

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Oyunlar (II)

Ali Nesin

Gerçek Sayılarda Dokuz Temel Eşdeğerlik

Nurettin Ergun

Mekanik Kavramlarının Geometri
Problemlerine Uygulanması

Mehmet Tagiyev & Belgin Mazlumoglu

Denklemlerin Çözülmesi

C. Alparslan Ertuğ

1994 Ö.Y.S. Matematik Soruları ve
Çözümleri

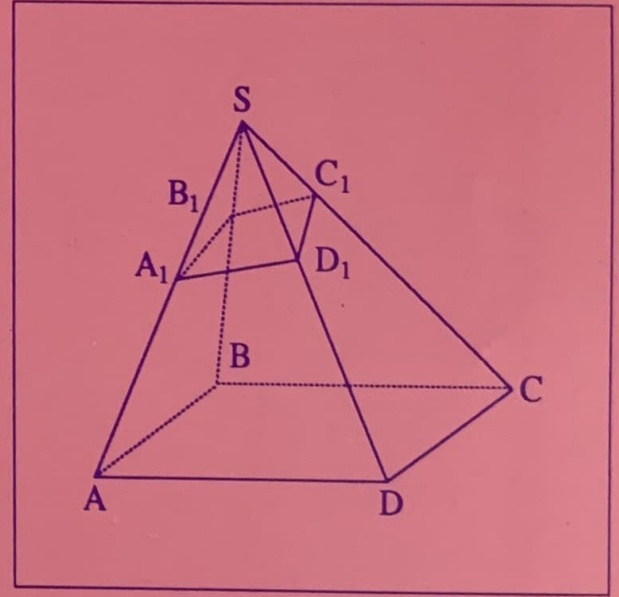
Ülkü Öztaş & Onur Sağsen

Olimpiyat Haberleri

Ali Doğanaksoy

Problemler ve Çözümleri

Dizin



MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

**Adına
Başkan**
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
ALİ DOĞANAKSOY, HÜSEYİN DEMİR,
ALPARSLAN ERTUĞ, TURGAY KAPTANOĞLU,
MEFHARET KOCATEPE,
MAHMUT KUZUCUOĞLU

DİZGİ
GÜLDANE GÜMÜŞ

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI
*Matematik Dünyası, Türk Matematik
Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği
ile iki ayda bir yayınlanmaktadır.
(Yılda 5 sayı)*

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin
Millî Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının
20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.İ.Şb. Md. 5386
sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1995)

Yurtiçi yıllık 300.000.-TL, Yurtdışı yıllık 600.000.-TL,
Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası
ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak,
dekontun bir örneğinin dergi abone a.drsine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 25.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 20.000.000.-TL.
Dergi içi tam sayfa siyah-beyaz : 15.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 10.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 5.000.000.-TL.

ADRES

(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)

ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA

İÇİNDEKİLER

Oyunlar (II)

Ali Nesin 1

Gerçek Sayılarda Dokuz Temel Eşdeğerlik

Nurettin Ergun 6

Mekanik Kavramlarının Geometri Problemlerine Uygulanması

Mehmet Tagiyev & Belgin Mazlumoglu 11

Denklemlerin Çözülmesi

C. Alparslan Ertuğ 17

1994 Ö.Y.S. Matematik Soruları ve Çözümleri

Ülkü Öztaş & Onur Sağsen 24

Olimpiyat Haberleri

Ali Doğanaksoy 27

Problemler ve Çözümleri 28

Dizin 32

OYUNLAR (II)

Ali Nesin *

Yoksulun Şansı

Bölümleri birbirinden bağımsız olan bu yazı dizisinin okumak üzere olduğunuz bölümü girişe gereksinmiyor. Doğrudan kanıtlayacağımız sonuca geçelim:

