece yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını, sıfırdan farklı olan $g(x)g'(x_0)$ sayısı ile bölerek,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

buluruz. Bu x_0 sayısı a ile x arasında olduğu için x 'e bağımlıdır; bu nedenle $x_0 = x_0(x)$ olarak yazalım ve $\lim_{x \downarrow a} x_0(x) = a$ olduğunu gözleyelim. Böylece

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x_0(x))}{g'(x_0(x))} = \lim_{t \downarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

bulunur.

Not. (a) Bu kuralda bütün $\lim_{x \downarrow a}$ yerine $\lim_{x \uparrow a}$ veya $\lim_{x \rightarrow a}$ konursa kural yine geçerlidir, fakat hipotez (i) ve (iii)'teki aralıkların uygun bir şekilde değiştirilmesi gerekir.

(b) a bir gerçel sayı veya $+\infty$ veya $-\infty$ olabilir.

(c) L bir gerçel sayı veya $+\infty$ veya $-\infty$ olabilir.

(d) Bu kural yalnızca $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz durumlarında uygulanır.

Örnek 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = ?$ Burada $f(x) = x - \sin x$ ve $g(x) = x^3$ tür. Kuralın tüm hipotezleri sağlanmaktadır (özellikle $x = 0$ 'ın herhangi t ir delik komşuluğunda $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ olduğuna dikkat edelim). Kuralı bir kere uygulayarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad \left(\text{hâlâ } \frac{0}{0} \right)$$

bulunur. Kuralı bir daha uygulayarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

bulunur.

Örnek 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = ?$ Burada limitin sağdan veya soldan oluşuna göre $+\infty - \infty$ veya $-\infty + \infty$ belirsizliği vardır. Ancak kuralı uygulayabilmek için, yukarıdaki ifadeyi bölüm şeklinde yazmak gerekir.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

ifadesine kuralı iki kere uygulayarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$$

bulunur.

Örnek 3. $\lim_{x \uparrow \infty} \sin x$ limiti bulunamamış olduğundan $\lim_{x \uparrow \infty} e^{-\sin x}$ limiti de yoktur. Fakat yukarıdaki ifadeyi

$$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{(2x + \sin 2x)e^{\sin x}}$$

şeklinde yazalım. $2x + \sin 2x \geq 2x - 1$ ve $(2x + \sin 2x)e^{\sin x} \leq (2x + 1)e$ olduğundan, yukarıdaki ifade $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği şeklindedir. L'Hôpital kuralını uygularsak

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow \infty} \frac{2 + 2 \cos 2x}{(2 + 2 \cos 2x)e^{\sin x} + (2x + \sin 2x) \cos x e^{\sin x}} \\ = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{4 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x (4 \cos x + 2x + \sin 2x)} \\ = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{4 \cos x}{e^{\sin x} (4 \cos x + 2x + \sin 2x)} = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradaki son eşitliği şöylece gösterebiliriz:

$$-4 \leq 4 \cos x \leq 4$$

ve

$$e(2x+5) \geq e^{\sin x} (4 \cos x + 2x + \sin 2x) \geq \frac{(2x-5)}{e}$$

olduğu için, yeterince büyük x 'ler için

$$\frac{-4}{e(2x+5)} \leq \frac{4 \cos x}{e^{\sin x} (4 \cos x + 2x + \sin 2x)} \leq \frac{4e}{2x-5},$$

ve iki uçtaki terimin $x \uparrow \infty$ için limitleri 0 olduğundan (yani eşit olduğundan) ortadaki ifadenin de limiti 0'dır. (Bu kurala *Sıkıştırma Kuralı* veya *Sandviç Teoremi* denir.)

Gördüğünüz gibi bu örnekte iki farklı yanıt bulduk: *limit yok* ve *limit = 0*. Bu çelişkiyi nasıl açıklarız? L'Hôpital kuralını genişletilmiş kesire uygularken, $f(x) = 2x + \sin 2x$ ve $g(x) = (2x + \sin 2x)e^{\sin x}$ 'tir ve aralığımız da bir $a > 0$ için (a, ∞) aralığıdır. Bu aralıkta f ve g türevlenebilir. Fakat

$$g'(x) = e^{\sin x} \cos x (4 \cos x + 2x + \sin 2x)$$

ifadesi $\cos x$ teriminden dolayı her (a, ∞) aralığında sonsuz noktada sıfır olur. Sonuç olarak kuralımızdaki hipotez (iii) sağlanmamıştır ve bizim l'Hôpital kuralını uygulamamız yasal değildir. Sorunun doğru yanıtı *limit yoktur*.

Örnek 4. $g(x) = \sin x$ ve $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ için $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitine bakalım. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ve $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$ olduğundan Sıkıştırma Kuralına göre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ olur. L'Hôpital Kuralını uygulayarak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x} \stackrel{\text{tanım}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} h(x). \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = A$ olsaydı, $\cos(1/x) = 2x \sin(1/x) - h(x) \cos x$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x) = 0 - A \cdot 1 = -A$$

olacaktı. ($\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ olduğu yine Sıkıştırma Kuralı ile gösterilebilir.) Oysa $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ limitinin olmadığı açıktır.

(Niçin?) Bu hesaba göre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti yoktur. Öte yandan,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x}{\sin x}$$

şeklinde yazalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

limitlerini kullanarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

bulunur. Yine çelişkili bir sonuç elde ettik. Bu kez de l'Hôpital kuralının (iv) numaralı hipotezini ihlal ettik. Bu hipoteze göre ancak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$

L limiti varsa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti hakkında birşey söyleyebiliyoruz. Fakat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti yoksa kural hiçbir şey söylememektedir, yani kuralı uygulayamayız. Sonuç olarak bu sorunun doğru yanıtı *limit = 0* 'dır.

Gördüğümüz gibi l'Hôpital kuralı çok kullanışlı bir kuraldır, fakat kolaylıkla hatalı kullanılabilir ve yanlış sonuçlar elde edilebilir. Bu yüzden, bu kuralı kullanırken lütfen dikkatli olalım.

KAYNAKÇA

- [1] Ş. Alpay, *Rolle ve Ortalama Değer Teoremi, Matematik Dünyası*, 2, sayı 5, 16-18 (1992).
- [2] G.B. Thomas & R.L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 8. baskı, Addison-Wesley, 1992.

GEOMETRİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Alparslan Ertuğ

Geometri problemleri çözülürken genellikle üç temel yöntem kullanılır: Geometrik, cebirsel ve birleşik yöntem. Geometrik yöntem, bilinen bir dizi teoremden mantıksal önermeler yardımıyla istenen ifadenin çıkarılmasıdır. Cebirsel yöntem ise geometrik büyüklükler arasındaki çeşitli ilişkileri esas alan bir denklem ya da denklem sistemi kurularak, ya istenen büyüklüklerin doğrudan doğruya hesaplanması ya da bir ifadenin ispatlanmasıdır. Birleşik yöntemde ise, çözümün bazı adımlarında bir geometrik yöntem, diğer adımlarında ise cebirsel bir yöntem kullanılır.

Hangi çözüm yolu seçilirse seçilsin, bunun başarıyla uygulanması, teoremlerin ve onların kullanımının bilinmesine bağlıdır. Burada düzlem geometrinin bütün teoremlerinden söz etmeyeceğiz.

Geometri problemlerini çözerken sık sık, iki doğru parçasının ya da iki açının birbirine eşit olduğunu kanıtlamamız gerekir. Aşağıda, iki doğru parçasının (uzunlukça) eşit olduğunun kanıtlanmasının üç temel yolu verilmiştir:

1. Doğru parçalarını iki üçgenin kenarları olarak kabul eder ve bu üçgenlerin eşit olduklarını ispatlarız.

2. Doğru parçalarını bir üçgenin kenarları olarak kabul eder ve bu üçgenin ikizkenar olduğunu ispatlarız.

3. Verilen a doğru parçasını kendisine eşit bir a' doğru parçasıyla ve b doğru parçasını kendisine eşit bir b' doğru parçasıyla değiştirir, a' ve b' doğru parçalarının birbirine eşit olduğunu ispatlarız.

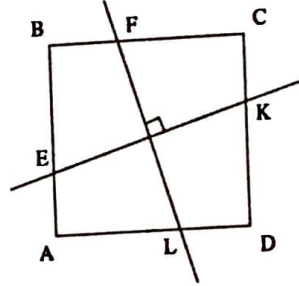
Geometri problemlerini çözerken;

- * verilen şekildeki doğruya paralel ya da dik bir doğru çizmek;
- * üçgenin kenarortayını kendisi kadar uzatarak üçgeni paralelkenara çevirmek;
- * yardımcı bir çember çizmek;
- * bir doğrunun çembere teğet olduğu ya da iki çemberin birbirine teğet olduğu noktalardaki

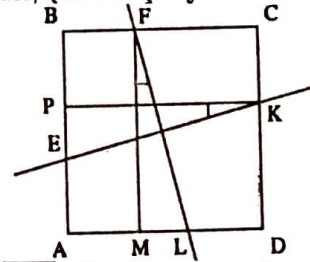
yarıçaplarını çizmek;

gibi ek yapılar oluşturmak yoluna da gidebiliriz.

Örnek 1. Birbirine dik iki doğru, $ABCD$ dörtgeninin AB , BC , CD ve AD kenarlarını sırasıyla E , F , K ve L noktalarında kesiyor. $EK = FL$ olduğunu gösteriniz (Şekil 1).

