

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Arşimet'in Küreleri

Sinan Sertöz

Sonsuz Tür Sonsuzluk Vardır

Nurettin Ergun

Fermat ve Euler Teoremleri

Emre Alkan

Cebirsel Denklemlerin Kökleri

Nurettin Çalışkan

"Bulanık" Kümeler

Ahmet Şekercioğlu

Fermat Ne Biliyordu?

Ali Nesin

Ünlü Kadın Matematikçiler :
Emmy Noether (1882 - 1935) (II)

Hülya Şenkon

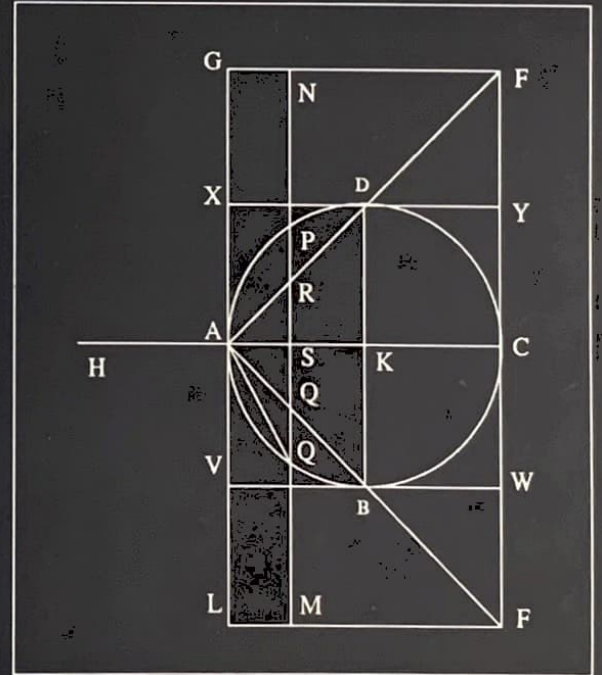
Bilmeliyiz, Bileceğiz

Matematikle Eğlenelim

Hasan Gökpınar

Olimpiyat Seçme Soruları

Problemler



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

**Adına
Başkan**
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
TURGAY KAPTANOĞLU, HÜSEYİN DEMİR,
ALİ DOĞANAKSOY,
MAHMUT KUZUCUOĞLU,
MEFHARET KOCATEPE

dizgi
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI
*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 150.000.-TL., Yurtdışı yıllık 300.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone a dresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 5.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz 3.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 1.500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

Arşimet'in Küreleri

Sinan Sertöz 1

Sonsuz Tür Sonsuzluk Vardır

Nurettin Ergun 3

Fermat ve Euler Teoremleri

Emre Alkan 7

Cebirsel Denklemlerin Kökleri

Nurettin Çalışkan 9

"Bulanık" Kümeler

Ahmet Şekercioğlu 14

Fermat Ne Biliyordu?

Ali Nesin 18

Ünlü Kadın Matematikçiler : Emmy Noether (1882 - 1935) (II)

Hülya Şenkon 23

Bilmeliyiz, Bileceğiz 26

Matematikle Eğlenelim

Hasan Gökpinar 27

Olimpiyat Seçme Soruları 28

Problemler 29

Çözümler 30

ARŞİMET'İN KÜRELERİ

Sinan Sertöz *

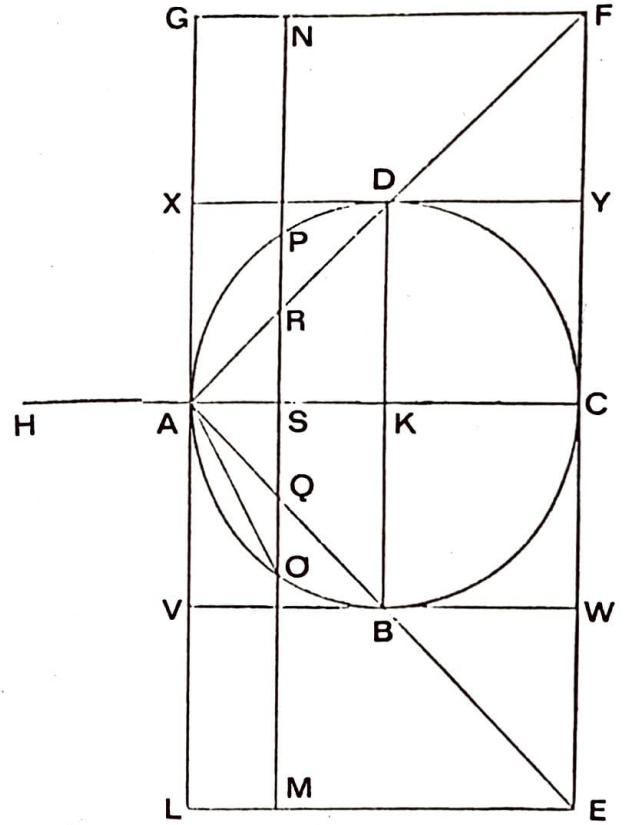
Bir kürenin hacmini ilk merak eden kişi kimdi bilemiyoruz, ama bunu hesap etmeye cüret edecek kadar merak eden ilk kişinin Sicilyalı Arşimet olduğunu biliyoruz. Bugün böyle bir hacmi hesaplamak için integral teknikleri kullanıyoruz. Oysa integral hesap Arşimet'den yaklaşık 1900 yıl sonra icat edilecektir. Elektiriğin kullanıma girmesine 2100 yıl, penisilinin icadına 2150 yıl, bilgisayar haberleşme ağlarının yayılmasına ise yaklaşık 2200 yıl vardır. Hatta tarihin akışını ve dünyanın siyasi yapısını değiştirecek son iki peygamberden ilkinin doğmasına bile daha bir kaç yüzyıl vardır ... Roma-Kartaca savaşları hâlâ sürmektedir. Nitekim bu savaşlarda taraf tutmak zorunda olan Sicilya krallığı ölümcül bir yanlış yapıp Kartaca'nın tarafını tutar. Roma donanmasının uzun süren kuşatmasından sonra Sicilya düşer ve o karışıklıkta bir asker Arşimet'i öldürür. Vasiyeti üzerine mezar taşına silindirin içine sokulmuş bir küre çizilir. Çünkü Arşimet'in en çok gurur duyduğunu söylediği çalışması budur; bir kürenin hacminin, içine tam olarak sığacağı silindirin hacmine oranı. Bu oranı Arşimet üçte iki olarak bulur ve silindirin hacmi bilindiği için kürenin hacmi tam olarak hesaplanmış olur. Arşimet'in mezarı daha sonra kaybolur. Yaklaşık üç yüz yıl kadar sonra Sicilya'da konsül yardımcılığı görevi sırasında Cicero üzerinde bir silindir ve küre şekli bulunan bir mezar taşı bulur ... Bugün bu mezar taşı yine kayıp. Meraklı bir turistin Arşimet'in mezarından bir hatıra almak isteyip işin biraz aşırısına kaçtığı sanılıyor.

Arşimet'in bunca gurur ve coşku duyduğu bu hacim hesabı gıpta edilecek sadeliktedir ve mutlaka çağdaşlarına "ben niye akıl edemedim?" dedirtmiştir. Bu konunun matematiksel içeriği dışında bizi ilgilendiren bir başka yönü de bu hesapları içeren Arşimet'in *Metotlar* adlı eserinin iki bin yıl ortadan kaybolduktan sonra bu yüzyılın başında İstanbul'da ortaya çıkmasıdır.

Arşimet ve eserleriyle ilgili ayrıntılı bir yazıyı daha ileride yazmaya söz verip Arşimet'in

kürelerine döneyim. Bulmak istediğimiz hacim yarıçapı r olan bir kürenin hacmi. Özellikle merak ettiğimiz ise tabanının yarıçapı r ve yüksekliği $2r$ olan silindirin içinde bu kürenin ne oranda yer kapladığı. Bu hesabın bir yerinde Arşimet'in kaldırmaçlarının işe karıştığını göreceksiniz, sakın şaşırmayın.

Hacmini hesaplayacağımız küreyi merkezinden geçen bir düzlemle keselim. Elde ettiğimiz çemberi $ABCD$ ile, merkezini K ile gösterelim (Şekil 1).



Şekil 1

Burada AC ve BD çemberin birbirine dik iki çapı olsun. C noktasından BD doğrusuna bir paralel çizelim ve bu paralel doğrunun AB ve AD doğrultularını kestiği noktalara E ve F diyelim. E 'den ve F 'den EF doğrusuna birer dikme çizelim ve bu dikmeler $ABCD$ çemberine A noktasından çizilen teğeti L ve G nokta-

* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

larında kessinler. B ve D noktalarından çembere çizilen teğetler de LG 'yi V ve X noktalarında, EF 'yi de W ve Y noktalarında kessinler. AEF üçgenini AC eksenı etrafında döndürerek bir koni elde ettiğimizi düşünceğiz. Aynı eksen etrafında bir de $LEFG$ dikdörtgenini döndürüp bir silindir elde edeceğiz. İşte hacimlerini kıyaslamak istediğimiz cisimler hazır. Kürenin hacmi ile koninin hacmini toplayıp silindirin hacminin yarısı olduğunu göreceğiz.

AC eksenini üzerinde rastgele bir S noktası alalım. Bu noktada AC doğrusuna dik olan bir düzlem düşünelim. Bu düzlem, küremizi çapı OP olan bir daire boyunca keser. Aynı düzlem, konimizi çapı QR ve silindirimizi de çapı MN olan daireler boyunca keser. Planımız, S noktasında elde edilen bu dairelerin alanları arasında bir bağıntı bulmak. Daha sonra S noktasını AC boyunca gezdireceğiz. Bu yaptığımızın alelade bir Riemann integrali olduğunu düşünüp burun kıvrımadan önce Arşimet'in milattan önce üçüncü yüzyılda, Riemann'ın ise milattan sonra ondokuzuncu yüzyılda yaşamış olduklarını hatırlayın ...

Artık planladığımız alan kıyaslamasına başlayabiliriz. $MS = AC$ ve $SQ = AS$ olduğundan hemen $MS \cdot SQ = AC \cdot AS$ buluruz. AC bir çap olduğu için AOC üçgeni diktir. Diğer açılara taktığımız zaman bu üçgenin AOS üçgenine benzer olduğunu görürüz. Benzer üçgen bağıntılarından $AC \cdot AS = AO^2$ buluruz. Oysa AOS üçgeninde Pisagor bağıntısı bize $AO^2 = AS^2 + OS^2$ verir. Öte yandan ACE üçgeninin ikizkenar olduğunu ve SQ doğrusunun CE doğrusuna paralel olduğunu farkederseniz AS uzunluğunun SQ uzunluğuna eşit olduğunu görürüz. Bütün bunları yerine koyarsak önemli bir bağıntı bulacağız: $MS \cdot SQ = OS^2 + SQ^2$. Bu bağıntının önemini kavramak için biraz ara verip ne yapmakta olduğumuzu hatırlayalım. Elimizdeki cisimleri AC 'ye dik bir düzlemle kesmiştik. Bu düzlem küremizi yarıçapı OS olan bir daire boyunca, konimizi de yarıçapı SQ olan bir daire boyunca kesmişti. İşte bulduğumuz bağıntının sağ tarafı bu dairelerin yarıçaplarının karelerinin toplamı. Bir de bunu π ile çarparsanız ...

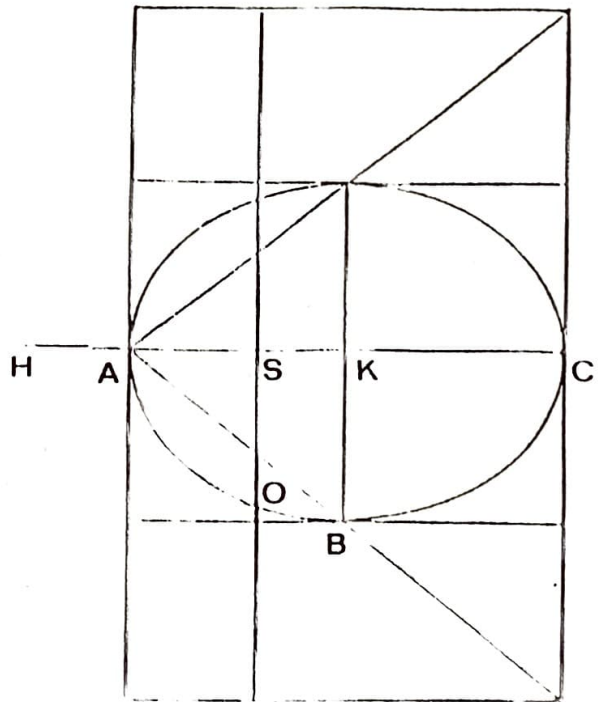
CA doğrusunu $CA = AH$ olacak şekilde H noktasına kadar uzatın. HC doğrusunu A noktasında dayanağı olan bir kaldıraç gibi düşüneceğiz! Bu kaldıraçın H ve S noktalarına bazı 'ağırlıklar' asacağımız için $\frac{HA}{AS}$ oranını bulmak istiyoruz. İlk önce, $HA = AC = EC = MS$ ve $AS = SQ$ olduğundan, $\frac{HA}{AS} = \frac{MS}{SQ}$ buluruz.

Eşitliğin sağ tarafında payı ve paydayı MS ile çarparsak $\frac{HA}{AS} = \frac{MC^2}{MS \cdot SQ}$, yukarıda bulduğumuz önemli bağıntıyı burada kullanırsak

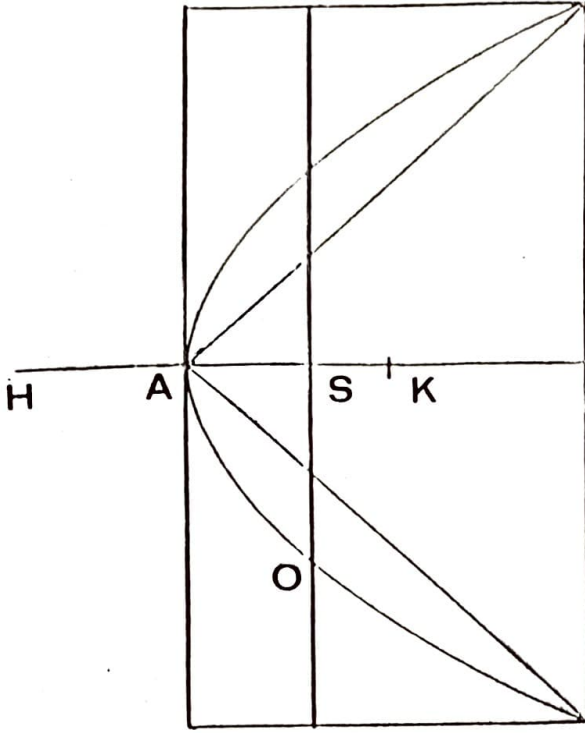
$$\frac{HA}{AS'} = \frac{\pi \cdot MS^2}{\pi \cdot OS^2 + \pi \cdot SQ^2}$$

buluruz. Yine HAS kaldırıcına dönelim; S noktasına silindirden gelen daireyi asalım, H noktasına ise küreden gelen daire ile koniden gelen daireyi birlikte asalım. Dengeye duracaklarını gösterdik ...

S noktasının AC üzerinde $A'dan C'ye$ giderken bulunduğu her konumda, bizim elde ettiğimiz daireler yukardaki bağıntıyı sağlayacak. Yani silindirden gelen daire olduğu yere asılacak, küreden ve koniden gelen daireler ise H noktasına asılacak. Sonunda $LFEG$ silindiri olduğu yerde kalacak ama $ABCD$ küresi ile AEF konisi beraber H noktasına asılacaklar ve HAC kaldırıcı bu yükler altında dengede kalacak. Silindiriminin ağırlık merkezi K noktası olduğu için onun da K noktasında asılı olduğunu düşünebiliriz. Özetlersek, HAK kaldırıcının H noktasında yarıçapı $r = AK$ olan bir küre ile taban yarıçapı ve yüksekliği $2r$ olan bir koni asılı, K noktasında ise taban yarıçapı ve yüksekliği $2r$ olan bir silindir asılı. Bu sistem A noktası etrafında dengede duruyor.



Şekil 2



Şekil 3

Arşimet bu noktada silindirin hacminin $8\pi r^3$ olduğunu, koninin hacminin bunun üçte biri olduğunu ve AK 'nin de HA 'nın yarısı olduğunu göz önüne alarak kürenin hacmini $\frac{4}{3}\pi r^3$ olarak buluyor. Koninin hacminin silindirin hacminin üçte biri olduğunu nereden bulduğunu sorgulayacak okuyucuya karşı Arşimet'in sağlam bir yanıtı var: Öklit (!), *Elemanlar*, XII.10.

Bu metodun küre üzerinde sonuç vermesinden cesaret alarak Arşimet elipsoidin ve paraboloidin hacimlerini hesaplama problemine de elindeki kaldıracağı girişiyor. Şekil 2 ve 3'te bu çözümler için kullandığı çizimleri görüyorsunuz. Elipsoidin hacmi probleminde $\frac{AS \cdot SC}{SO^2} = \frac{AK^2}{KB^2}$ bağıntısı, paraboloidin hacmi probleminde de $AS = SO^2$ bağıntısı önemli olacak. Hesapların ayrıntılarını vermiyorum. Bu kadar ipucu ve Arşimet'den yirmi iki yüzyıl sonra yaşıyor olmanın rahatlığıyla nasıl olsa sonucu kendiniz hemen bulabilirsiniz ...

Teşekkür. İçinde Arşimet'in bu çalışmasını bulduğum *Archimedes*, Heath (editör), adlı kitabını bana yıllar önce ödünç veren ve geri istemeyen dostum Prof. Metin Gürses'e gecikmiş teşekkürler.

SONSUZ TÜR SONSUZLUK VARDIR

Nurettin Ergun *

Bazı kümelerin bazı kümelerden daha fazla elemanı vardır. $\{1, 2, \dots, 50\}$ kümesinde $\{5, 10, 15, \dots, 50\}$ kümesinden daha fazla eleman vardır. $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin iki elemanlı alt kümeleri, $\{1, 2\}$ kümesinin tüm alt kümelerinden fazladır. İki gerçel sayı arasında, tüm gerçel sayılar eksenindeki rasyonel sayılardan daha fazla irrasyonel sayı vardır. Matematikçin en önemli başarılarından biri, tanımlanabilen tüm kümelerin "eleman sayılarını" kıyaslayabilmek amacıyla, bir tür ölçme sayıları sistemi ve bu sistem içinde şaşırtıcı özelliklere sahip bir aritmetiği tanımlayabilmesi olmuştur. Bu "ölçme sayıları" özel bazı ordinal sayılardır. Bu sayıların ve üzerlerinde tanımlanan aritmetiğin temel özelliklerini tanıtmak bu yazının amacını ve kapsamını aşar (bkz. Notlar 1).