“Teorem.” *Yoksulun zengine karşı şansı yoktur.*

Bu çok bilinen ‘teorem’i kanıtlayabilmek için herşeyden önce önermeyi matematikselleştirmeliyiz. Zenginin —tanımı gereği— çok parası var. Yoksulunsa az parası var. Zenginle yoksul yazı-tura oynayacaklar. Yazı gelirse yoksul zenginden 1 lira alacak. Tura gelirse yoksul zengine 1 lira verecek. Oyun iki oyuncudan birinin parası bitene dek sürecek. Daha önce sona eremez. Bu kuralla oyun hiç bitmeyip sonsuza dek sürebilir. Örneğin yazı-tura atışlarını sırayla bir yoksul bir zengin kazanırsa oyun sonsuza dek sürer. Bu oyun sonsuza dek sürebilir ama sonsuza dek sürme olasılığı sıfırdır. Bunu geçen yazımızda kanıtlamıştık. Bu bölümde yukarıdaki yazı-tura oyununu kaç olasılıkla kimin kazandığını bulacağız. Önce paranın hilesiz olduğunu varsayacağız; bu bölümün sonunda hileli parayla oynanan yazı-tura oyunlarını inceleyeceğiz.

İki oyuncudan birinin kesinlikle (yani 1 olasılıkla) kazanacağını biliyoruz. Hangi oyuncunun kaç olasılıkla kazanacağını bulmak istiyoruz. Örneğin birinci oyuncunun 1, ikinci oyuncunun 100 lirası varsa, büyük bir olasılıkla ikinci oyuncu oyunu kazanır. Birinci oyuncunun kazanma olasılığı azdır, ama 0 değildir. Okurun, “yüzde 1 olasılıkla birinci, yüzde 99 olasılıkla ikinci oyuncu kazanır” dediğini duyar gibi oluyorum. Doğru değil. Yanıt yanlış ama okuru yanılgıya bilerek sürükledim. Bir başka örnek ele alalım.

Diyelim birinci oyuncunun 2, ikinci oyuncunun 3 lirası var. Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı kaçtır? Bu kez okur 2/5 yanıtını verecek ve haklı çıkacaktır. Bir önceki örnekte, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/101’dir, ikinci oyuncununkiyse 100/101’dir.

Bu bölümde, oyuna birinci oyuncu n , ikinci oyuncu m lirayla başladığında, birinci oyuncunun oyunu $\frac{n}{n+m}$ olasılıkla kazanacağını kanıtlayacağız.

Teorem 1. *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununa birinci oyuncu n lirayla, ikinci oyuncu m lirayla başlarsa, birinci oyuncu oyunu $\frac{n}{n+m}$ olasılıkla kazanır.*

Teoremi bir an için kanıtlanmış varsayıp, önemli bir sonucunu irdeleyelim. Teoreme göre, ikinci oyuncunun ne kadar çok parası varsa, birinci oyuncunun kazanma şansı o kadar azdır. Çünkü n sabit kalırsa ve m artarsa, $\frac{n}{n+m}$ sayısı gittikçe küçülür. Zengin ne denli zenginse ve yoksul ne denli yoksulsa, yoksulun kazanma olasılığı o denli azdır. Biraz abartalım ve zenginin sonsuz parası olduğunu varsayalım. (Para mı basıyor ne!) O zaman, yoksulun oyunun (sonlu) bir anında beş parasız kalma olasılığı 1 olacak. Yani yoksul yüzde yüz kaybedecek. Oyuna kaç parayla başlarsa başlasın ... Çünkü m sonsuza gittiğinde $\frac{n}{n+m}$ sayısı sıfıra gider. Yoksul milyoner olarak oyuna başlasa bile, zenginin sonsuz parası varsa kesinlikle kaybeder. Dolayısıyla bu teoremden şu çıkar:

Birinci Teoremin Bir Sonucu. *Hilesiz parayla oynanan bir yazı-tura oyununda, birinci oyuncunun sonlu, ikinci oyuncunun sonsuz parası varsa, oyunu 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) ikinci oyuncu kazanır.*

Şimdi teoremimizi kanıtlayalım. $s = n + m$ olsun. Yani s , iki oyuncunun toplam parası. $p_s(n)$, birinci oyuncunun n , ikinci oyuncunun $s - n$ lirası olduğunda, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı olsun. Örneğin, $p_s(0) = 0$. Çünkü birinci oyuncunun hiç parası yoksa, zaten oyunu kaybetmiştir ve kazanma olasılığı yoktur. Öte yandan, $p_s(s) = 1$. Çünkü birinci oyuncunun s lirası varsa, ikinci oyuncunun hiç parası kalmamıştır ve oyunu birinci oyuncu

* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

kazanmıştır. Teorem 1, $p_s(n)$ sayısının n/s olduğunu söylüyor. Demek ki

$$(1) \quad p_s(n) = \frac{n}{s}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. $p_s(n)$ sayıları birbirinden bağımsız degillerdir. Aralarında bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi bulalım. $0 < n < s$ olsun. Birinci oyuncunun n lirası var. Oyun, iki yoldan birini alabilir. Birinci oyuncu ya kazanacaktır ya kaybedecektir. Kazanırsa $n + 1$ lirası olacaktır, kaybederse de $n - 1$ lirası. Her iki durumun da olasılığı $1/2$ 'dir. Demek ki n lirayla oyuna başlayan birinci oyuncunun ilk oyundan sonra yarım olasılıkla $n - 1$ lirası, yarım olasılıkla da $n + 1$ lirası olacaktır elinde. Bu son iki durumda birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı, sırasıyla, $p_s(n - 1)$ ve $p_s(n + 1)$ 'dir. Yani, $0 < n < s$ ise,

$$p_s(n) = \frac{p_s(n - 1)}{2} + \frac{p_s(n + 1)}{2}$$

dir. Bunu şöyle de yazabiliriz: $0 < n < s$ için,

$$(2) \quad p_s(n + 1) = 2p_s(n) - p_s(n - 1).$$

Şimdi bir önsav kanıtlayalım:

Önsav. Eğer $0 < n \leq s$ ise, $p_s(n) = np_s(1)$.

Önsavın Kanıtı. n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 1$ ise, kanıtlanacak eşitlik $p_s(1) = p_s(1)$ olur ve bu durumda önsavın doğruluğu apaçık. Şimdi eşitliği $n = 2$ için kanıtlayalım. $p_s(2) = 2p_s(1)$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. (2) eşitliğinden,

$$p_s(2) \stackrel{(2)}{=} 2p_s(1) - p_s(0)$$

elde ederiz. Ama $p_s(0) = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki, $p_s(2) = 2p_s(1)$ ve bu durumda da önsavımız kanıtlanmıştır. Şimdi $n \geq 3$ olsun. Önsavın $n - 1$ ve n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. Bu varsayımlardan ve (2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p_s(n + 1) &\stackrel{(2)}{=} 2p_s(n) - p_s(n - 1) \\ &= 2np_s(1) - (n - 1)p_s(1) \\ &= (n + 1)p_s(1) \end{aligned}$$

çıkar. Önsavımız kanıtlanmıştır.

Yukarıdaki önsavda $n = s$ alalım: $1 = p_s(s) = sp_s(1)$ buluruz, yani $p_s(1) = 1/s$. Önsavı bir kez daha uygularsak bu eşitlikten $p_s(n) = n/s$ çıkar. Teoreminiz kanıtlanmıştır.

Hileli Paranın Öyküsü. Bölümün süreğinde paranın hileli olduğunu varsayacağız¹. Yazı gelme olasılığına y diyelim. Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın. Tura gelme olasılığı t olsun. $y + t = 1$ eşitliği geçerli elbet. Toplam paraya gene s diyeceğiz. $p_s(n)$, birinci oyuncunun — yani yazı geldiğinde kazanan oyuncunun — n lirası varken öbür oyuncunun bütün parasını ütme olasılığı olsun. Eğer $y = 0$ ise, yani para hiç yazı gelmeyecekçesine hileliyse, oyunu ikinci oyuncu kazanır elbet. Eğer $y = 1$ ise, birinci oyuncu oyunu kazanır. Ayrıca $y = 1/2 = t$ şikkını yukarıda irdelemiştik. Demek ki, bundan böyle $0 < y < 1$ ve $t \neq y$ eşitsizliklerini varsayabiliriz. Bu varsayımla oyunun sonsuza değin sürme olasılığının sıfır olduğunu geçen yazının sonunda göstermiştik.