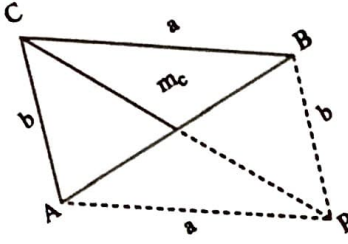


Çözüm. Yukarıda belirtilen yollardan birincisini uygulayarak, CD 'ye paralel FM ve AD 'ye paralel KP doğru parçalarını çizelim. Böylece EK ve FL doğru parçaları, EKP ve FLM dik üçgenlerinin kenarları haline gelirler (Şekil 2). Bu iki üçgenin eşit olduğunun kanıtlanması, çözüm için yeterli olacaktır.



$\overline{PK} = \overline{FM}$ (verilen karenin yükseklikleri), $\angle LFM = \angle EKP$ (kenarları birbirine dik açılar). Bir kenarları ve bir dar açıları eşit olan iki dik üçgen birbirine eşit olduğundan, $\triangle EKP = \triangle FLM$ olacaktır. O halde bu iki dik üçgenin hipotenüsleri de birbirine eşittir. Yani $\overline{EK} = \overline{FL}$ olmaktadır.

Örnek 2. Kenarları a , b ve c olan bir üçgenin c kenarına ait kenarortayının uzunluğunu hesaplayınız.



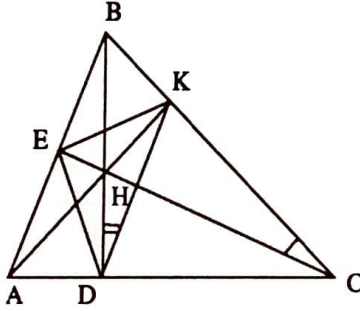
Çözüm. Kenarortayı kendisi kadar uzatıp $ACBP$ paralelkenarını oluşturalım (Şekil 3). Paralelkenarda metrik bağıntıyı uygulayarak $\overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{BC}^2$ yazabiliriz. Buradan $(2V_c)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$ ve

$$V_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

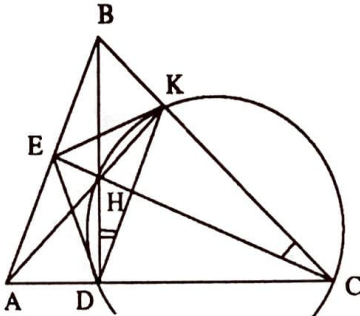
elde edilir.

Örnek 3. Bir dar açılı üçgenin ortosantırının, yüksekliklerin ayaklarının oluşturduğu üçgenin içteğet çemberinin merkeziyle çakıştığını kanıtlayınız.

Çözüm: Bir üçgenin iç teğet çemberinin merkezinin, açıortayların kesim noktası olduğu göz önüne alındığında, problem DH , EH ve KH 'nın, DEK üçgeninin açıortayları olduğunun kanıtlanmasına indirgenmiş olur (Şekil 4).



Bunun için de, $\angle EDH = \angle HDK$ olduğunun kanıtlanması yeterli olacaktır.



$DHCK$ dörtgenini göz önüne alalım: $\angle HDC = 90^\circ$ ve $\angle HCK = 90^\circ$. Buradan $\angle HDC + \angle HCK = 180^\circ$ bulunur. O halde $DHCK$

dörtgeninin çevresine bir çember çizilebilir. Bu çemberi çizelim (Şekil 5). HK yayını gören çevre açılar olmaları nedeniyle $\angle HDK = \angle EDH$ bulunur. Öte yandan kenarları birbirine dik açılar olmaları nedeniyle $\angle EAH = \angle HCK$ yazılabilir, ve buradan da $\angle EDH = \angle HDK$ elde edilmiş olur.

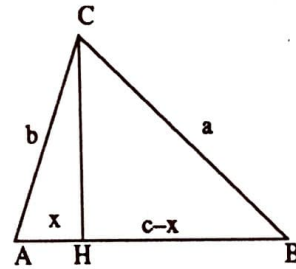
Geometri problemlerini cebirsel yöntemle çözerken gerekli denklemleri kurmak için, Pisagor teoremi, dik üçgende metrik ilişkiler, bir dik üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişkiler, benzer üçgenlerin kenarları, yükseklikleri ve çevrelerinin orantılılığı, açıortay özellikleri, paralelkenar ve çemberdeki metrik ilişkiler, sinüs ve kosinüs teoremleri ile alan hesabı formüllerinden yararlanılır.

Bir referans elemanı yöntemi ise, geometri problemlerini çözerken denklem kurmak için temel bir yöntemdir. Bu yöntem şöyle özetlenebilir. Bir ve aynı eleman (bilinen ve bilinmeyenler cinsinden) iki farklı yolla ifade edilir ve bu ifadeler birbirine eşitlenir. Referans elemanı olarak alan kullanılırsa, problemin alanlar yöntemiyle çözüldüğü söylenir.

Örnek 4. Kenarları a , b ve c olan bir üçgenin h_c yüksekliğini hesaplayın.

Çözüm. Birinci Yöntem. h_c yüksekliği, ACH ve CHB dik üçgenlerinin ortak kenarıdır (Şekil 5). (CH kenarını referans elemanı olarak alıp) Pisagor teoremini uygulayarak, $\overline{CH}^2$ 'yi hem ACH hem de CHB üçgeni için ifade ederiz.

$\overline{AH} = x$ olsun. $\overline{BH} = c - x$ olacaktır. Eğer ACB üçgeni geniş açılı üçgen ise, $\overline{BH} = c + x$ olacaktır (Şekil 6).



Biz burada yalnızca Şekil 5'teki durumu ele alacağız.

ACH üçgeninden $\overline{CH}^2 = b^2 - x^2$, BCH üçgeninden ise $\overline{CH}^2 = a^2 - (c - x)^2$ olarak bulunur. $\overline{CH}^2$ değerlerini birbirine eşitlersek,, $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$ bulunur. Buradan

$$x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$$

elde edilir. ACH üçgeninde Pisagor teoremini uygulayarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(b - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)} \\ &= \frac{1}{2c} \sqrt{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)} \\ &= \frac{1}{2c} \sqrt{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)(a + b + c)}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İkinci Yöntem. Alanlar yöntemini kullanalım. ABC üçgeninin alanı, bir yandan $S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ formülünden, öte yandan $S = \frac{1}{2}ch_c$ formülünden hesaplanabilir. Bu ifadelerin eşitlenmesiyle

$$\frac{1}{2}ch_c = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

elde edilir, ve buradan da

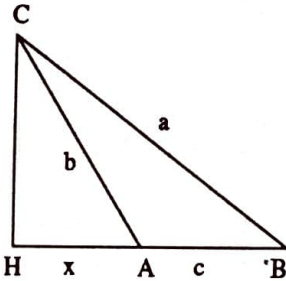
$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

bulunur. Bu ifadede $u = \frac{a+b+c}{2}$ değerini yerine koyarsak, aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$h_c = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c}$$

Örnek 5. Bir üçgenin kenarları a , b ve c olsun. C açısının açıortayı n_c 'yi hesaplayınız.

Çözüm. Birinci Yöntem (Cebirsel). ABC üçgeninin C açısının açıortayı CD olsun (Şekil 7).



Çözüm yolu şöyle olacaktır.

AB ve BD doğru parçalarının uzunluklarını buluruz. ACD ve BCD üçgenlerine kosinüs teoremini uygulayarak ve $\angle ACD = \angle DCB$ olduğunu göz önüne alarak CD yi buluruz. (Ko-

laylık olması açısından $CD = 1$ ve $\angle ACD = \angle DCB = t$ olarak alınmıştır.) $AD = x$ ve $BD = y$ olsun. O halde $x + y = c$ olacaktır. Öte yandan açıortay özelliğinden; $x/y = a/b$ olduğu bilinmektedir. Bu iki denklemden $x = bc/(a+b)$ ve $y = ac/(a+b)$ olarak elde edilir. ACD üçgenine kosinüs teoremini uygulayarak

$$x^2 = b^2 + l^2 - 2bl \cos t; \quad (1)$$

BCD üçgeninde kosinüs teoremini yazarak

$$y^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos t \quad (2)$$

bulunur. (1) eşitliğinin iki tarafını a ile ve (2) eşitliğinin iki tarafını $-b$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak $ax^2 - by^2 = ab^2 - a^2b + al^2 - bl^2$ elde ederiz. Buradan da

$$l^2 = \frac{1}{a-b} (x^2a - y^2b) + ab \quad (3)$$

bulunur. x ve y için yukarıda bulunan ifadeler (3) eşitliğinde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}l^2 &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{b^2c^2a}{(a+b)^2} - \frac{a^2c^2b}{(a+b)^2} \right) + ab \\ &= ab \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) \\ &= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir, ve buradan da

$$l = \overline{CD} = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

bulunur.

İkinci Yöntem. Bulmak istediğimiz bilinmeyen yanına bir yardımcı bilinmeyen ekleyelim ve $x = \angle ACD = \angle DCB$ diyelim, ve alanlar yöntemini kullanalım: $S_{ACD} + S_{BCD} = S_{ABC}$. Öte yandan

$$\begin{aligned}S_{ABC} &= \frac{1}{2}ab \sin 2x \\ S_{ACD} &= \frac{1}{2}bl \sin x \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2}al \sin x\end{aligned}$$

değerlerini göz önüne alarak;

$$\frac{1}{2}ab \sin 2x = \frac{1}{2}al \sin x + \frac{1}{2}bl \sin x$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da

$$ab \sin x \cos x = \frac{1}{2}(\ell(a+b) \sin x),$$

$$\ell = \frac{2ab \cos x}{(a+b)}$$

buluruz.