Biz bu yazıda şu ana ve temel ölçütlerle çalışacağız: Bir A kümesinden bir B kümesine hiç bir üzerine fonksiyon tanımlanamadığı matematiksel olarak kanıtlanabiliyorsa, ancak o zaman B kümesinde A kümesinden daha fazla sayıda eleman vardır denir ve bu olgu kısaca $|A| < |B|$ işareti ile gösterilir. Eğer A ve B arasında üzerine ve bire-bir bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa $A \cong B$ ya da $|A| = |B|$ yazılır ve A ile B kümelerine eş kuvvette kümeler denir.

Ana Teorem. A ve B kümeleri ne olursa olsun $|A| = |B|$, $|A| < |B|$, $|B| < |A|$ bağdaşmaz durumlarından biri ve yalnızca birisi geçerlidir.

Bu yazının amacı eş kuvvette olmayan küme örnekleri vermektir. Üzerine (ya da

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

örten) fonksiyon, bire-bir fonksiyon, temel küme işlemleri ve tümevarım kavramını biraz olsun tanıyan, bileşkeleri tanımlanabilen iki üzerine fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da üzerine olduğunu bilen ve anlama çabası ile okuyan herkes anlatılanları sanırsız kavrayacaktır. Elinizde tuttuğunuz derginin Haziran-Ağustos 1991 sayısında yayımlanan *Kümelerin Niceliği* başlıklı yazının bazı sonuçlarına bakmak yararlı olabilir.

Tüm doğal sayılar kümesi, yani $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$, kısaca $\mathbb{N}$ işareti ile, $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi ise $\mathbb{N}_n$ işareti ile gösterilecektir. Bir X kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan küme ise $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilecektir.

Önerme 1. $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.

Bu önermeyi n doğal sayıları üzerinden tümevarımla göstereceğiz. Apaçıktır ki $\mathbb{N}_1 = \{1\}$ kümesinden $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ kümesine tanımlanan herhangi bir fonksiyon altında $\mathbb{N}_2$ kümesindeki elemanlardan birisi görüntü elemanı olamaz. Şimdi önermenin n doğal sayısı için doğru olduğunu varsayalım. Buna n 'nci adım varsayımı adı verilir. Bu varsayım altında $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+2}$ kümesine herhangi bir üzerine fonksiyonun tanımlanmasının olanaksızlığını, olmayana ergi (ya da saçmaya indirgeme) yöntemiyle göstereyim. Bir $g : \mathbb{N}_{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_{n+2}$ üzerine fonksiyonu tanımlı olsaydı, öncelikle her bir $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ için $g^{-1}(k) \neq \emptyset$ olurdu. Dikkat: $n+1 \in g^{-1}(n+2)$ olamaz, aksi halde $k \leq n+1$ gerçekleyen her $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ için $g^{-1}(n+2) = \emptyset$ ve $g^{-1}(k) \subseteq \mathbb{N}_{n+1} - \{n+1\} = \mathbb{N}_n$ nedeniyle $g : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_{n+1}$ kısıtlama fonksiyonu üzerine olurdu, bu n 'nci adım varsayımına aykırıdır. Demek ki $n+1 \notin g^{-1}(n+2)$, $g(n+1) \leq n+1$ ve $g^{-1}(n+2) \subseteq \mathbb{N}_n$ ara sonuçları ve $\mathbb{N}_n = (\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup g^{-1}(n+2)$ eşitliği elde edilir. Şimdi

$$h(k) = \begin{cases} g(k), & k \in \mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2) \text{ ise,} \\ g(n+1), & k \in g^{-1}(n+2) \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklindeki $h : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_{n+1}$ fonksiyonunun üzerine olduğunu göstererek yine bir çelişki elde edelim. Gerçekten $\{g(n+1)\} = \{g(n+1)\} - \{n+2\}$ nedeniyle

$$\begin{aligned} h(\mathbb{N}_n) &= h(\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup h(g^{-1}(n+2)) \\ &= g(\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup \{g(n+1)\} \\ &= (g(\mathbb{N}_n) - \{n+2\}) \cup \{g(n+1)\} \\ &= (g(\mathbb{N}_n) \cup \{g(n+1)\}) - \{n+2\} \end{aligned}$$

$$= g(\mathbb{N}_{n+1} - \{n+2\}) = \mathbb{N}_{n+1}$$

bulunarak yine n 'nci adım varsayımına aykırı düşülmüş olur. Tüme varım varsayımı altında $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+2}$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamıyacağı gösterilmiş oldu.

Önerme 2. $n < m$ ise $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_m$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.

Dikkat edilirse $n \leq m$ ise, $\mathbb{N}_m$ kümesinden $\mathbb{N}_n$ kümesine pek çok (en az $n \cdot n!$ tane) üzerine fonksiyon tanımlanabilir. O halde $n < m$ iken $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_m$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanabilseydi, $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesine üzerine bir (bileşke) fonksiyonu tanımlanabilirdi. Bu olanaksızdır.

Önerme 3. X kümesi ne olursa olsun, X kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.

Georg Cantor'a ait bu olağanüstü önemli önermenin Bertrand Russell tarafından verilen şu kısa çarpıcı kanıtlanmasına bakınız. Eğer bir $h : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ üzerine fonksiyonu tanımlanabilseydi $X_0 = \{x \in X : x \notin h(x)\}$ "iyi tanımlanmış" alt kümesi için, bu küme boş olsun ya da olmasın, en az bir $x_0 \in X$ elemanının $h(x_0) = x_0$ gerçeklemesi gerekirdi. Dikkat: $x_0 \in X_0$ ancak ve yalnız $x_0 \notin X_0$ iken geçerlidir. Ne çelişki! Bu önemli önermenin Cantor tarafından verilen bir başka kanıtlanmasını da görmenin yararlı olduğunu sanıyoruz. Varsayalım ki bir $h : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ üzerine fonksiyonu tanımlanabilsin. O halde her bir $x \in X$ için $A_x = h(x) \subseteq X$ "görüntü elemanı" tanımlı olurdu. Her bir $A \subseteq X$ alt kümesinin karakteristik fonksiyonu, $\forall x \in A$ için $\chi_A(x) = 1$ ve $\forall x \in X - A$ için $\chi_A(x) = 0$ şeklinde, X kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan fonksiyondur. Dikkat edilirse ancak ve yalnız $A = B$ iken χ_A ve χ_B karakteristik fonksiyonları eşit olabilir; başka bir deyişle kümesindeki her bir elemanda eşit değerler alabilirler. Gerçekten $A = B$ ise her $x \in A (= B)$ için $\chi_A(x) = 1 = \chi_B(x)$ ve her $x \in X - A (= X - B)$ için $\chi_A(x) = 0 = \chi_B(x)$ olur. Tersine eğer her $x \in X$ için $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ ise, özellikle her bir $a \in A$ için $1 = \chi_A(a) = \chi_B(a)$ eşitliği bize $a \in B$ gerçekleştiğini söyler ve sonuçta $A \subseteq B$ ve benzer biçimde $B \subseteq A$ kapsamları ve dolayısı ile $A = B$ eşitliği elde edilir. Şimdi okuyucu, $\forall x \in X$ için $\varphi(x) = \chi_{X-A_x}(x)$ şeklinde X kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan φ

fonksiyonunun, $\varphi^{-1}(1) = E \subseteq X$ olmak üzere, E kümesine ait olsun olmasın, her bir $x \in X$ elemanı için $\varphi(x) = \chi_E(x)$ sağladığını kolayca görecektir. $E = h(x_0) = A_{x_0}$ sağlayan en az bir $x \in X$ elemanı var olduğundan (neden?), sonuçta $\varphi = \chi_E = \chi_{A_{x_0}}$ ve dolayısı ile $\chi_{A_{x_0}}(x_0) = \varphi(x_0) = \chi_{X-A_{x_0}}(x_0)$ saçma sonucu elde edilirdi; burada sol yan 1 iken sağ yan 0 dır ya da tersi. Demek ki X kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kümesine tanımlanmış bir üzerine fonksiyonun varlığından söz edilemez.

Önerme 4. N kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine herhangi bir üzerine fonksiyon tanımlanamaz.

$\mathbb{R}$ kümesinden $\mathcal{P}(N)$ kümesine üzerine ve üstelik bire-bir bir fonksiyon tanımlıdır (bkz. Önerme 5). O halde N kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine üzerine bir fonksiyonunun tanımlanabilmesi varsayımı bir önceki önermeyle çelişen bir sonuç doğurur. Neden? Biz burada başka bir kanıtlama verelim. $]0,1[$ aralığındaki gerçel sayılar doğal sayılarla numaralandırılmazlar ve dolayısı ile N kümesinden $]0,1[$ aralığına üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz (bkz. Notlar 2). Gerçekten bu aralıktaki tüm gerçel sayılar kümesi N kümesi ile "numaralandırılabilseydi," bu aralık $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ kümesinden başka bir şey olmazdı. Dikkat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ rasyonel sayıları nedeniyle bu aralıktaki zaten "en az" doğal sayılardaki kadar gerçel sayı vardır. Her bir n doğal sayısı için x_n gerçel sayısı $x_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}x_{n4} \dots$ şeklindeki ondalık açılıma sahiptir; burada $x_{n1}, x_{n2}, \dots$ basamakları $0, 1, \dots, 9$ tam sayılarıdır (bkz. Notlar 3). Bilindiği gibi en az bir basamak 0 değildir ve belirli bir basamaktan sonra tüm diğerleri 9 olmaz. Tersine basamakları bu koşula uyan herhangi bir ondalık açılım $]0,1[$ aralığına ait bir gerçel sayıdır. Şimdi, her n için x_n gerçel sayısının n 'nci basamağı olan x_{nn} tam sayısı yardımı ile önce $k_n = \left\lfloor \frac{x_{nn}+1}{3} \right\rfloor$ tam sayısını ve sonra $x_n = x_{nn} + (-1)^{k_n}$ tam sayılarını basamak kabul eden $a = 0, a_1a_2a_3 \dots$ gerçel sayısını tanımlayalım. Bu gerçel sayı bir yandan $]0,1[$ aralığına aittir, öte yandan bu aralıktaki tüm x_n gerçel sayılarından farklıdır, çünkü $a_n \neq x_{nn}$ geçerli olmaktadır. Çelişki! Demek ki N kümesinden $]0,1[$ aralığına, üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz. Oysa $g(x) = \frac{x}{2+2|x|} + \frac{1}{2}$ şeklindeki $g : \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$ fonksiyonu üzerine (ve üstelik bire-bir) olduğundan (neden?), N kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine bir üzerine fonksiyonun tanımlanamayacağı anlaşılır.

Uyarı. Yukarıda $|N_1| < \dots < |N_n| < \dots < |N| < |\mathbb{R}|$ gerçekleştiği gösterildi. Önerme 2 nedeni ile bir küme eğer N_n kümesi ile eş kuvvette ise, $n \neq m$ olmak üzere N_m kümesi ile eş kuvvette olamaz. Ancak ve yalnız N_n kümesi ile eş kuvvette olabilen bir kümeye n elemanlı denir. N_n kümelerinin hiç birisi ile eş kuvvette olamayan bir X kümesinin ya $|X| = |N|$, ya da $|N| < |X|$ gerçekleyeceği Ana Teorem'in bir sonucudur. Böyle bir kümeye sonsuz elemanlı küme denir. Her X kümesi için $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ gerçekleştiğini bildiğimiz için, her sonsuz noktalı kümeden çok daha kalabalık bir başka sonsuz elemanlı kümenin var olduğu anlaşılır. Aynı nedenden ötürü "en kalabalık sonsuz elemanlı küme" yi tanımlamak olanaksızdır. Bu yazıyı, pek çok önemli kümenin eş kuvvette olduklarını gösterebilmemize elveren olağanüstü önemli bir teoreme ilişkin iki ünlü uygulama ile bitiriyoruz.

Önerme 5. $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(N)$ 'dir.

Önce şu temel gerçeği gözleyelim. Herhangi iki gerçel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır. Gerçekten $x < y$ ise $\frac{1}{y-x} < n$ gerçekleyen n doğal sayısının varlığı gerçel sayıların temel özelliklerinden biridir. $r = \frac{[nx]+1}{n}$ rasyonel sayısı $x < r < y$ gerçekler, çünkü $nx < [nx] + 1 \leq nx + 1 < ny$ geçerlidir. O halde $x < r_1 < r < p_1 < y$ gerçekleyen r_1 ve p_1 rasyonel sayıları ve dolayısı ile $x < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < r < p_1 < p_2 < p_3 < \dots < y$ gerçekleyen rasyonel sayılar da vardır. Şimdi, $\varphi(x) =]-\infty, x] \cap \mathbb{Q}$ şeklinde tanımlanan $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ fonksiyonu bire-birdir; örneğin $x < y$ ise, yukarıda varlığı kanıtlanan r rasyonel sayısı $r \in \varphi(y) - \varphi(x)$ gerçekler. Demek ki $x \neq y$ ise, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ gerçekleşmektedir. O halde $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cong \mathcal{P}(N)$ olduğundan (neden?), $\mathbb{R}$ kümesinden $\mathcal{P}(N)$ kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. Şimdi her bir $A \in \mathcal{P}(x)$ için

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_A(n) + 1}{10^n}$$

şeklinde tanımlanan $\psi : \mathcal{P}(N) \rightarrow]0,1[$ fonksiyonu göz önüne alınsın. O halde $\psi(A)$, ondalık açılımında, n 'nci basamağı $k_n^A = \chi_A(n) + 1$ tamsayısı olan gerçel sayıdır, yani $\varphi(A) = 0, k_1^A k_2^A k_3^A \dots$ 'dır. Dolayısı ile φ bire-birdir, neden? Demek ki $\mathcal{P}(N)$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır, neden? Aşağıdaki teorem önermeyi kanıtlar.

Cantor-Bernstein Teoremi. X kümesinden Y kümesine bir bire-bir fonksiyon ve tersine Y kümesinden X kümesine bir bire-bir fonksiyon tanımlı ise $X \cong Y$ olur.

Önerme 6. $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ 'dir.

Burada $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$ kümesinin n elemanlı tüm alt kümelerinin kümesi, $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ ile de $\mathbb{N}$ kümesinin tüm sonlu elemanlı alt kümelerinin kümesi, yani $\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ gösterilmektedir. $n \leftrightarrow \{n\}$ eşlemesi nedeniyle hemen $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_1(\mathbb{N})$ bulunur. Şimdi $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ varsayalım. Bu n 'nci adım varsayımımızdır. Dikkat edilirse $X \cong Y$ ise, bu eş kuvvetteliği gerçekleştiren üzerine ve bire-bir fonksiyon f olmak üzere $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leftrightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ eşlemesi sayesinde $\mathcal{P}_n(X) \cong \mathcal{P}_n(Y)$ olduğu apaçıktır. Ayrıca her m doğal sayısı için $m \leftrightarrow m+1$ eşlemesi yardımıyla $\mathbb{N} \cong \{2, 3, \dots\}$ ve sonuçta $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N} - \{1\})$ gerçekleşir. O halde 1'den farklı doğal sayılardan oluşan $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ kümesine $\{1, m_1, m_2, \dots, m_n\}$ kümesini eşleştiren fonksiyon ve n 'nci adım varsayımı yardımı ile $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlanabilir. Şimdi de şunları gözleyelim. $(x, y, z) \leftrightarrow ((x, y), z)$ ile $X \times Y \times Z \cong (X \times Y) \times Z$ ve sonuçta herhangi bir X kümesi için $X^3 \cong X^2 \times X$ ve tümevarımla kolayca $X^n \cong X^{n-1} \times X$ geçerli olduğu anlaşılır. O halde her $2 \leq n$ doğal sayısı için yine tümevarımla $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ elde etmek güç değildir. Sonuçta, $n+1$ elemanlı herhangi bir doğal sayılar kümesi için $h(\{m_1, m_2, \dots, m_{n+1}\}) = (m_1, m_2, \dots, m_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun bire-bir olduğu açık görüldüğünden, $\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bire-bir bir fonksiyonunun tanımlanabildiği de anlaşılır. O halde Cantor-Bernstein teoremi nedeniyle $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ sonucu elde edilir. Böylelikle ilk iddia tümevarımla gösterilmiş olur. $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ iddiasını göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Notlar 4).

Notlar

1. Ordinal sayılar sisteminin yeterince mükemmel olmasına karşın, çok önemli bazı

soruların yanıtları açıklığa kavuşturulamamaktadır. Örneğin $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin eleman sayısını "ölçmekte" kullanılan ordinal sayıyı belirlemek olanaksızdır. Cantor 1878 yılında ω_1 işareti ile gösterilen ordinal sayının bu nitelikte olduğunu öngörmüştü. 1938 ve 1963 yıllarında kanıtlanan iki teoremden ötürü bu öngörünün doğruluğunun ya da yanlışlığının kanıtlanamayacağı anlaşıldı. Dahası, sonsuz elemanlı herhangi bir X kümesi için $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin eleman sayısını "ölçmekte" kullanılan ordinal sayı, böyle bir sayının varlığının kesinkes kanıtlanabilmesine karşın, açıkça belirlenmemektedir.

2. $\mathbb{N}$ kümesinden sonsuz noktalı herhangi bir X kümesine tanımlanan herhangi bir f üzerine fonksiyonu için şunlara dikkat edelim: Her bir $x \in X$ elemanı için $N_x = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\} \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi boş değildir ve üstelik $x \neq y$ için N_x ile N_y kümeleri ayrıktır ve dolayısı ile N_x ile N_y farklı kümelerdir. O halde $x \leftrightarrow N_x$ eşlemesi bire-birdir. Her bir N_x kümesinden bir ve yalnız bir n_x doğal sayısı seçilsin. $x \leftrightarrow N_x$ eşlemesi de bire-birdir, yani $\{n_x : x \in X\} \cong X$ ve üstelik $f(\{n_x : x \in X\}) = X$ gerçekleşir, neden? $\{n_x : x \in X\}$ sonsuz elemanlı olduğu için $\mathbb{N}$ ile eş kuvvettedir, neden? O halde X kümesinin tüm elemanları $\mathbb{N}$ ile "numaralanabilir", yani $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ yazılabilir. Okuyucu, benzer düşünceleri herhangi bir üzerine fonksiyon için yapmalıdır.
3. Gerçel sayıların ondalık açılımları (ya da 10 tabanlı açılımları) konusunda bu derginin Nisan 1991 sayısında yer alan *Gerçel Sayı Nedir?* başlıklı yazıya başvurulabilir.
4. Her bir n için $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) = \{A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \dots\}$ yazılarak $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine

$$h(A_{nm}) = n + \frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun üzerine ve bire-bir olduğunu göstermeğe çalışın. Ayrıntılar için *Kümelerin Niceliği* başlıklı yazıdaki Önerme 5'e bakılmalıdır.

FERMAT VE EULER TEOREMLERİ

Emre Alkan *

Bu yazıda sayılar teorisinin klasikleşmiş iki teoremini verip, ilginç kanıtlarını yapacağız.

Teorem. (Fermat) p bir asal sayı ve $p \nmid a$ olsun. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olur.

Kolayca görüleceği üzere buna eşdeğer bir sonuç şöyledir.

Teorem. p asal bir sayı ise $a^p \equiv a \pmod{p}$ olur.

Kanıt 1. Her a pozitif sayısı için $a^p \equiv a \pmod{p}$ olduğunu göstereceğiz. Tümevarım $a = 1$ için doğru. $a^p \equiv a \pmod{p}$ olsun. $(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$ olduğunu görelim. $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$ olduğundan tümevarım tamamlanır.

