

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

**Adına
Başkan**
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
ALİ DOĞANAKSOY, HÜSEYİN DEMİR,
ALPARSLAN ERTUĞ, TURGAY KAPTANOĞLU,
MEFHARET KOCATEPE,
MAHMUT KUZUCUOĞLU

DİZGİ
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI
*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.I.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 150.000.-TL., Yurtdışı yıllık 300.000.-TL.,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 5.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz 3.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 1.500.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA

İÇİNDEKİLER

Yaratıcı Sanat : Matematik

Paul Halmos (Asuman Güven Aksoy) 1

Oyunlar (I)

Ali Nesin 6

Sayılar Dünyasında Gezintiler

H. Turgay Kaptanoğlu 12

İlginç Geometri Problemleri

Emre Alkan 17

Geometri Problemlerinin Çözüm Yöntemi (II)

C. Alparslan Ertuğ 21

California Matematik Ligi Sınavları

Şafak Alpay 24

Japon Üniversite Giriş Sınavları

Şafak Alpay 25

35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı Soruları

Ali Doğanaksoy 29

Problemler ve Çözümleri 30

YARATICI SANAT: MATEMATİK

Paul Halmos

Derleyen: Asuman Güven Aksoy *

Hiç matematikçi tanıdığınız var mı? Eğer varsa onların zamanlarını nasıl geçirdiklerini bilir misiniz? Pek çok insan bilmez. Eğer bir seyahat esnasında yanımda oturan kişi konuşmaya başlamış ve bana doktor, avukat, işadamı veya dekan gibi saygıdeğer bir işi olduğunu söylemişse, benim de çatı tamircisiyim veya duvarcıyım demek gelir içimden, çünkü eğer matematikçiyim dersem, hemen kendisinin hesap işlerinde pek iyi olmadığını, fakat matematikte zehir gibi olmanın da pek hoş olacağını söyleyecektir. Eğitilmiş, iyi niyetli, akıllı insanların bile büyük bir bölümü "matematik" nedir bilmedikleri gibi, bu konuyla neden bazılarının uğraştığını da kavrayamazlar. Zeki veya eğitilmiş bir insanın Mısır filolojisinin veya hematolijinin varlığından haberi olmaya bilir, ama açıklandığında, kaba ve genel de olsa bir anlayışı olur, bu konularla uğraşanlarada sempati duyabilir. Ama matematiğe ve matematikçilere böyle bir sempati yoktur. Bizim konumuz matematik; bu kelimeyi dünyanın her yerindeki, bütün meslektaşlarımız kullanırlar. Belki de kafa karışıklığı burada başlamaktadır, çünkü matematik kelimesiyle 2 ayrı disiplin kastedilmektedir. Gerçekte ikiden de çok, ama en az iki disiplin; bunlar teorik matematik (bazen buna pür veya saf matematik de denir) ve uygulamalı matematik.

Matematikçiler Ne Yapar?

İlkin matematikçilerin ne yapmadıklarını anlatalım. Matematikçilerin sayılarla çok az işleri vardır; alt alta yazılmış bir dolu sayıyı matematikçinin yanlışsız toplamasını beklemek, bir ressamdan düzgün bir çizgi çizmesini veya bir operatörün yemekte hindiye iyi kesmesini beklemek gibidir. Evet, halk arasında bilinen matematikçilerin iyi hesap yaptıklarıdır, ama bu yanlış bir anlayıştır. Hatta matematiğin "sayılar teorisi" denen kısmında bile sayılarla çok uğraşılmaz. Bir makine $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$

olduğunu kolaylıkla bulur, hatta ve hatta sadece 5 pozitif tamsayının (1,153,370,371,407) yukarıdaki tür eşitlikleri sağladığını bile keşfedebilir, ama bu matematikçilerin umurunda bile değildir; bir sürü matematikçi her pozitif tamsayının, dörtten fazla olmayan kareye eşit olduğunu söyleyen bir teoremi sever. Her kelimesinin içinde beliren sonsuzluk, herhangi bir makineyi felce uğratar. Şu son yılların bilim-kurgu romantik objeleri olan dev beyinler, hesap makineleri, bilgisayarlar bile matematikçileri fazla ilgilendirmiyor. Matematik sayılar veya bilgisayar değildir; trigonometri kullanarak dağların yüksekliğini ölçmek, cebirdeki bileşik faiz hesapları veya integral hesaptaki atalet momenti hesapları da değildir. Tarihin herhangi bir yerinde, yukarıdaki sayılanlar belki önemli, basit olmayan araştırma konularıydı, ama problem çözüldünce, onun tekrarlanan uygulamaları matematik farzedilmiyor. En az iki şey daha var matematiğin olmadığı; bunlardan ilkinin hiçbir zaman olmadı, ikincisi de bir zamanlar dahildi, şimdi dışına çıkarıldı. İlk dediğimiz fiziktir. Bazı insanlar matematiği teorik fizikle karıştırırlar; örneğin Einstein için "büyük matematikçi" sıfatını kullanırlar. Einstein'ın büyük insan olduğundan kimsenin kuşkusu yoktur, ama matematikteki ustalığı kemandaki ustalığından daha fazla değildir. Matematiği kullanarak evrenin kurallarını bulmaya çalışmış, diferansiyel geometriyi bu amaç için başarıyla kullanmıştır. Tabii ki relativite teorisi, diferansiyel geometriyle aynı şey değildir. Einstein, Schrödinger, Heisenberg, Fermi, Wigner, Feynman — hepsi büyük adam bunların fakat matematikçi değiller, ve bunlardan bazıları matematiğe karşı oldukları gibi, matematikçi diye katagorize edilmeyi de hakaret sayarlar. Bir zamanlar matematik sayılan konular matematik olarak kalırlarsa da, bazen üzerlerinde öyle çok çalışılmış, öyle iyi anlaşılmış ve milyonlarca katkı yapılmış öyle bariz konular vardır ki matematikçiler artık onlar üzerinde ne vakit harcamak

* Claremont McKenna College Matematik Bölümü öğretim üyesi

ihtiyacı, ne de isteği içindedirler. Meşhur eski Yunan problemleri olan bir açının üçe bölünmesi, bir dairenin kareleştirilmesi, küpün katlanması bu çeşit matematiktir. Amatör matematikçiler için dayanılmaz olan bu problemleri artık matematikçiler çözmeye uğraşmıyorlar. Belki işittiniz, matematikçilere göre bir daireyi kareleştirmek veya bir açıyı üçe bölmek imkansızdır. Yine belki işittiniz veya bir yerde okudunuz ki matematikçiler korkak, zayıf karakterli kişiler olup, eğer bir şeyi ispat edemiyorlarsa, imkansız deyip cahilliklerini kapatmaya çalışırlar. Belki de bu doğrudur, istiyorsanız da inanın böyle bir şeye, ama sizin de bu iddiadaki ispatınız yetersiz olacaktır. Belirtmeye çalıştığımız nokta küçük ama bilinen ve tarihsel önemi olan bir nokta, bir parantez açık bunu tartışalım.

Bir Kısa Parantez

Açıyı üçe bölme problemi şudur: Size bir açı verilsin; bu açının $\frac{1}{3}$ 'ünü çizebilir misiniz? Bu problem çok kolay bir sürü yöntemle yapılabilir. Dikkat edilmesi gereken nokta bu orijinal eski Yunan problemindeki kısıtlamalardır. Örneğin açıyı sadece cetvel ve pergelle çezeceksiniz. Bu da yapılabilir, ama işin başka püf noktaları da vardır, örneğin cetvelin üstünde iki noktayı işaretleyip, sonra bu işaretleri daha sonra kullanmak da yasaktır. Günümüzde eğer birisi bir açıyı üçe bölüyorsa, ya problemdeki kısıtlamaları bilmiyordur, ya da yaklaşık bir cevap bulmanın yeterli olduğunu sanıyordur. Çoğunlukla bu tavır uzaydan gelmiş bir adamın futbol oynaması gibidir eğer bütün amaç kaleye gol atmaksa, neden gidip eliyle topu oraya koymasın, değil mi?

Matematiğin Başlangıcı

Hiç kimse matematiğin nerede, nasıl ve ne şekilde başladığını bilmemektedir, fakat bir takım ilkel fiziksel gözlemlerden (saymak, ölçmek gibi) başladığını saymak makuldür. Büyük bir olasılıkla böyle başladı; hâlâ da bir dolu matematik fikri, saf düşünceden değil gerçek hayattan "urer, bir dolusu ama tabii ki hepsi değil. İnsanlar koyunlarını saymak ihtiyacını duyar duymaz, sayılar, şekiller, hareketler ve düzeni merak etmeğe başlarlar. Bu merak insan ruhuna, dünyayı, suyu, ateşi ve havayı merak etmesi kadar lazımdır; salt merak işte, yıldızları ve hayatın sırlarını çözmek gibi bir merak. Sayılar, şekiller, hareket ve düzen, düşünceler ve bunların sırası matematiğin hammaddeleleridir. Teknik fakat çok

gerekli bir matematiksel kavram olan "grup" insanların "simetri"yi anlamak için buldukları en iyi kavramdır. Topolojik uzayları, ergodik yolları çalışan insanlar, şekiller ve düzen hakkında bizim belli belirsiz algılarımıza kesin çözümler getirmektedirler. Neden matematikçiler böyle şeyleri çalışırlar; bir başka deyişle onları bu işe teşvik eden nedir? Toplum neden onların bu çabalarını destekler, neden eğitimlerini sağladığı gibi bazılarına maaş da verir düşünsünler diye? Bu iki soruya iki cevap verilebilir. Çünkü matematik pratikte kullanılır ve çünkü matematik bir sanattır. Şimdi var olan matematiğin her gün yeni yeni uygulamaları çıkmaktadır. Matematiği düşünenlerin sayısı arttıkça, yeni kavramların açıklanması beklenmekte, yeni mantık ilişkileri benî keşfedin der gibi bağırılmaktadır.

Günümüzde Matematik

Günümüzün matematiği çok canlıdır. Binden fazla matematik makalelerini basan dergi vardır; her yıl 15.000 ile 20.000 arasında matematik makalesi yayımlanmaktadır. Son yüz yılda matematikte yapılan atılımlar, başarılar, hem sayısal hem de içerik bakımından bütün geçmiş tarihinde yapılanlardan fazladır. Hilbert, Cantor veya Poincaré'yi tökezleten zor matematik problemleri şimdi çözülmekte, hatta Berkeley ve Odessa'daki sakalı çıkmamış (veya çıkmış) gençler tarafından genelleştirilmeleri bile yapılabilmektedir.

Matematikçiler bazan kendilerini "teori yaratıcıları" veya "problem çözenler" diye sınıflara ayırırlar. Problem çözümler evet, hayır diye cevaplanabilecek sorulara bakıp, gerekli özel durumlara veya gerçekçi örneklerle bakarlar ki bunlar matematiğin kanı ve etidir diyebiliriz. Öte yandan teori yaratıcıları bu ayrı gözüken sonuçları ortak bir teoriye oturtup hepsine ışık tutup, gideceği yönü gösterirler; dolayısıyla teoriler matematiğin iskeletini ve ruhunu yaratırlar. Her ne kadar bazı matematikçiler hem teori yaratıcısı, hem de problem çözümlüsü olabiliyorlarsa da, genellikle bu iki sınıfın birinde yer alıyorlar. Problem çözümlüler geometrik modeller yaratırlarken, teori yaratıcıları Öklit geometrisinin temellerini tartışır. Her iki çeşit matematikte de bir kuşağın yaptığı ilerlemeler nefes kesecek kadar iyidir. Zamanımızda hiç kimse, belli belirsiz de olsa homolojik cebir, diferansiyel topoloji ve fonksiyonel analiz hakkında bir bilgisi yoksa kendisine matematikçiyim diyememek-

tedir. Halbuki 1930'larda daha bu konuların ne içerikleri kesinleşmiş, ne de adları konmuştu.

Matematik soyut bir düşüncedir; matematik katkısız mantıktır; matematik yaratıcı sanattır. Bütün bu cümleler yanlıştır, fakat bir miktar doğruyu da içlerinde taşırlar; üstelik "matematik sayı demektir" veya "matematik geometrik şekil demektir" laflarından da daha doğrudurlar. Profesyonel saf matematikçi için matematik, titizlikle seçilmiş varsayımların şaşırtıcı sonuçlarının, kavramsal estetik bir ispatla verilmesidir. Açıklık, derinlik, herşeyden önce de mantık analizi matematiğin belirgen unsurlarıdır. Matematikçiler uç noktalarda çalışırlar; bu anlamda lambaları kıran, gömlekleri yırtan, arabaları hızla engellerden atlatan bir sanayi deneyimcisi gibi hareket ederler. Bir teori nereye kadar dayanır, hangi şartlarda çöker, bilmek isterler. Diyelim ki bir varsayımı zayıflattınız, sonucu bu nasıl etkileyecektir; veya hangi şartlar altında vardığınızdan daha kuvvetli bir sonuca varabilirsiniz? Bu şekilde devamlı soru sorarak, daha geniş konuları anlayabilirsiniz, daha iyi teknikler geliştirdiğiniz gibi, gelecekteki problemlerin çözümü için de daha esnek bir ortam hazırlamış olursunuz.

Matematik —bu söyleyeceğime şaşıracaksınız, belki şoka uğratacak sizi— hiç bir zaman tündengelimle yaratılmaz. Matematik yapan kişi, belli belirsiz tahminlerde bulunur, genelleştirilmeyi gözünde canlandırmaya çalışır ve istenmeyen veya beklenmeyen sonuçlara varır, tekrar tekrar fikirlerini düzenler, neden sonra fikirlerinin doğruluğuna kanaat getirdikten sonra ki oturup, savının mantıki ispatını yapar. Bu savının doğruluğuna inanma öyle kolay oluşmaz; genellikle bir sürü deneme, sınama ve bir sürü başarısızlıktan sonra ortaya çıkar; çoğu zaman da aylarca çalışmadan sonra probleme saldırıştaki kullandığı metotların, yeterli olmadığını anlaşılr, yeni baştan tahmine, sonuçlara varmaya çalışılır. Belki problemi başka bir şekilde ifade etmek gerekmededi, bu da uğraşanı şaşırtar belki, ama daha çok fikir denemelerine ihtiyaç vardır. Bir matematikçi eğer sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarında bir teorem ispat etmek istiyorsa, önce sonlu boyutlu uzaylarda, diyelim 2 veya 3 boyutlu uzaylarda, ne olacağına bakar, bir takım özel durumları hesaplamaya çalışır, bunları yaparak tanımların değiş tokuş edilmesinden kazanmadığı bir anlayışı, derinliği kazanmaya çalışır. Yanlışsız ispatı yazmak, bu anlama ve derinliği kazanmaya göre çok daha basittir.

Matematik Kulübü

Bugünün matematikçileri yarının matematikçilerini yetiştirirler; bu pratikte "kulüp"e kimin alınacağına karar vermektir. Bir sürü insan bu kulübe girmeyi kolay bulmaz. Matematik kabiliyeti ve dehası, resim ve müzikteki dehalar kadar ender bulunur. Tabii herkes bu kulübe girebilir, güler yüzlerde karşılaşabilir, açık seçik kuralları yoktur üyeliğin; ama bu işi yapan herkes hisseder, yanlışlar ve alâkasız sonuçlar hoşgörölüp affedilebilir, ama taviz verilmeyen şart matematiksel derinliktir. Bence matematiğin en güzel yanlarından birinin düşünce karışıklığına, içeriği olmayan laf kalabalığına ve polemige yer vermemesidir; bunları matematiksel olmayan, insanlığın diğer bilgi alanlarında hemen görmek daha zordur.

Her ne kadar matematiğin çoğu bir insanın masa veya tahta başında veya yürürken, bazen de iki insan konuşurken yaratılsa da, matematik yine de sosyal bir olaydır. Yaratıcı, yaratırken teşvik edilmek ister, yarattıktan sonra da bir dinleyici grubuna ihtiyaç duyar. Matematik sosyal bir olaydır derken, matematiğin terkedilmiş bir adada yalnız yaşayan bir insan tarafından yaratılamayacağını söylüyorum. (Belki böyle bir insan çok kısa süre matematik yapabilir.) Fakat bir grup işi de değildir; teorem bir piramit değildir; dahi fikirlerin de komitelerden geçtiği hiç olmamıştır. Nasıl büyük güzel bir resim için önceden proje yapılmazsa, büyük güzel bir teorem için de böyle bir "proje" düşünülemez. Bir sürü küçük Shakespeare'ler nasıl Hamlet'i yazmadılarsa, büyük bir generalin yönettiği küçük Gauss'lardan oluşan bir grupla da düğün poligonlarla ilgili teoremi ispatlamışlardır.

Saf Matematik mi, Uygulamalı Matematik mi?

Bu iki matematik arasındaki farkları nedense uygulamalı matematikçiler hep küçültmeye, saf matematikçiler de vurgulayıp büyütmeye çalışırlar. Her matematikçi, birkaç istisna hariç, bu iki sınıftan birindedir. Bu iki matematik arasında gerçekten çok benzerlikler vardır. Şurası da unutulmamalıdır ki, sonuçta tarihsel gerçek, bütün matematiğin bize bir şekilde fiziksel evrenden geldiğidir; bu anlamda bütün matematik uygulamalıdır denebilir.

Zannediyorum ki psikolojik olarak, en saf matematik yapan bile, düşüncelerinin kavramlarının beklenmedik bir şekilde matematiksel olmayan dünyayla temasından büyük zevk alır. İyi bir saf matematikçi olmak için gerekli kabiliyet kriterleri iyi bir uygulamalı matematikçi için de geçerlidir. Uygulamalı matematikte yazılan bazı makaleler, saf matematikte yazılanlardan ayırt edilemez. Bence bu iki tür matematiğin farkı, entellektüel meraklarının amaçlarındaki farktır. Sizinle gelin bir psikolojik deney yapalım. Diyelim ki elimizde 2 zarımız var; bunları her atışınızda üstlerindeki sayılar toplamalarının (2 ve 12 dahil) aynı gelme olasılığı nedir? Bu bir matematik sorusudur, cevabı da bilinir. Böyle bir soruyu duyduğunuzda, her iki küpteki (zar) kütlenin homojen dağılıp dağılmadığını mı düşündünüz, yoksa bu 12 sayının çarpımlarının toplamını mı düşündünüz? Eğer ilki ise siz saf matematikçi olmaya adaysınız, ikincisi ise uygulamalı matematiğe meraklısınız. Bir araştırma problemini nasıl seçersiniz; bu seçimi yaparken size cazip gelen nedir? Doğayı mı anlamak istiyorsunuz, mantığı mı? Gerçek olguları, soyut bağlantılara tercih mi ediyorsunuz? Uygulamalı matematikte soru her zaman dışardan gelir, "gerçek dünyadan." Uygulamalı matematikte alınan tatmin, olguların üzerlerine serpilen yeni ışıktır. Bu arada yanlış anlaşılmasın; "gerçek"i "pratik"le, "soyut"u da "faydasız"la özdeşleştirmiyelim. Örneğin $2^{11213} - 1$ bir asal sayıdır; bu gerçek bir olgu, fakat tabii ki faydasız. Öte yandan $E = mc^2$ bir soyut bağlantı; ne yazık ki çok da pratik bir bağlantı.

Tarihin de bu kavram karışıklığına pek faydası olmuyor. Eskiden bu iki matematik daha yakındı birbirine. Şimdiki uygulamalıya karşı saf lafı en azından semantik bir fark yaratıp, aradaki önemli bağlar yerine, ufak farkları vurguluyor.