Teorem 2. Yazı gelme olasılığının y , tura gelme olasılığının t olduğunu varsayalım ($t = 1 - y$). Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın ve oyuna n lirayla başlasın. İkinci oyuncunun $s - n$ lirası olsun. Birinci oyuncunun yazı-tura oyununu kazanma olasılığı $\frac{y^n - y^{s-n}t^n}{y^n - t^n}$ 'dir.

(2) formülünün bir benzerini bulalım önce. Birinci kanıttaki gibi bir akıl yürütmeye,

$$p_s(n) = tp_s(n - 1) + yp_s(n + 1)$$

eşitliğini buluruz. Bundan da

$$(3) \quad p_s(n + 1) = \frac{p_s(n)}{y} - \frac{tp_s(n - 1)}{y}$$

çıkar. Aynen birinci kanıttaki gibi yapacağız. $p_s(n)$ sayısını $p_s(1)$ 'i kullanarak bulacağız.

Önsav. Eğer $0 < n \leq s$ ise²,

$$p_s(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y - t)} p_s(1).$$

Önsavın Kanıtı. n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için bir sorun yok. $n = 2$ için kanıtlayalım. (3) eşitliğinde $n = 1$ alırsak

¹ Soruyu bu genel biçimiyle soran ve yanıtlayan Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'na teşekkür ederim.

² Bu formülü nasıl bulduğumuzu okur merak edebilir. Daha önceki önsavda $p_s(n) = np_s(1)$ eşitliğini tahmin etmek oldukça kolaydı. Bu önsavdaki formülü bulabilmek için biraz lineer cebir bilmek gerekebilir. Ama formül bulunduktan sonra kanıtlaması oldukça kolaydır.

ve $p_s(0) = 0$, $y + t = 1$ eşitliklerini kullanırsak, önsavın $n = 2$ için doğru olduğunu buluruz. Şimdi formülün n ve $n - 1$ sayıları için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlamak gerekiyor. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Artık ikinci teoremi kanıtlayabiliriz. Yukarıdaki önsavda $n = s$ alırsak ve $p_s(s) = 1$ eşitliğini kullanırsak,

$$p_s(1) = \frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s - t^s}$$

buluruz. Bu eşitliği önsava uygulayarak

$$p_s(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y-t)} \frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s - t^s}$$

buluruz. Sadeleştirerek,

$$(4) \quad p_s(n) = \frac{y^s - y^{s-n}t^n}{y^s - t^s}$$

eşitliğini buluruz. İkinci teorem de kanıtlanmıştır.

Birinci oyuncuda n lira, ikinci oyuncuda sonsuz para varsa, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı nedir? Bu soruyu yanıtlayalım. Bu sorunun yanıtını bulmak için $\lim_{s \rightarrow \infty} p_s(n)$ sayısını bulmalıyız, yani (4) eşitliğindeki s sayısını sonsuza göndermeliyiz. Bu limitin hesaplanması $y < t$ yada $t < y$ olduğuna göre değişir, ama bulunan sonuç değişmez, her iki şıkta da sıfır bulunur:

İkinci Teoremin Bir Sonucu. Yazı gelme olasılığı y olsun ve $y < 1$ olsun. Birinci oyuncu yazı gelince kazansın ve ikinci oyuncunun sonsuz parası olsun. Birinci oyuncu 1 olasılıkla (yani % 100) bütün parasını kaybedecektir.

Örneğin %99 olasılıkla yazı bile gelse, eğer tura geldiğinde kazananın sonsuz parası, yazı geldiğinde kazananın sonlu parası varsa, oyunu önünde sonunda sonsuz parası olan kazanır. Sonsuz için doğru olan büyük sayılar için de doğrudur aşağı yukarı: para tek yanlı olmadıkça (yani $y < 1$ oldukça), zengin çok zenginse yazı-tura oyununu büyük bir olasılıkla kazanır.