$\cos x$ 'i bulmak için ABC üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2x$ ve

$$\cos 2x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Öte yandan

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}.$$

Buradan da

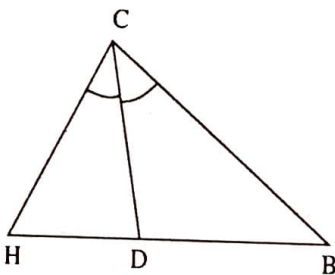
$$l = \frac{2ab \cos x}{a+b} = \frac{ab}{a+b} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$$

$$= \sqrt{\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{a+b}}$$

değerini elde ederiz.

Geometri problemlerinin çözümü için denklem kurarken, çözümü kolaylaştırmak için zaman zaman yeni bilinmeyenlerin eklenmesi gerekebilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle açıklayalım:

Örnek 6. Bir dik üçgende hipotenüs c ve dar açılardan birinin açıortayının ölçüsü $c\frac{\sqrt{3}}{3}$ 'tür. Dik kenarları bulun (Şekil 8).



Çözüm. Birinci Yöntem. $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$ diyelim. Pisagor teoreminden

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad \text{ve} \quad x^2 + z^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

yazabiliriz. Öte yandan, açıortay özelliğinden

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}$$

yazabiliriz. Sonuçta aşağıdaki üç bilinmeyenli denklem sistemini elde ederiz:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$x^2 + z^2 = \frac{c^2}{3}$$

$$\frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}$$

Bu sistemin çözülmesi ise bir hayli zordur.

İkinci Yöntem. $\angle CAD = \angle BAD = x$ diyelim. AC doğru parçasını bir referans elemanı olarak kullanarak bir denklem kuralım. ABC üçgeninden $\overline{AC} = c \cos 2x$; ACD üçgeninden ise $\overline{AC} = \frac{c\sqrt{3}}{3} \cos x$ bulunur. Bu ifadeleri eşitleyerek aşağıdaki trigonometrik denklemi elde ederiz:

$$c \cos 2x = \frac{c\sqrt{3}}{3} \cos x.$$

Bu eşitliği çözersek

$$\sqrt{3} \cos 2x = \cos x$$

$$\sqrt{3}(2 \cos^2 x - 1) = \cos x$$

$$2\sqrt{3} \cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} = 0$$

buluruz ve buradan da $\cos x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ elde ederiz. Problemin verilmesine göre $\cos x > 0$ olmalıdır. O halde,

$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \angle BAD = 30^\circ, \angle BAC = 60^\circ$$

olacaktır. Bunları kullanarak

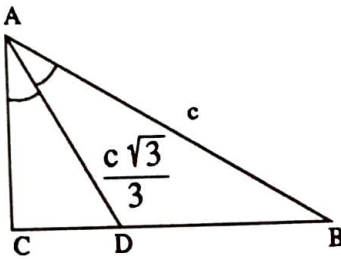
$$\overline{AC} = \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \overline{BC} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

sonucunu buluruz.

Eğer bir problemde (uzunluklar ya da alanlar gibi) bazı büyüklüklerin oranının bulunması gerekiyorsa ya da özel olarak bir açının hesaplanması gerekiyorsa (bu durum, o açının bir fonksiyonunun bulunmasına ve dolayısıyla da bir dik üçgenin kenarlarının oranının hesaplanmasına indirgenebilir), genellikle aşağıdaki yolu izleriz:

Doğrusal elemanlardan birini bilinen kabul eder, hesaplanması istenen büyüklükleri bu eleman cinsinden ifade eder ve sonra da bunların oranını oluştururuz. Bu doğrusal elemana yardımcı parametre denir ve bu çözüm yolu **yardımcı parametre kullanılması yöntemi** olarak adlandırılır. Geometrik şekillerin benzerliğinin söz konusu olduğu problemlerin çözümünde kullanılır.

Örnek 7. Bir ABC dik üçgeninin hipotenüsüne ait kenarortayı ile yüksekliği arasındaki açının değeri $\arccos(40/41)$ 'dir. Dik kenarların oranını bulunuz (Şekil 9).



Çözüm. Önce verilenlerden $\cos \alpha = \frac{40}{41}$, yani $\frac{CK}{CM} = \frac{40}{41}$ olduğu sonucunun çıkarılabileceğine dikkat edelim. Problemi yardımcı parametre yöntemiyle çözeceğiz.

$CK = h$ diyelim. Buna göre $CM = \frac{41}{40}h$ ve

$$KM = \sqrt{CM^2 - CK^2} = \frac{9}{40}h$$

olacaktır. Bir dik üçgende kenarortayın hipotenüsün yarısına eşit olduğunu biliyoruz. O halde

$$AM = CM = MB = \frac{41}{40}h$$

olacaktır. Buradan da,,

$$AK = AM - KM = \frac{41}{40}h - \frac{9}{40}h = \frac{4}{5}h$$

$$KB = KM + MB = \frac{9}{40}h + \frac{41}{40}h = \frac{5}{4}h$$

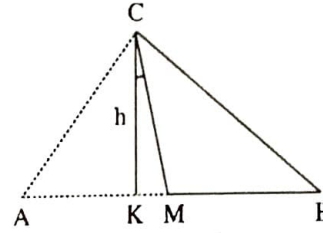
$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{\frac{16}{25}h^2 + h^2} = \frac{h}{5}\sqrt{41}$$

$$BC = \sqrt{KB^2 + CK^2} = \sqrt{\frac{25}{16}h^2 + h^2} = \frac{h}{4}\sqrt{41}$$

bulunur.

Örnek 8. Bir ikizkenar ABC üçgeninin tepe açısı C , 100° 'dir. Başlangıcı A olan ve AB ile 30° lik açı yapan bir ışın ile başlangıcı B olan ve AB ile 20° lik açı yapan ikinci bir ışın çiziliyor. Bu ışınlar M noktasında kesişiyorlar. $\angle ACM$ ve $\angle BCM$

açılarını bulunuz (Şekil 10).



Çözüm. M ve C noktalarını birleştirelim ve ACM açısına x diyelim. Sonra M noktasından üçgenin kenarlarına dikler çizelim:

$$\overline{MC}_1 \perp \overline{AB}, \quad \overline{MB}_1 \perp \overline{AC}, \quad \overline{MA}_1 \perp \overline{BC}.$$

$\overline{CM} = a$ diyerek yardımcı bir parametre kullanır ve $\overline{MC}_1$ 'i referans elemanı olarak alıp $\overline{MC}_1$ 'i iki yolla hesaplarız.

CMB_1 üçgeninden $\overline{MB}_1 = \overline{MC} \sin x = a \sin x$ buluruz. $\angle ACB = 100^\circ$ ve üçgen ikizkenar olduğu için, $\angle CAB = \angle ABC = 40^\circ$ ve $\angle CAM = 10^\circ$ olacaktır. AMB_1 üçgeninden

$$\overline{AM} = \frac{\overline{MB}_1}{\sin 10^\circ} = \frac{a \sin x}{\sin 10^\circ},$$

AMC_1 üçgeninden ise

$$\overline{MC}_1 = \overline{AM} \sin 30^\circ = \frac{a \sin x}{2 \sin 10^\circ}$$

bulunur.

CMA_1 üçgenini göz önüne alalım: $\angle MCA_1 = 100^\circ - x$. Dolayısıyla

$$\overline{MA}_1 = \overline{CM} \sin(100^\circ - x) = a \sin(100^\circ - x),$$

ve BMC_1 ile BMA_1 üçgenleri eş olduğu için

$$\overline{MC}_1 = \overline{MA}_1 = a \sin(100^\circ - x).$$

$\overline{MC}_1$ için bulunan ifadeleri eşitleyerek aşağıdaki trigonometrik denklemi elde ederiz:

$$\frac{a \sin x}{2 \sin 10^\circ} = a \sin(100^\circ - x).$$

Bu denklemi çözerek sonuca ulaşırız:

$$\sin x = 2 \sin(100^\circ - x) \sin 10^\circ$$

$$\sin x = \cos(90^\circ - x) - \cos(110^\circ - x)$$

$$\cos(110^\circ - x) = 0$$

ve

$$x = 20^\circ$$

DAİREYİ KARE HALİNE GETİRMEK: π İLE φ ARASINDAKİ BAĞLANTI GEÇMİŞLE BUGÜN ARASINDA BİR KÖPRÜ KURABİLİR Mİ?

Mehmet Suat Bergil *

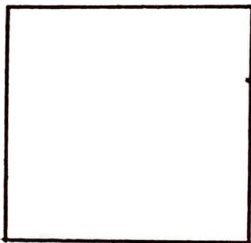
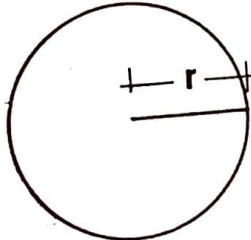
Antik çağın ünlü problemlerinden biri [1] dairenin geometrik yöntemle kare haline getirilmesi idi: sadece derecesiz bir cetvel ile pergel kullanmak suretiyle, belirli bir dairenin alanına eşit değerde alana sahip bir kare çizmek. Böyle bir çözümün olanaksızlığı 1882 yılında kanıtlandı [2].

Bu problemin kısmi ve/veya yaklaşık çözümleri üzerinde çalışıldığı da bir gerçektir. Getirdiği ilginç önerilerle Arşimet'ten 17. yüzyılda gerçekten de çarpıcı bir yaklaşım bulan Polonyalı keşiş Kochansky'ye kadar [3].