Bu iki matematiğin amaçları arasındaki farklar, zevkler ve değer yargıları arasındaki farklara dönüşüyor. Uygulamalı matematikçi olguları bilmek istiyor; çoğu kez ince ayrıntılarda zaman kaybetmek istemiyor. Saf matematikçi ise fikirleri anlamak istiyor; estetike büyük değer veriyor ve bir anlayışa nasıl ulaşıldığı da önemli onun için. Örneğin bir ispat için "şık" kelimesini kullanabiliyor. Motivasyonda, amaçta, sık sık metotta ve daima zevkte uygulamalı ve saf matematikçi ayrılıyorlar. David Hilbert'le ilgili bir söylenti var, belki duydunuz. Bu adam hem 19. hem de 20. yüzyılın büyük matematikçisi sayılabilir. Bir gün bir konuşmasında bu uygu-

lamalı ve saf matematik arasındaki farkı anlatmasını istemişler (o zaman bile!); düşünmüşler ki eğer bu konuda birisi bir açıklık getirecekse, o da Hilbert. Kabul edip konuşmasına şöyle başlamış: "Benden uygulamalı ve saf matematik arasındaki çelişkilerden bahsetmemi istediler; pek memnun oldum, çünkü gerçekte bu bir saçmalık, arada hiçbir problemin olmaması lazım; zaten bir problem de yok; gerçekte bu iki konunun birbiriyle hiçbir ilgisi yok." Öyle sanıyorum ki matematiğin büyük bir kısmı doğuyor, yaşıyor; çünkü enteresan. Kendi içinde ilgi çekici Yunanlılar'ın açığı üçe bölmek istemeleri, şu meşhur 4 renk problemi veya Gödel'in matematiksel mantığa göz kamaştırıcı katkıları, çünkü bu katkılar güzel ve şaşırtıcı, çünkü biz bilmek istiyoruz. Hepimiz hissetmez miyiz bir bulmacanın dayanılmaz çekiciliğini? Eğer matematik insan ruhunun yarattığı harikulâde bir disiplinse, pratik bir uygulaması olmasa da yaşamaya hakkı var derssek yanlış mı olur?

Matematik Bir Dildir

Neden entellektüel gökyüzünde matematik tek başına kalmıştır? Neden bazı entellektüeller matematiğe dayanamadıklarını ilân ederlerken, bazıları da kıkırdıyarak hiç anlamadıklarını itiraf ederler? Belki de bir sebebi matematiğin bir dil olmasıdır. Matematik bazı tip fikirleri daha kısa, daha doğru anlatabilmek için icat edilmiş, her gün kullandığımız dilden daha kesin, daha ince bir dildir. Örneğin aşağıdaki şu iki cümleye bakalım:

- (1) Eğer eldeki iki sayı, kendileriyle çarpılmış ve sonra da farkları alınmışsa, bu, ayrı sayının toplamı ve farkını alıp onları çarpmaya eşittir.

$$(2) x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Görüleceği gibi her günkü konuştuğumuz dille yapılan formülasyon lüzumsuz uzun ve kabadır.

Sokaktaki insanı, matematikten soğutan, sinirini bozan bir şey, matematikçilerin kullandıkları terimlerdir. Matematiksel kelimeler bir etiket gibidirler; bazen baştan çıkarıcı olsalar bile daima bir kesinlikle tanımlanmışlardır. Onların sözlük anlamları ciddiye alınmamalıdır. Akla getirdikleri diğer anlamlara aldırnamak lazımdır. Nasıl bu günlerde Fitzgerald isminden, Gerald'ın gayrimeşru anlamını çıkarmıyorsa, irrasyonel sayı lafından akılcı olmayan sayı anlaşılmalıdır. Bilindiği gibi dramatik şiir "İlahi Komediya"

nasıl komik değilse, sanal sayıların da aynı tip bir varlığı vardır. Matematik bir dildir. Hiç birimiz bir sinolog Çince cümleler söylese alınmayız; ya Çince bilmediğimizi kabul ederiz, ya da çok istiyorsak yıllarımızı vererek Çince öğreniriz. Matematiğe karşı tavrımız da aynı olmalıdır; bu bir dildir, iyi konuşmayı öğrenmek yıllar alabilir. Hepimiz sık sık yanlışça ve aksanla konuşuruz; bu dildeki bilgimiz “Do you speak English?” cümlesinden başka İngilizce bilmememiz gibi olabilir. Matematikçiler bir insanın bu dili konuşabilecek hale gelmesi için yılların geçmesi gerektiğini bilirler, konuşamayanlara da yukarıdan bakmazlar. Ama bazen insanın kafası, bir kaç bardak içki üstüne bu dili açıklayamadınız diye sizi ukalâlıkla suçlayan insanları görünce atıyor.

Bazı Benzetmeler

Her benzetme gibi aşağıdaki benzetmeler de eksik; fakat her halükârda açıkladıkları şeyler de var. Önce satrançla matematiği karşılaştıralım. Satrançın oyun kuralları, matematiksel aksiyomlar gibi gelişigüze. Satranç da matematik gibi soyuttur. Satranç, tahta, plastik veya camdan (ne olduğu önemli değildir) yapılmış parçalarla oynanır; kağıt ve kalemle matematik gibi de oynanabilir. Satrançta da etraflı teknik bir dil vardır. Matematikle müziğe gelirsek; bir teorik matematikçi de, müzik yapan da, neden çalıştıklarını etrafa anlatma, onların onayını alma isteğini duymazlar. Bir müzisyen bir caz parçasını, fabrikada çalışan işçiler daha hızlı hareket etsinler diye yazmaz. Matematik ve müzik insanlığın değerleridir, çünkü insanlık böyle olduğunu hep hissetmiş, bilmıştır. Diyelim ki bir müzisyen konser verecek; onun tabii ki doğru notalara basmasını bekleriz, ama sadece yanlışsız çalmak onu iyi müzisyen yapmaz. Yalan söylemeyen, doğrulara sadık bir tarihçi de iyi tarih yazıyor demek değildir. İyi matematik için de sadece mantık doğruluğu kâfi gelmez.

İyilik ve kalite, geçerlilikten daha yüksekte bir yerde ölçülür. İyi bir matematik parçasının, diğer matematik parçalarıyla alakası vardır, kaçınılmaz bir derinlik sergiler. Kalitenin kriteri ise güzellik, düzenlilik, uygunluk, şıklıktır. Bütün bu kriterler sübjektif de olsa, esrarengiz bir şekilde matematikçiler arasında paylaşılan değerlerdir.

Matematiğin edebiyatla benzerliği, müzikle benzerliğinden farklıdır. Nasıl gazete reklam-

larını veya yol işaretlerini okuma ve yazmanın, edebiyattaki okuma ve yazmayla alakası yoksa, pratik aritmetiğin de matematikle alakası yoktur. Hepimizin günlük yaşam için okuma ve yazmaya ihtiyacı vardır, fakat edebiyat yazmak ve okumaktan, matematik de hesaplarmaktan ötedir. Burada öğretmenlerin rolü ile saf-uygulamalı ikilemine de değinelim. Diyelim ki herhangi bir dilin yapısı, tarihi ve estetiğiyle ilgileniyorsunuz, çalışmışsınız, fakat öğrencilerinize, bunları değil de, o dilin pratikte nasıl konuşulduğunu öğretiyorsunuz. Matematikçiler de hayatlarını kazanmak için, aritmetik, trigonometri veya integral hesap öğretirler. Bu işin sağlam bir ekonomik yanı vardır. Toplum kişisel olmayan ve biraz da soyut bir şekilde dil çalışanları veya teorik matematikçileri destekliorsa ve onların zamanlarının bir kısmını sanatlarına ayırmasına göz yumuyorsa, karşılığında pratik bir yarar bekleyecektir. Bence iyi hocalar bu öğrettikleri pratik bilgiler içerisinde kalmayıp, ruhlarını sanatlarıyla canlı tutabilenlerdir.

Teorik-pratik ikilemi edebiyatta da vardır. Edebiyatın kaynağı insan yaşamıdır, ama edebiyatçılar sadece insan yaşamı için yazmazlar.

Belki matematiğe en yakın benzetme, resimle olur. Resmin veya matematiğin temeli, kaynağı fiziksel olgulardır, ama ressam bir kamera, matematikçi de bir mühendis değildir. Bir politik mesajın posterini yapan bir ressam belki bazı grupların onayını alır, ama bu beğenme, onay, Rembrandt'ın resimlerine verilenden çok farklıdır. Gerçek hayata ne ölçüde uyulduğu hassas bir denge unsurudur. Bir ressamdan “gerçek bir hikâyeyi” çizmesini istemek, bir matematikçiden “gerçek bir problem” çözmesini istemek gibidir. Bazılarına göre de günümüzdeki modern resim ve modern matematik çok uzağa gitmişlerdir. Belki bir tutam baharat gibi, gerçeğin yapıtların içinde olması lâzım tadını kaçırmadan.

Gidin, bir ressam, bir de matematikçiyle konuşun; ikisinin reaksiyonları arasındaki benzerliğe çok şaşıracaksınız. “Ben doğru dürüst paramın hesabını yapamıyorum.” veya “Ben doğru dürüst bir çizgi çizemiyorum.” eşit derecede alâkasız ve ilginçtir. Perspektifin bulunması ressama, sıfırın keşfi de matematikçiye faydalı bir teknik kazandırmıştır. Her ne kadar zevkler, her iki konuda da zamanla değişiyorsa da, eski sanat, yeni sanat kadar, eski matematik de yeni matematik kadar kıymetlidir. 20. yüzyılın ressamı nasıl mağaralardaki resimlere sempati ile bakıyorsa, 20. yüzyıl matematikçileri de Babilliler'in kesir-

lerle çalışmalarına sempatiyle bakarlar. Bir resim önce yapılır, sonra ona bakılır; bir teorem de önce basılır, sonra okunur. Ressamlar iyi resimler yapmayı, matematikçiler de güzel teoremler ispat etmeyi hayal ederler.

Resimde ve matematikte iynin bazı objektif standartları vardır. Ressam, yapı, çizgi, şekil ve dokudan; matematikçi ise geçerlilik, yenilik, doğruluk, genellikten konuşur. Umarım size

matematik hakkında biraz bilgi verebildim. Tabii matematik hakkında konuşuyoruz, matematiğin dilini değil, dolayısıyla söylediklerimin matematiksel anlamda ispatları yok. Matematik bir yaratıcı sanattır, çünkü matematikte harikulade güzel fikirler yaratılır; matematikçiler sanatçılar gibi yaşar ve düşünürler. Yaratıcı sanattır, çünkü en azından matematikçiler onun böyle olduğunu bilirler.

OYUNLAR (I)

Ali Nesin *

Bu yazıyla başlayan yazı dizimizde oyunları konu edeceğiz. Yazılarımız birbirinden bağımsız olacaklar. Birini anlamak için bir öncesini illâ okumuş olmak gerekmez.

Oyunları *sonlu* ve *sonsuz* oyunlar diye ikiye ayıracağız. Sonsuz oyunları da ikiye ayıracağız: uygulamada sonsuza dek sürebilen ve süremeyen oyunlar. Şimdilik sonlu oyunları konu edeceğiz.

Satranç sonlu bir oyundur. Ancak satrancın sonlu olması için özel kurallar konmuştur. Örneğin, "bilmem kaç hamlede piyonlara dokunulmazsa oyun berabere biter" diye bir kural vardır. Bu kural olmasaydı, yalnızca iki şahın kaldığı oyunlar sonsuza değin sürerdi. Pişti, briç gibi oyunlar da sonludur. Genellikle kâğıt oyunları sonludur. Bu oyunların sonlu olduğunu kanıtlamak oldukça kolaydır, kullanılacak kâğıt sayısı sonludur ve gittikçe azalır.

Bazı oyunların bitip bitmeyeceğini önceden kestirmek kolay değildir. Hatta önsezinin bile yetersiz kaldığı olabilir. Önsezi kazanmak ve teoremin doğruluğuna kendilerini inandırmak için matematikçiler sık sık deneye başvururlar. Bu yöntemi bir oyun için kullanacağız.

Yazı-Tura Üzerine

İki kişi arasında oynanan şu oyunu ele alalım: Oyuncular yazı-tura atıyorlar. Yazı gelirse birinci oyuncu, tura gelirse ikinci oyuncu kazanacak. Birinci oyuncu oyunun başında ortaya 1 lira koyuyor. Kaybettikçe ortaya koyduğu

parayı iki misli arttırıyor. Örneğin, ilk atışta kaybederse ikinci atışta ortaya 2 lira koyuyor. Bu atışta da kaybederse, üçüncü atışta ortaya 4 lira koyuyor. Gene kaybederse 8 lira koyacak. Kazanınca arttırmayı durduruyor ve hemen sonraki atışta ortaya 1 lira koyuyor. Oyun böyle sürüyor. İkinci oyuncu para alıp vermekle yetiniyor. Eğer iki oyuncudan birinde para kalmazsa ya da birinci oyuncu açıkladığımız stratejisini sürdüremezse oyun bitiyor. Bu oyun bitmemelik eder mi?

Diyelim, oyunun başında her iki oyuncunun da dörder lirası var. Oyunun başında birinci oyuncu 1 lira ortaya sürüyor. Bu duruma (4, 4, 1) durumu diyelim. Buradaki birinci sayı, birinci oyuncunun cebindeki para; ikinci sayı, ikinci oyuncunun cebindeki para; üçüncü sayıysa ortaya sürülen para. Bu durumda tura gelirse, yani birinci oyuncu kaybederse, (3, 5, 2) durumuna geçeceğiz; çünkü birinci oyuncunun 3 lirası kalacak, ikinci oyuncunun 5 lirası olacak ve ortaya sürülen para 2 lira olacak. Bir kez daha tura gelirse, (1, 7, 4) durumuna ulaşırız ve bu durumda oyun biter; çünkü bu durumda birinci oyuncu 4 lira ortaya koymalıdır, ancak 4 lirası yoktur.

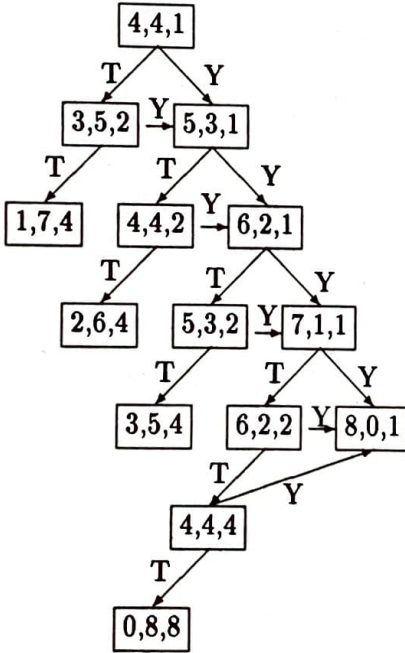
Bu oyunun bittiğini nasıl gösterebiliriz? Oyunun bir şemasını çıkarabiliriz. En tepeye (4, 4, 1) yazalım. Bu oyunun birinci durumu. Bu durumdan aşağı doğru sağlı sollu iki ok çıkaralım: tura oku ve yazı oku. Soldaki ok tura geldiğini, yani birinci oyuncunun kaybettiğini,

* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

sağdaki oksa kazandığını gösteriyor. Sol okun ucuna birinci oyuncu kaybettiğinde varacağımız durumu yazalım: (3, 5, 2). Sağ okun ucunaysa birinci oyuncu kazandığında varılacak durumu yazalım: (5, 3, 1). Birinci oyuncunun stratejisini sürdüremediği durumlardan ok çıkmaz, çünkü bu durumlarda oyun bitmiştir. Oyunun şeması bir sonraki sayfada görülmüyor.

Bu, sonlu bir oyunun şemasıdır, çünkü okları izleyerek bir döngü elde edemeyiz. Okların gösterdiği yolları izlediğimizde son durumlardan birine erişiriz.

Oyuna her iki oyuncu da dörder lirayla başladığında oyunun sonlu olduğunu gördük. Okur oyunu başka durumlardan da başlatabilir. Her seferinde oyunun sonlu olduğunu görecektir. "Demek ki," diye düşünür matematikçi bu aşamada, "bu oyun bitmeli!" Arkasından soruyu genel olarak yanıtlar:



Teorem. Oyuncular oyuna kaç parayla başlarsa başlasınlar yukarıdaki oyun biter.

Kanıt. Birinci oyuncu hep kaybederse oyun elbette biter. Birinci oyuncunun peşpeşe n kez kaybettiğini ama bir sonraki $(n + 1)$ 'inci atışta kazandığını varsayalım. İlk n atışta birinci oyuncu

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

lira kaybetmiş olacaktır. Bu sayıya S_n diyelim:

$$(1) \quad S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}.$$

¹ Bu güzel kanıt için Sinan Sertöz'e teşekkür ederim.

S_n sayısını hesaplayalım. (1) eşitliğinin sağındaki ve solundaki terimleri 2'yle çarpacak olursak,

$$(2) \quad 2S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

eşitliğini buluruz. (1) eşitliğini (2)'den çıkaralım. Sol tarafta $2S_n - S_n$, yani S_n buluruz. Sağ taraftaysa hemen hemen bütün terimler sadeleşir ve geriye $2^n - 1$ kalır. Dolayısıyla

$$S_n = 2^n - 1$$

dir. Demek ki, birinci oyuncu peşpeşe n kez kaybederse, $2^n - 1$ lira kaybedecektir. Ama bir sonraki atışta, yani $(n + 1)$ 'inci atışta kazandığında 2^n (toplam kaybettiğinin bir fazlasını) kazanacaktır. Dolayısıyla, birinci oyuncu her kazandığında daha önce kaybettiğini çıkardığı gibi, 1 lira da kazançlı çıkacaktır. Bu ne demektir? Birinci oyuncu oyunu kaybetmedikçe 1 lira kazanmayı sürdürecektir ve bir zaman sonra ikinci oyuncunun bütün parasını ütecek demektir. Teoremimiz kanıtlanmıştır.¹

Beklenti. Bir oyunun beklentisi, oyuncunun ortalama ne kadar kazanacağını yada kaybedeceğini gösteren bir sayıdır. Bir örnekle beklentinin nasıl hesaplandığını açıklayayım. Diyelim bir piyango bileti aldınız. Piyango bileti 10 lira. Toplam 100 biletin olduğunu varsayalım. Diyelim 1 bilete 500 lira çıkacak, 2 bilete 100 lira çıkacak ve 5 bilete de 10 lira (yani amorti) çıkacak. Aynı bilete iki ya da daha fazla ikramiye çıkmasına kuralların olanak vermediğini varsayalım. Piyango biletinden beklentiniz nedir? Yüzde 1 olasılıkla 490 lira kazanacaksınız ($490 = 500 - 10$); yüzde 2 olasılıkla 90 lira kazanacaksınız; yüzde 5 olasılıkla amorti çıkacak, yani ne kazanacak ne de kaybedeceksiniz; geri kalan yüzde 92 olasılıkla aldığınız bilete hiçbir şey çıkmayacak ve bilete verdiğiniz 10 lira yanacak. Biletinizin beklentisi

$$\begin{aligned} & \left(490 \times \frac{1}{100}\right) + \left(90 \times \frac{2}{100}\right) + \left(0 \times \frac{5}{100}\right) \\ & + \left(-10 \times \frac{92}{100}\right) = -\frac{250}{100} \end{aligned}$$

dir. Beklenti negatif olduğundan piyango bileti almamak daha mantıklı bir davranıştır.