Kanıt 2. $p \nmid a$ olsun ve $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ sayılarını ele alalım. $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ olmak üzere $ia \equiv ja \pmod{p}$ ise $p \nmid a$ olduğundan $i = j$ çelişkisi elde edilir. Böylece

$$a(2a)(3a) \cdots (p-1)a \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

ve $(p-1)! a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$ olur. p ve $(p-1)!$ aralarında asal olduğundan $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ elde edilir.

Şimdi bu teoremin bir genellemesini verelim.

Teorem. (Euler) $\phi(m)$ bir m sayısından küçük ve m ile arasında asal olan sayıların sayısı olsun. $(a, m) = 1$ ise $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ olur.

Kanıt 1. $x_1, x_2, \dots, x_{\phi(m)}$ sözü edilen sayılar olsun. $(ax_i, m) = 1$ olur. Ayrıca $ax_i \equiv ax_j \pmod{m}$, $i \neq j$, ise $x_i \equiv x_j \pmod{m}$ çelişkisi elde edilir. Böylece

$$(ax_1)(ax_2) \cdots (ax_{\phi(m)}) \equiv x_1 x_2 \cdots x_{\phi(m)} \pmod{m}$$

ve m ile $x_1 x_2 \cdots x_{\phi(m)}$ aralarında asal olduğundan $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ elde edilir.

Kanıt 2. m sayısını asal çarpanlarına $m = \prod p^\alpha$ şeklinde ayıralım. Çarpımdaki her p^α için $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ olduğunu görmek yeterlidir. Bu ise, $\phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ olduğundan

$$a^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

olduğunu görmeye denktir. Şimdi şunu göstereyim. $\alpha > 0$ ve $m \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ ise $m^p \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$ olur. $m = 1 + kp^\alpha$ alalım.

$$\begin{aligned} m^p &= (1 + kp^\alpha)^p \\ &= (kp^\alpha)^p + \binom{p}{1}(kp^\alpha)^{p-1} + \binom{p}{2}(kp^\alpha)^{p-2} \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + \binom{p}{p-2}(kp^\alpha)^2 + \binom{p}{p-1}kp^\alpha + 1, \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq p-1$ için $p \mid \binom{p}{k}$ ve $\alpha+1 < 2\alpha+1 < 3\alpha+1 < \cdots$ olduğundan göstermek istediğimiz $m^p \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$ elde edilir. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ olduğunu biliyoruz. Az önceki yardımcı sonucu kullanarak

$$\begin{aligned} a^{p(p-1)} &\equiv 1 \pmod{p^2} \\ a^{p^2(p-1)} &\equiv 1 \pmod{p^3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve

$$a^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

elde ederiz.

Kanıt 3. Grup kavramından yararlanacağız.

$$M = \{k : (k, m) = 1 \text{ ve } 1 \leq k < m\}$$

olsun. M üzerinde şöyle bir $\cdot$ işlemi tanımlayalım. $a \in M$ ve $b \in M$ alalım. $1 \leq c < m$ için $ab \equiv c \pmod{m}$ ise $a \cdot b = c$ olsun. M 'nin bir grup olduğunu gözlereceğiz. Birleşme özelliği doğal olarak var. M 'nin kapalı olduğunu görelim. $a, b \in M$ ise $a \cdot b = c \in M$ olduğunu

*Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

görelim. $(a, m) = (b, m) = 1$, $1 \leq c < m$, $ab \equiv c \pmod{m}$, $m \mid ab - c$ ve $(m, c) > 1$ ise $q > 1$ için $q \mid ab$ ve $q \mid m$ elde edilir. Fakat $(ab, m) = 1$ olduğundan bir çelişki elde ederiz. $a \in M$ için $a1 \equiv a \pmod{m}$ olduğundan 1 etkisiz elemandır. Ters elemanın varlığı için, $a \cdot a^{-1} = 1$, yani $ax \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde bir x lazım. $(a, m) = 1$ ise $ax_0 + my_0 = 1$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ vardır (bu sayılar Öklit algoritmasıyla bulunabilir) $ax_0 \equiv 1 \pmod{m}$ 'dir. $x_0 \equiv z_0 \pmod{m}$ ve $1 \leq z_0 < m$ olacak şekilde bir z_0 alırsak $a^{-1} = z_0$ olur. M bir gruptur. Bu grubun eleman sayısı $\phi(m)$ 'dir. Bir $a \in M$ alalım. M sonlu olduğu için $a^t = 1$ olacak şekilde minimum bir t sayısı vardır. Böylece $1, a^1, a^2, \dots, a^{t-1}$ elemanları M 'nin bir çembersel alt grubunu oluştururlar. Alt grubun eleman sayısı $\phi(m)$ 'nin bir böleni olduğundan $a^{\phi(m)} = 1$ ve $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ elde edilir.

Son olarak $\phi(x)$ fonksiyonundan söz edelim.

Teorem. $(a, b) = 1$ ise $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$.

Kanıt. $s_1, s_2, \dots, s_{\phi(b)}$ sayıları b ile aralarında asal sayılar, $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(a)}$ ise a ile aralarında asal sayılar olsun. $as_i + br_j$ sayılarına $\pmod{ab}$ 'de bakalım.

$$as_i + br_j \equiv as_{i'} + br_{j'} \pmod{ab}$$

olur ve buradan da

$$\begin{aligned} s_i &\equiv s_{i'} \pmod{b} \\ r_j &\equiv r_{j'} \pmod{a} \\ i &= i' \\ j &= j' \end{aligned}$$

elde edilir. $(as_i + br_j, ab) = d$ olsun. $d \mid as_i + br_j$, $d \mid ab$, $p \mid d$ ve p asal olacak şekilde bir p alalım. $p \mid ab$ ise $p \mid a$ veya $p \mid b$ 'dir. $p \mid as_i + br_j$ ve $p \mid a$ ise $p \mid br_j$ ve $(a, r_j) = 1$ vereceğinden $p \mid b$ olur, fakat bu mümkün değil. $p \mid b$ hali de aynı; dolayısıyla $d = 1$ olmalı. Böylece $\phi(a) \cdot \phi(b) \leq \phi(ab)$ elde ettik. Eğer $(x, ab) = 1$

ise $(x, a) = 1$ ve $(x, b) = 1$ olduğu görülebilir. Böylece $\phi(ab) \leq \phi(a) \cdot \phi(b)$ ve $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ elde ederiz, ve kanıt sona erer.

$\phi(x)$ fonksiyonu çarpımı koruyan bir aritmetik fonksiyon örneğidir.

$$m = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

ise,

$$\phi(m) = \phi(p_1^{r_1}) \cdots \phi(p_k^{r_k})$$

elde edilir. Kolayca

$$\phi(p_i^{r_i}) = p_i^{r_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

olduğundan

$$\phi(m) = m \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

elde edilir.

Teorem. $\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$ olur.

Kanıt. Sağ taraf $1 \leq x \leq n$ şeklindeki sayıların sayısı; şimdi bu sayıları farklı bir şekilde sayalım. $(x, n) = d$ ise $\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ olur. Bu tür sayıların sayısı $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 'dir. Böylece

$$n = \sum_{d \mid n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \phi(d)$$

elde ederiz.

$\phi(a) \cdot \phi(b) = \phi(ab)$ olduğu kullanılarak da

$$\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$$

olduğu gösterilebilir. Bunu okuyucuya bırakacağız.

KAYNAKÇA

- [1] G. H. Hardy & E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5. baskı, Oxford.

CEBİRSEL DENKLEMLERİN KÖKLERİ

Nurettin Çalışkan *

Birinci derece $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) denkleminin bir tane kökü olduğunu ve bu kökün de $x = -\frac{b}{a}$ olduğunu bilmeyen bir kimse yoktur. İkinci derece $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) denkleminin ise iki kökü olduğunu ve bu köklerin de

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olarak verildiğini en azından bu dergiyi okuyan herkesin bildiğini düşünebiliriz.

Birinci derece denklemlerin ilk ne zaman çözüldüğü tarihin derinliklerinde kaybolmuş. Eski Mısırdaki M.Ö. 3500, Mezopotamya'da ise M.Ö. 2000 yıllarında en azından pozitif köklerin hesaplanabildiği biliniyor. Aynı uygarlıklar bazı özel hallerde ikinci derece denklemleri de çözebiliyorlar. Metot olarak ise kareye tamamlama kullanılıyor her ne kadar "şunu yap, bunu yap" gibi yemek tarifi şeklinde anlatılsa da. Zaten yukarıda kökleri veren formül de kareye tamamlama ile elde edilir. Eski Yunanlılar bu bilgilere sadece çözümün geometrik yorumunu ekliyorlar.

M.S. 600 yıllarından başlayarak Hintlilerin sıfırı keşfetmeleri ve negatif sayıları kullanmaya başlamaları ile bu uygarlık ve daha sonraki Arap uygarlığı bütün birinci ve ikinci derece denklemleri çözebiliyor ve hatta bazı özel hallerde üçüncü derece denklemlere bile el atıyor. Burada Muhammed ibn Musa el Hârizmî'den (780?-850?) bahsetmemiz gerekiyor. 830'da yazdığı *El Cebr vel Mukabele* adlı kitabıyla bugün de kullandığımız "cebir" ve "kök" kelimelerini, adının Latinceleştirilmesiyle de "algoritma" kelimesini matematiğe kazandırıyor. Bu kitap bütün Ortaçağ boyunca matematiği etkileyecektir. Artık irrasyonel sayılar da kök olarak kabul ediliyor, ama hâlâ kök sanal sayı olarak çıkarsa yokmuş gibi davranılıyor. Sanal sayıların anlaşılması ise ancak üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin köklerini veren formüller bulunduğundan sonra 17. yüzyıldan başlayarak mümkün olabiliyor.

Üçüncü derece denklemlere gelince işin rengi biraz değişiyor. Bazı basit üçüncü derece denklemlerin köklerini hemen yazabiliriz. Örneğin $x^3 - 27 = 0$ denkleminin üç kökü de 3'tür. $(x - 1)(x + 1)^2 = 0$ denkleminin bir kökü 1, diğer iki kökü ise $-i$ ve $+i$ 'dir. $x^3 + 6x + 2 = 0$ denkleminin kökleri ise hemen yazılabilecek türde değildir. (Yazıda verilen yöntem kullanılarak denklemin köklerinin $x_1 = 2^{1/3} - 4^{1/3}$ ve $x_{2,3} = [4^{1/3} - 2^{1/3} \pm i\sqrt{3}(2^{1/3} + 4^{1/3})]/2$ olduğu görülebilir.) Herhangi bir ikinci derece denklem için kökleri derhal veren kolay formül varken, üçüncü derece bir denklemin köklerini yazabileceğimiz formüller çoğumuzun hafızasında bulundurulmayacak kadar karmaşıktır. Bu yazımızda, trigonometrik fonksiyonlar yardımı ile $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) üçüncü derece denkleminin köklerinin elde edilmesini vereceğiz. Dördüncü dereceden denklemler için ise, beklenilen aksine, kökleri veren formüller üçüncü derecedekinden daha insaflıdır; yazımızda bu formüllere de yer vereceğiz.

Üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin genel çözümünün bulunması için Rönesans'ın gelmesi bekleniyor. İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano (1501-1576) 1545'te yayımladığı *Ars Magna* adlı eserinde bazı çağdaşlarının yaptıklarından yararlanarak üçüncü dereceden denklemlerin "Kardan çözümü"nü veriyor. Bu kitapta Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari'nin (1522-1565) bulduğu dördüncü dereceden denklemlerin çözümü de var. Sanal sayılar hâlâ bilinmiyor, ama gene de bu eserde karekök altında negatif sayılarla doğru işlemler yapılıyor.

Daha sonra Fransız matematikçi François Vieta (1540-1603) 1591'de üçüncü dereceden denklemlerin trigonometrik metotla çözümlerini buluyor. Ayrıca ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümlerini ortak bir yönteme oturtuyor. Vieta, denklemlerdeki katsayılarda her defasında değişik sayılar yerine a, b gibi harfler kullanarak matematiğin soyutlaşarak genelleşmesine de katkıda bulunuyor.

* ODTÜ Matematik Bölümü araştırma görevlisi

Bundan sonra ilk akla gelen, beşinci dereceden her hangi bir denklemin köklerini veren formül olacaktır. Ne yazık ki elimizde böyle bir formül yok. Şanslı olduğumuz nokta şu ki böyle bir formül aramaya da ihtiyacımız yok, çünkü beşinci (ve daha yüksek) dereceden denklemlerin köklerini verecek bir formül bulunamayacağı ispatlanmış. Bu ispat için soyut cebirin 2.5 yüzyıl kadar daha gelişmesini beklemek gerekmiş. Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel (1802-1829) 1826'da bu ispatı tam olarak vermiş. Neden böyle bir formül bulunamayacağını ise bu derginin gelecek sayılarında bulacaksınız.

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci derece denklemi verildiğinde, her iki tarafı a ile bölerek $x^2 + px + q = 0$ denklemine indirgeriz. Bu denklemin çözümlerini üç ayrı durumda vereceğiz.

(I) $q > 0$ ve $|\frac{2\sqrt{q}}{p}| < 1$ ise $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{q}}{p}$ deriz; kökler $x_1 = \sqrt{q} \tan \frac{\theta}{2}$ ve $x_2 = \sqrt{q} \cot \frac{\theta}{2}$ olur.

(II) $q > 0$ ve $|\frac{2\sqrt{q}}{p}| > 1$ ise $\cos \theta = \frac{p}{2\sqrt{q}}$ deriz; kökler $x_1 = -\frac{p}{2} + 2i\sqrt{q} \sin \theta$ ve $x_2 = -\frac{p}{2} - 2i\sqrt{q} \sin \theta$ olur.

(III) $q < 0$ ise $\tan \theta = \frac{2\sqrt{-q}}{p}$ deriz; kökler $x_1 = \sqrt{-q} \tan \frac{\theta}{2}$ ve $x_2 = -\sqrt{-q} \cot \frac{\theta}{2}$ olur.

Yukarıda karekök altında negatif sayı varsa, bu o sayının mutlak değerinin karekökünün i ile çarpımı olarak algılanmalıdır. Bilindiği gibi i , -1 'in pozitif karekökü olan sanal sayıdır.

Örnek 1. $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ ikinci dereceden denkleminin çözümlerine bakalım. $b = \frac{3}{4}$ ve $a = -2$ olarak verildiğinden, (I) halinin formüllerini kullanarak çözümü bulabiliriz.

$$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

eşitliği kullanılarak $\theta = \frac{\pi}{3}$ bulunur. Bulduğumuz θ değerini diğer eşitliklerde yerine koyduğumuzda

$$x_1 = \sqrt{b} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \sqrt{b} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

denklemin kökleridir.

Üçüncü Dereceden Cebirsel Denklemlerin Trigonometrik Çözümü

Genel şekliyle verilen üçüncü dereceden

$$AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \quad (A \neq 0)$$

denkleminde, katsayıları A ile böldükten sonra $X = x - \frac{B}{3A}$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$p = \frac{3AC - B^2}{3A^2}, \quad q = \frac{27A^2D + 2B^3 - 9ABC}{27A^3}$$

olmak üzere

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0$$

şeklinde, x^2 'li terimi eksik üçüncü dereceden denklem elde edilir. Bu son denklemin kökleri x_1, x_2, x_3 olarak bilinirse $X_i = x_i - \frac{B}{3A}$ ($i = 1, 2, 3$) dönüşümü ile $AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ denkleminin kökleri elde edilir. Bu durumda, en genel hal yerine, $x^3 + px + q = 0$ tipindeki denklemlerin köklerini bulan formüllerin bilinmesi yeterli olacaktır.

(1) denkleminde $x = y + z$ konulduğunda $y^3 + z^3 + 3yz(y + z) + p(y + z) + q = 0$ ya da

$$y^3 + z^3 + (3yz + p)(y + z) + q = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemi de

$$\begin{aligned} y^3 + z^3 + q &= 0 \\ (3yz + p)(y + z) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ikili bir denklem sistemi ile ifade edebiliriz. Sistemin ikinci denklemini incelediğimizde iki çarpımdan birinin sıfıra eşit olması gerektiği görürüz. Sıfırdan farklı çözümler aradığımız için, $y + z \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda yukarıdaki denklemlerden

$$\begin{aligned} y^3 + z^3 &= -q \\ yz &= -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. $u_1 = y^3$, $u_2 = z^3$ alındığında, kökleri u_1 ve u_2 olan

$$(2) \quad u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$$

olan ikinci dereceden denklemi elde ederiz. Bu denklem çözülerek, u_1 ve u_2 kökleri bulunduğunda $x = u_1^{1/3} + u_2^{1/3}$ ifadesi (1) denkleminin çözümü olacaktır

(2) denkleminin, p 'nin işaretine göre, çözümü üç durumda inceleyeceğiz.

(i) $p > 0$: Bu durumda (III)'teki formüller ve kullanıldığında

$$\tan \theta = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

ve (2) denkleminin kökleri

$$u_1 = \sqrt{\frac{p^3}{27}} \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{ve} \quad u_2 = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \cot \frac{\theta}{2}$$

olacaktır. Buradaki u_1 ve u_2 değerlerini yerine koyarsak

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}} \left[\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{1/3} - \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{1/3} \right]$$

elde edilir. $(\tan \frac{\theta}{2})^{1/3} = \tan \frac{\varphi}{2}$ değişkeni kullanılarak

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{p}{3}} \left[\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{p}{3}} \left[\frac{\tan^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \left[\frac{\tan^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{2 \tan \frac{\varphi}{2}} \right] = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot \varphi \end{aligned}$$

bulunur.

(1) denkleminin bir çözümünü bulduktan sonra indirgeme yöntemini kullanarak diğer iki çözümünü de bulabiliriz. (1) ifadesini $x - x_1$ 'e böldüğümüzde, bölüm $x^2 + x_1x + x_1^2 + p$ olacaktır. O halde $x^2 + x_1x + x_1^2 + p = 0$ denkleminin kökleri bize, (1)'in diğer iki çözümünü verir. Buradan

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-x_1 \mp \sqrt{x_1^2 - 4(x_1^2 + p)}}{2} \\ &= \frac{-x_1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{-1} \sqrt{3x_1^2 + 4p} \\ &= -\frac{x_1}{2} \mp \frac{i}{2} \sqrt{3x_1^2 + 4p}, \end{aligned}$$

ya da x_1 değeri yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{x_1}{2} \mp \frac{1}{2} i \sqrt{4p(1 + \cot^2 \varphi)} \\ &= -\frac{x_1}{2} \mp i \sqrt{p} \csc \varphi \end{aligned}$$

bulunur.

Özetlersek, $p > 0$ koşulunda (1) denkleminin çözümleri

$$\tan \theta = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}}, \quad \tan \frac{\varphi}{2} = \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{1/3}$$

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot \varphi$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + i\sqrt{p} \csc \varphi$$

$$x_3 = -\frac{x_1}{2} - i\sqrt{p} \csc \varphi$$

formüllerinin kullanımı ile hesaplanabilir.