Yaklaşık Çözüm. Geometrik yöntemle dairenin kare haline getirilmesinde, φ ile π arasında saptanan bir bağlantı, kuramsal olarak (çizim sırasında oluşacak sapmalar dikkate alınmaksızın) % 99.9 oranında yaklaşık sonuç veren bir yöntem sunulacaktır.

Altın Oran ya da φ , kenarları 1 : 2 oranında olan dik açılı bir üçgende, kısa kenar ile hipotenüsün toplamının uzun kenara olan oranıyla belirlenen, $(1 + \sqrt{5})/2$ değeridir [4].

Problemin Çözümü.



$$\text{Alan} = a^2$$

$\pi r^2 = a^2$ olması için $a = \sqrt{\pi} r$ olmalıdır. π ile φ arasındaki bağlantı:

$$\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2} \approx \sqrt{\pi}.$$

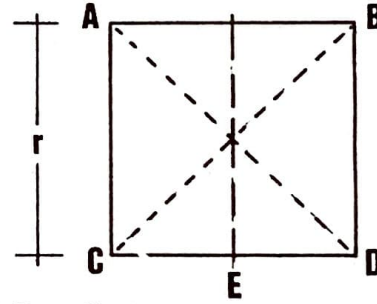
Kabul. % 0.1 oranında bir yanılma ile, $\sqrt{\varphi} + 1/2 = \sqrt{\pi}$ kabul edelim.

$\sqrt{\pi} = \sqrt{\varphi} + 1/2$ dediğimizde,

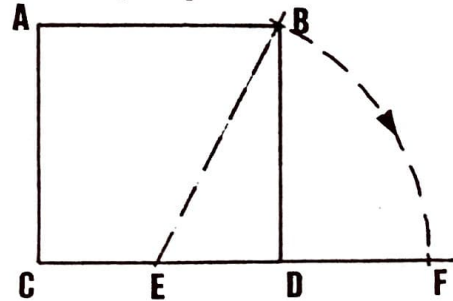
$$a = \left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2} \right) r = r\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2}$$

olmalıdır. Öte yandan, bir uzunluğun $\sqrt{\varphi}$ değerini bulmak için uygulanan geometrik yöntem: Uzunluk gene r olsun.

(I) Kenarı r değerinde olan bir kare çizeriz ve CD 'nin orta noktasına E deriz.

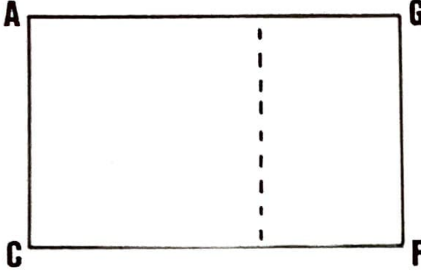


(II) Pergelimizi E 'ye koyup B 'yi CD 'nin uzantısındaki F 'ye taşıyoruz.

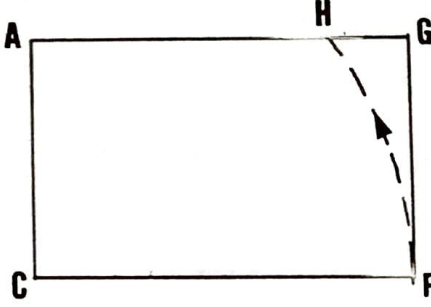


(III) AC 'yi kısa kenar, CF 'yi de uzun kenar olarak alıp dikdörtgen çizersek kenarları 1 : φ oranında olan $AGCF$ dikdörtgenini elde ederiz.

* Lefke Üniversitesi, ILCS



(IV) Şimdi de pergelimizi C 'ye koyup F 'yi AG 'ye taşıyalım. Elde edeceğimiz AH uzunluğu, AC 'ye, yani r uzunluğuna göre $r\sqrt{\varphi}$ değerini verecektir.



Formülümüzü bir daha hatırlayalım: $a = r\sqrt{\varphi} + r/2$. $r/2$ 'yi adım (I)'de zaten bulmuştuk

(= CE). $r\sqrt{\varphi}$ 'yi de adım (IV)'de bulduk (= AH).

O halde, CE ve AH uzunluklarını bir çizgi üzerine taşır da bu $(CE + AH)$ uzunluğunu kenar olarak alıp bir kare çizersek, bu karenin alanı (kuramsal olarak) % 99.9 oranında, başlangıçtaki dairenin alanına eşit olacaktır.

KAYNAKÇA

- [1] W. Gellert, et al., editör, *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1989.
- [2] E.J. Borowski & Borwein, *Dictionary of Mathematics*, Collins, London, 1989.
- [3] J.H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [4] M.S. Bergil, *Doğada/Bilimde/Sanatta Altın Oran*, Arkeoloji Sanat Yayınları, İstanbul, 1988.

ÜNLÜ KADIN MATEMATİKÇİLER: EMMY NOETHER (1882–1935) (I)

Hülya Şenkon *

Emmy Noether, 1882'de Erlangen'de dünyaya geldi. Almanya'nın güneyindeki bu küçük kentte, kiliseden bağımsız olarak çalışan üç üniversiteden biri olan ve 1743 yılında kurulmuş bulunan Erlangen Üniversitesi yer almaktaydı. Diğer iki üniversite ise Halle (1697) ve Göttingen (1737) Üniversiteleri idi. Erlangen'ın yetiştirdiği ilk büyük matematikçi, sentetik geometri alanındaki çalışmaları ile ünlü olan Christian von Staudt idi. Fakat Erlangen'ı dünya çapında ünlü kılan, Felix Klein oldu. Klein, 1872 yılında Erlangen Üniversitesi'nde verdiği açılış konferansında, ilk kez kendisi tarafından farkına varılan, grup kavramının geometri açısından anlamını açıkladı; ortaya koyduğu bu bilgiler "Erlanger Programm" adıyla dünyanın dört tarafına

yayıldı ve bu sayede Erlangen, matematik literatüründe en çok adı geçen kentlerden biri oldu. Klein'in en yakın çalışma arkadaşlarından biri Paul Gordan idi ki, tek doktora öğrencisi, meslektaşı Max Noether'in kızı Emmy Noether olacaktı.

Emmy Noether 18 yaşında iken, Ansbach Belediyesinde düzenlenen, Fransızca ve İngilizce öğretmenliği sınavlarına başvurdu. Bu sınavları her iki dilde de "Pekiyi" derece ile başaran Emmy, bir süre öğretmenlik yaptıktan sonra, üniversite öğrenimi ile ilgilenmeye başladı. O sırada üniversitelerde çok az sayıda kız öğrenci vardı; bunlar, mesleki bilgilerini geliştirmek isteyen, öğretmenlerdi. Dinlemek istedikleri derslere, ancak ilgili profesörlerin izin vermesi

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

koşuluyla, sınava girme hakkı olmaksızın, dinleyici olarak devam edebiliyorlardı. Profesörlerin büyük bir kısmı, bu konuda izin vermekten kaçınıyordu; hatta öyle ki, yıllarca sonra bu kısıtlama kaldırıldığı halde, Berlin'de bir profesör, dershanede bir kız öğrenci bulunduğu için, derslerine başlamamakta diretiyordu. 1901 kış yarıyılında Erlangen Üniversitesi'nde kayıtlı 984 erkek öğrencinin yanında Emmy Noether ve ikinci bir bayan öğrenci, dinleyici olarak bulunuyordu.

Emmy, olgunluk sınavından sonra 1903/4 kış yarıyılı Göttingen Üniversitesi'nde geçirdi; orada astronom Karl Schwarzschild'in ve matematikçi Hermann Minkowski, Otto Blumental, Felix Klein ve David Hilbert'in derslerini dinledi ve yarıyıl sonunda tekrar Erlangen'e döndü. Artık kız öğrencilerin de üniversiteye resmen kaydolması, yasal olarak mümkündü. Emmy, 24 Ekim 1904 tarihinde Erlangen Üniversitesi'ne, matematik öğrenimi görmek üzere, 46 erkek öğrencinin yanında tek kız öğrenci olarak kaydoldu.

Emmy, Gordan'ın denetiminde, invariyanlar teorisi ile ilgili, "Üç değişkenli bikuadratik formun form sisteminin inşası" adlı bir çalışma hazırladı ve bunu 2 Temmuz 1908 tarihinde Erlangen Üniversitesi'ne doktora tezi olarak sundu. Bu tezin giriş kısmı ile 1. bölümünün özeti, Erlangen Fizik ve Tıp Derneği raporları arasında, aynı isim altında yayınlandı ki, bu Emmy Noether'in ilk yayınıdır. Doktora çalışmasının tamamı ise *J. Reine Angew. Math.*, 134, 23-90 (1908)'de yayınlanmış olup, çalışmanın sonunda 300'den fazla, açık olarak verilmiş invariyanndan oluşan bir cetvel bulunmaktadır. Bu çalışmanın gerek konusu, gerekse işleniş biçimi, tamamen Gordan'ın tarzındadır ve Emmy'nin ileriki yıllarda soyut cebir konusundaki gelişimiyle pek fazla ilgisi yoktur. Noether kendisi bile, sonraları doktora tezini ve invariyanlar teorisi konusundaki birkaç çalışmasını "Mist (değersiz şey)" olarak niteliyordu, hatta 1932 yılında, doktora çalışmasının *Crelles Journal*'in hangi cildinde yayınlandığını bile artık hatırlamadığını ifade ediyordu.

E. Noether, doktorasını verdikten sonra birkaç yıl Erlangen Üniversitesi Matematik Enstitüsü'nde fahri olarak görev yaptı; bir yandan, yaşı ilerledikçe sağlığı bozulan babasının çalışmalarına yardımcı oluyor, öte yandan invariyanlar teorisi konusundaki kendi çalışmalarını sürdürüyordu. Bu arada, yaşamının bundan sonraki bölümünü matematik

araştırmalarına adayacağı iyice kesinleşmişti.