Konumuz olan oyunun beklentisi kaçır? Hesaplayalım. 3 lira kaybetme olasılığımız (yani oyundan 1 lirayla kalkma olasılığımız) $1/4$ 'tür, çünkü (1,7,4) durumuna ancak ilk iki atışta üstüste tura gelirse erişebiliriz. (Yukarıdaki şemaya bakınız.) 2 lira kaybetme olasılığımız $1/8 + 1/16$, çünkü (2,6,4) durumuna YTT ve TYTT atarak erişebiliriz. Okur tüm olasılıkları hesaplasa beklentinin,

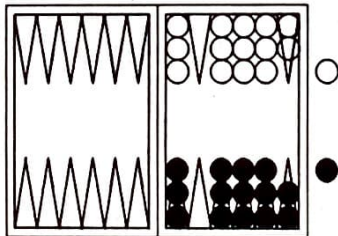
$$\left(-3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(-2 \times \frac{3}{16}\right) + \left(-1 \times \frac{9}{64}\right) + \left(-4 \times \frac{27}{512}\right) + \left(4 \times \frac{253}{512}\right) = 0$$

olduğunu bulur. Demek ki bu oyunun beklentisi 0. Aslında her yazı-tura oyununun beklentisi 0'dır. Oyuncular oyuna kaç parayla başlarsa başlasınlar ve stratejileri ne olursa olsun, yazı-tura oyunlarının beklentisi hep 0'dır. Bir atışlık yazı-tura oyunlarının beklentisi elbette 0'dır. Okur bundan yararlanarak her yazı-tura oyununun beklentisinin 0 olduğunu kanıtlatabilir.

Tavla Üzerine Bir Soru

Önceki bölümde sonlu oyunlardan sözettik. Bu bölümde kuramsal olarak sonsuza dek uzayabilecek, ancak oynandığında, yani uygulamada, bitip bitmeyeceğinden emin olmadığımız bir oyundan sözedeceğiz. Hepimizin bildiği bir oyun bu: Tavla.

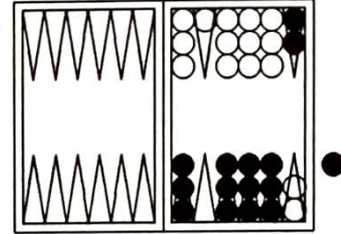
Tavla sonlu bir oyun mudur? Tavlanın uzun sürdüğü olabilir, ama bugüne dek oynadığınız her tavla oyunu sona ermiştir. Hiç yenilemeden günlerce (bir el) tavla oynayana raslamamışsınızdır. Oysa tavla sonsuz bir oyundur. Yani kuramsal olarak sonsuza dek sürebilir. Aşağıdaki durumu alalım örnek olarak:



Her iki oyuncunun da birer kırığı var ve her ikisi de penç (5) kapısı dışında bütün kapıları almışlar. Bu durumda her iki oyuncu da durmadan gele atarsa oyun sonsuza dek sürer. Durmadan sonsuza dek gele atmanın, yani hiç penç atamamanın olasılığı —eğer zarlar hileli değilse— sıfırdır. Bu

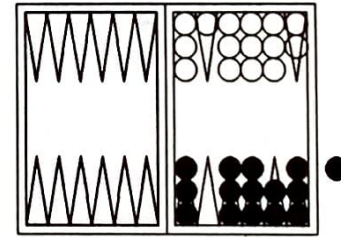
savımın doğruluğunu bir sonraki bölümde kanıtlayacağım. Yani kuramsal olarak sonsuza dek gele atılabilir bile, uygulamada atılamaz. Kuramsal olarak sonsuz olabilen tavla işte bu yüzden uygulamada biter. (Sanıyorum biter, kanıtım yok!)

Buna benzer örnekleri çoğaltabiliriz. İşte bir tane daha:



Yukarıdaki durumda her iki oyuncuya da durmadan dübeş (5-5) gelirse oyun sonsuza dek sürer. Bunun olasılığı da sıfırdır elbet.

Tavlanın sonsuza dek sürebileceği durumlara üçüncü bir örnek verelim. Bu örnek yukarıdaki örneklerden değişik olacak; oyuncular isteyerek (ama gene zarın yardımıyla) sonsuza dek sürdürecekler oyunu:



Yukardaki oyunda siyahın bir kırığı var ve zar atma sırası siyahta. Dübeş (5-5) geldi. Diyelim, siyah kırık pulu dört kez 5 oynadı; beyazın penç hanesindeki pulu kırıp kendi penç hanesine yattı. Doğru oyun bu değil ama varsayalım siyah böyle oynadı. Şimdi sıra beyazda. Beyaza da dübeş gelsin ve beyaz da kırık taşını dört kez 5 oynasın. Bundan sonra her iki oyuncuya durmadan dübeş gelsin ve yukardaki oyunu yinelesinler. Oyun sonsuza dek sürer. Elbet sonsuza dek dübeş gelme olasılığı da sıfırdır.

Tavla —en azından kuramsal ve varsayımsal olarak— çeşitli biçimlerde sonsuza dek sürebilir:

1) İlk iki örnekte olduğu gibi oyuncuların bir seçeneği olmayabilir; oyuncular ne oynarlarsa oynasınlar oyun sonsuza değin sürebilir.

2) Üçüncü örnekte olduğu gibi oyuncular bilerek ve isteyerek oyunu sonsuza değin sürdürebilirler.

Bir de şu ayrımı yapabiliriz:

a) Her üç örnekte de olduğu gibi oyunun son-
suza dek sürmesi için oyuncular zardan yardım
beklerler. Zar istedikleri gibi gelmezse oyun son-
suza dek süremez.

b) Zar ne gelirse gelsin oyun sonsuza değin
sürebilir.

İlk iki örnek 1a şıkkının, üçüncü örneğe 2a
şıkkının olabileceğini göstermektedir. a şıkkının
olasılığı sıfırdır, yani zarların sonsuza değin
istediğimiz gibi gelme olasılığı sıfırdır. Dolayısı-
yla 1b ve 2b şıkları üzerine yoğunlaşmak yeterlidir.

1b şıkkına bir örnek vermeye çalışayım (ba-
şaramayacağım, ama deneyeceğim). İki oyuncu
da altı kapıyı almış olsalar ve her iki oyuncunun
da birer kırığı olsa, oyun sonsuza dek sürer. Ama
tavlada (hile yapmadan) bu duruma erişilmez.
Neden erişilmediğinin kanıtını okura bırakıyoruz.

1b ve 2b şıkları tavlada olabilir mi? Bil-
miyorum. 1b şıkkının olmaması “gerektiğini”
deneyimle biliyoruz. Çünkü oynadığımız tüm
tavla oyunları bitmiştir. Tavla genellikle on-
on beş dakikada, bilemediniz bir saatte biter.
Tavla oyununun sonlu olduğunu deneyimle biliy-
oruz. Ancak bunun matematiksel kanıtını ver-
medikçe matematiksel kesinlikle tavla oyununun
bittiğini söyleyemeyiz. Önsezimiz ve deneyimimiz
1b şıkkının olamayacağını söylüyor. Ama önse-
zilerimizden öteye gitmeli ve bunun matematik-
sel bir kanıtını vermeliyiz. Önsezi, matematiğin
vazgeçilmez öğelerindendir.

Genellikle, matematikçi kanıtlayacağı teo-
remden önce kendisi emin olur. Bunun yolu
da önseziden geçer. Matematikçi sezgiyle vardı-
ğı sonucu daha sonra biçimselleştirmelidir, yani
sonucun matematiksel bir kanıtını bulmalıdır.
Öyle ki, bu biçimsel kanıt okuyan hiç kimse ka-
nıtın doğruluğundan en küçük bir kuşku duyma-
malıdır.

2b şıkkının olamayacağını söylemek pek
kolay değil. Bir arkadaşınızla anlaşın ve oyunu
bitirmemeye çalışarak tavla oynayın. Örneğin
sık sık açık verin. Kazanmak için oynamayın.
Kaybetmek için de oynamayın. Yalnızca oyunu
sonsuza dek sürdürmek için oynayın. Görecek-
siniz ki yeterince zamanınız olsa neredeyse ba-
şaracaksınız. Bu yazıyı okuyan bir arkadaşım,
tavlanın bitip bitmeyeceği sorusunu babasına
açmış. Arkadaşımın babası, tavlanın her za-
man —her iki oyuncu da kazanmak için oynasa
bile— bitemeyeceğine inanabileceğini söylemiş.
Çünkü çok uzun süren, hiç de biteceğe benze-
meyen ve yarıda bırakmak zorunda kaldığı bir

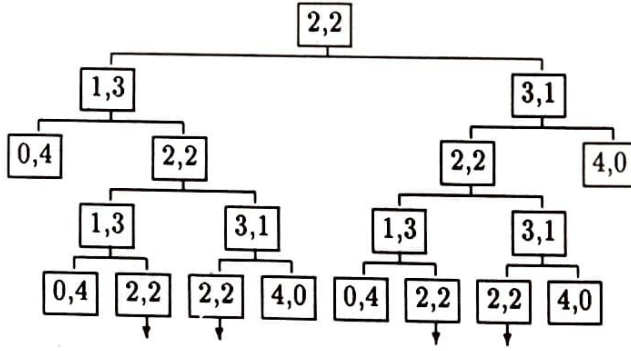
tavla oyunu oynamış.

Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar

İkinci bölümde kuramsal olarak sonsuz bir
oyun olan tavlının gerçekten, yani uygulamada,
sonsuz olup olmadığı sorusunu sorduk. Şimdi ku-
ramsal olarak sonsuz, ancak uygulamada sonlu
bir oyundan söz edeceğiz.

Oyunumuz iki kişi arasında oynanıyor.
Yazı-tura atılıyor. Yazı gelirse birinci oyuncu
ikinciden 1 lira alıyor, tura gelirse ikinci oyuncu
birinciye 1 lira veriyor. Oyunculardan biri-
nin parası bittiğinde oyun da bitiyor. Eğer iki
oyuncunun da oyuna başlarken ikişer lirası varsa
ve sürekli bir yazı bir tura gelirse, oyun son-
suza dek sürer; çünkü bu yazı-tura atışlarıyla
oyunculardan birinin parası bitmez. Öte yan-
dan bu oyunu ne zaman oynasanız oyun biter!
Hatta oldukça çabuk biter, bir dakika sürmez
bile. Neden? Hiç durmadan bir yazı bir tura
gelme olasılığı çok zayıftır da ondan. Bu yazıda
bunu kanıtlayacağız. Kuramsal olarak sonsuza
dek sürebilen bu oyun, uygulamada sonsuza dek
süremez. Çünkü bu oyunun sonsuza dek süre-
bilme olasılığı öyle küçük, öyle küçüktür ki ...
sıfıra eşittir. Bu olguyu kanıtlamadan önce bi-
raz eğleneceğiz. Eğlence matematiğin önemli
öğelerinden biridir, savsaklamaya gelmez. Yete-
rince eğlendikten sonra bu olgunun matematiksel
kanıtını vereceğiz.

Oyunu daha iyi anlamak için oyunun
‘ağacını’ bulalım. Oyun (2,2) durumu ile
başlıyor. Yani başlangıçta her iki oyuncunun
da ikişer lirası var. Diyelim biz birinci oyun-
cuyuz ve yazı gelince kazanıyoruz. Ağacın tepe-
sine (2,2) yazalım. Para atıldı. İki olasılık var:
ya tura gelecek ve kaybedeceğiz ya da yazı gelecek
ve kazanacağız. Kaybedersek oyunun yeni du-
rumu (1,3) olacak, yani bizim 1 liramız, öbür
oyuncunansa 3 lirası olacak. Bu (1,3) duru-
munu ağacın soluna yazalım. Kazanırsak (3,1)
durumuna erişeceğiz. Bunu da ağacın sağına
yazalım. Ağaç sağlı sollu kök salar. Soluna kay-
bettüğümüzde, sağınaysa kazandığımızda erişeceğimiz
durumu yazarız. (3,1)’den sonra gene iki
durum ortaya çıkabilir: (2,2) ve (4,0) duru-
mları. (2,2)’yi sola, (4,0)’ı sağa yazalım. (4,0)
durumunda oyun biter ve ağaç kök salmaz. (2,2)
durumundaysa oyun sürer. İşte oyunun ilk dört
aşamasını gösteren ağaç:

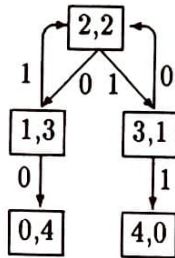


Oyun ancak (4, 0) ve (0, 4) durumlarından birine geldiğinde biter, öbür durumlarda sürer. Bu yüzden dördüncü aşamadaki (2, 2) durumlarında ağaç kök salmayı sürdürür. Bu ağaç sonsuz bir ağaçtır. Köklerden bazıları bitse bile, köklerin kökü kurumaz. Ağaç sonsuzdur, çünkü oyun sonsuzdur. Örneğin, (2,2), (1,3), (2,2), (1,3), ... diye durmadan sonsuza dek uzayıp giden bir kök vardır.

Oyunun sonsuz olduğunu göstermek için illâ sonsuz bir ağaç yapmaya gerek yoktu. Sonlu bir şemayla da bu sonsuz oyunun gidişini gösterebiliriz. Bu şemayı çizelim. Oyunda beş durum var:

(0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0)

durumları. Bu beş durumu birer kare içine alalım. Bir durumdan öbür duruma nasıl geçildiğini bir okla gösterelim. Eğer bir durumdan öbür duruma kazanarak geçebiliyorsak, okun kenarına 1 koyalım. Kaybederek geçebiliyorsak 0 koyalım. Örneğin, (1,3) durumundan (2,2) durumuna kazanarak geçebildiğimizden, (1,3) durumundan (2,2) durumuna giden ok 1 adını veririz. İşte bu oyunun şeması:



(0,4) ve (4,0) durumlarında oyun bittiğinden bu iki durumdan ok çıkmaz. Bu şemaya bakarak oyunun sonsuz olduğunu nasıl anlarız? Eğer bir kısır döngü (yani bir çember) varsa oyun sonsuz demektir. (2,2) durumundan başlayarak ve okları izleyerek ya (4,0) ya da (0,4) durumlarına gelmek zorunda değilsek oyun bitmez. Örneğin (2,2)'yle (1,3) arasında bir kısır döngü vardır.

Bunun gibi (2,2), (1,3), (2,2), (3,1), (2,2), (1,3), ... döngüsü de döner durur.

Ağacımıza geri dönelim. Ağaca alıcı bir gözle baktığımızda oyunun birinci ve üçüncü yazı-tura atışlarından sonra bitmediği anlaşılıyor. Biraz düşünelim, oyunun tek sayılı yazı-tura atışlarından sonra bitmeyeceğini görürüz (örneğin tümevarımla). Oyun 2, 4, 6 gibi çift sayılı atışlardan sonra bitebilir ancak.

Oyunun ikinci yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım. Paranın hileli olmadığını varsayıyoruz; yani yazı gelme olasılığı $1/2$, tura gelme olasılığı $1/2$. Ağacın ikinci kuşak köklerine bakalım. Dört dal var. Her birinin olasılığı $1/4$ 'tür, çünkü ikinci kuşaktaki (0,4), (2,2), (2,2) ve (4,0) durumlarına ancak sırasıyla TT (tura tura), TY (tura yazı), YT, YY atıldığında erişebiliriz. Bu dört durumdan ikisinde oyun bitiyor, ikisinde bitmiyor. Dolayısıyla, ikinci yazı-tura atışında oyunun bitme olasılığı $1/4 + 1/4$, yani $1/2$ 'dir. Şimdi oyunun en fazla dördüncü yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım. Ağaca bakarak, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında nasıl bitebileceğini buluruz:

TT, TYTT, TYYY, YTTT, YTTY, YY

atıldığında oyun biter. Bu 6 yazı-tura atışının (olayın) olasılıkları sırasıyla şöyle:

$1/4, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4$.

Dolayısıyla, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında bitme olasılığı bu sayıların toplamıdır, yani $3/4$ 'tür. Oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplayalım. Yukarıdaki ağacı sürdüreceğiz olursak, altıncı aşamada 4 tane (0,4) ve 4 tane (4,0) olduğunu görürüz. Oyunu sona erdirecek bu 8 kökten herbirine ulaşma olasılığı $1/2^6$, yani $1/64$. Dolayısıyla oyunu bitiren bu 8 kök uçlarından birine ulaşma olasılığımız $8/64$, yani $1/8$. Bu olasılığı bir önceki paragrafta bulduğumuz $3/4$ olasılığına ekleyecek olursak oyunun 6 ve daha az yazı-tura atışında bitme olasılığını buluruz. Demek ki, oyunun en fazla 6 yazı-tura atışında bitme olasılığı

$$3/4 + 1/8 = 7/8$$

dir. İkinci, dördüncü ve altıncı yazı-tura atışlarından önce oyunun sona erme olasılıklarının sırasıyla

$1/2, 3/4, 7/8$

olduğunu bulduk. Okur, oyunun en fazla sekiz yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplırsa 15/16 bulacaktır.

Bir oyuncuda A lira, öbür oyuncuda B lira olsun. Oyunun hangi aşamasında olursak olalım, üstüste $A + B$ kez yazı atıldığında oyuncuların birinin parası biter, hatta daha önce de bitebilir. Demek ki, eğer 1 olasılıkla üstüste $A + B$ kez yazı atacağımızı kanıtlarsak, bütün yazı-tura oyunlarının 1 olasılıkla sonlu bir zamanda biteceğini kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla şu teoremi kanıtlamalıyız:

Teorem. $n > 0$ herhangi bir tamsayı olsun. Sonsuz kez yazı-tura atıldığında üstüste n kez tura gelme olasılığı 1'dir, yani yüzde yüzdür.

Bu teorem, tura gelince kazananın oyunu kazanacağı anlamına gelmez. Üst üste $A + B$ kez tura gelecektir (1 olasılıkla). Orası kesin. Üst üste $A + B$ kez de yazı gelecektir. O da kesin. Ama hangi oyuncu daha önce kaybedecektir? Orası kesin değil. Şansa bağlı. Gelecek yazıda hangi oyuncunun kaç olasılıkla oyunu kazanacağını bulacağız.

Teoremin Kanıtı. Ardarda n kez yazı-tura atıldığında hep tura gelme olasılığı $1/2^n$ 'dir. Dolayısıyla n yazı-tura atışının hepsinin birden tura olmama olasılığı $1 - 1/2^n$ 'dir. Bu sayıya α diyelim:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

$0 \leq \alpha < 1$ eşitsizlikleri birazdan önem kazanacak, aklımızın bir köşesinde tutalım.