Züğürt Tesellisi

Önceki bölümde, yazı-tura oyununda yoksulun zengine karşı şansının çok az olduğunu

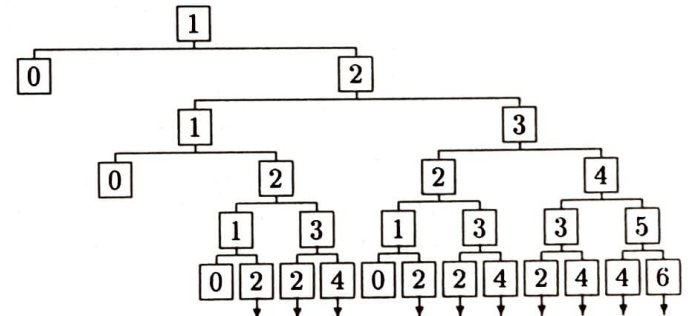
kanıtladık. Öyle ki, zengin sonsuz zengin olduğunda oyunu 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) kazanacaktır. Bu bölümde bu olgudan güzel bir eşitlik çıkaracağız:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)4^k} \binom{2k}{k} = 1.$$

Yoksulun cebinde 1 lira olduğunu varsayalım. Zenginin de sonsuz zengin olduğunu, yani sonsuz parası olduğunu varsayalım. Dolayısıyla zenginin parası bitmez ve zengin oyunu kaybedemez. Yoksulun tek şansı sonsuza değin oynatabilmek. Bunun da olasılığının sıfır olduğunu daha önceki bölümden biliyoruz.

Birinci yazı-tura atıldı. Tura gelirse yoksulun cebindeki tek lira gidecek, beş parasız kalacak ve oyun bitecek. Diyelim ilk oyunu yoksul kazandı. Şimdi cebinde iki lirası var. İkinci oyunda kaybederse gene 1 lirası kalacak, kazanırsa 3 lirası olacak. Oyun böylece, sürebildiğince, yani yoksulun parası olduğu sürece sürecek.

Oyunun alabileceği bütün durumları bir 'ağaç'la gösterebiliriz. Ağacın en tepesine 1 yazalım. Bu 1, yoksulun oyuna başlamadan önceki bütün serveti. 1'den sonra aşağıya doğru sağlı sollu iki ok (kök) çıkaralım. Bu oklardan soldakinin ucuna 0, sağdakinin ucuna 2 yazalım. Soldaki ok, yoksulun kaybettiğini, sağdakiyse kazandığını gösteriyor. 0 ve 2 sayıları da, birinci oyunun sonunda yoksulun cebindeki para. Kaybederse 0, kazanırsa 2 lirası olacak. Kaybettiğinde oyun duruyor, dolayısıyla 0'dan sonra kök büyümüyor. Kazanmışsa, yani 2 lirası olmuşsa oyun sürüyor. 2'den sonra kök büyüyor, ikiye ayrılıyor. Soldaki kök her zaman yoksulun kaybettiğini gösterecek, sağdakiyse kazandığını. Oyun sonsuza dek uzayabileceğinden, ağacın kökleri sonsuza dek uzar. Bu sonsuz ağaçtan bir bölüm sunalım:



Daha ilk turda yoksulun oyunu kaybetme olasılığı $1/2$ elbet: tura gelirse kaybedecek ve oyunu bir daha hiç oynayamayacak, yani elenecek. Yoksul, ilk turda kaybetmemişse ikinci turda elenemez, çünkü yukarıdaki ağacın üstten üçüncü katında 0 yok. Ama üçüncü turda elenebilir. Eğer sırasıyla yazı-tura-tura (YTT) gelirse yoksul beş parasız kalacaktır. Sırasıyla yazı-tura-tura (yani YTT) gelme olasılığıysa $1/2^3$, yani $1/8$ 'dir. Demek ki yoksulun üçüncü turda elenme olasılığı $1/8$. Birinci turda elenme olasılığı da $1/2$ 'ydi. Bu olasılıkları toplarsak, yoksulun üç oyun dayanamama olasılığını buluruz:

$$\begin{array}{llll} p_1(0) = 0, & p_1(1) = 1, & & \\ p_2(0) = 1, & p_2(1) = 0, & p_2(2) = 1, & \\ p_3(0) = 0, & p_3(1) = 1, & p_3(2) = 0, & \\ p_4(0) = 1, & p_4(1) = 0, & p_4(2) = 2, & \\ p_5(0) = 0, & p_5(1) = 2, & p_5(2) = 0, & \end{array} \quad \begin{array}{l} p_3(3) = 1, \\ p_4(3) = 0, \quad p_4(4) = 1, \\ p_5(3) = 3, \quad p_5(4) = 0, \quad p_5(5) = 1. \end{array}$$