Örnek 2. $x^3 + 4x + \frac{16}{9} = 0$ üçüncü dereceden denkleminin köklerini bulmaya çalışacağız. Denklemden $p = 4$ ve $q = \frac{16}{9}$ olarak verilmiş. Bu değerleri yukarıdaki ilk eşitlikte yerine koyduğumuzda $\tan \theta = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}} = \sqrt{3}$ ve buradan da $\theta = \frac{\pi}{3}$ elde edilir. Bulduğumuz θ değerini ikinci eşitlikte yerine koyduğumuzda $\tan(\frac{\varphi}{2}) = (\tan \frac{\theta}{2})^{1/3} = 3^{1/6}$ olur.

Buradan φ değeri, trigonometrik tablo veya hesap makinesi yardımıyla bulunabilir. İkinci bir yöntem de trigonometrik eşitlikler kullanılarak, bize gereken $\cot \varphi$ ve $\csc \varphi$ değerlerinin $\tan(\frac{\varphi}{2})$ cinsinden yazılmasıdır. Böylece $\cot \varphi = \frac{1}{2}(3^{1/6} - 3^{-1/6})$ ve $\csc \varphi = \frac{1}{2}(3^{1/6} + 3^{-1/6})$ bulunur. Böylece denklemin kökleri

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot \varphi$$

$$= -2\sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{2} (3^{1/6} - 3^{-1/6})$$

$$= 2(3^{-2/3} - 3^{-1/3})$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + \sqrt{p} \csc \varphi$$

$$= 3^{-1/3} - 3^{-2/3} + (3^{1/6} + 3^{-1/6})i$$

$$x_3 = -\frac{x_1}{2} - \sqrt{p} \csc \varphi$$

$$= 3^{-1/3} - 3^{-2/3} - (3^{1/6} + 3^{-1/6})i$$

(ii) $p < 0$ ve $-4p^3 < 27q^2$: Bu durumda, (2)'nin çözümlerini, (I)'deki formülleri kullanarak bulabiliriz.

$$\sin \theta = -\frac{2}{q} \sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

$$u_1 = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \tan \frac{\theta}{2},$$

$$u_2 = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \cot \frac{\theta}{2}$$

elde ederiz. $x_1 = u_1^{1/3} + u_2^{1/3}$ eşitliğini kullanarak (1)'in bir çözümü

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left[\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{1/3} + \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{1/3} \right]$$

olur. $(\tan \frac{\theta}{2})^{1/3} = \tan \frac{\varphi}{2}$ değişkeni kullanılarak

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\tan \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right) \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\frac{\tan^2 \frac{\varphi}{2} + 1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right) = \sqrt{-\frac{p}{3}} \csc \varphi \end{aligned}$$

bulunur. Yeniden indirgeme yöntemi kullanılarak denklemin diğer kökleri hesaplanabilir.

Özetlersek,

$$\sin \theta = -\frac{2}{q} \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \tan \frac{\varphi}{2} = \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{1/3}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-\frac{p}{3}} \csc \varphi \\ x_2 &= -\frac{x_1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 \csc \varphi \\ x_3 &= -\frac{x_1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 \csc \varphi \end{aligned}$$

(1) denkleminin çözümünü verir.

(iii) $p < 0$ ve $-4p^3 > 27q^2$: Bu durumda $\frac{-4p^3}{27q^2} > 1$ olacağından daha önce elde edilen formülleri kullanamayacağız. Onun yerine, daha farklı değişkenler ve trigonometrik eşitlikler kullanarak çözümü bulmaya çalışacağız.

(1) denkleminde $x = ny$ değişkenini yerine koyalım. $n^3 y^3 + n p y + q = 0$ ya da

$$y^3 + \frac{p}{n^2} y + \frac{q}{n^3} = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde,

$$\sin^3 \phi - \frac{3}{4} \sin \phi + \frac{1}{4} \sin 3\phi = 0$$

trigonometrik özdeşliği hatırlanarak $y = \sin \phi$ alındığında

$$\frac{p}{n^2} = -\frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad \frac{q}{n^3} = \frac{1}{4} \sin 3\phi$$

olur. Yukardaki ilk eşitlikten $n = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ bulunur. (x ve y 'nin aynı işaretli olması için bu ifadelerdeki kök pozitif olarak alınacaktır.) Bulduğumuz n değerini ikinci denklemde yerine koyduğumuzda

$$\sin 3\phi = \sqrt{-\frac{27q^2}{4p^3}}$$

olur. $\sqrt{-\frac{27q^2}{4p^3}} < 1$ olacağından, denklem ϕ için çözülebilir. O halde

$$\begin{aligned} \sin 3\phi &= \frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \\ x &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin \phi \end{aligned}$$

denklem sistemi, (1) denklemini çözecektir.

Yukarıdaki iki eşitlikten ilkinin sağlayan en küçük açığı θ diyelim. k bir tamsayı ise, $2k\pi + \theta$ ve $(2k+1)\pi - \theta$ de sağlar onu. Bulunan ϕ 'lerin sinüs değerlerine bakıldığında

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) &= \begin{cases} \sin \frac{\theta}{3}, & k = 3m \\ \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right), & k = 3m + 1 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right), & k = 3m - 1 \end{cases} \\ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) &= \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right), & k = 3m \\ \sin \frac{\theta}{3}, & k = 3m + 1 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right), & k = 3m - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu değerler incelendiğinde yalnızca üç farklı değer olduğu görülecektir. Bulunan üç farklı ϕ değerini yukardaki sistemin ikinci denkleminde yerine koyduğumuzda elde edilen formül (1) denkleminin çözümünü verir.

Özetlersek

$$\sin \theta = \frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin \frac{\theta}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right) \\ x_3 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}$$

(1) denkleminin çözümünü verir.

Örnek 3. $x^3 - 6x + 4 = 0$ denkleminde bakalım. Denklemde $p = -6$ ve $q = 4$ olarak verilmiştir. p ve q değerlerini ilk denklemde yerine koyduğumuzda $\sin \theta = \frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ve buradan da $\theta = \frac{\pi}{4}$ bulunur. Bu değer diğer üç eşitlikte yerine konularak

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) = -1 + \sqrt{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right) = 2 \\ x_3 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) = -1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dördüncü Derece Cebirsel Denklemlerin Çözümü

Katsayıları reel olan

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad (A \neq 0)$$

dördüncü dereceden cebirsel denkleminde, katsayılar A ile bölündükten sonra x yerine $x - \frac{B}{4A}$ konulursa,

$$p = \frac{6B^2 - 12AB + 16AC}{16A^2}$$

$$q = \frac{2B^3 - 8ABC + 16A^2D}{16A^3}$$

$$r = \frac{-3B^4 + 16AB^2C - 64A^2BD + 256A^3C}{256A^4}$$

olmak üzere, x^3 terimi eksik

$$(3) \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

şeklinde dördüncü dereceden denklem elde edilir.

Bütün u değerleri için (3) denklemi

$$x^4 + ux^2 + \frac{u^2}{4} - ux^2 - \frac{u^2}{4} + px^2 + qx + r = 0$$

ya da

$$(4) \quad \left(x^2 + \frac{u}{2}\right)^2 - \left[(u-p)x^2 - qx + \frac{u^2}{4} - r\right] = 0$$

denkleminde denktir. Bu denklemde ilk terim bir tam karedir. İkinci terim de bir tam kare olarak ifade edildiğinde, dördüncü dereceden denklemin çözümü, ikinci dereceden iki denklemin çözümüne indirgenmiş olacaktır.

$$(5) \quad (u-p)x^2 - qx + \frac{u^2}{4} - r = 0$$

denklemini x için çözdüğümüzde,

$$\frac{q \mp \sqrt{q^2 - 4(u-p)\left(\frac{u^2}{4} - r\right)}}{2(u-p)}$$

denklemin köklerini verir. u değişkenini

$$(6) \quad q^2 - 4(u-p)\left(\frac{u^2}{4} - r\right) = 0$$

denklemini sağlayacak şekilde seçersek, (5) denklemi çift kath $x = \frac{q}{2(u-p)}$ köküne sahip olacaktır.

(6) denkleminin bütün katsayıları reel olduğundan en az bir u_1 reel kökü vardır. Bulunan u_1 değerini (4) denkleminde yerine koyduğumuzda

$$\left(x^2 + \frac{u_1}{2}\right)^2 = (u_1 - p)\left(x - \frac{q}{2(u_1 - p)}\right)^2$$

elde edilir. Artık buradan x değerlerini bulmak kolaydır.

Sonuç olarak,

$$q^2 - 4(u-p)\left(\frac{u^2}{4} - r\right) = 0$$

denkleminin reel çözümü $u = u_1$ ise

$$x_1 = \frac{\sqrt{u_1 - p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{u_1 - p}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}}$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt{u_1 - p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}}$$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{u_1 - p}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}}$$

formülleri, (3) denkleminin bütün çözümlerini verir.

Örnek 4. $x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0$ denklemini düşünelim.

$$\left(x^2 + \frac{u}{2}\right)^2 - \left[(u-1)x^2 + 4x + \frac{u^2}{4} + 3\right] = 0$$

eşitliğini u için çözdüğümüzde $u = 2$ değerinin denklemin bir çözümü olduğu görülür. Bulduğumuz u değerini ilk denklemde yerine koyduğumuzda, $(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 4x + 4) = 0$ ya da $(x^2 + 1)^2 = (x + 2)^2$ elde ederiz Buradan da

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{11})$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11})$$

verilen denklemin kökleridir.

KAYNAKÇA

- [1] G. Birkhoff & S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, McMillan, 1965.
- [2] S. D. Fisher, *Complex Variables*, 2. baskı, Wadsworth, 1990.

“BULANIK” KÜMELER

Ahmet Şekercioğlu *

Şimdi diyeceksiniz ki “bulanık kümeler de nereden çıktı?” Fakat ‘fuzzy’ sözcüğüne başka bir karşılık bulamadım bir türlü. Esasında *bulanık* sözcüğü de bu tür kümeleri tanımlamak için çok da kötü değil gibi geldi bana. Her neyse, önce biraz bu kavramı tanıtmaya çalışayım, sözcüğün tam oturup oturmadığına siz karar verin. Önerilerinizi bekliyorum. Kümeler kuramını anımsamakla başlayalım işe. *Küme* diye ortak bir isim altında toplanmış nesnelere diyoruz. Örneğin, “saat 17:00’de ODTÜ otobüs durağında bekleyenler” bir küme oluşturuyorlar. Eğer bütün insanların içinde bulunduğu kümeye *evrensel küme* dersek, bu kümeden bir takım insanları ayırıp ortak bir isim altında toplamış ve bir küme yaratmış olduk. Şimdi herhangi bir insanı düşünelim. Bu kişi saat 17:00’de ODTÜ otobüs durağında ya bekliyor, ya da beklemiyor olacaktır, değil mi? Yani yaptığımız tanımlama, her bir kişiyi ya ODTÜ otobüs durağında bekleyenler kümesine sokuyor ya da dışında bırakıyor. Kümeleri hayalimizde canlandırmak için çok güzel bir yöntem var: *Venn şemasını* çizmek. Şekil 1’de bir Venn şeması örneği görebilirsiniz. Bir kümeyi belirlemek için iki yöntem kullanabiliriz. Birincisi, kümenin elemanlarını isim isim sayıp kümeyi oluşturmak:

Durakta bekleyenler = {Ali, Oya, Işıl}.

Bu yöntem, ancak sonlu sayıda elemanı olan kümeleri tanımlamakta kullanılabilir doğallıkla. İkinci yöntem ise bir *karakteristik fonksiyon* tanımlamak. Bu karakteristik fonksiyon bize evrensel kümenin tek tek bütün bireylerinin bir kümenin içine girip girmediğini söyler.

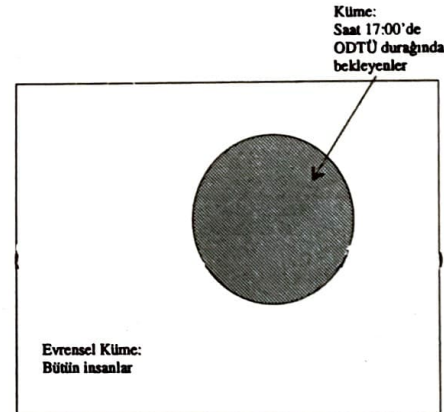
Öyle bir karakteristik fonksiyon tanımlarız ki, eğer bir nesne bir kümenin elemanı ise, o kümeyi tanımlayan karakteristik fonksiyon 1, değilse 0 sonucunu verir. (1 ve 0’ı karakteristik fonksiyonun verdiği ‘doğru’ ve ‘yanlış’ yanıtları olarak da düşünebiliriz.) Yani karakteristik fonksiyon evrensel kümenin her bir elemanını {1,0} kümesine eşler. Örnek olarak,

karakteristik fonksiyonunu yazarak gerçel sayılar evrensel kümesinin içinde bir küme tanımlamaya çalışalım:

$$\mu_{[10,20]}(x) = \begin{cases} 1, & 10 \leq x \leq 20 \text{ ise;} \\ 0, & x < 10 \text{ veya } x > 20 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu karakteristik fonksiyon bize [10,20] aralığını gerçel sayılar evrensel kümesinin bir alt kümesi olarak tanımlar.

Şekil 1’de “saat 17:00’de ODTÜ otobüs durağında bekleyenler” kümesini simgeleyen Venn şemasını görüyorsunuz.



Şu ana kadar işler yolunda gitti. Gelelim şöyle bir küme tanımına: “Saat 17:00’de ODTÜ otobüs durağında bekleyen *gençler*.” Şimdi durum biraz karıştı. Tamam, 20 yaşındakiler bu kümeye rahatlıkla girerler. Ama 30 yaşındakiler? 40 yaşındakiler? Acaba sınırı nerede bırakacağız? Şöyle bir tanım yap-sak: Eğer birisi 35 yaşından küçükse genç, büyükse yaşlı desek? 36 yaşındaki birisi için çok acımasız davranmış olmaz mıyız? İşte *bulanık kümeler* burada yardımımıza yetişiyor. En kaba tanımıyla söylersek bir bulanık küme, sınırları kesin çizgilerle belirlenmemiş bir küme oluyor. Başka bir deyişle, bir bulanık kümeyi oluşturan her bir eleman, *kısmen* o kümenin üyesi olabiliyor. Yani her bir elemanın bir *üyelik derecesi* var. Bu durumda eğer genç in-

* Swinburne University of Technology (Melbourne, Avustralya) öğretim üyesi

sanların kümesini oluşturmak istersek, 36 yaşındaki birisi bu kümenin *kısmen* elemanıdır diyebiliriz (Böylece o kişiyi de pek üzmemiş oluruz (!)).

Bulanık kümeleri nasıl tanımlayabiliriz? Normal kümelerde olduğu gibi ya elemanlarını tek tek sayarız, ek olarak her bir elemanın üyelik derecesini de belirtiriz:

$$\text{durakta bekleyen gençler} = \{1.0/\text{Ali}, 0.5/\text{Oya}, 0.2/\text{Işıl}\}$$

Burada, isimlerin yanındaki sayılar bize o kişinin ne kadar ‘genç’ olduğunu, başka bir deyişle, ne kadar “durakta bekleyen gençler” kümesinin elemanı olduğunu gösteriyor. Yukarıdaki örnekte Ali tümüyle ‘genç’, Oya ise ‘yarı yarıya’ genç olarak düşünülmüş.

Bulanık kümeler -“fuzzy sets”- ilk olarak Lotfi Zadeh tarafından ortaya atılmış [Zad65]. Zadeh, küme elemanlarının üyelik derecelerini göstermek için $[0.0, 1.0]$ aralığındaki gerçel sayıların kullanılmasını önermiş. Eğer bir elemanın üyelik derecesi 1.0 ise tümüyle o kümenin içinde olduğu, 0.0 ise hiç bir şekilde o kümenin bir elemanı olmadığı söylenebilir. Ya da, 0.5 ise yarı yarıya o kümeye aittir diyebiliriz.

Kümeleri betimlemek için kullandığımız karakteristik fonksiyonlara benzer olarak bulanık kümeleri ifade etmek için de karakteristik fonksiyon tanımlayabiliriz. Öyle bir fonksiyon tanımlarız ki, bu fonksiyon her bir eleman için bir üyelik derecesi verir bize. Yani karakteristik fonksiyon evrensel kümenin her bir elemanı için 0.0 ile 1.0 arasında bir gerçel sayı verir. Bunu bir örnekle açmaya çalışalım, yeniden ‘genç’ler kümesi örneğine dönerek, öyle bir fonksiyon tanımlayalım ki, eğer bir kişinin yaşını bu fonksiyona sokarsak, fonksiyon da bize bu kişinin ne kadar ‘genç’ olduğunu söylesin. Böylece “Saat 17:00’de ODTÜ otobüs durağında bekleyen gençler” bulanık kümesini ifade edelim. İşte bir örnek:

$$\mu_{\text{genç}}(\text{yaş}) = \begin{cases} 1.0 & \text{eğer yaş} \leq 20 \\ (-0.02 \times \text{yaş} + 1) & \text{eğer } 20 < \text{yaş} \leq 40 \\ 0.0 & \text{eğer yaş} > 40 \end{cases}$$

Şekil 2’de bu örnek karakteristik fonksiyonun grafiğini görebilirsiniz. Şu noktayı da belirtmek gerekir: Bu karakteristik fonksiyon tümüyle benim gençlik tanımımı

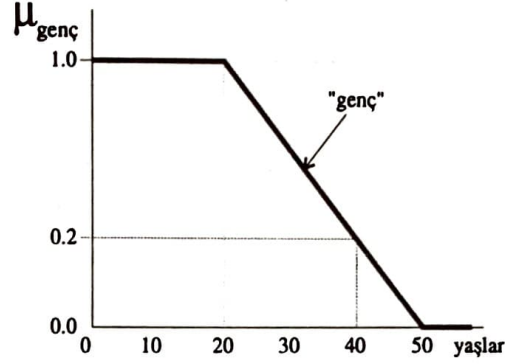


Figure 2: “Saat 17:00’de ODTÜ otobüs durağında bekleyen gençler” bulanık kümesini ifade etmek için kullanılabilecek bir karakteristik fonksiyon ($\mu_{\text{genç}}$) örneği.

yansıtmaktadır. Doğallıkla başka birisi gençliği başka türlü tanımlayacaktır. Yani, her ne kadar “durakta bekleyenler” kümesi tek bir şekilde ifade edilebilirse de “durakta bekleyen gençler” kümesi sonsuz değişik şekilde ifade edilebilir. Bunu da bulanık kümelerin ilginç bir özelliği olarak belirtiyim. Ayrıca, bulanık kümelerin karakteristik fonksiyonlarına *üyelik fonksiyonu* -membership function- da denmektedir.

Yeniden şekil 2’ye döner ve burada tanımlanan üyelik fonksiyonunu kullanarak 40 yaşında olan Işıl’ın “durakta bekleyen gençler” bulanık kümesine olan üyelik derecesinin 0.2 olduğunu kolayca görebiliriz.