Şimdi $2n$ kez yazı-tura atalım. $2n$ yazı-tura atışında n kez üst üste tura gelme olasılığına β_2 diyelim. β_2 sayısını bulmak kolay olmayabilir, ama bu sayının $1 - \alpha^2$ 'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz. $2n$ atışta nasıl üst üste n kez tura gelebilir? Çeşitli biçimlerde gelebilir. Örneğin ilk n atış salt tura olabilir, ya da son n atış salt tura olabilir. Ne birinci n atışın, ne de ikinci n atışın salt tura olmama olasılığı α^2 'dir. Demek ki ya birinci n ya da ikinci n atışta salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^2$ 'dir. Dolayısıyla $2n$

atışta n kez üst üste tura gelme olasılığı en az $1 - \alpha^2$ 'dir. Yani

$$1 - \alpha^2 \leq \beta_2 \leq 1$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Yukardaki akıl yürütmeyi $3n$, $4n$ ve genel olarak kn atış için yapabiliriz. Şöyle yaparız: $k > 0$ bir doğal sayı olsun ve kn kez yazı-tura atalım. β_k , kn atışta üst üste n kez tura gelme olasılığı olsun.

$$(3) \quad 1 - \alpha^k \leq \beta_k \leq 1$$

eşitsizliklerini kanıtlamak istiyoruz. $\beta_k \leq 1$ eşitsizliği elbette doğru. Birinci eşitsizliğe bakalım. Ne ilk n atışın, ne ikinci n atışın, ... ne de k 'yinci n atışın salt tura olmama olasılığı α^k 'dir. Dolayısıyla bu k tane n atıştan birinde (ya birinci, ya ikinci, ... ya da k 'yinci n atışlardan birinde) salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^k$ 'dir. Dolayısıyla kn atışta üstüste n kez tura gelme olasılığı $1 - \alpha^k$ 'dan fazladır. Yani $1 - \alpha^k \leq \beta_k$ eşitsizliği geçerlidir. (3)'ü kanıtladık.

$0 < \alpha < 1$ eşitsizliklerinden dolayı, k sonsuza gittiğinde α^k sayısı sifıra yakınsar (yaklaşır, gider) ve $1 - \alpha^k$ sayısı bire yakınsar:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha^k) = 1.$$

(3) eşitliğinde k 'yi sonsuza götürürsek,

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k \leq 1$$

elde ederiz ki, bu da, k sonsuza gittiğinde β_k sayılarının bire yakınsadığını gösterir. Demek ki atış sayımız yükseldikçe n kez ardarda tura atma olasılığımız bire yakınsıyor. Teoreminiz kanıtlanmıştır.

Üstteki kanıtta atılan paranın hilesiz olduğunu pek kullanmadık. Para hileli bile olsa, tura gelme olasılığı sıfırdan büyükse, her n için, sonsuz yazı-tura atışında üstüste n kez tura gelme olasılığı 1'dir. Bunun kanıtı da yukarıdaki teoremin kanıtı gibi.

EĞLENCELİK

$$8\,589\,934\,592 \times 116\,415\,321\,826\,934\,814\,453\,125 = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

SAYILAR DÜNYASINDA GEZİNTİLER

H. Turgay Kaptanoğlu *

Bu yazıda derin teorilere inmeden sayıların (çoğunlukla da tamsayıların) ilginç özelliklerinden bahsedeceğiz. Bu özelliklerin hiçbiri yeni değil; yüzyıllar, hatta binyıllar önce bulunmuşlar. Ama hepsinde, büyük matematikçilerin de ilgisini çekmiş estetik taraflar var. Keyfini çıkarın!

A. Yetkin Sayılar

Yetkin sayı diye kendisi dışındaki 1 dahil bütün bölenlerinin (yani özbölenlerinin) toplamına eşit olan pozitif tamsayıya diyoruz. En küçük yetkin sayı 6'dır, çünkü 6'nın özbölenleri 1, 2, 3'tür ve $1 + 2 + 3 = 6$. Çoğu tamsayı yetkin değildir; özbölenleri toplamı ya sayının kendisinden büyüktür ya da küçüktür. 24'ün özbölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12'dir ve $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36 > 24$; 15'in özbölenleri 1, 3, 5'tir ve $1 + 3 + 5 = 9 < 15$. İlk dört yetkin sayı şunlardır:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 6 = 2^1(2^2 - 1) \\ Y_2 &= 28 = 2^2(2^3 - 1) \\ Y_3 &= 496 = 2^4(2^5 - 1) \\ Y_4 &= 8128 = 2^6(2^7 - 1). \end{aligned}$$

Bu kısa listeyi gördükten sonra genellemeler yapmaya çalışalım; ne de olsa matematikteki pek çok teori bilinen bazı basit örneklerden ortaya çıkmıştır. Meselâ, her yetkin sayı bir öncekinden bir basamak fazladır veya yetkin sayıların birler basamakları sırayla 6 ve 8 olur diye tahmin edebiliriz. Ama bu tahminler hiçbir matematiksel düşünceye dayanmıyor ve daha öteye gidemiyor, çünkü

$$\begin{aligned} Y_5 &= 33550336 = 2^{12}(2^{13} - 1) \\ Y_6 &= 8589869056 = 2^{16}(2^{17} - 1). \end{aligned}$$

Dikkat ettiyseniz her yetkin sayıyı

$$2^{a-1}(2^a - 1)$$

şeklinde yazmaya özen gösterdik; üstelik a her defasında bir *asal sayı*ydı, yani 1'den ve kendisinden başka böleni olmayan bir pozitif tamsayı. İlk

altı yetkin sayı $a = 2, 3, 5, 7, 13, 17$ değerleri ile elde edildi, bir asal sayı olan 11 atlanarak. Bu hiç de tesadüf değil.

Şu gerçek M.Ö. 3. yüzyılda Öklit tarafından biliniyordu: Eğer $2^a - 1$ bir asal sayıysa, o zaman $S = 2^{a-1}(2^a - 1)$ yetkin bir sayıdır. Bunu ispatlamak için S 'nin bütün bölenlerini yazalım. Tabii ki $1, 2, 2^2, \dots, 2^{a-1}$ bölenlerden bir kısmı; bunların toplamına T_1 diyelim. Parantez içindeki ifade asal, ama onu az önceki bölenlerle çarparsak S 'nin yeni bölenlerini elde ederiz (1 ve $2^a - 1$ dahil); bunların toplamına da T_2 diyelim. Bundan başka da böleni yoktur S 'nin. Şimdi hepsini toplayalım:

$$\begin{aligned} T_2 + T_1 &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{a-1})(2^a - 1) \\ &\quad + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{a-1}) \\ &= T_1(2^a - 1) + T_1 = 2^a T_1. \end{aligned}$$

T_1 toplamını ise sonlu geometrik serinin toplamı formülünden elde ederiz; serimizde ilk terim 1, son terim 2^{a-1} ve ortak çarpan 2:

$$T_1 = \frac{2^{a-1} - 1}{2 - 1} = 2^a - 1.$$

O halde

$$T_1 + T_2 = 2^a(2^a - 1) = 2[2^{a-1}(2^a - 1)] = 2S.$$

Neden S yerine $2S$ elde ettik? S 'nin bölenleri arasında kendisini de saydık da ondan; bu fazlalığı çıkarırsak özbölenler toplamı olarak S elde ederiz ve bu da S 'nin bir yetkin sayı olduğunu gösterir.

İspatımızda, $2^a - 1$ 'in asal olması önemli yer tuttu. Şimdi bilmemiz gereken $2^a - 1$ şeklindeki hangi sayıların asal sayı olduğu. Bu tip sayılara Mersenne sayıları deniyor. $2^a - 1$ 'in asal olması için a 'nın da asal olması gerekiyor, yani a asal değilse $2^a - 1$ de asal değil. Bunu

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

görmek çok kolay. Eğer a asal değilse $a = bc$ yazabiliriz. O zaman $2^a - 1 = (2^b)^c - 1$,

$$(2^b - 1)[(2^b)^{c-1} + (2^b)^{c-2} + \dots + (2^b)^1 + 1]$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Bu önermenin karşısı ise doğru değil, yani a asal olduğu zaman $2^a - 1$ de asal olacak diye bir kural yok. Yukarıda ilk birkaç yetkin sayıyı yazarken atladığımız $a = 11$ iken $2^a - 1$ asal değil, çünkü $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Dolayısıyla $2^{10}(2^{11} - 1)$ 'in de yetkin olması gerekmiyor, değil de zaten.

18. yüzyılda Alman matematikçi Euler, Öklit'in bildiği sonucun tersinin de doğru olduğunu gösterdi; yani bir çift sayının yetkin olabilmesi için gerek ve yeter şartın, $2^a - 1$ asal iken sayının

$$Ç = 2^{a-1}(2^a - 1)$$

şeklinde yazılabilmesi olduğunu ispatladı. İspatında, her pozitif tamsayının asal sayıların çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabildiğini ve bütün bölenlerinin toplamını veren formülü kullandı; bu uzun ispatı burada vermiyoruz. Çift yetkin sayıları bulmak için artık iş hangi Mersenne sayılarının asal olduğunu bulmaya kalıyor. Bu da hiç kolay değil; hiç bir kural keşfedilemedi şimdiye dek. Fransız matematikçi Mersenne 17. yüzyılda ilk birkaç tanesini buldu; ondan sonra bulunanlar da bir avuçtan fazla değil. Yeni bir tane bulmak için haftalar tutan bilgisayar hesapları gerekiyor, çünkü binlerce basamaklı sayılar ve bölenleri söz konusu. Yetkin olan tek sayı var mı, yok mu; bu da bilinmiyor.

Çift yetkin sayılar hakkında bilinen bir şey ise birler basamaklarının (sırayla gitmese de) 6 veya 8 olduğu. Bunun da doğruluğunu göstermek zor değil. 2^{a-1} bir 2 kuvveti olduğu için birler basamağı hep 2, 4, 8, 6'dan biri olacaktır. Buna karşılık gelen $2^a - 1$ 'in birler basamağı ise sırasıyla 3, 7, 5, 1 olacaktır. Birinci, ikinci ve dördüncü hallerde çarpımın birler basamağı sırasıyla 6, 8, 6 olur. Üçüncü hal ise a ancak 4'ün katı iken mümkündür; bunlar ise asal değildir ve çift yetkin sayı vermezler.

Çift yetkin sayıların bir başka özelliği de şu: $Y_2, \dots, Y_6$ 'nın basamaklarını toplarsak ve bu işleme tek basamaklı bir sayı kalıncaya kadar devam edersek hep 1 kaldığını görürüz. Bu bir rastlantı mı? Hayır, hiç de değil; cevabı da modüler aritmetikte yatıyor. 6'yı bir kenara ayırırsak, diğer çift yetkin sayılar, a bir tek asal sayı olmak üzere, $Ç = 2^{a-1}(2^a - 1)$ şeklindedir. O zaman $a - 1$ çift sayı olur. $2 \equiv -1 \pmod{3}$

denkliğinden $2^{a-1} \equiv (-1)^{a-1} = 1 \pmod{3}$ elde ederiz [3]. Bu bize, t diye bir tamsayı için, $2^{a-1} = 3t + 1$ olduğunu söyler. Her iki tarafı 2 ile çarparak $2^a = 6t + 2$ ve $2^a - 1 = 6t + 1$ buluruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 2^{a-1}(2^a - 1) &= (3t + 1)(6t + 1) \\ &= 18t^2 + 9t + 1 \\ &\equiv 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

olur, çünkü $18t^2$ ve $9t$, 9 ile bölünür. Yani her çift yetkin sayı 9'a bölündüğünde kalan 1 olmaktadır. Bu ise 9'a bölünebilme kuralından [3] basamaklar toplamının 1 olmasına denktir. 6'yı bu hesabın dışında tuttuk, çünkü onu veren $a = 2$ çift ve o zaman $a - 1$ çift olamıyor.

Son olarak, 6 dışındaki her çift yetkin sayının bir küpler toplamı olarak yazılabileceğini söyleyelim. Eğer sayımız $2^{a-1}(2^a - 1)$ ise, ilk $2^{\frac{a-1}{2}}$ tek sayının küplerinin toplamına eşittir. Örneğin, $a = 7$, 8128'i verir. İlk $2^{\frac{7-1}{2}} = 8$ tek sayının küplerinin toplamı da $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 = 8128$. Nedenini görebiliyor musunuz?

B. Pascal Üçgeni

Önce n negatif olmayan bir tamsayı iken

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

açılımına bakalım. $\binom{n}{k}$ 'ye *binom katsayısı* ya da n 'nin k 'li *kombinasyonu* denir. Bu sayı bize n tane 'şey'den k tanesinin (sıra gözetmeksizin) kaç türlü seçilebileceğini ya da n elemanlı bir kümenin k elemanlı kaç tane altkümesi olduğunu söyler; bu yüzden de tamsayıdır. $0 \leq k \leq n$ ve tamsayı ise bunları

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k(k-1) \cdots 1}$$

şeklinde hesaplarız; k negatifse veya n 'den büyükse ifadeye 0 değerini veririz. Burada $0! = 1$ ve $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ diye tanımlanır ve n *faktöriyel* diye okunur. (Sıra gözetilerek yapılan seçimler *permütasyon* adını alır ve $n!/k!$ şeklinde hesaplanır; tabii daha az sayıdadırlar.) Hesaplama yönteminde k ile $(n-k)$ 'nin yerlerini değiştirmek $\binom{n}{k}$ 'yi değiştirmedği için,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

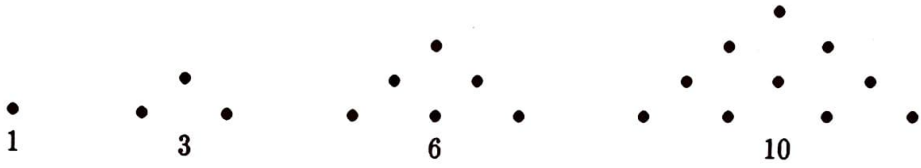
türev alma, $x = 1$ koyma işlemlerini yaparsak

$$1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \dots + n^2 \binom{n}{n} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

türünden eşitlikler elde ederiz. Bunların türev kullanmayan ispatlarını ve daha yüksek kuvvetler içeren benzerlerini bulmayı okuyucuya bırakıyoruz [1].

Binom katsayılarının Şekil 1'deki gibi dizilişine *Pascal üçgeni* diyoruz. Bu üçgen ilk olarak Fransız matematikçi Pascal'dan dört yüzyıl önce 13. yüzyılda Çinli matematikçi Yang Hui tarafından keşfedilmiştir [2]. Üçgenin

n 'yinci satırındaki k 'yinci sayı $\binom{n}{k}$ 'dir ($k = 0, \dots, n$). $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğundan, üçgende sayılar en tepeden aşağı inen bir eksene göre simetrik. Yukarıda elde edilen toplamlardan, n 'yinci satırdaki sayıların toplamı 2^n , karelerinin toplamı ise $\binom{2n}{n}$ 'dir. Pascal formülü, üçgenin çerçevesindeki 1'ler dışında kalan tüm sayıların hemen kuzeydoğu ve kuzeybatısındaki sayıların toplamından elde edilebileceğini söyler. İkinci ve sonraki satırlardaki $\binom{n}{2}$ diye yazılabilecek üçüncü sayıya *üçgensel sayı* denir, çünkü bu sayılar kadar nokta, Şekil 2'de görüldüğü gibi, her kenarında eşit sayıda nokta bulunan birer üçgen halinde dizilebilir. $\binom{n}{2}$ üçgensel sayısı ilk $n - 1$ tamsayının toplamına eşittir.



Şekil 2

Dikkat edilirse, Pascal üçgeninde n 'yinci satırdaki sayılar 1'den başlayarak artmakta, sonra tekrar 1'e kadar inmekte. n tekse ortadaki iki sayı eşit olmakta, n çiftse ortada tek bir en büyük sayı olmakta. Bunların nedenini görmek için $1 \leq k \leq n$ iken

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \cdot \frac{(k-1)(k-2)\dots 1}{(n)(n-1)\dots(n-k+2)} = \frac{n-k+1}{k}$$

kesirinin pay ve paydasının birbirlerinden büyük veya küçük ya da birbirlerine eşit oldukları durumlara bakmamız gerekir. $k < n - k + 1$ ile $k < \frac{n+1}{2}$ eşdeğerdir. Eğer n çiftse, $k < \frac{n+1}{2}$ ile $k \leq \frac{n}{2}$ eşdeğer, n tekse $k < \frac{n+1}{2}$ ile $k \leq \frac{n-1}{2}$ eşdeğerdir. Bu ise üçgende satırın sol yarısındaki k 'ler için kesirin 1'den büyük olduğunu ve dolayısıyla sayıların artarak gittiğini gösterir. Azalmayı göstermek için ise $<$ işaretleri $>$ 'e çevrilir. Pay ve paydanın eşitliği $k = n - k + 1 = 1$ demektir ve bu da $2k = n + 1$ 'e denktir. Buradan da satırdaki iki ardışık sayının eşit olabilmesi için n 'nin tek ve k 'nin $\frac{n+1}{2}$ olması gerektiği ortaya çıkar.

Şimdi $k \leq n$ olacak şekilde Pascal üçgeninin k 'yinci satırının en son sayısından başlayıp güneybatı yönüne doğru yolumuza çıkan sayıları toplayarak $k + m$ 'yinci satıra dek iler-

leyelim. Örneğin, $k = 2$ ve $k + m = 7$ ise $1+3+6+10+15+21 = 56$ toplamına bakalım. Bu toplamın, $k + m + 1$ 'inci satırda son eklediğimiz sayının hemen güneydoğusundaki sayı olduğunu görürüz. k 'yinci satırın ilk sayısından başlayıp $k + m$ 'yinci satıra dek güneydoğu yönüne ilerlersek benzer bir toplama erişiriz. Bu iki toplam binom katsayıları cinsinden şöyle yazılabilir:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+m}{k} = \binom{k+m+1}{k+1}$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+m}{m} = \binom{k+m+1}{m}$$

Pascal üçgeninin simetrikliğinden dolayı bu iki ifadeden birinin doğruluğu diğerininkini de gerektirir. İlk ifade daha genel haliyle [4]'de vardır. İkinci ifade bulmanın bir yolu da sağ tarafına k kere Pascal formülü uygulamaktır. İlk ifadenin genel halinin bir başka özel hali ise

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

eşitliğidir. $k = 1$ hali bize bilinen

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

formülünü, yani üçgensel sayıları, verir.

Pascal üçgeninin beşinci sırasındaki 1'ler dışındaki bütün sayılar 5'e bölünebildiği halde altıncı sırasındakilerin hepsi 6 ile bölünmezler. Bunun nedeninin 5'in asal sayı olması biraz şaşırtıcı gelebilir, ama

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

ifadesine baktığımızda n asal sayı ise paydadaki n 'yi götüren hiç bir şey olamaz paydada, ve n sayısı $\binom{n}{k}$ 'nin bir çarpanı olarak kalır. Tersinden, n asal değilse, n 'nin çarpanı olan en küçük asal sayıya k diyelim. Eğer $\binom{n}{k}$ sayısı n ile bölünebilseydi,

$$\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

bir tamsayı olurdu. Bu imkânsızdır, çünkü paydadaki sayıların hiçbirisi k 'nin en küçük olma özelliğinden dolayı k 'ye bölünemez. Yani n 'nin asallığı gerek ve yeter şarttır. 19. yüzyılda Fransız matematikçi Lucas, asal sayılar, modüler aritmetik ve binom katsayıları arasında aşağıdaki bağıntıları elde etti [2]. Bunların ispatını okuyuculara bırakıyoruz. a bir asal sayı olsun.

- (i) Her pozitif tamsayı n için, $\binom{n}{a} \equiv \lfloor \frac{n}{a} \rfloor \pmod{a}$. $\lfloor b \rfloor$, b 'den küçük veya b 'ye eşit en küçük tamsayıyı gösterir.
- (ii) $1 \leq k \leq a-1$ ise $\binom{a}{k} \equiv 0 \pmod{a}$.
- (iii) $2 \leq k \leq a-1$ ise $\binom{a+1}{k} \equiv 0 \pmod{a}$.
- (iv) $0 \leq k \leq a-1$ ise $\binom{a-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{a}$.
- (v) $0 \leq k \leq a-2$ ise $\binom{a-2}{k} \equiv (-1)^k(k+1) \pmod{a}$.
- (vi) $0 \leq k \leq a-3$ ise $\binom{a-3}{k} \equiv (-1)^k \binom{k+2}{2} \pmod{a}$.