Bu sayıları nasıl bulabiliriz? Örneğin $p_6(4)$ 'ü ağaca bakmadan bulabilir miyiz? $p_6(4)$, ağacın altıncı katındaki 4'lerin sayısı. Altıncı kattaki 4 sayıları bir üst kattaki 3 ve 5 sayılarından gelir; dolayısıyla

$$p_6(4) = p_5(3) + p_5(5) = 3 + 1 = 4$$

eşitliği geçerlidir. Bunun gibi, her $2 \leq k < n$ için

$$(1) \quad p_n(k) = p_{n-1}(k-1) + p_{n+1}(k+1)$$

eşitliği geçerlidir. Çünkü n 'yinci sıradaki k 'lar ancak $n-1$ 'inci sıradaki $k-1$ ve $k+1$ 'lerden gelebilirler. $p_n(0)$ ve $p_n(1)$ sayıları için

$1/2 + 1/8 = 5/8$. Yoksul ilk üç tur dayanabilmişse, dördüncü turu oynamaya hak kazanır. Bu turda elenemez, çünkü en az 1 lirası kalacaktır. Ancak beşinci turda elenebilir. Sırasıyla YTYTT yada YYTTT gelirse elenecektir. $n \geq 1$ herhangi bir doğal sayı olsun. Yukarıdaki ağacın (üstten) n inci katında kaç tane 0, kaç tane 1, kaç tane 2 vardır? Bu sayılara $p_n(0)$, $p_n(1)$, $p_n(2)$ diyelim. Genel olarak, $0 \leq k \leq n$ ise

$$p_n(k) = \text{ağacın } n\text{'yinci katındaki } k \text{ sayısı}$$

olsun. Örneğin,

formülümüz değişik. n 'yinci sıradaki 0 sayıları, $n-1$ 'inci sıradaki 1 sayılarından gelebilir ancak. Bunun gibi, n 'yinci sıradaki 1 sayıları bir önceki sıradaki 2 sayılarından gelebilir³. Dolayısıyla

$$(2) \quad p_n(0) = p_{n-1}(1) = p_{n-2}(2)$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$(3) \quad p_n(n) = 1$$

eşitliğini bulmak da zor değildir. Yukarıdaki eşitlikleri kullanarak bir tablo çizelim. (Bu tabloda $p_n(k)$ sayısını n 'yinci sırayla k 'yinci sütunun kesiştiği yere koyduk.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1											
2	1		1										
3		1		1									
4	1		2		1								
5		2		3		1							
6	2		5		4		1						
7		5		9		5		1					
8	5		14		14		6		1				
9		14		28		20		7		1			
10	14		42		48		27		8		1		
11		42		90		75		35		9		1	
12	42		132		165		110		44		10		1

³ Bir önceki sırada 0 varsa, oyun orada bitmiştir.

Oyunun ikinci katta (yani birinci atıştan hemen sonra) bitme olasılığı $1/2$; bunu daha önce de görmüştük. Oyun tek sayılı katlarda bitemez, çünkü tek sayılı katlarda 0 yok. Oyun ancak çift sayılı katlarda bitebilir. Dördüncü katta bir tek 0 var. Dolayısıyla oyunun dördüncü katta (yani üçüncü atışta) bitme olasılığı $1/2^3$. Altıncı katta iki tane 0 var. Her sıfır için olasılık $1/2^5$, dolayısıyla oyunun altıncı katta bitme olasılığı $2/2^5$. Sekizinci katta beş tane 0 var. Her sıfır için olasılık $1/2^7$, dolayısıyla oyunun sekizinci katta bitme olasılığı $5/2^7$.