Şimdi tekrar Erlangen'a dönelim: Gordan 1910 yılında emeritus profesör olmuş yerine Erhard Schmidt getirilmişti. Falckenberg, Schmidt'in çalışmalarından birinden esinlenerek, "Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin dallanmaları" konulu doktora tezini hazırladı. Schmidt'in halefi ise Ernst Fischer oldu ki, Noether'in en yakın danışmanı idi. Emmy, kendisiyle istediği zaman ve istediği kadar matematikten söz edebiliyordu. Her ikisi de Erlangen'de oturmalarına ve seminerlerde karşılaşmalarına rağmen, E. Noether'den E. Fischer'e yazılmış, matematikle dolu, çok sayıda kartpostal bulunmaktadır. Bu kartlar okunduğunda şu izlenim uyanır: Noether, Fischer ile yaptığı bir konuşmanın hemen ardından kaleme sarılmakta ve az önce kopmuş olan düşünce zincirinin devamını belki unutmamak için, belki de bir sonraki konuşmaya temel hazırlamak üzere yazarak, kendisine göndermektedir. Fischer, zor savaş koşullarına karşın, tamamı eline ulaşmış olan bu yazılı konuşmaları büyük bir özenle saklamıştır. 1911'den 1929'a kadar uzanan bu yazışmaların en yoğun olduğu dönem, Noether'in Göttingen'e gitmesinden ve Fischer'in askere çağırılmasından önceki 1915 yılıdır. Hiç şüphe yok ki, Noether Fischer'in etkisi altında, Gordan'ın salt hesaba dayanan algoritmik tarzını terkederek, Hilbert'in düşünce tarzına yöneldi.

Noether, bir yandan Göttingen'de Landau tarafından kendisine aktarılmış olan, Dedekind'in "Grubu önceden verilen bütün denklemleri bulma" problemi ile uğraşırken, öte yandan 2. doktora öğrencisi olan Seidelmann'ın doktorasını yönetiyordu. Fritz Seidelmann, Münih'te Friedrich Hartogs'un yanında, grubu önceden verilmiş olan 4. dereceden denklemlerle ilgili bir çalışma yapmış ve bu çalışmada, bazı özel hallerde denklemleri vermeyi başarmıştı. Emmy Noether, Seidelmann'a parametrik gösterilişi araç olarak kullanmasını tavsiye etti ve bu tavsiyeye uyan Seidelmann, 3. ve 4. dereceden denklemler için problemi en genel haliyle çözdü. E. Noether'in 1916 yılında Göttingen'de tamamladığı "Grubu önceden verilen denklemler" adlı çalışması, Seidelmann'ın doktora tezinin bir özeti ile birlikte, *Math. Ann.*, 78 (1917/18)'de yayınlandı.

1893 yılında Hilbert, cebirsel invariyanlar teorisinin gelişimi üzerine bir değerlendirme yapıyor ve bu gelişim sürecini üç periyoda

ayırıyordu:

1) İnvaryantlar teorisinin kurucuları olan Cayley ve Sylvester tarafından temsil edilen, bu dönemdeki çalışmalar, her nesilden matematikçilerin hayran oldukları, mükemmel bir sanat eseridir.

2) Sembolik hesap periyodu: Aronhold ve Clebsch tarafından icat edilmiş olan sembolik hesap, Clebsch ekolünce çok sık kullanılmış, özellikle Gordan tarafından, çok güç hesaplarda büyük bir ustalıklı uygulanmış, ayrıca Hilbert'in doktora tezinde ve ona ilişkin bazı çalışmalarında da kullanılmıştır.

3) Bizzat Hilbert'in yürüttüğü çalışmaların yer aldığı ve kendisi tarafından en kritik periyot olarak nitelendirilen 3. periyot: Hilbert, 1888 yılı paskalya tatilinde Erlangen ve Göttingen'e bir yolculuk yaptı. Önce, 1868 yılında Sonluluk Teoremini ispat etmiş bulunan, invaryantlar kralı Gordan'ı ziyaret etti. Gordan'la yapılan görüşmenin sonucu şuydu: Hilbert, invaryantlar sisteminin sonluğu problemini genel olarak, yani n değişkenli cebirsel formlar için, fakat sembolik yöntemi kullanmaksızın, tamamen kendi düşünce ve yaratma gücünü ortaya koyan bir yöntemle çözmüştü. Hilbert'in invaryantlar teorisine ilişkin araştırmaları, sırasıyla 1890 ve 1893 yıllarında yayınlanan "Cebirsel formlar teorisine ilişkin araştırmaları" ve "Tam invaryant sistemleri hakkında" adlı çalışmalarında toplanmıştır.

Mayıs 1914'te Noether, "Rasyonel fonksiyon cisimleri ve sistemleri" konulu çalışmasını tamamladı ki, burada "Beni bu çalışmaya iten, Fischer ile yaptığım konuşmalar oldu" diyordu. Noether, 1919 yılında yazdığı özgeçmişinde, soyut cebir ile aritmetik yöntemlerle uğraşmasında en önemli rolü oynayan ve daha sonraki bütün çalışmalarında da belirleyici olan dürtüyü Fischer'den aldığını ifade ediyordu.

Noether, böylece Hilbert'in çalışma alanında gitgide derinleşti ve invaryantlar konusunda uzmanlaştı. Bu arada Klein ve Hilbert, Noether'i Göttingen'e davet ettiler. Noether, 1915'te Fischer'e şöyle yazıyordu: "İnvaryantlar teorisine burada moda, hatta fizikçi Hertz bile Gordan yöntemleri ile çalışıyor. Hilbert gelecek hafta kendisine ait Einstein Diferansiyel İnvaryantları konusunda bir konferans verecek; Göttingenliler orada bir şeyler daha öğrenecekler."

Noether, 9 Kasım 1915'te Mathematische Gesellschaft in Göttingen (GMG) de "Tam

transandant sayılar hakkında" konulu bir konferans verdi. Noether'in Aralık 1915 te sunduğu doçentlik tezi, "kanun, tüzük ve yönetmeliklerin müsait olmadığı" gerekçesiyle reddedildi. 1908 de çıkarılmış olan doçentlik sınav yönetmeliğine göre yalnızca erkek adaylar, doçentlik için başvurabiliyordu. Uzun süren uğraşmalar sonucu yaptığı başvuru, Kültür Bakanlığı tarafından reddedilen Hilbert, konuya ilişkin olarak, hiddetle şunları söylüyordu: "Adayın cinsiyeti, doçent olabilmesi için bir engel oluşturmamalı. Burası nihayet bir üniversite, hamam değil."

Göttingen Georg-August Üniversitesi'nin 1916/17 kış yarıyılı konferans listesinde şunları okuyoruz: "Matematik-Fizik Semineri: İnvaryantlar Teorisi. Prof.Dr. Hilbert, Frl.Dr. E. Noether'in desteği ile, pazartesi günleri 16.00-18.00 arası, ücretsiz." Noether'in Hilbert'e konferans ve seminerlerinde yaptığı destek, 1919 yaz yarıyılına kadar sürdü. Bu arada savaş sona erdi ve politik gelişmeler, özellikle kadınlara bazı yeni haklar getirdi. Artık Noether doçentlik için başvurabilecekti.

Savaş yıllarında Hilbert'e destek olmanın yanında, kendi çalışmalarının da yoğun bir şekilde sürdüren Noether'in diferansiyel invaryantlarla uğraşması, 1917 ve 1918 yıllarına rastlamaktadır. Noether, Fischer'e yazdığı bir mektupta "İlkbaharda ispatları henüz tam olmayan diferansiyel invaryantları şimdi gerçekten, lineer halde bir eşdeğerlik problemine indirgeyebildim; bunu teorik olarak ta becerebilsem ne güzel olur" diyordu. Noether, GMG'de "Keyfi diferansiyel ifadelerin invaryantları hakkında" adlı bir konferans verdi, aynı yıl 25 Ocak tarihinde ise Klein "Königliche Gesellschaft der Wissenschaften"ın özel bir oturumunda "Bayan E. Noether ve keyfi dereceli diferansiyel formlar" konulu bir sunuş konuşması yaptı. Noether, 23 Temmuz 1918'de gene GMG'de "İnvaryant varyasyon problemleri" konulu bir konferans verdi ve aynı yıl Eylül sonunda da Klein'in sunuşunu yaptığı çalışmasını tamamladı. *Göttinger Nachr.*, 235-257 (1918)'de yayınlanan söz konusu çalışma 1919 tarihinde Göttingen Üniversitesi'nce doçentlik tezi olarak kabul edildi.

Göttingen Üniversitesi Matematik Bölümünce 1922 yılında Noether'e "Ausserordentlicher (fevkalâde, müstesna) Professor" unvanının verilmesi isteğiyle bakanlığa sunulan dilekçede şöyle deniyordu: "Doç. E. Noether, bilimsel bakımdan fevkalade yetenekli olmakla birlikte, geniş öğrenci kitlelerine eleman-

ter konularda ders verme bakımından uygun değildir, ancak bilimsel kudreti ile, yetenekli öğrenciler üzerinde çok etkin rol oynamaktadır ki, bu öğrencilerden büyük bir kısmı halen üniversitelerimizde profesör olarak görev yapmaktadır."