Son olarak $(x+y)^r$ ifadesinde r tamsayı değil de herhangi bir gerçel sayıysa ne olacağına bakalım. Her şeyden önce r bir gerçel sayıysa $\binom{r}{k}$ ifadesi r üzerinde faktöriyeler kullanmadan

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin, $\binom{7}{5}$ şu demektir:

$$\binom{7}{5} = \frac{(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{5!} = -\frac{7}{256}$$

Şimdi k 'nin r 'den büyük olmasını engelleyen hiçbir şey olmadığından, k negatif olmayan

herhangi bir tamsayı olabilir, ve hatta az sonra göreceğimiz gibi bu gereklidir de. Tabii 'kümelerin k elemanlı altkümelerinin sayısı' gibi anlamlar vermek artık mümkün değildir. Newton 17. yüzyılda $|\frac{x}{y}| < 1$ için

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

olduğunu gösterdi. Bunun ispatı birtakım derin yakınsaklık kavramları gerektiriyor ve buraya almıyoruz. Buradan $z = \frac{x}{y}$ ve $r = -n$ alarak ve biraz sadeleştirerek

$$\frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

gibi eşitlikler çıkartabiliriz. $n = 1$ koyarak ve z 'yi $-z$ ile değiştirerek elde edeceğimiz

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots$$

eşitliği bize ilk terimi 1 ve ortak çarpanı z ($|z| < 1$) olan sonsuz geometrik serinin toplamı formülünü verir. Newton'ın formülünde $r = \frac{1}{2}$ yazarsak $\binom{r}{0} = 0$ olur ve epeyi bir sadeleştirmeden sonra toplamımız, $|z| < 1$ için,

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ilk birkaç terimin toplamına bakarak sayıların karekökünü yaklaşık hesaplayabiliriz. Aslında hesap makineleri de benzer bir yöntemle çalışır. Meselâ,

$$\begin{aligned} \sqrt{20} &= \sqrt{16+4} = \sqrt{16(1+0.25)} = 4\sqrt{1+0.25} \\ &= 4 \left[1 + \frac{1}{2}(0.25) - \frac{1}{8}(0.25)^2 + \frac{1}{16}(0.25)^3 - \cdots \right] \\ &= 4.472 \dots \end{aligned}$$

KAYNAKÇA

- [1] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Elsevier North-Holland, New York, 1977.
- [2] C. C. Chen & K. M. Koh, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [3] A. Nesin, Üçe, Dokuza ve Onbire Bölünebilme, *Matematik Dünyası*, 3, sayı 4, 5-7 (1993).
- [4] H. Oral, Nasıl Toplamalı?, *Matematik Dünyası*, 3, sayı 3, 26-28 (1993).

İLGİNÇ GEOMETRİ PROBLEMLERİ

Emre Alkan *

Bu yazıda okuyucuya bir dizi ilginç problem sunmaya çalışacağız. P. Erdős'e ait iki güzel problemle başlayalım.

Problem 1. Geniş açılı olmayan, çevrel ve iç yarıçapları R ve r , yükseklikleri h_a, h_b, h_c olan bir ABC üçgeninde $R + r \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. ABC üçgeninin ortosantrını (yüksekliklerinin kesim noktasını) ve çevrel çember merkezini H ve O ile gösterelim. Şu teoremleri gözönüne alalım.

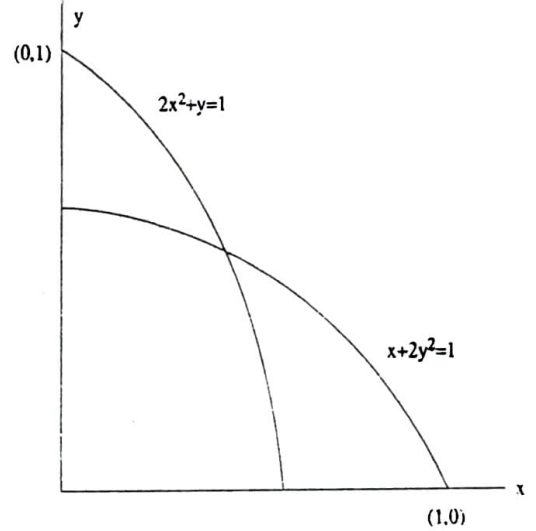
- (i) O 'nun ABC 'nin kenarlarına uzaklıklarının toplamı $R + r$ 'dir.
- (ii) O 'dan kenarlara inilen dikme ayakları A', B', C' olsun. Bu durumda $HA = 2 \cdot OA'$, $HB = 2 \cdot OB'$, $HC = 2 \cdot OC'$ eşitlikleri geçerlidir.
- (iii) H 'nin kenarlara göre simetrikleri çevrel çember üzerindedir.

Bu teoremlerin ispatlarını okuyucuya bırakacağız.

Üçgenin açıları için $A \leq B \leq C$ alalım. Böylece $\max\{h_a, h_b, h_c\} = h_a$ olur. Ortosantrın BC kenarına göre simetriği H' olsun. (i), (ii) ve (iii) kullanılarak $R + r \leq h_a$ eşitsizliğinin $BH' + CH' \leq AH'$ eşitsizliğine dönüştüğü gözlenebilir. Sinüs teoremi yardımıyla bu eşitsizliğin $\cos B + \cos C \leq AH'$ eşitsizliğine dönüştüğü gözlenebilir. Kosinüs teoremi yardımıyla bu eşitsizlik $\cos B + \cos C \leq \cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$ eşitsizliğine dönüşür. $\cos B = x$ ve $\cos C = y$ alalım. Böylece $x + y \leq xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}$. Üçgen geniş açılı olmadığından $x \geq 0$, $y \geq 0$ kısıtlamaları var. Ayrıca $2B \geq \pi - C$ ve $2C \geq \pi - B$ olduğundan, $\cos B \leq \sin \frac{C}{2}$ ve $\cos C \leq \sin \frac{B}{2}$, yani $2x^2 + y \leq 1$ ve $x + 2y^2 \leq 1$ kısıtlamaları da elde edilir.

Şimdi

$$f(x, y) = xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} - x - y$$



fonsiyonunun $x = 0$, $y = 0$, $2x^2 + y = 1$ ve $x + 2y^2 = 1$ ile belirli olan bölgede minimum değerini arayalım.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{1 - y^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \sqrt{1 - x^2} - 1 = 0$$

şartlarından

$$\sqrt{1 - y} (\sqrt{1 - y} \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 + y}) = 0$$

$$\sqrt{1 - x} (\sqrt{1 - x} \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 + x}) = 0$$

elde edilir. $\sqrt{1 - y} \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 + y} = 0$ veya $y = 1$ olmalıdır. $y = 1$ ise, bu ikinci eşitlikte kullanılarak $x = 1$ veya $x = -1$ elde edilir. $x \geq 0$ olduğundan $(1, 1)$ çifti geçerlidir. Fakat bu nokta bölgeye dahil değildir. Diğer olasılıklar da incelenirse tek mümkün çözümün $(1, 1)$ olduğu anlaşılır. Şu halde minimumu bölgenin sınırlarında aramalıyız.

$$x = 0 \text{ olsun. } f(x, y) = \sqrt{1 - y^2} - y \text{ ve } 0 \leq y \leq 1 \text{ için } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} - 1 = 0$$

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

olduğundan çözüm yok. $y = 0$ olunca da minimum adayı yok.

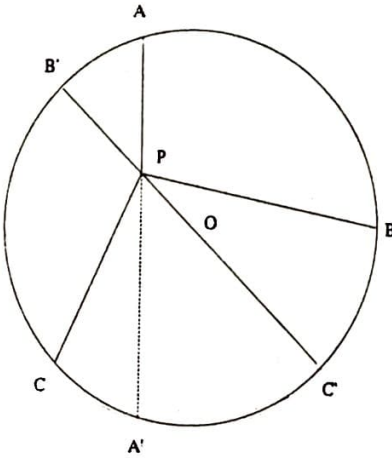
$2x^2 + y = 1$ olsun. $f(x, y) = -4x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ ve $x \geq 0$ için $-6x^2 + 2x + 1 = 0$ olduğundan $x = \frac{1+\sqrt{7}}{6} \cong 0.6$ elde edilir. Bu bir minimum adaydır. Bu durumda $f(x, y) \cong 0.06$ bulunur. $x + 2y^2 = 1$ olunca da aynı duruma varılacaktır.

Son olarak da kritik noktalara bakalım. $f(0, 0) = 1$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$, $f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, ve parabollerin kesim noktasında $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Şu halde bu bölgede $f(x, y) \geq 0$ olduğunu gözlemiş olduk.

$R + r \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$ 'de eşitlik hali ABC eşkenar veya ikizkenar dik üçgenken sağlanacaktır.

Problem 2. Köşeleri birim çember üzerinde olan bir ABC üçgeninin içinde alınan bir P noktası için $PA \cdot PB \cdot PC < \frac{32}{27}$ olduğunu ve $\frac{32}{27}$ 'nin en iyi üst sınır olduğunu gösteriniz.

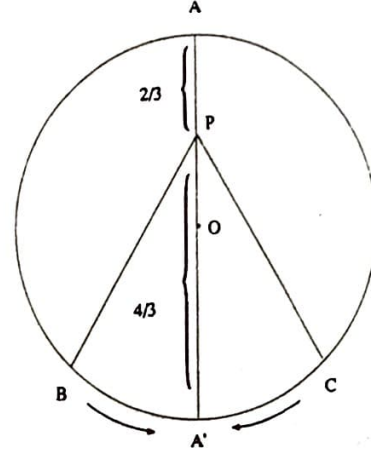
Çözüm. Birim çemberin içinde bir P noktası alalım ve P 'yi merkez O ile birleştirerek $B'C'$ çapını oluşturalım. Rasgele bir ABC üçgeni aldığımız zaman P , ABC 'nin içinde olduğundan A, B köşeleri çapın bir tarafına, C köşesi de çapın öteki tarafına düşecektir. Aynı nedenden dolayı C köşesi küçük $A'C'$ yayı üzerinde olamaz.



Kolayca $PC < PA'$ ve $PB < PC'$ olduğu görülebilir. $PB' = x$ alınarak,

$$PA \cdot PB \cdot PC < PA \cdot PA' \cdot PC' = x(2-x)^2$$

elde edilir. $f(x) = x(2-x)^2$ 'nin maksimumu $x = \frac{2}{3}$ 'te sağlanır ve $PA \cdot PB \cdot PC < f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$ elde edilir. $\frac{32}{27}$ 'nin en iyi üst sınır olduğu aşağıdaki şekilden görülmektedir.



Problem 3. Bir ABC üçgeninde içmerkez I olsun. AI, BI, CI doğruları çevrel çemberi sırayla A', B' ve C' 'de kessin. $2(AI + BI + CI) \leq AA' + BB' + CC'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İspatını okuyucuya bırakacağımız şu teoreme bakalım.

AI, BI, CI doğruları, A', B', C' noktalarını köşe kabul eden üçgenin yükseklikleridir.

$B'C', AA'$ 'yi A'' 'de kessin. B'' ve C'' 'de benzer şekilde tanımlansın. Erdős-Mordell eşitsizliğine göre

$$2(IA'' + IB'' + IC'') \leq IA' + IB' + IC'.$$

$2 \cdot IA'' = AI$, $2 \cdot IB'' = BI$, $2 \cdot IC'' = CI$ olduğunu kullanarak, $AI + BI + CI \leq IA' + IB' + IC'$ ve istenen $2(AI + BI + CI) \leq AA' + BB' + CC'$ 'yi elde ederiz.

Problem 4. a, b, c bir üçgenin kenarları, p, q, r ise pozitif sayılar olsun. S üçgenin alanı olmak üzere,

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{p+r}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $q+r = x$, $p+r = y$, $p+q = z$ alalım; x, y, z pozitifdir.

$$\frac{y+z-x}{x}a^2 + \frac{x+z-y}{y}b^2 + \frac{x+y-z}{z}c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu görmeliyiz. Böylece

$$\left(\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2\right) + \left(\frac{z}{x}a^2 + \frac{x}{z}c^2\right) + \left(\frac{z}{y}b^2 + \frac{y}{z}c^2\right) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S.$$

$$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \geq 2ab, \text{ ve diğerleri için de yapırsa,}$$

$$2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu görmek yeterlidir.

$$ab + ac + bc = 2S \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)$$

ve

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\cot A + \cot B + \cot C) \geq \sqrt{3}$$

ve

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \cot \alpha = \tan \frac{\alpha}{2}$$

olduğundan,

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği okuyucuya bırakacağız.

Problem 5. Kenarları $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$, olan n tane üçgen göz önüne alınız. Yarıçevreleri v_i , çevrel ve içteğet çember yarıçapları R_i ve r_i olmak üzere,

$$3 \left[\prod_{i=1}^n a_i^{-\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n b_i^{-\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{-\frac{1}{n}} \right] \leq \prod_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{R_i r_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, çevreleri göstereceğiz.

$\frac{v_i}{R_i r_i} = \frac{p_i^2}{a_i b_i c_i}$ olduğu kullanıldığında eşitsizlik

$$3 \left[\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \right] \leq \prod_{i=1}^n p_i^{\frac{2}{n}}$$

halini alır. p_i 'leri sabit tutalım. Böylece sağ taraf sabit kalacaktır. Sol taraf

$$3 \left[\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \right) + \prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \right]$$

şeklinde yazılabilir.

$$\prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n (b_i c_i)^{\frac{1}{n}}$$

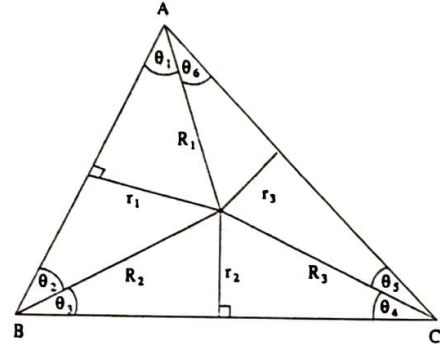
ifadesi $b_i = c_i$ olduğunda maksimumdur. Öte yandan

$$\prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) = \text{Sabit.}$$

Eşitlik yine $b_i = c_i$ iken vardır. a_i, b_i ve c_i simetrik olduğundan sol taraf $a_i = b_i = c_i$ olduğunda maksimum olur. Bu durum eşitlik halidir.

Problem 6. Bir üçgenin içinde alınan bir noktanın köşelere uzaklıkları R_1, R_2, R_3 , kenarlara uzaklıkları ise $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ olsun. $R_1 R_2 R_3 \geq 8 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Şekilden $R_1/R_2 = \sin \theta_2/\sin \theta_1$ görülüyor. Diğerleri de yazılıp çarpılırsa $k = \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6$ yazılabilir.



Öte yandan

$$\sin \theta_1 \sin \theta_6 \leq \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\sin \theta_2 \sin \theta_3 \leq \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\sin \theta_4 \sin \theta_5 \leq \sin^2 \frac{C}{2}$$

eşitsizlikleri gösterilebilir. Bunlar çarpılıp,

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{\Gamma}{4R} \leq \frac{1}{8}$$

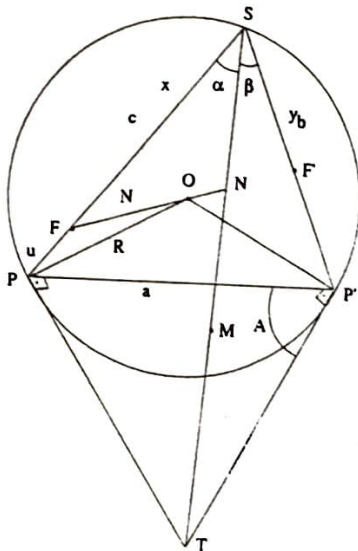
olduğu kullanılarak, $k^2 \leq \frac{1}{64}$, $k \leq \frac{1}{8}$ ve

$$k = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{R_1 R_2 R_3}$$

olduğundan istenen elde edilir.

Problem 7. F ve F' bir çemberin içinde merkeze göre simetrik iki nokta olsun. S ise çember üzerinde, fakat FF' doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. SF' ve SF doğruları çemberi P' ve P 'de kessin. P ve P' deki teğetler T 'de kesişsin. FF' doğru parçasının orta dikmesinin ST 'nin orta noktasından geçtiğini gösteriniz.

Cözüm. Şekilde $SF = x$, $FP = uv$, $SF' = y$, $F'P' = v$, ayrıca $x + u = c$, $y + v = b$, $PP' = a$, açılar için $\alpha + \beta = A$, $\sphericalangle SPP' = B$, $\sphericalangle SP'P = C$ alınmıştır. M , ST 'nin ortasıdır. İsteneni göstermek için $FM = F'M$ olduğunu göstereceğiz.



$$\begin{aligned}\overline{FM}^2 &= x^2 + \overline{MS}^2 - 2x\overline{MS} \cos \alpha, \\ \overline{F'M}^2 &= y^2 + \overline{MS}^2 - 2y\overline{MS} \cos \beta;\end{aligned}$$

şu halde aşağıda

$$x^2 - y^2 = 2x\overline{MS} \cos \alpha - 2y\overline{MS} \cos \beta$$

olduğunu görmeliyiz.

Çemberde kuvvetten $x(c - x) = y(b - y)$ olduğundan $cx - by = x^2 - y^2$ olur. Böylece is-

tenen

$$\begin{aligned} cx - by &= 2x\overline{MS} \cos \alpha - 2y\overline{MS} \cos \beta, \\ \frac{x}{y} &= \frac{2\overline{MS} \cos \beta - b}{2\overline{MS} \cos \alpha - c}, \\ \frac{x}{y} &= \frac{v}{u} \end{aligned}$$

dur. Ayrıca $\frac{v}{u} = \frac{\cos B}{\cos C}$ olduğu kolayca görülebilir.
 Şu halde istenen

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{2\overline{MS} \cos \beta - b}{2\overline{MS} \cos \alpha - c}.$$

Öte yandan,

$$2\overline{MS} \cos \beta = \frac{ST^2 + b^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 A}}{2b}$$

ve $2\overline{MS} \cos \alpha'$ 'da benzer şekilde yazılırsa istenen

$$\frac{\overline{ST}^2 - b^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 A}}{\overline{ST}^2 - c^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 A}} \frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}\overline{ST}^2 &= b^2 + \frac{a^2}{4 \cos^2 A} + ab \frac{\cos B}{\cos A} \\ &= c^2 + \frac{a^2}{4 \cos^2 A} + ac \frac{\cos C}{\cos A}\end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\frac{\frac{ab \cos B}{\cos A}}{\frac{ac \cos C}{\cos A}} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

elde edilir. Dolayısıyla $FM^2 = F'M^2$ ve $FM = F'M$ 'dir.

Not. Bu problem Hüseyn Demir ve Cem Tezer tarafından *American Mathematical Monthly*'de 1991 yılında Problem E3422 olarak yayımlandı. Problemin aslında F' ve F 'nin çemberin içinde olması gerekmiyor. F' ve F çemberin dışındayken de benzer bir ispat yapılabileceğini umuyorum. Fakat şu an bunu başaramadığım için problemde içinde olma koşulunu ekledim. F' ve F dışarıdayken çizim farklı olduğundan herşeyi yeniden düzenlemek gerekiyor.