Bulanık kümelerin gösterimi için Venn şemalarını kullanabilir miyiz? çok doğru olmasa bile şekil 3’deki gibi bir betimleme gözümün önüne geliyor. Bu şekilde, elemanların üyelik derecelerini de belirtmek için üç boyutlu bir Venn şeması çizmeye çalıştım. Şekle fazladan eklenen yükseklik boyutu, her bir elemanın o kümeye olan üyelik derecesini simgeliyor. Bulanık kümenin kesik koni gibi olan biçimi şekil 2’deki üyelik fonksiyonunun yapısından kaynaklanıyor.

Bu arada, normal kümelerin de aslında elemanlarının üyelik dereceleri 1.0 olan birer bulanık küme olduğunu da belirtmek isterim (Şekil 4). Yani, bulanık kümeler, normal kümeleri de özel bir durum olarak içermekte.

Yeniden klasik kümelerimize dönelim ve kümeler üzerinde yapılan işlemleri anımsayalım biraz. Örneğin, eğer “durakta bekleyenler ve palto giymiş olan-

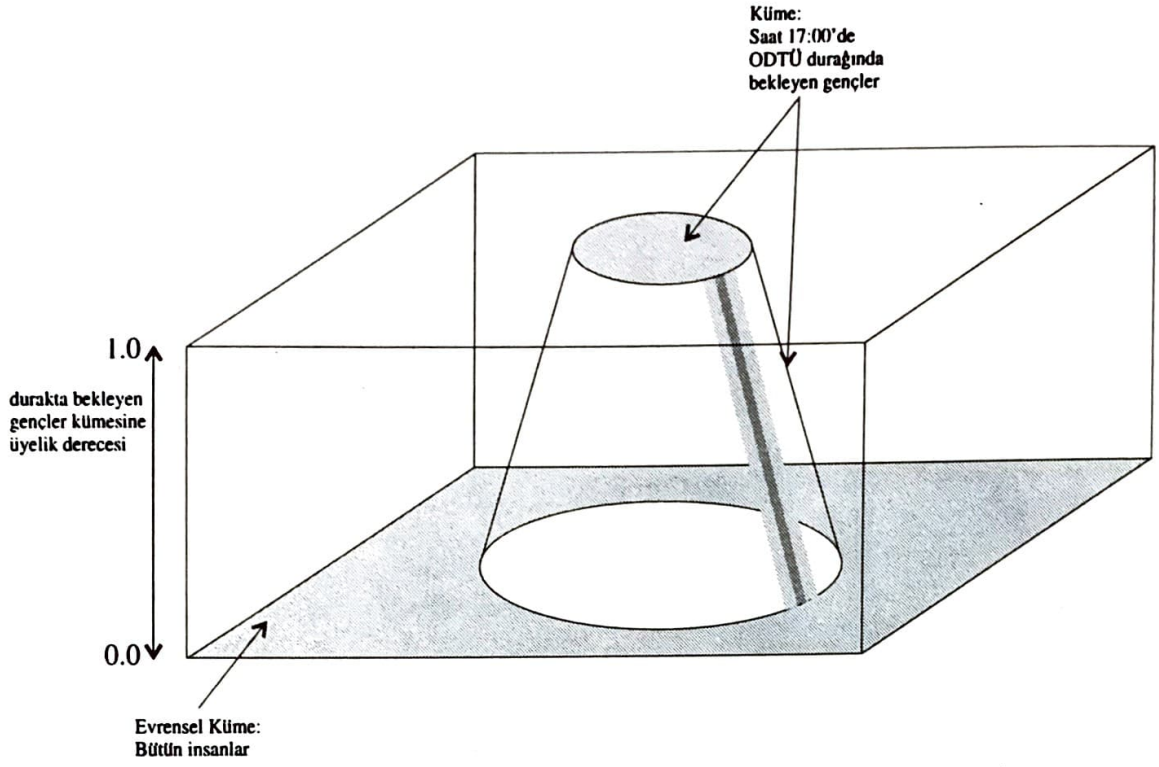


Figure 3: 'gençler' bulanık kümesinin üç boyutlu Venn şeması olarak gösterimi.

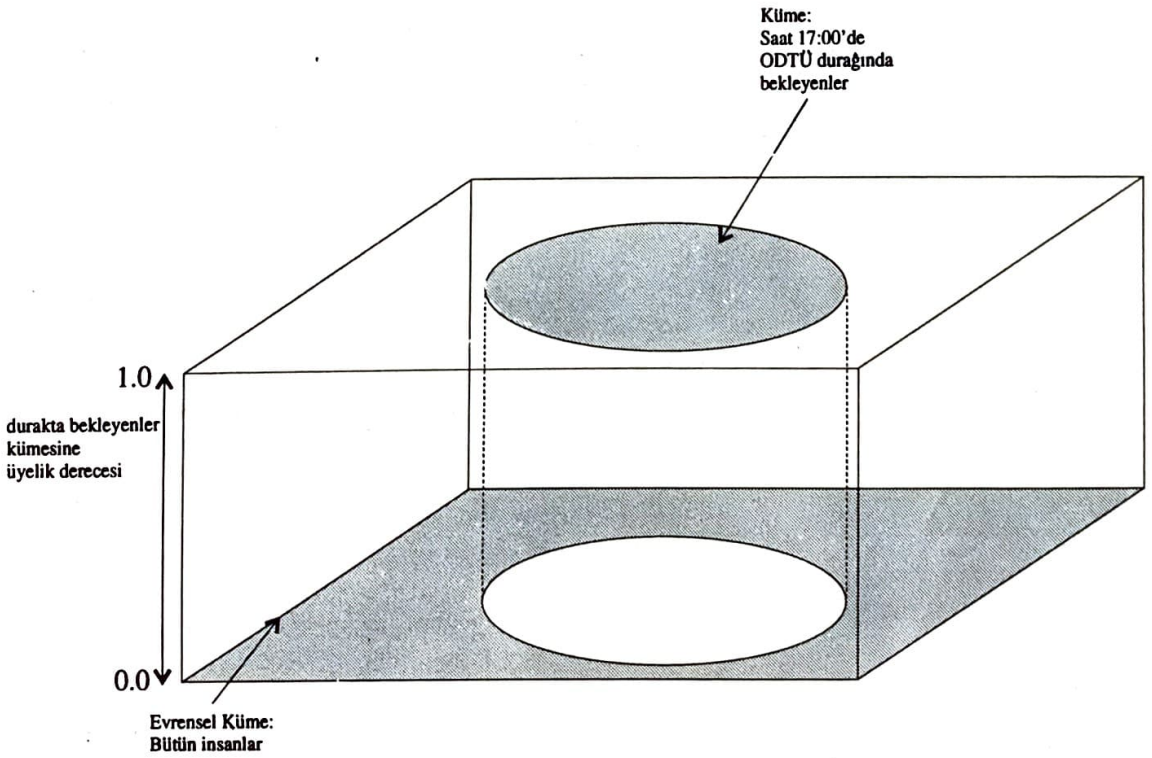


Figure 4: Normal kümelerin, bütün elemanlarının üyelik dereceleri 1.0 olan bulanık kümeler olarak gösterimi.

lar” kümesini tanımlamak istersek ne yaparız? Önce durakta bekleyenler kümesini, sonra palto giymiş olanlar kümesini oluştururuz ve her iki kümede *birden* olan kişilere bakarız değil mi? Yani bu iki kümenin arakesitini alırız. Bu küme işlemini matematik olarak ifade etmek istersek, eğer “durakta bekleyenler” kümesine A , “palto giymiş” olanlar kümesine B dersek, “durakta bekleyenler ve palto giymiş olanlar” kümesi şöyle yazılır:

$$C = A \cap B$$

ya da

$$C = \{x|x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

“Durakta bekleyenler *veya* palto giymiş olanlar” kümesi, yani bu iki kümenin birleşimi ise

$$C = A \cup B$$

$$C = \{x|x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

olarak yazılır. Peki, bulanık kümeler dünyasında bu işlemlerin karşılıkları neler olabilir? Bu iki temel bulanık küme işleminin Lotfi Zadeh tarafından verilen matematik tanımları [Zad65] şunlar:

$$C = A \overset{f}{\cap} B$$

ya da

$$C = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

ve

$$C = A \overset{f}{\cup} B$$

ya da

$$C = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Burada $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ A ve B kümelerinin karakteristik fonksiyonlarını temsil ediyorlar. Şimdi yukarıda yazılan bulanık küme işlemlerinin ne anlama geldiğini açmaya çalışalım. “Durakta bekleyen gençler” bulanık kümesini şekil 2’de gösterdiğimiz karakteristik fonksiyon ile tanımlamıştık. Şimdi bir tane daha bulanık küme tanımlayalım: “Tunus Caddesi boyunca kaldırıma *yakın* duranlar”. ‘Yakın’ kavramı da bulanık bir kavram. Gündelik hayatta çok kullandığımız halde birisinin bir yere yakınlığının hiç bir zaman metre ile ölçmeyiz değil mi? Aklımızda bir ‘yakın’ kavramı vardır, bunu kullanarak bir şeyin başka bir şeye yakın olup olmadığına karar veririz. Yeniden “Tunus Caddesi boyunca kaldırıma yakın

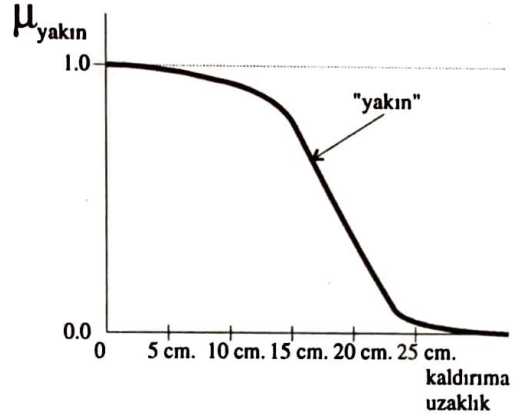


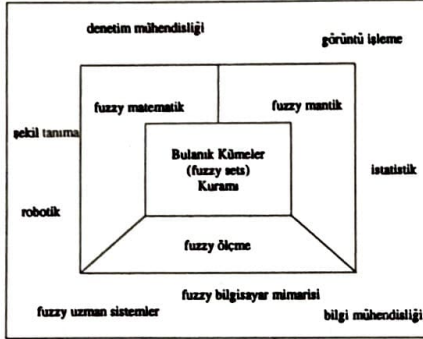
Figure 5: “Kaldırıma yakınlık” bulanık kümesini tanımlayan karakteristik fonksiyon.

duranlar” bulanık kümesine dönersek, bu kümeyi bir karakteristik fonksiyon ile ifade etmeye çalışalım örneğin şekil 5’deki gibi. Eğer “kaldırıma yakın duran” ve “durakta bekleyen gençler” kümesini oluşturmak istersek yukarıda tanımladığımız *bulanık-arakesit -fuzzy intersection-* işlemini uygulayarak bu iki bulanık küme üzerinde. Nasıl mı? Bir kişiyi alırız, önce “durakta bekleyen gençler” kümesine olan üyelik derecesini buluruz, sonra ikinci kümeyi ziyaret ederiz, o kişinin “kaldırıma yakın duranlar” kümesine olan üyelik derecesini buluruz ve bu iki üyelik derecesinden hangisi daha küçükse o kişinin “kaldırıma yakın duran” ve “durakta bekleyen gençler” kümesine olan üyelik derecesi olarak alırız.

Benzer şekilde, eğer “kaldırıma yakın duran” *veya* “durakta bekleyen gençler” kümesinin elemanlarının üyelik derecelerini bulmak istersek, bu sefer tek tek üyelik derecelerinin hangisi büyükse onu, o elemanın *bulanık-birleşim -fuzzy union-* kümesine olan üyelik derecesi olarak alırız.

Bu yazıda bulanık kümeler kuramının temel bir-iki noktasına değinebildim. Nasıl kümeler kuramı matematiğin hemen her alanında etkili olmuşsa, bulanık kümeler de yeni yeni matematiksel kavramların doğmasına, araştırma konularının çıkmasına, mühendislik uygulamalarının tasarılmasına yol açmıştır. Özellikle yapay zeka alanında ilginç uygulamaların ilk örnekleri gündelik yaşama girmeye başladı bile. Şekil 6 da bulanık kümelerin yarattığı yeni kavramların ve uygulamalardan bazılarını görebilirsiniz. Bu yeni matematik alanın mühendislik ve bilgisayar bi-

limleri dalındaki uygulamaları şüphesiz ki önümüzdeki yıllarda gündelik hayatımızı daha çok etkileyecek.



Şekilde bulanık kümeler kuramının yaratıldığı uygulamalardan bazıları görülmüyor.

Benimle yazışmak için "yasswin.oz.au" internet adresini, ya da "Laboratory of Concurrent Computing Systems, Swinburne University of Technology, P.O. Box 218, Hawthorn, 3122, Avustralya" posta adresini kullanabilirsiniz.

KAYNAKÇA

[Zad65] Lotfi A. Zadeh, *Fuzzy Sets, Information and Control*, 8, 338-353 (1965).

FERMAT NE BİLİYORDU?

Ali Nesin *

350 yıllık bir arayıştan sonra ünlü Fransız matematikçisi Pierre de Fermat'ın (1601-1665) bir kitabının kenarına not olarak kanıtladığını yazdığı, ancak kanıtını hiç bir zaman kâğıda geçirmediği bir teoremin, geçen yaz Haziran'ın sonuna doğru Andrew Wiles adlı bir matematikçi tarafından kanıtlandığını duymuşsunuzdur. Fermat genellikle kanıtladığı teoremlerin kanıtını yazmazdı. Söz konusu teorem dışında, Fermat'ın kanıtladığını iddia ettiği bütün teoremler (daha doğrusu önermeler) kendisinden sonra gelen matematikçiler tarafından kanıtlanmıştır. Bu yüzden kanıtı daha yeni bulunan söz konusu önerme "Fermat'ın Son Teoremi" diye anılır. İşte önerme:

Fermat'ın Son Teoremi. Eğer $n \geq 3$ bir tamsayıysa, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Pierre de Fermat'ın bu teoremi gerçekten kanıtlayıp kanıtlamadığını bilemiyoruz. Büyük bir olasılıkla hiç bir zaman da bilemeyeceğiz. Fermat'ın bir kanıta sahip olduğunu düşündüğünden pek kuşku duyan yok. Ancak kanıtının yanlış olduğunu düşünen de çok. Gerçekten de, Fermat'ın çağın ünlü matematikçilerine yazdığı mektuplarda bu önermeden

hiç söz etmemesi, kanıtının yanlış olduğunu kendisinin de anlamış olduğu doğrultusunda.

Bu yazının amacı, yukarıdaki teoremle ilgili ve Fermat'ın bildiğinden emin olduğumuz iki teoremin kanıtını vermek.

Önce $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini ele alalım. Fermat'ın teoremi bu denklemin çözümünün olmadığını söylemiyor. Nitekim denklemin çözümü var. Örneğin,

$$9144^2 + 14833^2 = 17425^2.$$

Nasıl buldum bu eşitliği? İşte matematiğin gücü ve güzelliği burada. Hesaplamaya gerek kalmadan, bu ve bunun gibi bütün eşitlikleri elde edebiliriz. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan daha küçük sayılar da vardır:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 7^2 + 24^2 &= 25^2 \\ 8^2 + 15^2 &= 17^2. \end{aligned}$$

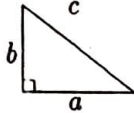
Babililer bu eşitlikleri biliyorlardı. M.Ö. 1900-1600 yılları arasında kazıldığı anlaşılan bir Babil taş tabletinde bunlar gibi onbeş eşitlik vardır. Babililer büyük bir olasılıkla

$$(0) \quad (2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$$

* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

eşitliğini de biliyorlardı¹. Bu eşitlikte p ve q yerine iki tamsayı koyarsak, $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan tamsayılar buluruz. Örneğin, $p = 127$ ve $q = 36$ olarak aldığımızda, yukarıdaki $9144^2 + 14833^2 = 17425^2$ eşitliğini buluruz.

$x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tamsayılara *Pisagor üçlülere* adı verilir. Çünkü, Pisagor'un ünlü teoremine göre, bir dik üçgenin dik açısını oluşturan iki kenarın karelerinin toplamı, üçüncü kenarın karesine eşittir.



Her Pisagor üçlüsü, üç kenarı da tamsayı uzunluğunda olan bir dik üçgen verir. Bunun tersi de doğrudur: üç kenarı da tamsayı uzunluğunda olan her dik üçgen bir Pisagor üçlüsü verir.

p	q	$x = 2pq$	$y = p^2 - q^2$	$z = p^2 + q^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
2	1	4	3	5	$4^2 + 3^2 = 5^2$
3	2	12	5	13	$12^2 + 5^2 = 13^2$
4	1	8	15	17	$8^2 + 15^2 = 17^2$
4	3	24	7	25	$24^2 + 7^2 = 25^2$
5	2	20	21	29	$20^2 + 21^2 = 29^2$
5	4	40	9	41	$40^2 + 9^2 = 41^2$
6	1	12	35	37	$12^2 + 35^2 = 37^2$
6	5	60	11	61	$60^2 + 11^2 = 61^2$

Yukarıda, ortak bölenleri olmayan ve biri çift olan p ve q tamsayılarını aldık yalnızca.

Şimdi $x^4 + y^4 = z^4$ denklemine geelim. Bu denklemin pozitif tamsayılar da çözümü olmadığını Fermat kanıtlamıştır. Kanıtta, birinci teorem ve Fermat'ın kendi buluşu olan 'sonsuz iniş' adı verilen yöntem kullanmıştır. Aslında Fermat daha genel bir teorem kanıtlamıştır:

Teorem 2. $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin, dolayısıyla $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin de, pozitif tamsayılar da çözümü yoktur.

İkinci teoremin ilginç bir uygulaması vardır. Fermat'ın teoremi salt 4 için değil, dörde bölünen tüm tamsayılar için doğrudur. Örneğin, (a, b, c) tamsayıları, $x^8 + y^8 = z^8$ denkleminin bir çözümü olsaydı, (a^2, b^2, c^2) tamsayıları $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin bir çözümü olurdu. Oysa ikinci teorem bu son

$x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm tamsayılar, yani tüm Pisagor üçlülere bulunabilir mi? Evet. Eski Yunanlı Öklit M.Ö. 300 yılında aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem 1. Gerekirse x 'le y 'nin yerlerini değiştirirsek,

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

denkleminin tüm çözümleri şöyle elde edilir: öyle p, q, d tamsayıları vardır ki

$$x = 2dpq, \quad y = d(p^2 - q^2), \quad z = d(p^2 + q^2)$$

dir.