Van der Waerden, Noether'in güçlü bir hakem olduğunu, bu özellikleriyle *Mathematische Annalen* camiasının değer biçilmez bir üyesi olduğunu yazıyor. Hermann Weyl'e göre Noether, *Mathematische Annalen* dergisinde editör yardımcısı olarak yaptığı hizmetlerin hiç bir zaman açık olarak zikredilmemiş olmasına çok içerliyordu. Kendisinin ölümünden sonra Van der Waerden'in yazdığı ve yukarıdaki cümleleri içeren "Nachruf", 1935 yılında *Mathematische Annalen*'de yayınlandı. Bu önemli bir olaydı. Çünkü Hitler döneminde, yani 1945 lerde ölmüş birçok yahudi matematikçinin "Nachruf" ları, Alman mecmualarında yıllarca sonra yayınlandı.

Prag Üniversitesi profesörlerinden Vladimir Korinek, 1935 yılında Noether'in arkasından şunları söylüyordu: "Noether, savaştan hemen sonra, modern cebirin iki problem grubundan birincisine yöneldi ki, araştırmacı yeteneğinin öz anlamı, buna dayanır. Bu iki problem grubu, yani genel ideal teorisi ve komütatif olmayan sistemler teorisi, onun ellerinde dev teoriler haline geldi." Gerçekten, Noether yeniden modül ve ideal teorisine dönmüştü. Bunun bir nedeni, Fischer ile yaptığı yazışmalar, diğeri ise 1917'de Matematik Derneği'nde, "Lasker'in modül teorisindeki parçalanmış teoremleri" konusunda yaptığı konuşma idi. Bu konu doğrultusunda ilk çalışması, W. Schmeidler ile birlikte yaptığı ve *Math. Z.*, 8 (1920)'de yayınlanan çalışması oldu. N. Bourbaki, 1960 yılında, o tarihlerde cebir derslerinde henüz sözü edilemeyen sol ve sağ ideal kavramlarının, ilk kez "Diferansiyel Operatörlü Halkalar" ile ilgili bu çalışmada, çok ilginç bir biçimde kullanıldığına işaret etmektedir.

Ekim 1920'de *Mathematische Annalen* dergisinin redaksiyon komitesine Erlangen'den Noether'in "Idealtheorie in Ringbereichen" adlı bir çalışması geldi ki, bu cebirin daha sonraki gelişimi için temel teşkil eden çalışmalardan biriydi.

1922 tarihinde Bilim, Sanat ve Eğitim Bakanlığı tarafından Noether'e "Ausserordentlicher Professor" unvanı tevcih edildi. 1923 tarihinde de Göttingen Üniversitesi Matematik Bölümü'nün ısrarlı girişimleri sonucu Noether'e

cebir derslerini ve uygulamalarını yaptırmak üzere, sözleşme imzalatıldı.

Noether'in Göttingen'de doktorası ilk kabul edilen öğrencisi Grete Hermann idi. Bugün hayatta olan Hermann, kendisine gerçekten bir anne gibi yakınlık ve şefkat göstermiş olan doktora annesini minnet ve şükranla anmaktadır. Grete Hermann ile aynı tarihlerde Noether'in iki doktora öğrencisi daha vardı: Rudolf Hölzer ve Heinrich Grell. Hölzer, 23 yaşında doktora çalışmasını tamamladı, fakat bitirme sınavına girmeden kısa bir süre önce öldü. Grell ise 1926 yılında doktora ünvanını aldı. Grell, 1952 yılında bulunduğu enstitüde, hocasının 70. doğum yıldönümü münasebetiyle arkadaşları ve öğrencileri tarafından gerçekleştirilen toplantıda ve 1965 yılında H. Weyl'in anısına düzenlenen bir toplantıda da aynı duyguları dile getiriyordu. Grell, Noether'in "Ideal differentiation und Differente" adlı çalışmasının *J. Reine Angew. Math.*, 188, 1-21 (1950)'de yayınlanmasına da vesile oldu.

1929 yılında Werner Weber, "Keyfi doğal sayıların kuadratik formlarla gösterilebilirliğinin ideal teorisi açısından anlamı" adlı çalışmasıyla ve ondan 15 gün sonra da Tel Avivli matematikçi Jakob Levitzki, gene Noether'in yönetiminde doktor ünvanını aldı.

Noether'in büyük ümit bağlanan doktora öğrencilerinden biri de Hans Fitting idi. 1931 yılında otomorf halkaları konusundaki çalışması ile doktor ünvanını alan Fitting'in daha sonra hazırladığı "Bir grubun direkt parçalanamayan faktörlerin direkt çarpımı olarak gösterilişleri" konulu makalesi de Noether tarafından desteklendi. Noether, Fitting'e "Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaften"dan bir burs temin etti ve bu sayede Fitting, Königsberg'de doçent olana kadar, Göttingen ve Leipzig'de çalışmalarını sürdürdü. 1938 yılında, henüz 32 yaşında iken, yaşamını yitiren Fitting, sonradan kendisinin adı verilen Fitting grubu ve Fitting radikalı ile matematik literatürüne geçti.

Gene Noether'in yanında "Fonksiyon cisimleri üzerindeki cebirler" konusunda doktora yapan, fakat bitirme sınavını hocasının hicretinden sonra veren Çinli matematikçi Chiungtze Tsen'in akıbeti hakkında ise hiçbir bilgi yoktur. 1936 yılında Tsen'in bir çalışmasının *J. Chinese Math. Soc.*, 1, 81-92'de yayınlanmış olması, kendisinin anavatanına dönmüş olması olasılığını akla getirmektedir.

Noether'in Göttingen'deki son doktora

öğrencisi, Otto Schilling'dir. Schilling, 1935 yılında Amerika'ya gitti ve orada cebir konusunda başarılı çalışmalar yaptı. Schilling'in en tanınmış eseri, değerlendirme teorisi ile ilgili kitabıdır. Kendisini bu konuya yönelten kişi, o sıralarda Hensel, Krull ve Ostrowski'nin çığır açan araştırmaları üzerinde çalışan Hasse oldu.¹

Noether okulu denilince yalnızca Noether'in yanında doktora yapmış kişiler değil, aynı zamanda onunla aynı matematik görüşe sahip olan, onunla birlikte çalışmış, yoğun fikir alışverişinde bulunmuş ve soyut cebirin gelişmesine katkıda bulunmuş tüm matematikçiler akla gelmektedir. Söz konusu matematikçiler içinde en başta zikredebileceğimiz, Noether ruhunu Freiburg'a taşıyan Wolfgang Krull'dur ki, burada F.K. Schmidt ve Reinhold Baer gibi iki ünlü cebircinin yetişmesine vesile olmuştur.

Noether okulunun mensuplarından biri de, doktora üstü çalışmalar yapmak üzere Göttingen'e gelmiş olan, Avusturyalı Gottfried Köthe idi. Köthe, Artin ile Noether'in başlatmış oldukları ve Noether'in soyut ideal teorisi yöntemleri ve Krull'un genel grup teorisi yöntemleriyle çalışılan hiperkompleks büyüklükler teorisinin gelişiminde aktif rol oynadı.²

Noether okulunun bir diğer mensubu da iki ciltlik ünlü "Lehrbuch der Algebra" kitabının yazarı van der Waerden'dir. Söz konusu kitabın 7. baskısında, kitabın isminin altına "E. Artin ve E. Noether'in konferanslarından yararlanılmıştır" ibaresi eklenmiştir. Van der Waerden, Noether'in yanına Hollanda'dan, az çok olgunlaşmış ve kendine özgü fikirleri olan bir matematikçi olarak geldi; ondan kavram

oluşturmayı ve, görüşlerini formüle etmesini ve problemlerini çözmesini sağlayan düşünce şeklini öğrendi. Van der Waerden, Noether ile ilgili "Nachruf"unda, Noether'in kullandığı araçlardan çok, onları kullanım biçiminin ve ayrıca kavramları oluşturmadaki açıklık ve mükemmeliyetin kendisini derinden etkilediğini ifade ediyordu. Van der Waerden bundan tam 30 yıl sonra, yani 1965 yılında DMV'un 75. kuruluş yıldönümü töreninde yaptığı konuşmada, Galois'dan başlayarak cebirin tarihçesini büyük bir ustalıkla özetliyor ve 1920-1934 yıllarını E. Noether, E. Artin ve A. Ostrowski'nin cebire yeni bir yön verdikleri, çok zengin bir zaman dilimi olarak nitelendiriyordu. Bu konuşmada van der Waerden, Noether'in eserlerinin, cebirin gelişimindeki rolü şöyle dile getiriyordu: "E. Noether, Dedekind'in ideal teorisini Hilbert ve Lasker'in teoremleri ile destekleyerek, genel ideal teorisinin temellerini atmayı başardı ve sonradan özellikle W. Krull, bu teoriye önemli katkılarda bulundu. Noether bundan başka, her idealin, asal ideal kuvvetlerinin çarpımı olarak gösterilebilmesi için gerek ve yeter koşullar verdi. Van der Waerden, Prüfer ve Artin, bu koşulları birer birer atarak genelleştirmeler elde ettiler. Dedekind'in ideal teorisinin geniş kapsamlı bir genelleştirmesi, Paul Lorenzen tarafından verildi. Heinrich Brandt tarafından verilen bir başka genelleştirme de komütatif olmayan cebirlerin ideal teorisiydi ki, Artin'in, cebirler aritmetiğinin genel inşasının temellerini atmasını sağladı. Van der Waerden bu arada kendisi tarafından inşa edilen ve Steinitz'in cisim teorisi ve homojen formlara ilişkin Mertens rezültantlarından başka, Lasker ve Noether'in ideal teorisine de dayanan cebirsel geometriye değiniyordu.