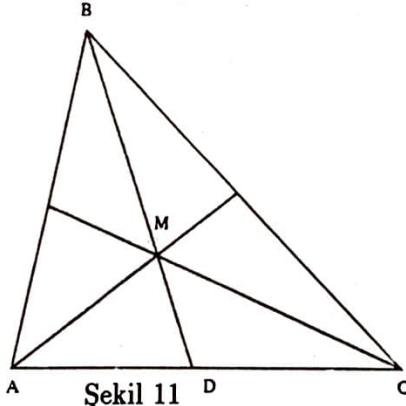
GEOMETRİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ (II)

C. Alparslan Ertuğ

[1]'den özetleyerek çevirdiğimiz yazının ilk bölümü dergimizin Nisan 1994 sayısında yayımlandı. Bu bölümde ise, sözü geçen yazıda belirtilen çözüm yöntemlerinin dörtgen ve çember problemlerine ilişkin uygulamalarını örneklerle göstermek istiyoruz.

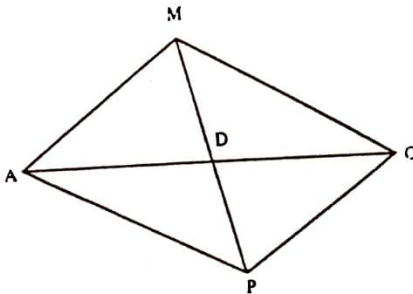
Örnek 1. Bir ABC üçgeninin ma, mb, mc kenarortayları bilindiğine göre, $AC = b$ kenarını bulunuz.

Çözüm. Kenarortayların kesişme noktasına M diyelim. Bu nokta kenarortayı $2/3$ oranında böler (Şekil 11). Bu nedenle AMC üçgeninin iki kenarı ve bir kenarortayı bulunmuş olur.



Şekil 11

$\overline{AM} = \frac{2}{3}m_a$, $\overline{MC} = \frac{2}{3}m_c$, $\overline{MD} = \frac{1}{3}m_b$. AMC üçgenini göz önüne alalım. Kenarortayı kendisi kadar uzatıp $AMCP$ paralelkenarını elde edelim (Şekil 12).



Şekil 12

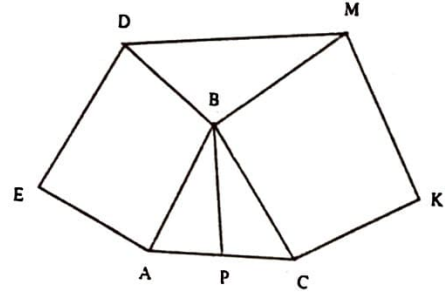
$AMCP$ için metrik bağıntıyı yazalım:

$$\overline{AC}^2 + \overline{MP}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{MC}^2$$

$$b^2 + \frac{4}{9}m_b^2 = 2\frac{4}{9}m_a^2 + 2\frac{4}{9}m_c^2$$

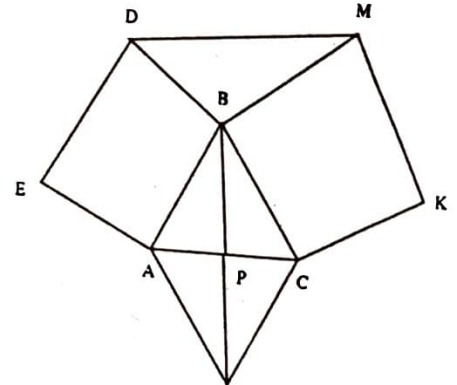
Buradan da $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$ elde edilir.

Örnek 2. Bir ABC üçgeninin AB ve BC kenarları üzerine $ABDE$ ve $BCKM$ kareleri çiziliyor. DM doğru parçasının, üçgenin BP kenarortayının uzunluğunun iki katı olduğunu kanıtlayınız (Şekil 13).



Şekil 13

Çözüm. $\overline{DM} = 2\overline{BP}$ olduğunu göstereceğimize göre, BP kenarortayını kendisi kadar uzatıp ABC üçgenini $ABCT$ paralelkenarına dönüştürmemiz ve sonra da $\overline{DM} = \overline{BT}$ olduğunu ispatlamamız yeterli olacaktır (Şekil 14).

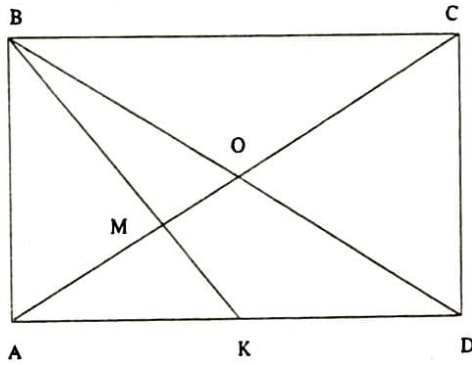


Şekil 14

DM ve BT doğru parçalarının eşitliğini kanıtlamak için, bu doğru parçalarının kenarlarını iki üçgenin kenarları olarak almak ve bu üçgenlerin eş olduklarını göstermemiz gerekecektir. Şimdi verilen problemi bu yöntemle uygun olarak çözelim.

DMB ve BCT üçgenlerini gözönüne alalım: $\overline{BM} = \overline{BC}$ ($BMKC$ karesinin kenarları), $\overline{DB} = \overline{AB}$ ($BDEA$ karesinin kenarları) ve $\overline{AB} = \overline{CT}$ ($ABCT$ paralelkenarının karşılıklı kenarları). O halde $\overline{DB} = \overline{CT}$ olur. $\angle DBM = \angle BCT$ (kenarları birbirine dik açılar). Buna göre, DMB ve BCT üçgenleri kenar-açı-kenar bağıntısından eşittirler. Buradan da $\overline{DM} = \overline{BT}$ bulunur ve $\overline{BT} = 2\overline{BP}$ sonucu elde edilir.

Örnek 3. x noktası $ABCD$ dörtgeninin AD kenarının ortasıdır (Şekil 15). $AD : AB = \sqrt{2}$ olduğu bilindiğine göre, BK ile AC köşegeni arasındaki açıyı bulunuz.



Şekil 15

Çözüm. Yardımcı parametre yöntemini uygulayalım. $\overline{AB} = a$ dersek, $AD = a\sqrt{2}$ olur. Çözüm yolumuz şöyle olacaktır: Önce AMK üçgeninin kenarlarını a cinsinden ifade eder, sonra da AK kenarına göre kosinüs teoremini uygulayız. Bu, x ile gösterdiğimiz ve bulmaya çalıştığımız AMK açısının kosinüsünü hesaplamamızı sağlar. AO ve BK doğru parçaları ABD üçgeninin kenarortaylarıdır. O halde $\overline{MK} = \frac{1}{3}\overline{BK}$ ve $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AO}$ olacaktır.

$$\begin{aligned} MK &= \frac{1}{3}\overline{BK} = \frac{1}{3}\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AK}^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \\ \overline{AM} &= \frac{2}{3}\overline{AO} = \frac{1}{3}\overline{AC} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

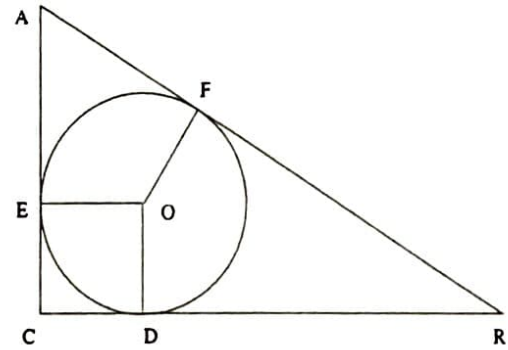
AMK üçgeninde ise, $\overline{AK} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $\overline{MK} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ değerlerini kullanarak kosinüs teoremini uygularsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \overline{AK}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{MK}^2 - 2\overline{AM}\overline{MK}\cos x \\ \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 \\ &\quad - 2\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{6}}{6}\cos x \\ \frac{a^2}{2} &= a^2 + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{2}}{3}\cos x \end{aligned}$$

Buradan da $\cos x = 0$ ve dolayısıyla da $x = 90^\circ$ bulunur.

Örnek 4. a ve b bir dik üçgenin dik kenarları, c hipotenüsü ve r ise içteğet çemberinin yarıçapı olduğuna göre, $r = \frac{a+b-c}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İç teğet çemberinin O merkezinden ve değme noktalarından OD , OE ve OF yarıçaplarını çizelim. $OD \perp OC$, $OE \perp AC$ ve $OF \perp AB$ olacaktır (Şekil 16).



Şekil 16

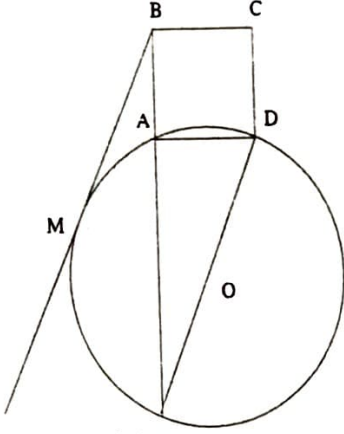
$ODCE$ bir kare olacağı için (bütün açıları dik ve $\overline{OE} = \overline{OD}$), şu eşitlikleri yazabiliriz: $\overline{CE} = \overline{CD} = r$, $\overline{BD} = a - r$, $\overline{AE} = b - r$, $\overline{BD} = \overline{BF}$, $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BF} = a - r$ ve $\overline{AF} = b - r$. Öte yandan $\overline{AB} = \overline{BF} + \overline{AF}$ olduğu şekilden görülmektedir. Yukarıda bulunan değerleri bu eşitlikte yerine koyarsak sonuca ulaşırız: $c = (a - r) + (b - r)$ ve $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Uyarı. Bu elde ettiğimiz formül, dik üçgenlere ait problemlerin çözümünde sık sık kullanılır.

Örnek 5. R yarıçaplı bir çember, bir karenin birbirine komşu iki köşesinden geçiyor. Karenin

üçüncü köşesinden çembere çizilen teğetin uzunluğu karenin keranının iki katıdır. Karenin kenar uzunluğunu bulunuz.

Çözüm. $\overline{AB} = x$ ve $\overline{BM} = 2x$ diyelim (Şekil 17).

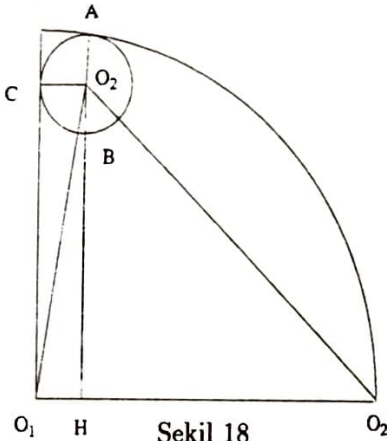


Şekil 17

AB kenarını uzatalım ve bu uzantının çemberi kestiği nokta K olsun. $\overline{BK} \cdot \overline{AB} = \overline{BM}^2$, $\overline{BK}x = 4x^2$. Buradan da $\overline{BK} = 4x$ ve $\overline{AK} = 3x$ olarak bulunur. $\widehat{KAD} = 90^\circ$ olması nedeniyle KD çemberin çapıdır. ADK dik üçgeninden $\overline{AD}^2 + \overline{AK}^2 = \overline{KD}^2$, $x^2 + 9x^2 = 4R^2$ yazılır ve buradan da $x = \frac{R\sqrt{10}}{5}$ bulunur.

Örnek 6. Bir çeyrek daire dilimi verilmiş olsun. Merkezi, yayın bitim noktasında olan ve yarıçapı aynı olan ikinci bir çember çiziliyor, ve bu çember daire dilimini iki parçaya ayırıyor. Bu iki parçadan küçük olanın içine bir çember çiziliyor. Bu çemberin yarıçapının, daire diliminin yarıçapına oranını bulunuz.

Çözüm. $O_1O_2 = R$ diyelim ve içeri çizilen çemberin yarıçapı r 'yi R cinsinden ifade etmeye çalışalım (Şekil 18).

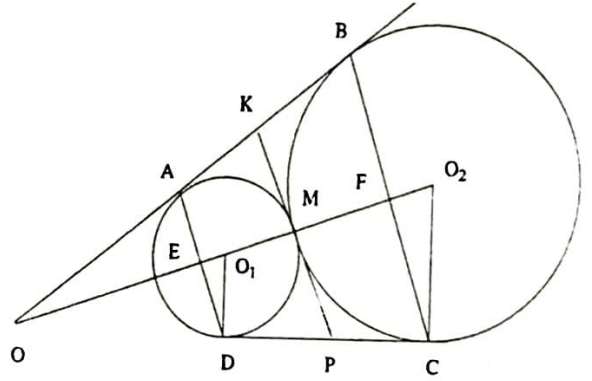


Şekil 18

Şimdi $O_1O_2O_3$ üçgenini gözönüne alalım. $O_1O_2 = R, O_1O_3 = R - r$ ve $O_2O_3 = R + r$ olduğu görülmektedir. O_3H yüksekliğini çizelim.

$O_1H = O_3C = r$ ve $O_2H = R - r$ olacaktır. O_3H 'yi bir referans elemanı olarak alalım. O_1O_3H üçgeninden şunları elde ederiz: $\overline{O_3H}^2 = \overline{O_1O_3}^2 - \overline{O_1H}^2 = (R - r)^2 - r^2$. $\overline{O_3H}^2$ değerlerini birbirine eşitleyerek şu sonuca ulaşırız: $(R - r)^2 - r^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$. Buradan da $r = \frac{R}{6}$ ve dolayısıyla $\frac{r}{R} = \frac{1}{6}$ buluruz.

Örnek 7. Yarıçapları r ve R olan iki çember dıştan teğettirler; AB ve CD ise dış teğetleridir. $ABCD$ dörtgeninin içine bir çember çizilebileceğini gösteriniz ve bu çemberin yarıçapını bulunuz (Şekil 19).



Şekil 19

Çözüm. Teğetlerin kesişme noktası olan O' yu O_1 ve O_2 ile birleştirelim ve çemberlerin değme noktasındaki ortak teğetlerini çizelim. Ayrıca O_1, D ve O_2, C yarıçaplarını da çizelim: $O_1D \perp CD$ ve $O_2C \perp CD$.

OO_2 doğrusunun şeklin simetri eksenini olması nedeniyle A ve D noktaları ile B ve C noktaları OO_2 'ye göre simetriktirler. Bu ise $ABCD$ dörtgeninin ikizkenar bir yamuk olduğu anlamına gelmektedir.

$ABCD$ yamuğunun içine bir çember çizilebilmesi için, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ eşitliğinin sağlanmasının gerekli ve yeterli olduğu bilinmektedir. Bir teğetler dörtgenini gözönüne alarak ve çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin eşit olması özelliğinden yararlanarak bunu kolayca kanıtlayabilirsiniz.

$\overline{AB} = \overline{CD}$ olması nedeniyle $\overline{AB} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$ eşitliği sağlanmalıdır. Dolayısıyla da $\overline{AB}$ 'nin $ABCD$ yamuğunun orta tabanına eşit olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır.

Şekilden kolayca görüleceği gibi, $\overline{AK} = \overline{KM}$, $\overline{BK} = \overline{KM}$, $\overline{DP} = \overline{PM}$ ve $\overline{CP} = \overline{PM}$ 'dir. Dolayısıyla $\overline{AK} + \overline{BK} + \overline{DP} + \overline{CP} = \overline{KM} + \overline{KM} + \overline{PM} + \overline{PM}$ 'dir. $\overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{KP}$

bulunur. $\overline{AB} = \overline{DC}$ olduğu gözönüne alınacak olursa, $\overline{AB} = \overline{KP}$ bulunur.

Böylece söz konusu yamuğunun içine bir çember çizilebileceğini göstermiş olduk. EF bu çemberin çapıdır. $\overline{O_1E} = x, \overline{O_2F} = y$ diyelim. $\overline{MF} = \overline{ME}$ eşitliğinden yararlanarak

$$R - y = r + x \quad (1)$$

buluruz. O_1DE ve O_2CF üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{O_1E}{O_2F} = \frac{O_1D}{O_2C}$, yani,

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{R} \quad (2)$$

yazabiliriz. (1) ve (2) numaralı denklemlerin oluşturduğu sistemi çözerek, $y = \frac{R^2 - rR}{R + r}$ buluruz. O halde iç teğet çemberin yarıçapı $R - y = \frac{2Rr}{R + r}$ olarak elde edilir.

KAYNAKÇA

- [1] V. Gusev, V. Litvinenko & A. Mordkovich, *Solving Problems in Geometry*, Mir, Moskova.

CALIFORNIA MATEMATİK LİĞİ SINAVLARI

Derleyen: Şafak Alpaya *

A.B.D.'nin California eyaletinde orta öğretim öğrencileri arasında yapılan matematik liginin beş sınavını size aktarıyoruz. Her sınav 20 dakikadır.

Yarışma 1

1. $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$ ve $\sqrt{n+2}$ sayılarının bir dik üçgenin kenarlarının uzunlukları olması için n tam sayısı ne olmalıdır?

2. Kenarları 10 cm olan bir eşkenar üçgeni örtmek için kenarı 1 cm olan kaç tane eşkenar üçgen gerekir?

3. $\sqrt{1992} = 1992\sqrt{x}$ eşitliğini sağlayan x gerçel sayısı nedir?

4. Ali 0 ile 3 arasında 1'den farklı 100 pozitif sayı, Alev de Ali'nin yazdığı sayıların terslerini yazsın. Bu 200 sayının kaç tanesi 0 ile 1 arasındadır?

5. İki takım arasındaki kupa maçlarında dört maç kazanan bir üst tura geçer ve maçların berabere bitmesine izin verilmez ise, dört maç sonrasında takımların üst tura geçme olasılıkları nedir?

Yarışma 2

1. 9 sayısı birbirini izleyen 9 tane tam sayının toplamı ise, bu sayıların çarpımları nedir?

2. $x^2 - 26x + 144$ polinomunun iki çarpanının toplamı, $x^2 - 25x + 144$ polinomunun iki çarpanının toplamından çıkarılırsa sonuç nedir?

3. $2x - \frac{1}{x} + 1 \leq 1$ eşitsizliğini çözümlü.

4. $x = -664$ ise $||x| - x| - x|$ ifadesi kaçtır?

5. $(0,0)$ noktasının $y = \sqrt{6x - x^2 - 9}$ eğrisine uzaklığı nedir?

Yarışma 3

1. $\sqrt{n^2 - 1}$ ifadesinin tamsayı olduğu n tamsayısı nedir?

2. $x(x^2 - 1993) = x(x^2 - x)$ eşitliğini sağlayan kümeyi bulunuz.

3. Bir paralelkenarın köşegenleri 10 ve 24 cm ve bir kenarı 13 cm ise, çevresi nedir?

4. Bir 7×7 sihirli kare, 1 ile 49 arasındaki sayılardan oluşuyor. Anımsanacağı gibi bir sihirli karede, sıra, sütun ve köşegenlerdeki sayıların toplamı aynıdır [1]. Bu sihirli toplamı bulunuz.

5. 100 sayısından küçük 25 tane asal sayı vardır. 100'den farklı kaç tane n tamsayısı için n 'den küçük asal sayıların sayısı 25'tir?

6. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ eşitliğini sağlayan (x,y) çiftleri arasında x 'in alabileceği en büyük değer kaçtır?

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

Yarışma 4

1. $2^{x-3} = 1$ ve $5^{y+2} = 1$ ise $2^x 5^y$ kaçtır?
2. Birbirini izleyen 1993 tamsayının çarpımları 0 olsun. Bu sayıların en büyüğü kaçtır?
3. N pozitif bir tamsayı ve N^{50} 16 basamaklı ise N kaçtır?
4. $y = |x+2| + |x-3|$, $x = -2$, $y = 0$ ve $x = 3$ ile belirlenen bölgenin alanı nedir?
5. 12 cm yarıçaplı daire dışına çizilen ve hipotenüsü 65 olan dik üçgenin çevresi nedir?