Birazdan kanıtlayacağımız bu teoremin ışığında, $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm tamsayıları bulabiliriz. Birkaçını bulalım (hep $d = 1$ alacağız).

denklemin çözümünün olmadığını söylüyor. Demek ki $x^8 + y^8 = z^8$ denkleminin de çözümü yoktur. Aynı türden bir akıl yürütme, Fermat'ın teoremini asal n sayıları için kanıtlamanın yeterli olduğunu gösterir. İki den büyük ilk asal sayı 3. Fermat, teoremi $n = 3$ için kanıtladığını mektuplarında sık sık yazmıştır, ama her zaman yaptığı gibi, kanıtını açıklamamıştır. Yıllar sonra, İsviçreli matematikçi Euler (1707–1783) $n = 3$ için bir kanıt bulduğunu matematikçi Goldbach'a yazmıştır; kanıtının $n = 4$ şikkının kanıtından çok değişik olduğuna dikkati çekip, yakın gelecekte genel teoremin kanıtlanacağını sanmadığını da eklemiştir. Euler'in 1770 yılında yayımladığı kanıtında açıklamadığı, karanlık kalmış yerler vardı. Bu açıklanmayan yerlerin doğruluğunu büyük bir matematikçi olan Euler'in bilip bilmediği tartışma konusu. Konuyla ilgili okuduğum kitaplardan,

¹ Babil taş tabletindeki eşitliklerden bir tanesi de $4961^2 + 6480^2 = 8161^2$ 'dir! (0) eşitliği bilinmeden bu eşitliğin bulunabilmesi oldukça zor. Bu yüzden Babilliler'in (0) eşitliğinden haberi oldukları sanılıyor.

Euler'in düşüncelerinin doğru olduğu, ancak her nedense her tümcesini açıklamadığı izlenimini edindim. Bu kanıt da 'sonsuz iniş' yöntemini kullanır. 'Sonsuz iniş' yöntemi dışında,

$$\{a + b\sqrt{-3} : a, b \text{ tamsayılar}\}$$

karmaşık sayılar kümesindeki küpleri bilmek gerekir. Fermat bu kanıtı o çağda bilebilir miydi? Kanıtın Fermat'ın çağının çok ilerisinde olduğu bir gerçek. Ama Fermat da çağının çok ilerisindeydi. Yanıt bilinmiyor.

Yazının kalan bölümünde yukarıdaki iki teoremin kanıtını vereceğiz.

Teorem 1'in Birinci Kanıtı. Eğer (a, b, c) , (1) eşitliğini sağlayan üç tamsayıysa ve d herhangi bir tamsayıysa, (ad, bd, cd) sayıları da aynı denkleminin sağlarlar. Örneğin, $(8, 15, 17)$ bir çözümdür, bu çözümü ikiye çarpacak olursak $(16, 30, 34)$ çözümünü buluruz. Yani, bir çözümün çarpımlarını alarak yeni çözümler elde edebiliriz. Bunun tersini de yapabiliriz. Eğer (a, b, c) bir çözümse, ve d tamsayısı a, b ve c 'yi bölüyorsa, $(a/d, b/d, c/d)$ tamsayıları da bir çözümdür. Dolayısıyla, ortak böleni olmayan çözümleri bulmak tüm çözümleri bulmak için yeterlidir. Bundan böyle, (a, b, c) ortak böleni olmayan bir çözümü simgeleyecek. $a^2 + b^2 = c^2$ olduğundan, a, b, c sayılarından ikisi bir sayıya bölünüyorsa üçüncüsü de aynı sayıya bölünür. Demek ki, a, b, c sayılarından ikisi aynı sayıya bölünemezler. Dolayısıyla bu sayılardan ikisi birden çift olamazlar, yani bu üç sayıdan en az iki tanesi tek sayıdır. Bu sayılardan ikisi tekse üçüncüsü çift olmak zorundadır. Hangi sayı çifttir? c çift olamaz, çünkü c çiftse, a ve b tek sayılardır, dolayısıyla $a^2 + b^2$ dörde bölünmez; öte yandan c^2 dörde bölünür. Demek ki a ve b sayılarından biri çift. Gerekliyse a ve b sayılarının yerlerini değiştirerek, a sayısının çift olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle a sayısının çift olduğunu varsayacağız. Demek ki b ve c tek sayılar, ve dolayısıyla $c - b$ ve $c + b$ çift sayılar. O halde

$$(2) \quad a = 2n, \quad c - b = 2v, \quad c + b = 2w$$

olarak yazabiliriz. (2) eşitliklerinden,

$$(3) \quad b = \frac{(c + b) - (c - b)}{2} = \frac{2w - 2v}{2} = w - v$$

$$(4) \quad c = \frac{(c + b) + (c - b)}{2} = \frac{2w + 2v}{2} = w + v$$

eşitlikleri çıktığından, v ve w sayılarının ortak böleni yoktur, çünkü hem v 'yi, hem w 'yi bölen bir sayı, b ve c sayılarını da böler. $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğinden, $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$ eşitliği çıkar. Bu eşitlikte, (2)'den yararlanarak, a yerine $2n$, $c - b$ yerine $2v$, $c + b$ yerine $2w$ koyarsak, ve 4'leri sadeleştirirsek

$$(5) \quad n^2 = vw$$

eşitliğini buluruz. Demek ki vw tam bir kare. Öte yandan v ve w sayılarının ortak bölenleri yok. Demek ki v ve w de birer kare olmak zorundadır. $v = q^2$ ve $w = p^2$ olarak yazalım. İşimiz aşağı yukarı bitmiştir: (3) ve (4) eşitlikleri $b = p^2 - q^2$ ve $c = p^2 + q^2$ verir; (5) eşitliği $n = pq$ verir, (2) eşitliği de $a = 2n = 2pq$ verir.

Teorem 1'in İkinci Kanıtı. Bu kanıtta geometrik bir yöntem kullanacağız. Kanıtı başlamadan önce, $(0, 1)$ noktasından geçen ve y eksenine koşut olmayan bir doğrunun denkleminin, bir m sayısı için

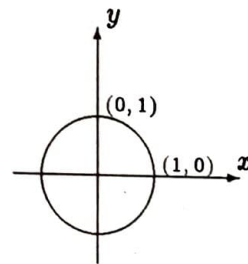
$$(6) \quad y = mx + 1$$

biçiminde yazılabileceğini okura anımsatırım. m sayısına doğrunun eğimi adı verilir.

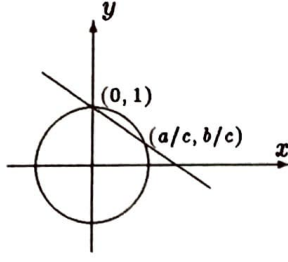
Şimdi a, b, c sayılarını, $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan üç pozitif tamsayı olsunlar. O zaman a/c ve b/c kesirli sayıları,

$$(7) \quad x^2 + y^2 = 1$$

denklemini sağlarlar. (7) denkleminin gerçel sayılardaki çözümleri, merkezi $(0, 0)$ noktasında olan 1 yarıçaplı çember (birim çember) üzerindedir, dolayısıyla $(a/c, b/c)$ noktası da bu çember üzerindedir:



$a > 0$ olduğundan, $(a/c, b/c)$ noktasıyla $(0, 1)$ noktası birim çemberin iki değişik noktasıdır. Bu iki noktadan geçen doğruya bakalım:



Bu doğrunun denklemi

$$y = \frac{b-c}{a}x + 1$$

dir Yani (6) denklemindeki m sayısı (doğrunun eğimi yani) $\frac{b-c}{a}$ sayısına eşittir, dolayısıyla kesirli bir sayıdır. Ortak böleni olmayan iki p ve q tamsayıları için

$$(8) \quad m = \frac{p}{q}$$

yazalım. Ayrıca,

$$(9) \quad \begin{cases} r = a/c \\ s = b/c \end{cases}$$

yazalım.

(r, s) noktası, yani $(a/c, b/c)$ noktası, hem birim çemberin, hem de $y = mx + 1$ denklemleri doğrunun üstünde. Dolayısıyla (r, s) sayıları (6) ve (7) denklemlerini sağlarlar. Denklemlerimizi yazalım:

$$(10) \quad \begin{cases} r^2 + s^2 = 1 \\ s = mr + 1. \end{cases}$$

İkinci eşitlikten s 'yi biliyoruz: $s = mr + 1$. Bunu birinci eşitliğe yerleştirelim:

$$1 = r^2 + s^2 = r^2 + (mr + 1)^2.$$

Soldaki terimi açalım:

$$1 = (1 + m^2)r^2 + 2mr + 1,$$

yani

$$(1 + m^2)r^2 + 2mr = 0,$$

yani

$$r[(1 + m^2)r + 2m] = 0.$$

Öte yandan $r \neq 0$. Demek ki r 'yi sadeleştirerek,

$$(1 + m^2)r + 2m = 0,$$

yani $r = \frac{-2m}{1+m^2}$ buluruz. Bunu ve (10) denklemlerinden ikincisini kullanarak da s 'yi bulabiliriz:

$$s = mr + 1 = \frac{-2m^2}{1+m^2} + 1 = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Demek ki

$$\begin{cases} r = \frac{-2m}{1+m^2} \\ s = \frac{1-m^2}{1+m^2}. \end{cases}$$

Şimdi (8) ve (9) denklemlerini yukarıdaki denklemlere taşıyıp biraz hesap yapacak olursak,

$$(11) \quad \begin{cases} a = \frac{-2pq}{p^2+q^2}c \\ b = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}c. \end{cases}$$

eşitliklerini elde ederiz. İkinci eşitlikten $p^2 + q^2$ sayısının $(p^2 - q^2)c$ 'yi böldüğü çıkar. Öte yandan $p^2 - q^2$ ile $p^2 + q^2$ sayısının ortak böleni ya 1'dir ya da 2'. Ortak bölenin 1 olduğunu varsayalım. (Ortak bölenin 2 olduğu şıkkı okura bırakıyoruz.) Bu varsayımla $p^2 + q^2$, c 'yi böler.

$$c = d(p^2 + q^2)$$

eşitliğini sağlayan d sayısını bulalım ve bunu (11)'deki eşitliklere yerleştirelim. Teorem 1 bir kez daha kanıtlanmıştır.

Teorem 2'nin Kanıtı. Teoremi kanıtlayabilmek için bir önsava gereksinimimiz:

Önsav. Tek bir sayının karesi dörde bölündüğünde 1 kalır.

Önsavın Kanıtı. Tek sayımıza a adını verelim. $a = 2b + 1$ biçiminde yazalım. Şimdi hesaplayalım:

$$a^2 = (2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 4(b^2 + b) + 1.$$

Demek ki a^2 dörde bölündüğünde kalan 1'dir. Kanıtımız bitmiştir.

Artık ikinci teoremi kanıtlayabiliriz. 'Son-suz iniş' adı verilen yöntemi kullanacağız. Teoremin yanlış olduğunu varsayalım, yani

$$(12) \quad x^4 + y^4 = z^2$$

eşitliğinin pozitif tamsayılarda bir çözümünün olduğunu varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. (12)'nin çözümleri arasında z 'nin en küçük olduğu bir çözüm seçelim ve bu çözüme (x, y, z) adını verelim. (12) denklemini sadeleştirmeye

² u sayısı hem $p^2 + q^2$ 'yi hem de $p^2 - q^2$ 'yi bölüyorsa, u bu sayıların toplamını ve farkını da, yani $2p^2$ 'yi ve $2q^2$ 'yi böler. Öte yandan p^2 ve q^2 sayılarının ortak böleni yok. Demek ki $u = 1$ ya da $u = 2$.

olanak verdiğinden ve z en küçük olduğundan, x, y, z sayılarının ortak böleni yoktur. Bundan da x, y, z sayılarından herhangi iki tanesinin ortak böleninin olmadığı çıkar. Demek ki bu üç sayıdan yalnızca biri çift olabilir, ve en az iki tanesi tek-tir. Sayılardan ikisi tekse, üçüncüsü çift olmak zorunda. z çift olamaz, çünkü z çiftse, x ve y tektir, ve $x^4 + y^4$ dörde bölünmez; öte yandan z^2 dörde bölünür. Demek ki ya x ya da y çift. Gerekirse x ile y 'nin yerlerini değiştirerek, x 'in çift olduğunu varsayabiliriz. Şimdi (x^2, y^2, z) sayılarına birinci teoremimizi uygulayabiliriz: ortak bölenleri olmayan öyle a ve b vardır ki,

$$(13) \quad x^2 = 2ab,$$

$$(14) \quad y^2 = a^2 - b^2,$$

$$(15) \quad z = a^2 + b^2$$

dir. Ayrıca a ve b sayılarından yalnızca biri çifttir. a 'nın çift olamayacağını iddia ediyorum: eğer a çift olsaydı, b tek olurdu. $a = 2a_1$, $b = 2b_1 + 1$ yazalım. Bu eşitlikleri (14)'e yerleştirelim:

$$\begin{aligned} y^2 &\stackrel{(14)}{=} a^2 - b^2 = (4a_1^2) + (2b_1 + 1)^2 \\ &= 4a_1^2 + 4b_1^2 + 4b_1 + 1 \\ &= 4(a_1^2 + b_1^2 + b_1) + 1 \end{aligned}$$

ve yukarıda kanıtladığımız önsavla çeliştik. İddia-mı kanıtladım: a çift olamaz. Demek ki b çifttir. (14) denkleminde göre $b^2 + y^2 = a^2$ olduğundan birinci teoremi gene uygulayabiliriz: ortak böleni olmayan öyle c ve d sayıları vardır ki

$$(16) \quad b = 2cd,$$

$$(17) \quad y = c^2 - d^2,$$

$$(18) \quad a = c^2 + d^2$$

dir. Şimdi x^2 yi hesaplayalım:

$$x^2 \stackrel{(13)}{=} 2ab \stackrel{(16,17)}{=} 4cd(c^2 + d^2).$$

Demek, $4cd(c^2 + d^2)$ tam bir kare. Dolayısıyla $cd(c^2 + d^2)$ de tam bir kare. Öte yandan c , d ve $c^2 + d^2$ sayılarından herhangi ikisinin ortak böleni yok. Bundan da c , d ve $c^2 + d^2$ sayılarının birer tam kare oldukları çıkar. Yani öyle e, f, g sayıları vardır ki,

$$(19) \quad c = e^2,$$

$$(20) \quad d = f^2,$$

$$(21) \quad c^2 + d^2 = g^2$$

dir. Kanıtın sonuna geldik. Hesaplayalım:

$$e^4 + f^4 \stackrel{(19,20)}{=} c^2 + d^2 \stackrel{(21)}{=} g^2.$$

Demek ki (e, f, g) sayıları da (18) denkleminin bir çözümü. Son olarak, g sayısının, z sayısından küçük olduğunu kanıtlayalım. Bu dilediğimiz ilişkiyi verecek:

$$\begin{aligned} z &\stackrel{(15)}{=} a^2 + b^2 \stackrel{(16,18)}{=} (c^2 + d^2)^2 + 4c^2d^2 \\ &\stackrel{(21)}{=} g^4 + 4c^2d^2 > g^4 \geq g. \end{aligned}$$

İkinci teorem de kanıtlanmıştır.

Matematik Dünyası'na yazarak beğendiklerini belirten okurlarımıza teşekkür ederiz. Sevgili Dilek Başol (Kuruçeşme, İzmit) kardeşimizin övgülerini hak etmeye çalışacağız.

Pergel ve cetvel ile bir açının üçe bölünmesi üzerine yazan okurlarımıza bunun yapılamayacağını kanıtının Matematik Dünyası'nda daha önce (cilt 1, sayı 1, sayfa 11-14 ve devamı cilt 1, sayı 2, sayfa 10-15) İsmail Güloğlu tarafından yazıldığını anımsatmak isteriz.

Yazı Kurulu

ÜNLÜ KADIN MATEMATİKÇİLER: EMMY NOETHER (1882–1935) (II)

Hülya Şenkon *

Noether, cebirsel geometrinin kuruluşu ile daima yakından ilgilendi ve önemli katkılarda bulundu.

Van der Waerden 1924 Göttingen'e geldiğinde, Henzelt'in Noether tarafından ihya edilen ve Mathematische Annalen'de yayınlanan çalışmasını gördü ve bu kendisine, bir asal idealin sıfır yerleri cisminin inşası konusunda esin kaynağı oldu. Van der Waerden, Henzelt'in çalışmasından bu sonuçları çıkardıktan sonra Grell kendisine Noether'in aynı fikirleri içeren ders notlarını gösterdi. Böylece van der Waerden ve Noether'in birbirlerinden bağımsız olarak, bilinen bir teoriden yola çıkmak ve aynı esaslı kavramları oluşturmak suretiyle aynı sonuca ulaşmış oldukları ortaya çıktı. Noether, zaman bakımından önceliği olmasına karşın, söz konusu sonuçların yayınlanmasını, genç meslektaşı van der Waerden'e bıraktı. Mathematische Annalen'in 96. cildinde yayınlanan bu çalışma, polinom ideallerinin sıfır yerleri teorisi hakkında adını taşımaktadır.

Van der Waerden konuşmasının sonunda, cebirsel yapılara operatörlü gruplar gözüyle bakma eğilimine değiniyor ve bunun Noether'de de başından beri gözlemlendiğine dikkati çekiyordu.

Noether'in ölümünden hemen sonra H. Hopf ve P. Alexandroff, Berlin'de yayınlanan ünlü topoloji kitaplarının önsözünde "E. Noether'in genel matematik anlayışı ve bilgisi, kendi çalışma alanı olan cebir ile kısıtlanmış olmayıp, matematikle ilişkili herkes üzerinde canlı ve kuvvetli bir etki yapmıştır." diyorlardı. Bundan 30 yıl sonra Brüksel'de yapılan Topoloji Kollokyumu'nda ve yukarıda zikredilen, Van der Waerden'in konuşma yaptığı toplantıda H. Hopf, topolojinin cebirleştirilmesi konusunda yaptığı doğrudan ve dolaylı katkılar nedeniyle Noether'e şükran borcu olduklarını ifade ediyordu.

1924 yılından beri Moskova Üniversitesi'n-

de görev yapan Alexandroff, Almanya'ya ve özellikle Göttingen'e defalarca davet edilmiş ve son gelişlerinden birinde, Almanya'da bir profesör kadrosu elde etmek istediğini söylemişti. Noether, bu konuyla yakından ilgilendiği halde bir sonuca ulaşamadı; fakat Weyl'in Alexandroff ve Hopf'a birer Rockefeller bursu temin etmesini sağladı. Bu sayede iki arkadaş, 1927/28 yılını Princeton'da ünlü topologlar Veblen ve Lefschetz'in yanında geçirdiler.

1928/29 ders yılında Noether, misafir profesör olarak Moskova'da bulundu; Moskova Matematik Derneği'nin raporları arasında iki rapor yayınlandı. Bunlardan biri Noether'in "Tam değerli fonksiyonlardan oluşan maksimal alanlar" ile ilgili çalışması, diğeri ise I. Arnold'un, Noether'in ve Kintchine'in etkisiyle yaptığı, komütatif yarı gruplardaki ideallere ilişkin çalışmasıydı. Noether, Moskova'da çok sayıda konferans ta verdi ve o sırada Moskova Üniversitesi'nin genç profesörlerinden biri olan Pontrjagin, Noether'in anlattıklarından çok yararlandı.

Göttingen'e gelip Noether okulundan yararlanan Rus bilim adamlarından biri de kuzey kutbu yolunun mucidi, kutup araştırmacısı, jeofizikçi ve matematikçi Otto Julewitsch Schmidt idi ki, Krull ve Noether'in yöntemleriyle, sonlu zincire sahip sonsuz grupların teorisine ilişkin bir çalışma yaparak, Rusya'da cebirin gelişmesinde önemli bir rol oynadı.