Matematik Dünyası Yazı Kuruluna,

Aralık 1993'te yayınlanan Y71-Y75 numaralı 5 problemi çözmüş bulunuyorum. Sizlere bu gibi problemler hazırladığınız için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ben deha yaratılamaz, ama geliştirilebilir sözüne inanıyorum. Sizler ülkemizin yetenekli beyinlerini geliştiriyorsunuz. Ünlü matematikçi Jacobi, "neden matematiği seçtiniz?" diye soranlara "insan aklına şeref vermek için" demiş (*pour faire l'honneur a l'esprit humain*).

Problemler çok iyi seçilmiş, tek kelimeyle nefis. Sağolun, varolun.

Doç.Dr. Selçuk Alsan

TÜBİTAK Tıp Enformasyon Başuzmanı, Atatürk Bulvarı, No. 221, Ankara
Bilim ve Teknik Dergisi Zekâ Oyunları köşesi aylık yazarı (22 yıllık bir emek)

¹ Hasse, Ord.Prof.Dr. Cahit Arf'in doktora hocasıdır.

² Sonradan Fonksiyonel Analiz çalışan G. Köthe Prof.Dr. Tosun Terzioğlu'nun Frankfurt'ta doktora hocası olmuştur.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Geçen sayıdaki problemlerin numaraları A76–A80 ve Y76–Y80 olarak alınmıştır. Bundan böyle bu numaralama sistemi devam ettirilecektir.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A81. Birbirine eş olan dört çemberden üçünün her biri, verilen bir ABC üçgeninin içinde olup açılardan birinin iki kenarına teğettir. Dördüncü çember bu üç çembere teğet ise bu çemberlerin cetvel ve pergelle çizilebileceğini gösteriniz.

A82. Tabanı $[BC]$ ve A açısı geniş olan bir ABC üçgeninin A köşesi ve yan kenarlarının birer kısmı çizim kağıdının dışına taşmıştır. Bu üçgenin $[AD]$ kenarortayını, $[AE]$ iç açıortayını ve $[AF]$ yüksekliğini belirleyiniz.

A83. O kesişme noktası çizim kağıdının dışına düşen a ve b doğruları ve bunların dışında bir C noktası veriliyor. CO doğrusunu cetvel ve pergelle belirleyiniz. (Hüseyin Demir)

A84. İki ve üç basamaklı sayılarla ilgili olarak

$$ABC = (DE)^2$$

$$CBA = (ED)^2$$

sistemini çözünüz. (Hüseyin Demir)

A85. $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ sayısını n, m tamsayı olmak üzere $n + m\sqrt{2}$ şeklinde ifade ediniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y81. F odağı ve d doğrultmanı ile belirli parabol ile bir m uzunluğu verildiğinde, parabolün odağından geçen m uzunluktaki bir kirişin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Y82. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasına göre ayak üçgeni DEF , ve AD, BE, CF doğruları noktadaş ise P 'nin geometrik yerini belirleyiniz. (Hüseyin Demir)

Y83. $1, 2, \dots, n$ tamsayılarını rastgele $a_1, a_2, \dots, a_n$ şeklinde sıralayıp $T = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ toplamını

hesaplarsak elde edebileceğimiz en büyük T değerini bulunuz.

Y84. Her $x \in [-1, 1]$ için $f(f(x)) = -x$ koşulunu sağlayan bir $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ fonksiyonu var mıdır? (H. Turgay Kaptanoğlu)

Y85. Bir X kümesinin h elemanlı k tane alt kümesi $X_1, X_2, \dots, X_k$ veriliyor: $X_i \subseteq X$, $|X_i| = h$, $i = 1, \dots, k$. $\min |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k|$ 'nin, $k \leq C(m, h)$ özelliğine sahip en küçük m sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A71. Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı iki kenar birbirine eşitse, içteğet çember merkezinin diğer iki kenarın orta noktalarından eşit uzaklıkta olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ yazalım ve $a \geq c$, $b = d$ varsayalım. $[AB]$ ve $[CD]$ 'nin orta noktalarını E ve F ile, içteğet çemberin merkezini de I ile gösterelim. C ve D noktalarının BI ve AI doğrularında yansımaları sırasıyla C' ve D' olsun. Tabii ki C' ve D' , AB doğrusu üzerinde kalmalıdır. $[C'D']$ 'nün orta noktası E' 'dir. Diğer taraftan

$$|C'D'| = |BC'| + |AD'| - |AB|$$

$$= b + d - a = a + c - a = c = |CD|$$

olup, ICD ve $IC'D'$ üçgenleri eşittir. Bu üçgenlerin ortak I köşesine ait kenarortayların uzunlukları olan $|IE|$ ve $|IF|$ eşit olmalıdır.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Ergün Yereneri, Suat Namlı, Burhan Biçer, Ruhi Tabur, Alaatin Aktaş, Ali Tombak, Emre Alkan.)

A72. A, B, C köşeleri karşısındaki dışteğet çemberlerin yarıçapları sırasıyla r_a, r_b, r_c olan bir ABC üçgeninin içindeki bir P noktasından BC, CA, AB kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla D, E, F olsun.

$$|AE| + |AF| = |BF| + |BD| = |CD| + |CE|$$

olması için gerek ve yeter şartın

$$|PD| : |PE| : |PF| =$$

$$r_b + r_c - r_a : r_c + r_a - r_b : r_a + r_b - r_c$$

olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $2s = a + b + c$ olsun. ABC 'nin içteğet çemberinin yarıçapını da r ile gösterelim. $x = |PD|$, $y = |PE|$, $z = |PF|$ koyarak $|AE|$ ve $|AF|$ 'yi hesaplayalım: P 'den AE 'ye çizilen paralel AB 'yi L 'de kessin, AC üzerinde $PEML$ bir dikdörtgen teşkil edecek şekilde bir M noktası alalım.

$$|LM| = |PE| = y$$

olup,

$$\begin{aligned} |AE| &= |AM| + |ME| \\ &= y \cot A + |PL| = y \cot A + z \csc A \end{aligned}$$

dır. Aynı yöntemle

$$|AF| = |AL| + |LF| = y \csc A + z \cot A$$

olup,

$$\begin{aligned} |AE| + |AF| &= \frac{y(1 + \cos A) + z(1 + \cos A)}{\sin A} \\ &= \frac{(y + z)(1 + \cos A)}{\sin A} \\ &= \cot \frac{A}{2} (y + z) = \frac{s - a}{r} (y + z) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde de

$$|BF| + |BD| = \frac{s - b}{r} (z + x)$$

ve

$$|CD| + |CE| = \frac{s - c}{r} (x + y)$$

elde edilir. Bu miktarların eşit olması için gerek ve yeter şart olarak

$$(s - a)(y + z) = (s - b)(z + x) = (s - a)(x + y),$$

veya bu üç miktarın da üçgenin alanına bölünmesi suretiyle

$$\frac{y + z}{r_a} = \frac{z + x}{r_b} = \frac{x + y}{r_c},$$

ve nihayet bunlara eşdeğer olarak

$$x : y : z = r_b + r_c - r_a : r_c + r_a - r_b : r_a + r_b - r_c$$

bulunur.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Emre Alkan.)

A73. $[AB]$ doğru parçasını çap kabul eden γ çemberi ile aynı doğru parçasını büyük çap kabul eden φ elipsi göz önüne alınsın. γ üzerinde değişken bir P noktasından AB 'ye indirilen dikmenin φ 'yi kestiği noktalardan P 'ye yakın olanı Q olsun. P noktasından γ 'ya çizilen normalle, Q noktasından φ 'ye çizilen normalin kesim noktasının geometrik yeri nedir? (Hüseyin Demir)

Çözüm. γ çemberini ve φ elipsini $a > b > 0$ olmak üzere sırasıyla

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ve} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemleriyle gösterebiliriz. Bir θ değişkeni ithal edilmek suretiyle $P = (a \cos \theta, a \sin \theta)$ ve $Q = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ yazabiliriz. Küçük birer hesapla, P 'den γ 'ya çizilen normalle, Q 'dan φ 'ye çizilen normalin denklemlerinin, $c^2 = a^2 - b^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sin \theta x - \cos \theta y &= 0 \\ a \sin \theta x - b \cos \theta y &= c^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

olduğu, bunların kesim noktasının koordinatlarının da

$$x = \frac{c^2}{a - b} \cos \theta \quad \text{ve} \quad y = \frac{c^2}{a - b} \sin \theta$$

olduğu görülür. Böyle noktalar

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c^2}{a - b} \right)^2 = (a + b)^2$$

denklemini sağlayacaklardır. Yani geometrik yer, verilen çember ve elipsle merkezdeş bir çemberdir.

(Çözenler: Ruhi Tabur, Alaattin Aktaş, Atasağın Baykal, Ali Tombak.)

A74. Toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımı en fazla kaç olabilir?

Çözüm. Toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımıyla elde edilebilecek en büyük sayı N olsun. Yani

$$N = A_1 A_2 \cdots A_k$$

olup

$$19 = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$$

dir. Herhangi bir $i = 1, 2, \dots, k$ için $A_i \geq 4$ halinde, toplamı değiştirmeden A_i kaldırılıp yerine A_i 'den daha büyük olan $2(A_i - 2)$ koyulabileceğinden $A_i = 2$ veya $A_i = 3$ olmalıdır. 19 sayısını, 3'lerin adedi mümkün olduğu kadar büyük olacak şekilde 2'lerin ve 3'lerin toplamı olarak yazmak için, 5 tane 3 ve 2 tane 2 kullanmak gerekeceğinden, toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımıyla elde edilebilecek en büyük sayı, $2^2 3^5 = 972$ 'dir.

(Çözenler: Emre Alkan.)