Yarışma 5

1. $A = 1990 \cdot 1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot 1996$ ve $B = 1993^7$ ise, hangisi daha büyüktür?
2. x , y ve z eşit olmayan pozitif tamsayılar ise, $x + y^2 + z^3 = a$ eşitliğini sağlayan en küçük a nedir?
3. $\log_2 x + 1 = 2 \log_2 x - 1$ eşitliğini çözünüz.

4. $23! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 21 \cdot 22 \cdot 23$ olarak tanımlanır. $23!$ sayısının birbirini izleyen sayıların çarpımı olarak üç farklı biçimde yazılabileceğini gösteriniz.

5. $\frac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}$ için çözüm kümesini bulunuz.

6. Üçgenlerde açortaylar karşı kenarı diğer kenarlara orantılı olarak keserler. Çevresinin bir tamsayı olduğu bir üçgende bir açortay karşı kenarı 2 cm ve 5 cm olarak bölüyorsa, çevrenin alabileceği en büyük değer kaçtır?

KAYNAKÇA

- [1] A. Doğanaksoy, *Sihirli Kareler, Matematik Dünyası*, 1, sayı 2, 6-9, 1991.

JAPONYA ÜNİVERSİTE GİRİŞ SINAVLARI

Derleyen: Şafak Alpay *

Ülkemizde olduğu gibi Japonya'da da üniversitelere kabul, yarışmacı sınavlar ile yapılıyor. Japonya'da 132 devlet üniversitesinin yanısıra 342 özel yüksek okul bulunuyor. Bu ülkedeki dört yıllık yüksek öğrenim programlarına kabul oranı %60 iken, bu oran içinde üniversitelere kabul edilenler sadece %26. Başka bir deyişle, Japonya'da yüksek öğrenim kurumlarına başvuran 1.025.000 öğrenciden 681.000'i kabul edilmiş.

Sınavlar ise iki aşamalı. Bir hükümet organınca yılda bir kez Ocak ayı ortasında yapılan ilk sınava herkes girmek zorunda. Ülkemizdeki uygulamadan farklı olarak geçerli nedenlerle bu sınava katılamayanlara bir süre sonra başka sınav verilebiliyor. Bu uygar uygulamaya ülkemizde de yer verilmesini görmek isteriz. Aşağıda örneklerini sunduğumuz ikinci aşama sınavları, üniversitelerin kendilerinin düzenlediği sınavlar. Bu sınavların tarihleri her öğrenciye en fazla iki farklı üniversitenin açtığı sınava girmesine olanak veriyor.

Üniversiteler birinci ve ikinci sınav ba-

şarılarını farklı değerlendiriyorlar. Genellikle ilk aşama başarısı %40-50, ikinci sınav başarısı %60-50 oranlarında değerlendirilirken, Tokyo Üniversitesi ilk sınavı %20, kendi verdiği sınavı ise %80 oranında değerlendiriyor. Örneklerden göreceğiniz gibi, farklı programlarda okuyacak öğrencilerin yanıtlaması gereken matematik soruları oldukça farklı.

1990 yılında üniversitelere kabul edilenlerin %6'sı sınavsız kabul edildiler. Uluslararası bilim olimpiyatlarında ülkemizi başarı ile temsil eden öğrencilerimizin de benzeri bir uygulama ile istedikleri programlara veya yarıştıkları bilim dallarındaki programlara sınavsız kabul edilmelerinin, bu öğrencilerin emeklerinin karşılığı olduğunu düşünüyorum.

Aşağıdaki sorulardan bir kısmı Matematik Dünyası'nın problemleri içinde yer alacak. Eğitici bulduğumuz bir kısmının çözümlerini ise ayrı bir yazı olarak yayımlayacağız. Önce siz bir deneyin. İyi çalışmalar!

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

TOKYO ÜNİVERSİTESİ

A Sınavı (Temel Bilimler)

Süre: 150 dakika.

1. a , b ve c pozitif gerçel sayılar olsun. xyz uzayında $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $z = c$ koşullarını sağlayan (x, y, z) noktalarının oluşturduğu D düzlemini düşünelim. P noktası, $z = c + 1$ düzlemi üzerinde olan ve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c + 1$$

elipsi üzerinde bir kez dolaşan ışının kaynağı olsun. D düzleminin, xy düzlemi üzerindeki gölgesini çizin ve alanını hesaplayınız.

2. p bir sabit olmak üzere, $x^3 - 3x - p = 0$ ifadesini düşünelim. $f(p)$, en büyük gerçel kök ile en küçük gerçel kökün çarpımı olsun. Eğer tek kök varsa, $f(p)$ bu kökün karesi olsun.

(a) Her p için $f(p)$ 'nin en küçük değerini bulunuz.

(b) $p \mapsto f(p)$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

3. (a) $n = 1, 2, \dots$ doğal sayıları için

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= p_n(\tan \theta) \cos^n \theta \\ \cos n\theta &= q_n(\tan \theta) \cos^n \theta \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $p_n(x)$ ve $q_n(x)$ polinomlarının varlığını gösteriniz.

(b) $n > 1$ için, $p'_n(x) = nq_{n-1}(x)$ ve $q'_n(x) = -np_{n-1}(x)$ özdeşliklerini gösteriniz.

4. xy düzleminde koordinatları tam sayılar olan (m, n) noktalarına örgü noktaları diyelim. Her örgü noktasında yarıçapı r olan çemberi çizelim. Eğimi $2/5$ olan doğru, bu dairelerin bazılarını kesecektir. Bu özelliğe sahip r sayılarının en küçük değerini bulunuz.

5. $f(x)$, $0 < x_1 < x_2$ için $0 < f(x_2) < f(x_1)$ koşulunu sağlayan ve $x > 0$ için tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.

$$S(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad \text{ve} \quad S(1) = 1$$

ise, her $a > 0$ için aşağıda belirlenen bölgelerin her birinin alanı $3S(a)$ 'dir:

- (i) $(0, 0)$ ve $(a, f(a))$ noktalarını birleştiren doğru parçası altında kalan bölge.
- (ii) $(0, 0)$ ve $(2a, f(2a))$ noktalarını birleştiren doğru parçası altında kalan bölge.

(iii) $y = f(x)$ eğrisi altında kalan alan bölge.

(a) $S(x)$ ve $f(x) - 2f(2x)$ 'i x 'in fonksiyonu olarak ifade ediniz.

(b) $x > 0$ için $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^n x)$ ise,

$$\int_x^{2x} a(t) dt$$

değerini bulunuz.

(c) $f(x)$ fonksiyonunu belirleyiniz.

B Sınavı (Beşeri Bilimler)

Süre: 100 dakika.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ ifadesinin $-\frac{7}{4} \leq x \leq 3$ aralığındaki en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

2. xyz uzayında $P(2, 0, 1)$ noktasını ve yz düzleminde $z = y^2$ eğrisini düşünelim. Q , bu eğri üzerinde olmak üzere, PQ doğrusunun xy düzlemini kestiği F noktalarını çizin.

3. $ABCD$, kenarları 1 ve a olan bir dikdörtgen, E noktası ise köşegenlerin kesim noktası olsun. A , B , C , D ve E noktalarında yarıçapı r olan çemberleri çizelim. Herhangi iki çemberin arakesitiminin boş olacağı şekilde r 'nin en büyük değerini bulunuz. $S(a)$, çemberlerin dörtgen içinde kalan toplam alanı ise, $\frac{S(a)}{a}$ ifadesinin grafiğini a 'nın fonksiyonu olarak çizin.

4. V , tabanı kare olan düzgün bir piramit olsun. Karenin bir kenarına a diyelim. Merkezi bu piramidin tabanında olan ve her kenara değen bir top düşünelim. V 'nin yüksekliğini ve top ile piramide ortak olan bölgenin hacmini bulunuz.

HOKKAIDO ÜNİVERSİTESİ

A Sınavı (Temel Bilimler ve Tıp)

Süre: 120 dakika.

1. α ve β , $x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0$ ifadesinin kökleri olsun. p gerçel sayısının

$$\frac{1(\alpha - \beta)^2 - 2}{2(\alpha + \beta)^2 + 2}$$

ifadesini tamsayı yapan değerini bulunuz.

2. t gerçel sayısı için $x(t) = \frac{2^t + 2^{-t}}{2}$ ve $y(t) = \frac{2^t - 2^{-t}}{2}$ olarak tanımlansın. $M(t)$, köşeleri $(x(t), y(t))$, $(x(t+1), y(t+1))$ ve $(x(t+2), y(t+2))$ olan üçgenin ağırlık merkezi olsun. t gerçel

sayılarda gezerken, $M(t)$ 'nin geometrik yerini bulunuz.

3. C eğrisi $y = f(x)$ ile verilsin. $P(x, y)$ noktasında C 'ye çizilen teğet, P ve $Q(1, 0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasına dik ise,

(a) $y = f(x)$ 'nin sağladığı diferansiyel denklemini bulunuz;

(b) $y = -\frac{2}{3}x + 5$ doğrusu C 'ye teğetse, C 'nin denklemini bulunuz.

4. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{1/n}$ değerini bulunuz.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=n+1}^{2n} \log k - n \log n \right] = \int_1^2 \log x dx$

olduğunu gösteriniz.

5. $O(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ve $B(0, \sqrt{2}, 0)$ noktaları ile çapı $\sqrt{6}$ olan bir küre verilsin. Küre merkezinin z koordinatı pozitif, küre $[OA]$, $[OB]$ ve $[AB]$ doğru parçalarına teğet olsun.

(a) Küre merkezinin koordinatlarını bulunuz.

(b) Kürenin xy düzlemi üzerinde kalan kısmının hacmini bulunuz.

B Sınavı (Temel Bilimler ve Balıkçılık)

Süre: 120 dakika.

1. α ve β , $x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0$ ifadesinin kökleri olsun. p gerçel sayısının

$$\frac{1(\alpha - \beta)^2 - 2}{2(\alpha + \beta)^2 + 2}$$

ifadesini tamsayı yapan değerini bulunuz.

2. Düzlemde $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ ve $B(-1, 0)$ noktaları verilsin. P noktası düzlemde hareket etsin ve $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) + 3(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0$ koşulunu sağlasın.

(a) P noktasının geometrik yerini bulunuz.

(b) $|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|$ ifadesinin en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

3. ABC üçgeninde, $\angle A = 120^\circ$ ve $|AB| \cdot |AC| = 1$ olsun. D , A 'nın açıortayı ile $[BC]$ 'nin kesim noktası olsun.

(a) $|AB| = x$ ise, $|AD|$ 'yi x cinsinden bulunuz.

(b) AD 'yi en büyük yapan x değerini bulunuz.

4. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{1/n}$ değerini bulunuz.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=n+1}^{2n} \log k - n \log n \right] = \int_1^2 \log x dx$

olduğunu gösteriniz.

5. $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$ ve $B(0, 4, 0)$ noktaları ile çapı 2 olan bir küre verilsin. Küre merkezinin z koordinatı pozitif, küre $[OA]$, $[OB]$ ve $[AB]$ doğru parçalarına teğet ise, küre merkezinin koordinatlarını bulunuz.

C Sınavı (Beşeri Bilimler)

Süre: 90 dakika.

1. α ve β , $x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0$ ifadesinin kökleri olsun. p gerçel sayısının

$$\frac{1(\alpha - \beta)^2 - 2}{2(\alpha + \beta)^2 + 2}$$

ifadesini tamsayı yapan değerini bulunuz.

2. Düzlemde $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ ve $B(-1, 0)$ noktaları verilsin. P noktası düzlemde hareket etsin ve $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) + 3(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0$ koşulunu sağlasın.

(a) P noktasının geometrik yerini bulunuz.

(b) $|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|$ ifadesinin en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

3. n , 2'den büyük bir tamsayı ise, tümevarımla

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$$

olduğunu gösteriniz.

4. $f(x) = ax + b$ ve

$$F(x) = x \int_1^{2x+3} f(t) dt$$

olsun. $F(1) = 2$ ve $F'(0) = -10$ ise, $f(x)$ 'i bulunuz.

SHIGA ÜNİVERSİTESİ

A Sınavı (Temel Bilimler)

Süre: 90 dakika.

1. α ve β , $x^2 - px + 1 = 0$ denkleminin çözümleri olsun. α' ve β' de $x^2 - x + q = 0$ denkleminin çözümleri olsun.

$$(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\beta' - \alpha)(\beta' - \beta)$$

ifadesini p ve q cinsinden bulunuz.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ve $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ise, a ve b sayılarını bulunuz.

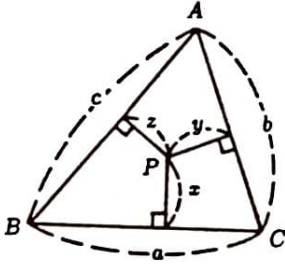
3. $x - 2y^2 \geq 0$ ve $1 - x - |y| \geq 0$ eşitsizliklerinin sağlandığı bölgeyi ve alanını bulunuz.

4. $\{a_n\}$ dizisi $n \geq 1$ için

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = \frac{n+1}{n+2}$$

eşitliğini sağlıyorsa, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ toplamını bulunuz.

5. ABC üçgeninin kenarları a, b, c ve alanı S olsun. Üçgen içindeki bir P noktasından kenarlara çizilen diklerin uzunlukları x, y ve z olsun.



(a) S 'yi, a, b, c, x, y ve z türünden ifade ediniz.

(b) P' , koordinatları (x, y, z) olan nokta olsun. P, ABC üçgeni içinde gezerken, P' 'nün bir üçgen betimlediği gösteriniz.

(c) P, ABC üçgeninin ağırlık merkezi ise, P' 'nün de (b)'de elde edilen üçgenin ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

B Sınavı (Ekonomi)

Süre: 100 dakika.

1. $y = \sqrt{2x-1}$ fonksiyonunun grafiğini ve $y = x + k$ doğrusunu düşünelim. k sabitini değiştirerek iki eğrinin kesim noktalarının sayısını tartışınız.

2. Bir ABC üçgeninde $Q, [AC]$ kenarı üzerinde $|AQ| : |QC| = 3 : 4$, P ise $[BQ]$ kenarı üzerinde $|BP| : |PQ| = 7 : 2$ olacak şekilde noktalar ve O herhangi bir nokta olsun.

(a) $\vec{OQ} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OC}$ ifadesini α ve β rasyonel sayılar iken bulunuz.

(b) l, m ve n rasyonel sayılar olmak üzere, $\vec{OP} = l\vec{OA} + m\vec{OB} + n\vec{OC}$ ifadesini bulunuz.

3. C açısı 90° olan bir ABC üçgeninde hipotenüsün uzunluğu $|AB| = a$ olsun.

(a) D iççemberin $[AB]$ kenarına teğet olduğu nokta ise, $|AD| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| - |BC|)$ eşitliğini kanıtlayınız.

(b) θ, A açısının yarısı ise, iççemberin yarıçapı r 'yi a ve θ cinsinden bulunuz.

(c) r 'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

4. Her x için $f(x), (x-a)^2$ ve $(x-a-2)^2$ sayılarının küçük olanı olsun.

$$F(a) = \int_0^1 f(x) dx$$

ise, $F(a)$ 'nın $-2 \leq a \leq 2$ üzerinde alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

SHIGA TIP FAKÜLTESİ

Süre: 120 dakika.

1. (a) a ve b doğal sayılar olmak üzere $b \leq a^2$ ise, $\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}$ 'nin doğal sayı olması için gerek ve yeter koşulun $n^2 < a \leq 2n^2$ ve $b = 4n^2(a^2 - n^2)$ olmasını sağlayan bir n doğal sayısının varlığı olduğunu gösteriniz.

(b) $\sqrt{30+\sqrt{b}} + \sqrt{30-\sqrt{b}}$ ifadesini tamsayı kılan b doğal sayılarını bulunuz.

2. ABC üçgeninin zaman t ile değiştiğini, ancak bu değişimlerde θ ile göstereceğimiz A açısının hep dar açı kaldığını ve üçgenin alanının değişmediğini varsayalım. $a = |BC|$, $b = |CA|$ ve $c = |AB|$ alalım.

(a) $\frac{d\theta}{dt}$ 'yi, $b, c, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ ve θ türünden bulunuz.

(b) $\frac{da}{dt}$ 'yi, $b, c, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ ve θ türünden bulunuz.

(c) ABC üçgeninin kenar uzunluğu 10 olan eşkenar üçgen olduğu durumda $\frac{db}{dt} = 2$ ve $\frac{dc}{dt} = -1$ ise, $\frac{d\theta}{dt}$ ve $\frac{da}{dt}$ 'yi bulunuz.

3. $A(s, 0)$ ($0 \leq s \leq 1$), x ekseninde bir nokta ve $B(0, t)$ ($0 \leq t \leq 1$), y ekseninde bir nokta olmak üzere $[AB]$ doğru parçası uzunluğu her zaman 1 birim kalacak şekilde değişsin.

(a) $[AB]$ doğru parçası ile $0 \leq x_0 \leq s$ olmak üzere $x = x_0$ doğrusunun kesim noktasının y koordinatını s ve x_0 türünden bulunuz.

(b) (x, y) , AB doğru parçası üstündeyken, x 'in ve y 'nin alabileceği olası değerleri eşitsizlikler ile belirtiniz.

4. $\Pi_1 : ax + y + z = a$ ve $\Pi_2 : x - ay + az = 1$ düzlemlerinin arakesitleri l doğrusu olsun.

(a) l için bir yön vektörü bulunuz.

(b) a değişirken l bir yüzey belirler. (x, y) , bu yüzey ile $z = t$ düzleminin arakesitindeki nokta olsun. x ve y arasındaki ilişkiyi belirleyen denklemi bulunuz.

(c) $x = 0$ ve $x = 1$ düzlemleri ve (b)'de bulunan yüzey ile belirlenen hacmi, t değişkenine bağlı olarak bulunuz.

35. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI SORULARI

Derleyen: Ali Doğanaksoy *

35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı, 12-19 Temmuz 1994 tarihleri arasında Hong Kong'da yapıldı. Bu olimpiyatta ülkemizi Hasan Fehmi Ateş, Murat Atlamaz, Rıza Ertuğrul, Zafer Şimşek, Bayram Yenikaya ve Bilal Yurdakul'dan oluşan takım temsil etti. Ateş, Atlamaz, Ertuğrul ve Yenikaya bronz madalya, Şimşek ve Yurdakul mansiyon kazandılar.

1. ECO (Ekonomik İşbirliği Teşkilatı) Matematik Olimpiyadı Tahran'da 17-22 Eylül 1994 tarihleri arasında yapılacak. Dergimiz yayına hazırlandığı sırada henüz başlamamış olan bu olimpiyatta yarışacak öğrencilerimiz, Halil Bayrak, Ethem Çanakoğlu, Mustafa Günseli, Ali Ekber Gürel, Caner Kazancı ve Bayram Yenikaya. Bu öğrenciler, ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarına hazırlık amacı ile 7-19 Ağustos 1994 tarihlerinde Abant İzzet Baysal Üniversitesi tesislerinde yapılan çalışma kampında yapılan sınavla belirlendi.

Bu sayımızda 35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'nda sorulan soruları veriyoruz.

Birinci Gün, 13 Temmuz 1994

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat. Her problem 7 puan değerindedir.