Göttingen'e yurt dışından gelenler, yalnız Ruslar değildi. Yeryüzünde hiçbir ülke yoktur ki, öğrencilerini, genç doktorlarını, hatta profesörlerini uzun veya kısa sürelerle, öğrenim veya araştırma amacıyla Almanya'ya yollamamış olsun. Matematik dünyasının önde gelen isimlerinden Landau, Caratheodory,¹ Courant, Hilbert, Herglotz, Weyl de Göttingen'de bulundular. Üniversite öğrenimini Tokya'da tamam-

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

¹ Caratheodory Münih Üniversitesinde Prof.Dr. Nazım Terzioğlu'nun Doktora hocası idi.

ladıktan sonra Göttingen'e gelen Kenjiro Shoda, Noether tarzında pek çok araştırma yaparak anavatanına döndü, Japonya'da soyut cebirin ilk temsilcisi oldu ve bu konuda dikkate değer iki kitap yazdı. Shoda, hocası Takagi ve Suetuna, Japonya'da soyut cebirin daha sonraki gelişiminde önemli rol oynayan matematikçilerin başında gelmektedirler.

1920'li yıllarda Fransa'da matematiğin ideal teorisi, topoloji ve cebirsel geometri gibi yeni disiplinleri ihmal edilmişti. 1928'de Noether, Hasse'ye yazdığı bir mektupta, kendisinin ve öğrencilerinin uğraştığı cebir problemleri üzerinde ciddi olarak çalışan tek Fransız matematikçinin Chatelet olduğunu ifade ediyordu. Bir grup zeki ve üstün yetenekli Fransız genci, burslu olarak yurt dışına, özellikle Almanya'ya gönderildikten sonra durum değişti; bu gençler, dışarıda aldıkları itici güç ile Fransa'daki matematik araştırmalarına yeni bir yön ve canlılık kazandırdılar. Söz konusu gençler arasında bulunan Claude Chevalley, Hasse ve Noether ile yoğun bir fikir alışverişi içindeydi. Örneğin norm kalanları ile ilgili araştırmasını, Noether'in 1929/30 kış yarıyılında verdiği seminerden esinlenerek yaptı. E. Cartan'ın ünlü öğrencisi André Weil de eğitiminin büyük bir bölümünü Almanya'da gördü ve soyut düşünce yeteneğini orada daha da geliştirdi. Fransız matematiğinin ünlü isimlerinden biri de, Paris'te Vessiot'nun öğrencilerinden olan, Rockefeller bursiyeri olarak 1930'larda Hamburg'da Artin'in yanında bulunmuş olan Jacques Herbrand idi. Herbrand, aynı zamanda ideal teorisine de ilgi duyduğu için Noether ile temasa geçti ve o konuda da değerli çalışmalar yaptı. Berlin, Halle ve Göttingen matematik derneklerinde konferanslar veren Herbrand, gerek matematik yeteneği, gerekse kişiliği ile Noether'i çok etkilemişti. Temmuz 1931'de Göttingen'den Fransız Alpleri'ndeki Bergtounen'a dönen Herbrand, henüz 23 yaşında iken, bir kaza sonucu yaşamını yitirdi. Genç matematikçinin bu beklenmedik ölümü, Noether üzerinde şok etkisi yarattı. Noether, Herbrand'ın kendisine el yazısı olarak iletmış olduğu, cebirsel fonksiyonlar teorisine ilişkin bazı sonuçların *Mathematische Annalen*'de yayınlanmasını sağladı. Herbrand'ın arkadaşları, *Actualites Scientifiques et Industrielles*'de yayınlanan bir dizi çalışmalarını Claude Chevalley ve André Weil'in teşviki ile Herbrand'ın anısına ithaf ettiler ki, bunlar arasında Noether'in ölümünden önceki son yayını olan "Zerfallende verschränkte Produkte und ihre

Maximalordnungen" de bulunmaktadır.

1930-32 yılları arasında Robert Fricke, Oystein Ore ve E. Noether tarafından hazırlanan, Dedekind'in toplu eserleri yayınlandı. Fricke, Dedekind'in biyografisini kendi kişisel anılarına dayanarak hazırlıyordu, fakat kendisinin ölümü üzerine biyografi yarım kaldı. Çalışmayı Noether ve Ore birlikte gerçekleştirdiler. Vieweg yayınevi 1964 yılında Dedekind'in toplu eserlerinin 3. cildinin bir bölümünü, Noether'in açıklamaları ile, "Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen" adı altında yayınladı; kitabın önsözünde van der Waerden, ideal teorisinin tarihçesinin güzel bir özetini veriyordu.

Noether, genç Fransız Jean Cavailles ile birlikte, G. Cantor ve R. Dedekind'in birbirlerine yazdıkları mektupları içeren bir eseri yayına hazırladı.

1931 yazında Göttingen'de J. Herbrand ve A. Weil'den başka, Noether tarzında bir matematikçi olan, Princetonlu Solomon Lefschetz de vardı. Noether okuluna yakın bir başka Princeton'lu profesör de Oswald Veblen idi. Çalışma konusu geometri olan Veblen'in diferensiyel invariyanlar alanındaki görüş ve düşünceleri, Noether'inkilerle aynıydı.

1932 yılında Noether, Artin ile birlikte "Alfred Ackermann-Teubner-Gedachtnispreis zur Forderung der Mathematischen Wissenschaften" ödülüne layık görüldü. Aynı yıl cebirciler, Noether'in 50. doğum yıldönümünü bir törenle kutladılar. Özellikle H. Hasse'nin *Mathematische Annalen*'de yayınlanan, komitatif olmayan cebirlerle ilgili bir makalesini kendisine ithaf etmesi, Noether'in son derece sevindirdi.

1932 yılında yaşanan başka bir anlamlı olay da Eylül ayında Zürich'te yapılan Uluslararası Matematikçiler Kongresi idi. 800 kişinin katıldığı bu kongrede Noether, genel 21 konferanstan birini veren tek kadın matematikçiydi; bu konferansın konusu "Hiperkompleks sistemlerin komütatif cebir ve sayılar teorisi ile ilişkileri" idi.

Kongreden sonra Göttingen Üniversitesi Matematik-Fizik Bölümü için üzüntülü günler başladı. Nisan 1933'te Hitler rejimi tarafından Noether, Max Born ve Courant'ın üniversitedeki görevlerine son verildi. Courant'ın ayrılması ile bölüm başkanlığına getirilen Hermann Weyl, E. Noether'e Princeton'da bir misafir profesörlük bulabilmek için harekete geçti.

1933'te Noether, Amerika'daki Bryn Mawr'dan 1934/35 yaz yarıyılı için aldığı daveti kabul etti.

Princeton'da Veblen ve Flexner ile işbirliği yapan A. Einstein ve H. Weyl, var güçleriyle Alman meslektaşları için yer bulmaya çalışıyorlardı. Fakat bu çok zordu, çünkü söz konusu Almanların sayısı çok fazla, onları misafir profesör olarak kabul edebilecek üniversitelerin sayısı ise çok azdı. Bu bilim adamlarını desteklemek ve göçmenlik işlemlerini kolaylaştırmak üzere çeşitli komiteler kuruldu. Her göçmen için kefiller aramak gerekiyordu ve buna benzer pek çok problem vardı.

Noether önce ünlü Bryn Mawr kız kolejine misafir profesör olarak kabul edildi. O sırada kolejin matematik bölümü yöneticisi, Göttingen'de öğrenim görmüş ve 1910'da Chicago'da doktorasını vermiş olan Ann Pell Wheeler idi.

Noether, 1933/34 kış yarıyılında üç kız öğrencisi ve bir doçentiyle birlikte bir seminer düzenledi. Bu seminerde van der Waerden'in "Algebra" adlı kitabının 1. cildi ile E. Hecke'nin "Theorie der algebraischen Zahlen" adlı kitabının ilk bölümün büyük bir heyecanla izliyorlardı.

1934'te Noether, haftada bir gün, Princeton'daki Flexner Enstitüsü'nde konferanslar vermeye başladı. 1930'da Flexner ve Veblen'in girişimi üzerine kurulan bu enstitüde, vakıfların yardımıyla, değerli bilim adamlarının tamamen özgür olarak araştırma yapmaları ve barınmaları sağlanıyordu. Noether, Princeton'ın ikinci bir Göttingen olmak istediğini, akademik personel bakımından bunun pekala mümkün olabileceğini düşünüyordu. Noether, Hasse'ye yazdığı bir mektupta şöyle diyordu: "Gösteriliş modülleri ve operatörlü gruplarla işe başladım. Princeton bu kış ilk kez, esaslı bir şekilde cebirle uğraşacak."

Noether, 1934 sohbaharında Avrupa'ya veda ederek Bryn Mawr'a döndü ve orada 1 yıl daha görev yaptı. Bu arada Richard Brauer da Princeton'a gelmişti. Her hafta Princeton'daki konferanstan sonra Noether, Weyl, Veblen ve Brauer ile birlikte oluyordu. Bu yolculuklar sırasında Noether'e Olga Taussky eşlik ediyordu. Noether'in Göttingen'den tanıdığı, Olga, 1934/35 öğretim yılında Bryn Mawr'daki üç bayan öğrenciden biriydi ve sonradan Viyana'da Philipp Furtwangler'in yanında sayılar teorisi konusunda doktora yaptı ve akademik formasyonu, soyut Noether tarzından bağımsız olarak geliştirdi. Söz konusu üç öğrenciden bir diğeri olan Marie Weiss, Noether'in etkisiyle "Normal cisimlerde temel birim sistemleri" adlı bir makale hazırladı ve bu, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 (1936)'da yayınlandı. Bu üç bayana bir genç kız daha katıldı ki, o da Noether'in Amerikadaki tek doktora öğrencisi olan Ruth Stauffer idi. Stauffer'in "Bir ayrılabilir normal genişlemede bir normal bazın inşası" adlı doktora çalışması, *Amer. J. Math.*, 58 (1936)'da da yayınlandı.

Noether halkaları, Noether grupları, Noether denklemleri, Noether modülleri gibi kavramlarla matematik literatürüne geçerek ölümsüzleşen E. Noether hakkında pek çok şey yazıldı, söylendi, pek çok tören düzenlendi.

KAYNAKÇA

- [1] A. Dick, *Emmy Noether*, Kurze Mathematiker-Biographien, El. Math.-Beiheft Nr. 13, Birkhäuser Verlag, 1970.

BİLMELİYİZ, BİLECEĞİZ*

Kuram ile kıldığı (=pratik), düşünce ile gözlem arasındaki iletişimi sağlayan araç matematiktir. Aralarında köprüyü matematik kurar ve gittikçe sağlamlaştırır. Bu nedenle çağdaş kültürümüzün bütünü, doğanın akıl yoluyla kavranıp işlenmesine dayandığı ölçüde, temelleri matematikte olan bir kültürdür. Daha Galilei der ki: “Doğayı ancak, bizimle konuşurken kullandığı dili ve işaretleri öğrenmiş olan anlayabilir.” Bu dil ise matematik, işaretleri matematiğin sembolleridir. Kant şu sözü söylemişti: “Ben iddia ediyorum ki, her bir doğa biliminde ancak, ne kadar matematik içeriyorsa o kadar gerçek bilime rastlanabilir.” Gerçekten, herhangi bir doğa biliminin kuramını, soyup matematiksel çekirdeğini bütünüyle ortaya çıkarmadan egemenliğimiz altına almış olmayız. Matematik olmadan bugünkü astronomi ve fizik olanaksızdır. Bu bilimler kuramsal yönleri bakımından neredeyse matematiğin içinde eriyip halhamur olmuş gibidir. Matematik bugün genişçe bir kitleden saygı görüyorsa, bu ve bunun gibi daha birçok uygulama alanlarına borçludur o saygıyı. Gene de bütün matematikçiler, uygulamayı matematiğin değerini oluşturan kütle olarak görmeyi reddetmişlerdir. Gauss sayılar kuramını ilk matematikçilerin en sevgili bilimi haline getiren büyüklü bir çekicilikten söz eder. Matematiğin bütün öbür bilimleri gölgede bırakan o tükenmez zenginliği akıl alır gibi değildir. Kronecker sayılar kuramcısını *lotophag*’lara benzetir: bu yemişi bir tattılar mı bir daha bırakamamaktadırlar. Büyük matematikçi Poincaré bir keresinde Tolstoy’u şaşırtıcı bir sertlikle eleştirir, çünkü Tolstoy bilim uğruna bilim istemenin çılgınlık olduğunu söylemiştir.

Örneğin, endüstrinin elde ettiği başarılar, uygulamacılar kendi başlarına çalışıyor olsalardı

ve çabaları çıkar gözetmeyen çılgınlarca desteklenmiş olmasaydı hiç bir zaman gün ışığı göremezdi. “İnsan düşüncesinin onurudur,” diyor Königsberg’li ünlü matematikçi Jacobi, “bütün bilimlerin tek amacı.” Bugün felsefi bir edayla ve üstünlük taslayarak kültürün çöküşünü haber veren ve *ignorabimus* demekle güzelleştiklerini sananlara inanmamalıyız. Bizim için *ignorabimus* yoktur artık ve kanımca doğa bilimi için de yoktur. *Ignorabimus* çılgınlığının yerine bizim sloganımız şu olmalıdır: bilmeliyiz, bileceğiz.

Notlar

1. *Lotophag*’lar (Yunan mitolojisinden): *Lotos* yiyen bir kavim. Bu bitkinin güzel tadı insanlara sılayı unutturduğundan, Odysseus *lotos*’tan tadan yoldaşlarını dönüş yolculuğuna katılmaları için zorlamak zorunda kalmıştı. Sonradan, bu masalsı milletin yurdunun Kuzey Afrika olduğu saptanmıştır.

Lotos (Yunanca, Mısırca’dan alınmış olabilir): Yunan ve Mısır Eskiçağ kültüründe adı geçen çeşitli bitkiler: i) *Lotophag*’ların ülkesindeki meyva ağaçları, belki hünnap, çitlenbik, ya da hurma; ii) Mısır ve Güney Asya’daki nilüfer ve akrabası bitki çeşitleri.

2. *Ignoramus et ignorabimus* (Latince): Bilmiyoruz ve bilmeyeceğiz. Fizyolog Emil du Bois Reymond’un özdeyişi.

Emil du Bois Reymond (1818–1896): Berlin’de profesör. Fizyolojide fiziksel yönelişin temsilcisiydi, kas ve sinir sistemindeki biyoelektriksel olaylar üzerine çığır açan incelemeler yaptı. Doğanın tanınabilirliğinin sınırlarını belirtmek üzere 1872’de *ignoramus et ignorabimus* sözünü kullandı.

* Bu yazı büyük matematikçi David Hilbert’in Königsberg’de toplanan Alman Doğa Araştırmacıları ve Hekimleri Derneği kongresinde yaptığı konuşmadan bir bölümü içermektedir. Bu metin Tevfik Turan tarafından Türkçeleştirilmiş ve yayın için Özden Çelik tarafından hazırlanmıştır.

MATEMATİKLE EĞLENELİM

Hasan Gökpınar *

İki Yüz Elli Yıllık Sav

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2 \\ 6 &= 3 + 3 \\ 8 &= 3 + 5 \\ 10 &= 5 + 5 \\ 12 &= 5 + 7 \\ 14 &= 7 + 7 \\ 16 &= 5 + 11 \\ 18 &= 5 + 13 \\ 20 &= 7 + 13 \\ 22 &= 11 + 11 \\ 24 &= 11 + 13 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Goldbach, 1742'de Euler'e gönderdiği bir mektupta, "2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamıdır" diye yazıyor. Bu iddianın 24'e kadarki çift sayılar için doğru olduğu yukarıdaki tabloda görülmektedir. Bu tablonun daha ne kadar uzatılabileceğini merak eden, 26, 28, 30, ... ile devam edebilir. Ancak, bir milyon, milyar, hatta milyar kere milyarlara kadar doğru olan bir iddianın daha sonraki sayılar için de doğru olacağını söyleyemeyiz.

Bir iddianın yanlışlığını göstermek için, iddiayı yalanlayan bir tek örnek bulmak yeter, fakat doğruluğunu göstermek için genel bir ispat vermek gerekir.

İki yüz elli yıldır, ne **Goldbach iddiasını** yalanlayan bir örnek bulunabilmiş, ne de bu iddianın doğruluğu kanıtlanabilmiştir. Eğer matematik dünyasında meşhur olmak istiyorsanız, işte çözüm bekleyen bir problem size:

"2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamıdır." Doğru mu?

Sonsuz Toplamların Sonsuz Çarpımları

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdots$$

sonsuz çarpımının $\pi/2$ 'ye yakınsadığını Wallis göstermiş olmalı ki bu sonsuz çarpıma **Wallis çarpımı** adı verilmiş.

Paylarda çift sayılar, paydalarda tek sayılar ikiye defa gözüküyor ve çarpım sonsuza kadar sürüp gidiyor. Ve gide gide, artık ne ilgisi varsa, gidip dairesel fonksiyonların "pi" sayısının "bölü iki" sine ulaşıyor.

Ne işe yaradığı bilinmeyen ama ruhlarda titreşimler uyandıran güzellikler var böyle şeylerde. Wallis çarpımı

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{2k}$$

ye eşit olduğundan ötürü sonsuz toplamların bir sonsuz çarpımıdır.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

sonsuz toplamının $\pi^2/6$ 'ya yakınsadığını da Euler göstermiş. İşte gene tamsayılar, işte gene sonsuzluk ve işte gene "pi" ...

Şimdi, paylarda sadece asal sayıların, paydalarda ise asal sayıların bir eksikleri ve asal sayıların bir fazlalarının gözüktüğü

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \cdots$$

sonsuz çarpımına bakalım. Bu sonsuz çarpım da bir sonsuz toplamın sonsuz çarpımıdır ve "pi"li bir değere yakınsamaktadır. Nedir bu değer?

"Dünya bir beşiktir, ama insanoğlu sürekli olarak beşikte kalamaz."

K. Tsiolkovski

* Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim görevlisi

35. ULUŞLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI TAKIM SEÇME SINAVI

Birinci Gün, 30 Nisan 1994

Süre: 4.5 saat

1. Tamsayılar üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu tüm x tamsayıları için

$$f(x) + f(x+3) = x^2$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(19) = 94$ olduğuna göre $f(94)$ değerini hesaplayınız.

2. O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberin bu çapı üzerinde O ile B arasındaki bir E noktasından $[AB]$ çapına çıkılan dikme, çemberi D noktasında kesiyor. $[DE]$ ve $[EB]$ doğru parçalarına sıra ile K ve C noktalarında teğet olan bir çember BD yayına da F noktasında içten teğettir. Buna göre $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ olduğunu ispatlayınız.

3. Bir 25-genin bütün kenarları ve köşegenleri kırmızı ve beyaza boyanırsa, köşeleri 25-genin köşelerinde bulunup bütün kenarları aynı renk olan en az 500 üçgen bulunacağını gösteriniz.