Genel olarak oyunun $2n$ 'yinci katta bitme olasılığı

$$\frac{p_{2n}(0)}{2^{2n-1}}.$$

Demek ki oyunun $2n$ 'yinci katta ve daha önce bitme olasılığı böyle sayıların toplamı olan

$$\frac{p_2(0)}{2} + \frac{p_4(0)}{2^3} + \dots + \frac{p_{2n}(0)}{2^{2n-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{p_{2k}(0)}{2^{2k-1}}$$

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
2	1	1							
4	1	2	1						
6	2	5	4	1					
8	5	14	14	6	1				
10	14	42	48	27	8	1			
12	42	132	165	110	44	10	1		
14	132	429	572	429	208	65	12	1	
16	429	1430	2002	1638	910	350	90	14	1

Yukarıdaki tabloya uzun süre, ama oldukça uzun bir süre bakarsanız, $p_{2n}(2k)$ sayılarını tahmin edebilirsiniz: Eğer $n > 1$ ise

$$(5) \quad p_{2n}(0) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1},$$

ve $1 \leq k \leq n$ ise

$$(6) \quad p_{2n}(2k) = \frac{k}{n} \binom{2n}{n-k}.$$

Bu formüller sihirbazın şapkasından çıkan tavşanlar gibi sunuldu, ama okur bana inanmak zorunda

dir. Dolayısıyla oyunun sonlu bir aşamada bitme olasılığını bulmak için yukarıdaki eşitlikte $n = \infty$ almak gerekiyor, yani n 'yi sonsuza götürmek. Demek ki oyunun sonlu bir aşamada bitme olasılığı

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{2k}(0)}{2^{2k-1}} = 1$$

dir. Biz bu sayının 1 olduğunu önceden biliyoruz. $p_{2k}(0)$ sayıları kaçtır? Bu sayıların bir formülünü bulsak ve bu formülü (4) eşitliğine yerleştiresek, (4) eşitliği ilginç bir eşitlik olur mu? Evet, olur! $p_{2k}(0)$ sayılarını bulalım. $p_{2n}(0)$ sayılarını bulmak için, her $0 \leq k \leq n$ için, $p_{2n}(2k)$ sayısını bulmalıyız. Yukarıdaki tablodaki tek sayılı sıraları ve sütunları atalım ki dikkatimizi $p_{2n}(2k)$ sayılarına tam olarak verebilelim:

değil, bu formüllerin doğruluğunu, (1), (2), (3) formüllerini kullanarak, n üzerinde tümevarımla kanıtlayabilir. Yukarıda bulduğumuz (5) eşitliğini (4) eşitliğine yerleştirelim; elde ettiğimiz eşitlikle biraz oynayacak olursak,

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)4^k} = 1$$

eşitliğini buluruz. Güzel bir eşitlik.