1. m ve n pozitif tamsayılar olsun. $a_1, a_2, \dots, a_m, \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin farklı öyle elemanları olsun ki, $1 \leq i \leq j \leq m$ olmak üzere $a_i + a_j \leq n$ olduğu her durumda, $a_i + a_j = a_k$ olacak şekilde bir k ($1 \leq k \leq m$) bulunsun.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2. ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ olsun.

(i) M , BC 'nin orta noktası; O da, AM doğrusu üstünde bulunan ve OB 'nin AB 'ye dik olmasını sağlayan nokta olsun.

(ii) Q , BC kenarı üstünde, B ve C 'den farklı herhangi bir nokta olsun.

(iii) E , Q ve F aynı doğru üstünde bulunan farklı noktalar olmak üzere, E 'nin AB doğrusu, F 'nin de AC doğrusu üstünde bulunduğunu kabul edelim.

OQ 'nun EF 'ye dik olmasının, $|QE| = |OF|$ olması için gerek ve yeter bir koşul olduğunu kanıtlayınız.

3. Her k pozitif tamsayısı için, $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ kümesine ait ve 2 tabanına göre yazılımlarında tam olarak üç tane 1'in geçtiği elemanların sayısı $f(k)$ olsun.

(a) Her m pozitif tamsayısı için, $f(k) = m$ olacak şekilde en az bir k pozitif tamsayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

(b) $f(k) = m$ eşitliğinin tam olarak bir k için sağlandığı tüm m pozitif tam sayılarını bulunuz.

İkinci Gün, 14 Temmuz 1994

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat. Her problem 7 puan değerindedir.

4. $\frac{n^3+1}{mn-1}$ sayısının bir tamsayı olmasını sağlayan tüm (m, n) sıralı pozitif tamsayı ikililerini bulunuz.

5. S , -1 'den kesin büyük reel sayıların kümesi olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan tüm $f: S \rightarrow S$ fonksiyonlarını bulunuz:

(i) S 'ye ait her x, y için, $f(x+f(y)+xf(y)) = y+f(x)+yf(x)$ olup,

(ii) $\frac{f(x)}{x}$, $-1 < x < 0$ ve $0 < x$ aralıklarının her birinde kesin artan bir fonksiyondur.

6. Aşağıdaki koşulu sağlayan ve pozitif tamsayılardan oluşan bir A kümesinin var olduğunu gösteriniz:

Tüm elemanları asal sayılar olan sonsuz her S kümesi için, m ve n sayılarından her birinin S 'ye ait k farklı elemanın çarpımı olmasını sağlayacak biçimde $K \leq 2$, $m \in A$ ve $n \notin A$ pozitif tamsayıları vardır.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

A91. Kenar uzunluğu 23 olan kare içinde 99 nokta gelişigüzel seçilmiştir. Çevre uzunluğu 14'ten küçük olan ve köşeleri seçilen noktalar üzerinde bulunan en az bir üçgen bulunabileceğini gösteriniz. (*Yaman Duruman*)

A92. $\cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 = 0$ denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki çözümlerini bulunuz. (*Hüseyin Demir*)

A93. $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{3}$ denklemini $\cos x$ için çözünüz. (*Hüseyin Demir*)

A94. Atılan beş tavlâ zarının toplamalarının çarpımlarından küçük olması olasılığını hesaplayınız.

A95. Düzlemde her iki koordinatı da tamsayı olan noktalara örgü noktaları denir. Düzlemde $(0, 0)$ 'dan geçen her doğru mutlaka bir örgü noktasından geçer mi? (*Şafak Alpay*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y91. ABC , kenar uzunlukları a, b, c ve alanı S olan bir üçgen olsun. $b, c; c, a$ ve a, b çiftlerinin geometrik ve aritmetik ortalamalarına sırayla a_1, b_1, c_1 ve a_0, b_0, c_0 diyelim.

(a) Kenar uzunlukları a_1, b_1 ve c_1 olan bir $A_1B_1C_1$ üçgeninin varlığını gösterip ABC ve $A_1B_1C_1$ 'in S ve S_1 alanları arasında $S_1 \geq S$ bağıntısının bulunduğunu ispatlayınız.

(b) Kenar uzunlukları a_0, b_0, c_0 olan bir üçgenin varlığını gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y92. Dar açılı bir ABC üçgeninin I_a dış çemberinin bulunduğu bölgede bir köşesi $[BC]$ 'nin D orta noktası ve iki köşesi AC ve AB doğruları üzerinde bulunan kare düşünülüyor.

(a) Kareyi pergel ve cetvelle çiziniz.

(b) Karenin kenar uzunluğunu hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

Y93. 1'den k 'ye kadar numaralanmış k tane oksijen tüpü farklı basınçta doldurulmuştur. k numaralı tüpün basıncı p_k olmak üzere $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ olduğu bilinmektedir. Tüplerden istenildiği kadar paralel bağlanabilmekte ve bu halde bağlanan tüplerin basınçları, ortalama basınca eşit olacak şekilde dengelenmek-

tedir. Tüpleri bağlayıp çözerek, 1 numaralı tüpün basıncının alabileceği en yüksek değeri bulunuz.

Y94. Bir dışbükey 12 yüzlüde

(a) bütün yüzler ikizkenar üçgendir,
(b) her kenar ya x ya da y birim uzunluğundadır,

(c) her köşede ya 3 ya da 6 kenar buluşur,

(d) bütün yanal açılar eşittir.

$y : x$ oranını hesaplayınız.

Y95. Kenar uzunlukları $|BC| = 5$, $|CA| = 3$, $|AB| = 4$ birim olan bir ABC üçgeninde, A, B, C 'nin sırası ile B, C, A 'ya göre simetrikleri A', B', C' ise A', B', C' üçgeninin R' çevrel yarıçapını hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

ÇÖZÜMLER

A81. Birbirine eş olan dört çemberden üçünün her biri, verilen bir ABC üçgeninin içinde olup, açılardan birinin iki kenarına teğettir. Dördüncü çember bu üç çembere teğet ise bu çemberlerin cetvel ve pergelle çizilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. Kenarlara teğet olan çemberlerin merkezleri A', B', C' olsun. ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin kenar uzunlukları a, b, c ve a', b', c' ; ortak yarıçap da r ise, $a = x \cot \frac{B}{2} + a' + x \cot \frac{C}{2} = x(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}) + a' = \frac{2x}{r} + a'$ ve $a' = a(1 - \frac{x}{r})$ elde edilir. (Burada $x = |BB'| = |CC'| = |AA'|$ ve $S = (a + b + c)/2$ 'dir.) Dördüncü çemberin merkezi O' ise, $|O'A| = |O'B| = |O'C| = 2r$ nedeniyle, bu nokta $A'B'C'$ 'nin çevrel çember merkezidir. $A'B'C' \sim ABC$ benzerliği ve $a' = a(1 - \frac{x}{r})$ 'den $\frac{2x}{r} = 1 - \frac{x}{r} \Rightarrow x(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r/2}$ bulunur. O halde $2x$ uzunluğu r ile $R/2$ 'nin harmonik ortalaması olup çizilebilir [1].

(Çözenler: *Murat Aygen, Özgür Sümer, Atasağın Baykal, Cüneyt Gürsoy, Emre Alkan, Ruhi Tanbar.*)

A82. Tabanı $[BC]$ ve A açısı geniş olan bir ABC üçgeninin A köşesi ve yan kenarlarının birer kısmı çizim kağıdının dışına taşmıştır. Bu üçgenin $[AD]$ kenarortayını, $[AE]$ iç açıortayını ve $[AF]$ yüksekliğini belirleyiniz.

Çözüm. B 'den CA 'ya ve C 'den BA 'ya çizilen paralel doğrular A' 'nde kesişirler. $A'BC \sim ACB$ olup $A'BC$ üçgeninde $[A'D]$, $[A'E]$, $[A'F]$, kenarortayı, iç açıortayı ve yüksekliği çizilir. $[A'D]$ 'nin uzantısı ABC 'nin aranan kenarortayı, E ve F 'nin D 'ye göre simetrikleri E' ve F' ise, E' ve F' 'nden $A'E$ 'ye ve $A'F$ 'ye çizilen paralel doğrular cevap olur.

(Çözenler: Özgür Sümer, Atasağın Baykal, Cüneyt Gürsoy, Ergün Yaraneri, Murat Aygen.)

A83. O kesişme noktası çizim kâğıdının dışına düşen a ve b doğruları ve bunların dışında bir C noktası veriliyor. CO doğrusunu cetvel ve pergelle belirleyiniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Noktadaş üç doğru ile ilgili teoremlerden istifade edebiliriz. Örneğin, verilen üç çemberin ikililerinin kuvvet eksenlerinin noktadaşlığını kullanabiliriz. Bunun için a 'yı P ve Q noktalarında, b 'yi R ve S 'de kesen bir çember çizer, CPQ ve CRS çemberlerinin ikinci D arakesit noktasını buluruz. CD doğrusu aranan doğru olur.

(Çözenler: Emre Alkan, Özgür Sümer, Cüneyt Gürsoy, Ergün Yaraneri, Ülkü Öztaş, Atasağın Baykal, Murat Aygen.)

A84. İki ve üç basamaklı sayılarla ilgili olarak

$$ABC = (DE)^2$$

$$CBA = (ED)^2$$

sistemini çözünüz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Eşitlikleri

$$100A + 10B + C = 100D^2 + 20ED + E^2$$

$$100C + 10B + A = 100E^2 + 20ED + D^2$$

biçiminde yazıp taraf tarafa çıkarırsak, $A - C = (D - E)(D + E)$ elde ederiz. Burada $A \geq C$ ve $D \geq E$ alabiliriz. $D \leq 3$ ve $E \leq 3$ olup, DE için çözümler 32'den küçük olan 31, 22, 21, 11'dir. Özetle $961 = 31^2$, $169 = 13^2$, $484 = 22^2$, $441 = 21^2$, $144 = 12^2$, $121 = 11^2$ çözümlerdir.

(Çözenler: İlker Bağrıaçık, Namık Gök, Ergün Yaraneri, Seyhun Kesim, Ruhi Tabur, Atasağın Baykal, Cüneyt Gürsoy, Özgür Sümer, Ali Satılmış, Emre Alkan, Levent Koçoğlu.)

A85. $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ sayısını

n, m tamsayı olmak üzere $n + m\sqrt{2}$ şeklinde ifade ediniz.

Çözüm. $9 + 4\sqrt{2} = 1 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = (1 + 2\sqrt{2})^2$ olduğundan, aradığımız sayı $x = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + 1 + 2\sqrt{2}}}$ 'dir. Benzer yolla $2 + 1 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ olur. O halde $x = \sqrt{13 + 30(1 + \sqrt{2})} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}}$ bulunur. $43 + 30\sqrt{2} = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = (5 + 3\sqrt{2})^2$ ve $x = 5 + 3\sqrt{2}$ olacaktır.

(Çözenler: Ali Satılmış, Ruhi Tabur, Levent Koçoğlu, Hasan Kullap, Özgür Sümer, Cüneyt Gürsoy, Seyhun Kesim, Namık Gök, Fikret Barlas, Ergün Yaraneri, Ülkü Öztaş, İlker Bağrıaçık, Murat Aygen, Atasağın Baykal.)

Y81. F odağı ve d doğrultmanı ile belirli parabol ile bir m uzunluğu verildiğinde, parabolün odağından geçen m uzunluktaki bir kirişin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Parabolün Oxy dik koordinat sistemindeki denklemi $4ay = x^2$ ($a > 0$) olsun. Odak $F(a, 0)$ olur. Odaktan geçip x eksenine paralel olan kiriş $[U_0V_0]$ ise, $V_0(-2a, a)$ ve $U_0(2a, a)$ olduğu görülür. Aranan kirişlerden biri $[UV]$ ve $U_0FU = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) olsun. $|FU| = r$, $|FV| = s$ koyarsak $U(r \cos \alpha, a + r \sin \alpha)$ bulunur. Bunlar parabolün denkleminde yerine konursa, $4a(a + r \sin \alpha) = r^2 \cos^2 \alpha$, yani $(\cos^2 \alpha)r^2 - 2(2a \sin \alpha)r - 4a^2 = 0$ elde edilir. Bu da r için $r = 2a \frac{\sin \alpha \pm 1}{\cos^2 \alpha} = 2a \frac{\sin \alpha \pm 1}{1 - \sin^2 \alpha}$ verir. Birinci kök $r(\alpha) = \frac{2a}{1 - \sin \alpha} > 0$ olup, $r(\alpha + \pi)$ de $s = |FV|$ 'yi verir. O halde $u = r + s = \frac{2a}{1 - \sin \alpha} + \frac{2a}{1 + \sin \alpha} = \frac{4a}{\cos^2 \alpha}$ ve dolayısıyla $\cos \alpha = \frac{4a}{u} \leq 1$ olup, $u \geq 4a$ için çizim vardır.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasağın Baykal.)

Y82. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasına göre ayak üçgeni DEF ise ve AD , BE , CF doğruları noktadaş ise P 'nin geometrik yerini belirleyiniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. AD , BE , CF doğruları bir Q noktasında kesişirler. QBC , QCA , QAB üçgenlerinin alanları sırasıyla x, y, z olsun. ABC 'nin kenar uzunluğu a ve alanı s ise, D 'nin $[BC]$ 'yi bölme oranı $\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{a}{y+z} = \frac{a}{s-x}$ olup $|DB| = \frac{az}{s-x}$ ve $|DC| = \frac{ay}{s-x}$ bulunur. E ve F 'nin $[CA]$ ve $[AB]$ 'yi bölme oranlarından

$$|EC| = \frac{ax}{s-y}, \quad |EA| = \frac{az}{s-y}$$

$$|FA| = \frac{ay}{s-z}, \quad |FB| = \frac{ax}{s-z}$$

elde edilir. DP , EP , FP dikmelerinin nokta-
daşlığı ile [2]'deki formülden

$$\sum \left[\frac{a^2 y^2}{(s-x)^2} - \frac{a^2 y z^2}{(s-x)^2} \right] = 0$$

olarak yazılır. Bu da $\sum \frac{y-z}{s-x} = 0$ olarak kısaltılıp
 $\sum (y-z)(s-y)(s-z) = 0$ eşitliğini verir. Bu-
radan aşağıdakileri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum (y-z)[s^2 - (y-z)s + yz] &= 0 \\ \Rightarrow \sum (y-z)[s^2 - (s-x)s + yz] &= 0 \\ \Rightarrow \sum (y-z)(xs + yz) &= 0 \\ \Rightarrow s \sum x(y-z) + \sum yz(y-z) &= 0 \\ \Rightarrow yz(y-z) + zx(z-x) + xy(x-y) &= 0 \\ \Rightarrow (y-z)(z-x)(x-y) &= 0 \\ \Rightarrow y = z, \quad z = x, \quad x = y. \end{aligned}$$

O halde geometrik yer yüksekliklerin bileşimi olan
nokta kümesidir.

(Çözenler: Emre Alkan, Murat Aygen,
Ataşağın Baykal.)

Y83. $1, 2, \dots, n$ tamsayılarını rastgele
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ şeklinde sıralayıp $T = |a_1 - a_2| +$
 $|a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ toplamını
hesaplarsak, elde edebileceğimiz en büyük T
değerini bulunuz.

Çözüm. Mutlak değerleri açarsak T
toplamında her a_j sayısı iki kere görülür ve
 $2n$ terimin yarısı artı, yarısı ise eksi işaretlidir.
Toplamın en büyük olması için eksi işaretler
küçük sayılara ait olmalıdır. $n = 2k$ çift ise,
 $1, 2, \dots, k$ 'nin işaretleri hep eksi ve $k+1, k+2,$
 $\dots, 2k$ 'nin işaretleri hep artı olduğu durumda
 $T = 2[(k+1) + (k+2) + \dots + 2k] - 2(1 +$
 $2 + \dots + k) = 2k^2 = \frac{n^2}{2}$ toplamı, örneğin,
 $1, k+1, 2, k+2, \dots, k, 2k$ sıralaması ile elde edilir.
 $n = 2k+1$ tek ise, $1, 2, \dots, k$ sayıları iki kez
eksi, $k+2, k+3, \dots, 2k+1$ sayıları iki kez artı
ve $k+1$ bir kez eksi, bir kez artı olacak bir
sıralama için, $T = 2[(k+2) + (k+3) + \dots +$
 $(2k+1)] + (k+1) - 2(1 + 2 + \dots + k) - (k+1) =$
 $2k(k+1) = \frac{n^2-1}{2}$ bulunur. Bu toplam, örneğin,
 $1, k+2, 2, k+3, \dots, k, 2k+1, k+1$ sıralamasıyla
elde edilir.

(Çözenler: Emre Alkan, Ergün Yaraneri,
Ataşağın Baykal, İlker Bağrıaçık, Seyhun
Kesim.)

Y84. Her $x \in [-1, 1]$ için $f(f(x)) =$
 $-x$ koşulunu sağlayan bir $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$
fonksiyonu var mıdır? (H. Turgay Kaptanoğlu)

Çözüm. İstenen fonksiyon birebir ola-
caktır, çünkü $f(x_1) = f(x_2)$ ise $-x_1 =$
 $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = -x_2$, yani $x_1 = x_2$
olmalıdır. f sürekli olsaydı, sürekli ve bire-
bir bir fonksiyon monoton (artan ya da azalan)
olacağından $f \circ f$ artan olacaktı. (İki artan
ya da iki azalan fonksiyonun bileşkesi artandır.)
Halbuki $f(f(x)) = -x$ azalan bir fonksiyon-
dur; o halde istenen koşulu sağlayan sürekli bir
fonksiyon yoktur. Süreksiz fonksiyonlarda ise
çeşitli çözümler bulunabilir, örneğin

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ ise;} \\ x - \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ ise;} \\ 0, & x = 0 \text{ ise;} \\ x + \frac{1}{2}, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ise;} \\ -x + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

istenen koşulu sağlar. $[-1, 1]$ aralığında f mono-
ton değildir; bu nedenle de $f \circ f$ 'nin artan olması
gerekmez.

(Çözenler: Sultan Yamak, Ataşağın
Baykal.)

Y85. Bir X kümesinin h elemanlı
 k tane alt kümesi $X_1, X_2, \dots, X_k$ veriliyor:
 $X_i \subseteq X$, $|X_i| = h$, $i = 1, \dots, k$.
 $\min |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k|$ 'nin, $k \leq C(m, h)$
özellğine sahip en küçük m sayısına eşit
olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $X_1 \cup \dots \cup X_k = Y \subset X$ diyelim.
 $X_i \subset Y$ ve $|X_i| = h$ ($i = 1, \dots, k$) olduğundan,
 $k \leq C(|Y|, h)$ bulunur. Buradan da $\min |Y|$ 'nin
 $C(m, h) \geq k$ özelliğini sağlayan en küçük m
olduğu anlaşılır.

Çözenler: Ataşağın Baykal, Emre
Alkan.)

KAYNAKÇA

- [1] H. Demir, Bazı Ortalamalar, *Matematik Dünyası*, 1, Şubat, 17-21 (1991).
- [2] H. Demir, Bir Üçgende Noktadaş Dikmeler, *Matematik Dünyası*, 2, Şubat, 5-7 (1992).

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Doç. Dr. Ali Doğanaksoy Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Ocak 1995 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyasının, ilk iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 80.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte, postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 50.000.-TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri takdirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1994 yılı abone ücreti 150.000.-TL. tane satış fiyatı ise 50.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- Konu sunuşları,
- Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,
- Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,
- Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,
- Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,
- Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,
- Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da terdhan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar :

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