İkinci Gün, 1 Mayıs 1994

Süre: 4.5 saat

4. ABC üçgeninin kenarları üzerinde $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$, $R \in [CA]$ ve

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|CR|}{|CA|} = k \quad \left(k < \frac{1}{2}\right)$$

olacak biçimde P, Q, R noktaları alınıyor. G , ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre

$$\frac{\text{Alan}(PQG)}{\text{Alan}(PQR)}$$

değerini bulunuz.

5. $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$ olacak şekilde n_i, m_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6. $a^2 + b^2 + 3$ sayısının $a \cdot b$ ile bölünebilmesini sağlayan tüm (a, b) tamsayı ikililerini bulunuz.

İki basamaklı ab ve cd gibi iki sayıyı alt alta yazıp çarparken önce ab 'nin d ile çarpımı yazılır, sonra da, 'bir kaydırarak,' ab 'nin c ile çarpımı yazılır ve bu çarpımlar yazıldıkları hizada toplanır. Burada kullanılan özellik şudur: cd sayısını $10c+d$ şeklinde yazarsak, $ab \times cd$ çarpımının $(10c+d) \times ab = 10c \times ab + d \times ab$ olduğunu görürüz. Buradaki ' $10c \times ab$ ' terimi, ab 'nin c ile çarpımının 'bir kaydırarak' yazılacağını söylemektedir.

Dergimizi ziyaret eden Sincan Anadolu Lisesi orta birinci sınıf öğrencisi Türker Özşarı, bu gözlemi iki basamaklı üç sayının çarpımında kullanarak iki seferde yapılabilecek $ab \times cd \times ef$ çarpımını bir çırpıda hesaplayabiliyor. Çarpımı $(10c+d) \times (10e+f) \times (ab) = (100e \cdot c + 10c \cdot f + 10d \cdot e + d \cdot f) \times (ab) = 100e \cdot c \cdot (ab) + 10e \cdot d \cdot (ab) + 10c \cdot f \cdot (ab) + d \cdot f \cdot (ab)$ olarak yazarak Türker Özşarı'nın gözlemine geçebiliriz: Önce $d \cdot f \cdot (ab)$ çarpımı yazılır, bir kaydırdıktan sonra $c \cdot f \cdot (ab)$ çarpımı ve $e \cdot d \cdot (ab)$ çarpımları ve bir daha kaydırarak $e \cdot c \cdot (ab)$ çarpımı yazılır ve bu çarpımlar yazıldıkları hizada toplanarak sonuç bulunur. Örnek olarak $27 \times 18 \times 43$ çarpımını hesaplayalım:

ab	27	
cd	18	
ef	43	
d.f.(ab)	648	(24.27)
c.f.(ab)	81	(3.27)
e.d.(ab)	864	(32.27)
e.c.(ab)	108	(4.27)
T O P L A M	20898	

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A86. Bir ABC üçgeni verildiğinde, $X, X' \in [BC]$, $Y, Y' \in [CA]$, $Z, Z' \in [AB]$ olacak şekilde, karşılıklı kenarları birbirine paralel dışbükey ve eşkenar bir $XX'YY'ZZ'$ altıgeninin cetvel ve pergeli ile çizilebileceğini gösteriniz. (Şahin Polat)

A87. $64 + 9^{2n}$ ifadesinin hiç bir n doğal sayısı için asal olamayacağını gösteriniz. (Mehmet Şahin)

A88. Bir ABC üçgeninde (I_b) ve (I_c) dış çemberleri BC , CA , AB doğrularına D_b, E_b, F_b ve D_c, E_c, F_c noktalarında değiyor.

$$\frac{\text{alan}(D_c D_b F_b F_c)}{\text{alan}(ABC)} > \frac{a^2}{bc}$$

olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

A89. $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ olsun. $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $P_i(x) = \frac{Q(x)}{x - a_i}$ olmak üzere, $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x)$ polinomunun bütün köklerinin gerçel olduğunu gösteriniz. (Ozan Hafızoğulları)

A90. Tepesi A olan ikizkenar ABC üçgeninin içinde, tabana, yan kenarlara ve birbirine teğet eş iki çember ile bu çemberlere ve yan kenarlara teğet bir çember çiziliyor. Taban açılarının hangi değeri için bu çemberlerin kenarlara değdiği altı nokta çemberdeş olur? (Hüseyin Demir)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y86. Dar açılı bir ABC üçgeninin A köşesinden harekete başlayan bir nokta kenarlara geldiği zaman bilinen yansıma kurallarına göre harekete devam etmektedir. Bu nokta, sırasıyla $[BC]$, $[BA]$, $[AC]$, $[BC]$ kenarlarına D, E, F, G noktalarında çarpıp yansıyarak tekrar A köşesine ulaşıyor. $ADEFGA$ yolunu çiziniz ve uzunluğunu hesaplayınız. (Hüseyin Demir)

Y87. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasının bu üçgene göre ayak üçgeni DEF olmak üzere,

AD, BE, CF doğruları noktadaş ise P noktasının geometrik yeri nedir? (Hüseyin Demir)

Y88. $u = u(x)$, reel sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, w ve z fonksiyonları

$$w(x) = \int \left(\int [2(u')^2 + 2u''u] dx \right) dx,$$

$$z(x) = \int \left(\int \left[\frac{uu'' - (u')^2}{u} \right] dx \right) dx$$

olarak tanımlanıyor. $\sqrt[2]{w}$ değerini hesaplayınız. (Dinçer Akay)

Y89. O merkezli ve çapı $[BC]$ olan birim yarıçaplı bir yarıçemberin üzerinde bir A noktası alınıyor ve ABC dik üçgeni çiziliyor. A noktası yayı çizerken, homojen kabul edilen $[AB] \cup [AC]$ kırık doğrusunun G ağırlık merkezinin geometrik yerinin denklemini elde ediniz. (Hüseyin Demir)

Y90. f gerçel sayılar üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir fonksiyon, ve bir pozitif a sabiti için

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

denklemini her x için geçerli olsun. f fonksiyonunun periyodik olduğunu (yani, her x için $f(x+b) = f(x)$ veren bir b sayısının varlığını) gösteriniz. Ayrıca $a = 1$ için istenilen özelliklerde ve sabit olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

ÇÖZÜMLER

(A4.1) **A76.** A açısı, U yarıçevresi ve $[BC]$ kenarının doğrultusu verilen ABC üçgenini pergeli ve cetvelle çiziniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. $\angle PAQ = \angle A$ olacak şekilde $\angle PAQ$ açısı çizilir. p ve q ışınları üzerinde $|AE| = |AF| = u$ olacak şekilde E ve F noktaları işaretlenir. p ve q 'ya E ve F 'de teğet olan çember çizilir. Bu çembere, A tarafında, verilen doğrultuyu, doğrultu kabul eden teğet doğru çizilir. Bu doğru p ve q 'yu B ve C noktalarında kessin. Aranan üçgen ABC olur.

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağın Baykal)

$$(A4.2) \text{ A77. } \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=1}^{n-1} p^{n-k} = n^n - n$$

($n \geq 2$) olduğunu gösteriniz. (Dinçer Akay)

$$\text{Çözüm. } A = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=1}^{n-1} p^{n-k} =$$

$\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k}$ olsun. Binom formülünden

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{n-k} = (1+p)^n$ olduğunu biliyoruz. O

halde $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k} = (1+p)^n - p^n - 1$ ve

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p=1}^{n-1} \{(1+p)^n - p^n - 1\} \\ &= (2^n - 1^n - 1) + (3^n - 2^n - 1) \\ &\quad + \dots + \{n^n - (n-1)^n - 1\} \end{aligned}$$

olur. Birbirini götüreren terimleri ayıkladığımızda

$$A = n^n - 1^n - (n-1) = n^n - n$$

kalır.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasağın Baykal, Burhan Biner, Almas Rimov)

(A4.3) A78. Bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin orta noktaları X, Y , ve $[AB] \cap [CD] = F$ ise, $\text{alan}(FXY) = \frac{1}{4} \text{alan}(ABCD)$ olduğunu gösteriniz. (Ayhan Aziz)

Çözüm. F noktası, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının uzantılarının kesiştiği noktadır. Bu da ancak $ABCD$ dörtgeni, paralelkenar olmayan genel bir dörtgen olarak alındığında gerçekleşir. Kolaylık olsun diye $\text{alan}(FXY)$ yerine $|FXY|$ kullanacağız. $[BC]$ ve $[AD]$ 'nin orta noktalarına Q ve S diyelim. $|FXY| = |FXQ| + |FYQ| + |QXY|$ diye parçalarız. B ve F aynı doğru üzerinde olduklarından $|FXQ| = |BXQ| = \frac{1}{4}|CAB|$ ve aynı şekilde $|FYQ| = |CYQ| = \frac{1}{4}|BCD|$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} |QXY| &= \frac{1}{2}|XQYS| \\ &= \frac{1}{2}(|ABCD| - |DYS| \\ &\quad - |ASX| - |ABQX| - |CDYQ|) \\ &= \frac{1}{2}(|ABCD| - \frac{1}{4}|DAB| \\ &\quad - \frac{1}{4}|ACD| - \frac{3}{4}|ABC| - \frac{3}{4}|BCD|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8}(4|ABCD| - |DAB| \\ &\quad - |ACD| - 3|ABC| - 3|BCD|) \\ &= \frac{1}{8}(4|ABCD| - |ABCD| \\ &\quad - |ABCD| - 2|ABC| - 2|BCD|) \\ &= \frac{1}{4}(|ABCD| - |ABC| - |BCD|) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$|FXY| = |FXQ| + |FYQ| + |QXY| = \frac{1}{4}|ABCD|.$$

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Şevket Emrah Aydın, Atasağın Baykal, Burhan Biner, Almas Rimov, Ergün Yaraneri)

(A4.4) A79. Bir üçgende içaçıların kotanjantları aritmetik dizi oluştururlarsa, kenar uzunluklarının karelerinin de aritmetik dizi oluşturduklarını gösteriniz. (Hasan Kullap)

Çözüm. $2 \cot B = \cot A + \cot C$ olması halinde $2B^2 = A^2 + C^2$ olacağını göstereyim.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ve} \quad \sin A = \frac{a}{2R}$$

den,

$$\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

ve benzer olarak

$$\cot B = \frac{R(a^2 + c^2 - b^2)}{abc},$$

$$\cot C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

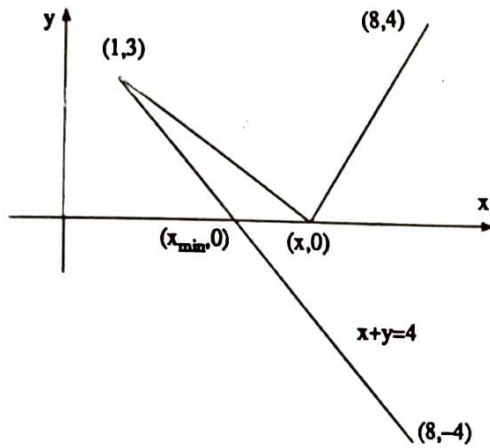
yazılır. $2 \cot B = \cot A + \cot C$ ise $2(a^2 + c^2 - b^2) = (b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + b^2 - c^2)$ ve $2b^2 = a^2 + c^2$ bulunur.

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Şevket Emrah Aydın, Atasağın Baykal, Burhan Biner, Ercan Şahin, Ruhi Tabur, Almas Rimov, Ergün Yaraneri)

(A4.5) A80. $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16}$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz. (Moskova Bağımsız Üniversitesi, 1991 Giriş Sınavı)

Çözüm. Kartezyen düzlemde bakarsak $f(x)$, $(x, 0)$ noktasının $(1, 3)$ ve $(8, 4)$ noktalarına

uzaklıklarının toplamıdır Şekilden görüldüğü



gibi bu toplamı minimum yapan $(x_{\min}, 0)$ değeri $(1, 3)$ ile $(8, 4)$ 'ün simetriği olan $(8, -4)$ noktasını birleştiren doğru ile x ekseninin kesim noktası olacaktır. $(8, -4)$ ile $(1, 3)$ noktalarından geçen doğru,

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{8-3}{-4-1},$$

yani $y-3 = -(x-1)$, yani $y+x = 4$ doğrusudur. O halde $x_{\min} = 4$ ve $f(x)$ 'in minimum değeri $\sqrt{(4-1)^2+9} + \sqrt{(4-8)^2+16} = \sqrt{9+9} + \sqrt{16+16} = 7\sqrt{2}$ 'dir.

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Murat Aygen, Şevket Emrah Aydın, Atasağın Baykal, Almas Rimov, Özgün Sümer, Ercan Şahin, Ruhi Tabur)

(Y4.1) Y76. $[AA']$ ve $[BB']$, O merkezli birim çemberin birbirine dik iki çapıdır. B' noktasından geçen değişken bir doğru, $[OA]$ 'yı U 'da ve AB yayını P 'de keserse, OUP üçgeninin alanının alabileceği en büyük değer $\frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. OA ve OB' 'yi eksen kabul eden dikdörtgen koordinat sistemi kabul edersek, U 'nun koordinatları $(u, 0)$ ve $B'U$ doğrusunun denklemi de $\frac{1}{u} - y = 1$ olur. P noktasının koordinatları için, bu denklemin çemberin $x^2 + y^2 = 1$ denklemiyle ortak çözümünden

$$u = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{ve} \quad y = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

temin edilir. $|OUP| = S$ yazalım. Koordinatlar cinsinden

$$2S = uy = \frac{u-u^3}{1+u^2} = u \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

ve

$$2 \frac{dS}{du} = \frac{1-4u^2-u^4}{(1+u^2)}$$

bulunur. $\frac{dS}{du} = 0$ 'dan $u^4 + 4u^2 - 1 = 0$ ve $u = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ bulunur. Problemin özelliğinden bu kritik noktanın bir maksimuma tekabül ettiği açıktır. O halde S 'nin en büyük değeri

$$S = \frac{u}{2} \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{u}{2} \frac{-2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sqrt{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4} \sqrt{10\sqrt{5}-22}$$

olarak bulunur.

(Çözenler: Tamer Adanır, Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağın Baykal, Buhan Biner, Almas Rimov, Özgür Sümer, Ercan Şahin, Ruhi Tabur)

(Y4.2) Y77. Elemanları 0 veya 1 olan, her satırında ve her sütununda en az bir 0 ve en az bir 1 bulunan kaç tane farklı $n \times n$ ($n \geq 2$) matris bulunabilir?

Çözüm. Elemanları 0 veya 1 olabilen n elemanlı bir 'sıra'da en az bir 0 ve en az bir 1 olacak ise, bu sıra $2^n - 2$ farklı şekilde teşkil edilebilir. Bu tarz sıralardan n tanesini alt alta dizersek $(2^n - 2)^n$ farklı şekilde, her satırda en az bir 1 ve en az bir 0 olan $n \times n$ matrisler yazabiliriz. k tane sütununun her biri tamamen 0 ve ya 1 lerden oluşan matrislerin sayısı da $2(2^{n-k} - 1)^n + (2^k - 2)2^{n(n-k)}$ olduğundan, içermeye-dışarma prensibini kullanarak istenen matrislerin sayısını

$$(2^n - 2)^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} [2(2^{n-k} - 1)^n + (2^k - 2)2^{n(n-k)}]$$

olarak buluruz.

(Y4.3) Y78. Dış r_a, r_b, r_c yarıçapları ve verilen bir üçgenin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Bir I_a noktası alınıp, I_a merkez ve r_a yarıçaplı (I_a) çemberi üzerindeki bir E noktasından teğet doğru çizilir. $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = u^2$ yazılarak, çizilen teğet doğru üzerinde E 'den uzaklığı u olan bir A noktası işaretlenir ve A 'dan (I_a)'ya $[AF]$ teğet doğru parçası çizilir. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ eşitliğinden r iç yarıçapı bulunup, I merkezi $[AI_a]$ üzerinde olmak üzere AE ve AF 'ye teğet r yarıçaplı (I) çemberi çizilir. Bu iki çemberin kesişmesi halinde çözüm yoktur. Çemberler kesişmiyorsa ortak bir iç teğet doğrusu

çizilir. Bu doğrunun AE ve AF doğrularını kestiği noktalara B ve C denirse, ABC üçgeni aradığımız üçgen olur.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasâğun Baykal, Almas Rimov)

(Y4.4) Y79. Köşegenlerinin kesişme noktası K olan bir $ABCD$ dörtgeninde, CAB , DAB ve KAB üçgenlerinin iç teğet çemberleri AB 'ye sırasıyla T_1 , T_2 ve T noktalarında değsinler. r_1 ve r_2 , KBC ve KDA üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları ise,

$$r_1 \leq r_2 \iff |TT_1| \leq |TT_2|$$

olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. $\angle BKC = 2\alpha$, $|KA| = x$, $|KC| = x'$, $|KB| = y$, $|KD| = y'$ diyelim.

$$r_1 = \frac{y + x' - b}{2} \tan \alpha, \quad r_2 = \frac{x + y' - d}{2} \tan \alpha$$

olup, $r_1 < r_2 \iff y + x' - b \leq x + y' - d$ bulunur. Öte yandan

$$|BT_1| = a + b - (x + x'), \quad |BT_2| = \frac{a + y + y' - d}{2}$$

ve

$$|BT| = \frac{a + y - x}{2}$$

olup, $TT_1 = |BT| - |BT_1| = y + x' - b$ ve $TT_2 = |BT_2| - |BT| = x + y' - d$ elde edilir. Buradan da $TT_1 \leq TT_2 \iff y + x' - b \leq x + y' - d$ bulunur.

(Çözenler: Ali Akın, Alaattin Aktaş, Atasâğun Baykal, Almas Rimov)

(Y4.5.) Y80.

$$\begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & d_n \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm. $1 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_k \end{vmatrix}$$

determinantı olsun. $D_1 = d_1$ ve $D_2 = d_1 d_2 - 1$ olur. D_{k+1} için bir indirgeme bağıntısı bulalım.

Önce

$$f(x) = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Determinant açılımından $f(x) = D_k x + C$ şeklindedir. Öte yandan $x = 1$ için $f(1) = D_k + C$ ve determinant kurallarından

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{vmatrix} d_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & d_k & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d_1 - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_k - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1) \cdots (d_k - 1) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$C = -D_k + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \cdots (d_k - 1)$$

ve

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= f(d_{k+1}) \\ &= D_k(d_{k+1} - 1) \\ &\quad + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \cdots (d_k - 1) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} D_1 &= d_1 \\ D_2 &= d_1(d_2 - 1) + (d_1 - 1) \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_1 - 1) + (d_2 - 1) \\ D_3 &= (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_1 - 1)(d_3 - 1) \\ &\quad + (d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

den de

$$D_n = \left[\prod_{i=1}^n (d_i - 1) \right] \left[1 + \frac{1}{d_1 - 1} + \frac{1}{d_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1} - 1} \right]$$

bulunur. Bu kolayca tümevarımla ispatlanabilir.

(Çözenler: Tamer Adanır, Alaattin Aktaş, Almas Rimov)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 30 Eylül 1994 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyasının, ilk iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 80.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte, postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 50.000.-TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri takdirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1994 yılı abone ücreti 150.000.-TL. tane satış fiyatı ise 50.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları,
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- * Matematiksel kavramlar tarih ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdhan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar :

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