A75. Her hangi bir p asal sayısı için, p , $2^{m+1} + 3^m - 17$ 'yi bölecek şekilde sonsuz tane m artı tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. $p = 2$ ve $p = 3$ hallerinde çözüm kolay olduğu için (neden?), $p \neq 2, 3$ farzedelim. Her n artı tamsayısı için $m = p^n + 1$ koyularak

$$\begin{aligned} 2^{m+1} + 3^m - 17 &= 2^{p^n+2} + 3^{p^n+1} - 17 \\ &= 4(2^{p^n} - 2) + 3(3^{p^n} - 3) \end{aligned}$$

elde edilir ki, küçük Fermat teoremine göre p asal sayısı hem $2^p - 2$ 'yi hem de $3^p - 3$ 'ü, dolayısıyla da (dikkat!) $2^{p^n} - 2$ 'yi ve $3^{p^n} - 3$ 'ü, böylece de $2^{m+1} + 3^m - 17$ 'yi bölecektir.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Emre Alkan.)

Y71. $ab = cd$ eşitliğini sağlayan $a, b, c, d > 0$ tamsayıları verildiğinde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 'nin hiç bir zaman asal olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. $ab = cd$ olduğuna göre, $a = pq$, $b = rs$, $c = pr$, $d = qs$ olacak şekilde $p, q, r, s \geq 1$ tamsayıları bulunabilir. (Neden?) Böylece

$$\begin{aligned} N &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= p^2 q^2 + r^2 s^2 + p^2 r^2 + q^2 s^2 \\ &= (p^2 + s^2)(q^2 + r^2) \end{aligned}$$

olup, N asal olamaz.

(Çözenler: Selçuk Alsan, Ali Tombak, Fırat Aydın, Metin Bekil, Atasağın Baykal, Namık Gök, Ercan Şahin, Cengiz Yılmaz, Çağatay Candan.)

Y72. p^2 , q 'nun bir katı olacak şekilde p, q tamsayıları verildiğinde, $x^2 + px + q = 0$ denkleminin çözümleri α, β olsun. Her $n \geq 2$ tamsayısı için $(\alpha^n + \beta^n)/q$ 'nun bir tamsayı olduğunu ispat ediniz.

Çözüm. $\alpha + \beta = -p$ ve $\alpha\beta = q$ olduğundan, herhangi bir $n \geq 2$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \alpha^n &= -p\alpha^{n-1} - q\alpha^{n-2} \\ \beta^n &= -p\beta^{n-1} - q\beta^{n-2} \end{aligned}$$

olup,

$$\alpha^n + \beta^n = -p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - q(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \quad (*)$$

dir. $n = 2$ halinde

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$$

olup, p^2 , q 'nun katı olduğundan $(\alpha^2 + \beta^2)/q$ tamsayı olmalıdır. Şimdi, $k \leq n$ için $(\alpha^k + \beta^k)/q$ 'nun tamsayı olduğunu varsayarsak, $(*)$ eşitliğinden $(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})/q$ 'nun da bir tamsayı olduğu görülür. Böylece tümevarımla her $n \geq 2$ için $(\alpha^n + \beta^n)/q$ bir tamsayı olmalıdır.

(Çözenler: Atasağın Baykal, Tamer Adanır, Fırat Aydın, Ali Tombak, Suat Namlı, Ruhi Tabur, Emre Alkan.)

Y73. Hem $x > 1$, hem de $x^{1/(1-x)}$ 'in rasyonel sayı olabilmesi için gerek ve yeter şartın, $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, $x = 1 + 1/n$ olduğunu gösteriniz. (Dikkat: Rasyonel bir $x > 1$ sayısı için $x^{1/(1-x)}$ ile gösterilmesi mümkün olan sayılardan artı ve gerçel olanını kastediyoruz.)

Çözüm. $x > 1$ ve $x^{1/(1-x)}$ sayılarının rasyonel olduklarını varsayalım. $x = m/n$ ve $m > n$ olacak şekilde, aralarında asal m ve n artı tamsayıları vardır.

$$y = x^{1/(1-x)} = x^{n/(m-n)}$$

olup,

$$(xy)^n = (xx^{n/(m-n)})^n = y^m$$

dir. m, n aralarında asal olduklarından,

$$sm + tn = 1$$

olacak şekilde s ve t tamsayıları bulunabilir. Böylece

$$y = ((xy)^s y^t)^n$$

olup,

$$x^{1/(m-n)} = y^{1/n} = (xy)^s y^t$$

sayısı da rasyoneldir. Demek ki,

$$x^{1/(m-n)} = \frac{a}{b}$$

olacak şekilde aralarında asal $a, b \geq 1$ tamsayıları bulunabilir. O zaman da

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = x = \frac{m}{n}$$

olup,

$$mb^{m-n} = na^{m-n}$$

dir. m ve n aralarında asal olduklarından

$$m = a^{m-n} \quad \text{ve} \quad n = b^{m-n}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} m-n &= a^{m-n} - b^{m-n} \\ &= (a-b)(a^{m-n-1} + a^{m-n-2} + \dots + b^{m-n}) \end{aligned}$$

bulunur ki, bu ancak

$$m-n = a-b = 1$$

veyahut da $m = n+1$, yani

$$x = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

halinde mümkündür. Diğer taraftan

$$x = 1 + \frac{1}{n}$$

ise

$$x^{1/(1-x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/(1-(1+1/n))} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

olup, hem $x > 1$, hem de $x^{1/(1-x)}$ rasyoneldir.

(Çözenler: Namık Gök, Emre Alkan, Atasağın Baykal.)

Y74. Bir ABC üçgeninde $[CA]$, $[AB]$, $[BC]$ kenarları üzerine ilk ikisi dışı, sonuncusu içe doğru CAB' , ABC' , BCA' eşkenar üçgenleri kurulsun. A' noktasının $[B'C']$ doğru parçasının orta noktası olması için ABC üçgeninin eşkenar olmasının gerek ve yeter olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Eğer ABC eşkenarsa, A' noktasının $[B'C']$ doğru parçasının orta noktası olacağı aşikârdır. Tersine olarak, A' 'nin $[B'C']$ doğru parçasının orta noktası olduğunu farz edelim. $\angle C'BA' = \angle ABC$ (neden?), ve $|BA'| = |BC|$, $|BC'| = |BA|$ olduğundan, $C'BA'$ ve ABC üçgenleri eşittir. Böylece

$$|A'C'| = |AC|,$$

benzer şekilde de

$$|A'B'| = |AB|$$

dir. A' , $[B'C']$ 'nin orta noktası olduğundan

$$|AB| = |A'B'| = |A'C'| = |AC|,$$

diğer taraftan da A' , B' , C' doğrudan doğruya olduğundan $\angle BAC = 60^\circ$ olmalıdır. Demek ki ABC eşkenardır.

(Çözenler: Ergün Yaraneri, Tamer Adanır, Atasağın Baykal, Alaattin Aktaş, Emre Alkan.)

Y75. Bir $ABCD$ karesinin içinde $|PA| = 1$, $|PB| = 2$, $|PC| = 3$ olacak şekilde bir P noktası varsa, bu karenin kenar uzunluğu ne olmalıdır?

Çözüm. $\alpha = \angle ABP$ ve $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ yazalım. PAB ve PBC üçgenlerinde kosinüs teoremi uygulanarak,

$$a^2 + 4 - 4a \cos \alpha = 1$$

$$a^2 + 4 - 4a \sin \alpha = 9,$$

veya

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + 3}{4a} \quad \text{ve} \quad \sin \alpha = \frac{a^2 - 5}{4a}$$

elde edilir. Bu denklemlerin karelerini taraf tarafa toplamak suretiyle

$$(a^2 + 3)^2 + (a^2 - 5)^2 = 16a^2,$$

veya

$$a^4 - 10a^2 + 17 = 0;$$

buradan da $a = \sqrt{5 + \sqrt{8}}$ bulunur. ($a = \sqrt{5 - \sqrt{8}}$ karenin dışında bir P noktası haline tekabül eder.)

(Çözenler: Emre Alkan.)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 1 Ağustos 1994 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası, bu sayı ile üçüncü yılını tamamlıyor. İlk iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 40.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte, postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 25.000.-TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri takdirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1994 yılı abone ücreti 75.000.-TL. tane satış fiyatı ise 20.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini önemle rica ederiz.

Saygılarımızla

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- Konu sunuşları,
- Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- Matematiksel kavramlar tarihli ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdhan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar :

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

Popüler Bilim Kitapları Dizisi

Bir Matematikçinin Savunması

g. h. hardy



Matematik yalnızca bir araç mıdır? "Gerçek Matematik" nedir? Yaratıcılık dönemini geride bıraktığını ve artık matematik "yapmak" yerine onun hakkında yazmaktan başka çaresi olmadığını alçakgönüllülük ve hüznle ifade eden İngiliz matematikçi Hardy, bu kitabıyla belki de yaratıcılığının en sıcak ürünlerinden birini sunuyor...

30.000 TL

POPÜLER BİLİM KİTAPLARI DİZİSİNDE YAYINLANAN KİTAPLAR

BİLİM VE TEKNİK DERGİSİNİN 101621 NO'LU POSTA ÇEKİ

HESABINA ÜCRETİ YATIRILARAK VEYA GAZETE BAYİ, KİTAPEVLERİ

VE TUBITAK KİTAP SATIŞ BÜROSUNDAN EDİNİLEBİLİR.

TUBITAK KİTAP SATIŞ BÜROSU: ATATÜRK BULVARI NO:221 06100 KAVAKLUDERE/ANKARA

TEL: (312) 468 53 00 /4001 FAKS: 427 13 36