GERÇEL SAYILARDA DOKUZ TEMEL EŞDEĞERLİK

Nurettin Ergun *

1. Amaç

Matematikteki temel ve önemli kavram ve yöntemlerin pek çoğu gerçel (= reel) sayıların ana özelliklerinden soyutlama ve genelleştirme yoluyla elde edilmiştir dersek hiç abartmış olmayız. Gerçel sayıların kesin, sağlıklı ve eksiksiz inşalarına ulaşmak matematiğin yüzlerce yılını almıştır. Bu nitelikteki inşalara ancak 1870'li yıllarda Heine, Dedekind ve Cantor gibi usta matematikçilerin çabalarıyla ulaşılmıştır. Peki gerçel sayılar nedir? Gerçel sayılar herşeyden önce tam sıralanmış, değişmeli bir Arşimet cisimidir. Yani gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde değişmelilik özelliğine sahip çarpma ve toplama işlemleri tanımlıdır ve bu işlemler *cisim* aksiyomlarını gerçeklerler. Okuyucunun cisim adı verilen cebirsel yapıyı az çok tanıdığını varsayıyoruz. Sonra $\mathbb{R}$ kümesinin çarpma ve toplama işlemlerine göre kapalı olan öyle özel bir $\mathbb{R}^+$ altkütmesi vardır ki, her bir $x \in \mathbb{R}$ için ya $x \in \mathbb{R}^+$, ya $x = 0$, ya da $-x \in \mathbb{R}^+$ bağdaşmaz durumlarından birisi geçerlidir. Bu özel altküme pozitif gerçel sayılar kümesi denir. Ancak ve yalnız $x - y$ bu kümeye ait olduğunda $y < x$ yazılır. Dikkat edilirse ya $x < y$, ya $x = y$, ya da $y < x$ gerçekleşecek, başka bir deyişle farklı iki gerçel sayıdan birisi mutlaka diğerinden "büyük" olacaktır. Bu biçimde tanımlanan büyüklük küçüklük ilişkisine belirlenen sıralamaya *doğrusal sıralama* ya da *tam sıralama* denir. Ancak $x = y$ ya da $x < y$ geçerliyse $x \leq y$ yazılır. Üstelik herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ için $x < n$ olacak biçimde bir n doğal sayısı vardır. Bu son özelliğe de gerçel sayıların *Arşimet özelliği* denir. Peki bu cebirsel özellikler gerçel sayıları olağanüstü önemli kılmaya yeterli midir? Hayır! Onu gerçekten olağanüstü yapan bu yazıda kısaca değinilecek olan dokuz temel özelliğidir. Bu temel özelliklerin matematiksel mantık açısından tümüyle eşdeğer olduklarını kanıtlamak bu yazının amacı olacaktır. Bu yazıyı, örneğin $a < b$ ve $c \in \mathbb{R}^+$ ise $ac < bc$

gerçeklendiğini kanıtlayabilen ve kavrama isteği ile okuyan her okuyucu kolaylıkla kavrayacaktır inancındayız. Şimdi bu temel 9 özelliği görüp tanımadan önce bazı hazırlıklar yapalım.

2. Hazırlık

$\{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesine $\mathbb{N}$ diyeceğiz. $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ eşitsizliklerini gerçekleyen tüm x gerçel sayılarının kümesini her zaman olduğu gibi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ işaretiyle göstereceğiz. Bu kümeye x_0 gerçel sayısının ε yarıçaplı *açık dolay* ya da *açık komşuluğu* denir. Bu dolay bu yazıda $D(x_0, \varepsilon)$ işaretiyle gösterilecektir. $\mathbb{R}$ kümesinin bir A altkütmesine, ancak ve yalnız, her elemanının uygun bir açık dolayını kapsayabiliyorsa *açık küme* denir. O halde $\mathbb{R}$ kümesinde boş olmayan herhangi bir açık kümenin sayılamaz sonsuz elemanı vardır, neden? $\mathbb{R} \setminus A$ tümleyen kümesi açık küme ise ancak bu takdirde A kümesine *kapalı küme* denir. (a, b) ve (a, ∞) şeklindeki aralıklar, $a < b$ ne olursa olsun açık kümedirler. Gerçekten $x \in (a, b)$ ise, $\varepsilon_x < \min\{x - a, b - x\}$ gerçekleyen pozitif ε_x gerçel sayısı sayesinde $a < x - \varepsilon_x < x + \varepsilon_x < b$ ve dolayısıyla $D(x, \varepsilon_x) \subseteq (a, b)$ gerçeklendiğini kolayca görebiliriz. $y \in (a, \infty)$ ise $\delta_y < y - a$ gerçekleyen pozitif δ_y sayesinde $a < y - \delta_y < y + \delta_y$ ve sonunda $D(y, \delta_y) \subseteq (a, \infty)$ bulunur. Gerek $[0, 1)$ aralığı, gerekse $(0, 1)$ aralığındaki tüm rasyonel sayıların kümesi ne açık ne de kapalıdır, neden? Peki acaba $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ altkütmesi neden kapalıdır? Çünkü tümleyeni olan

$$(-\infty, 0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \cup (1, \infty)$$

kümesi açıktır, peki neden? Evet haklısınız, herhangi sayıda açık kümenin birleşiminin açık olduğunu kanıtlamak güç değildir. $(-\infty, a)$ aralığının açık ve dolayısı ile tümleyeni $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ açık kümesi olan $[a, b]$ aralığının kapalı olduğunu gözlemek de kolaydır. $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon, \delta\}$

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

olmak üzere daima $D(x, \varepsilon^*) \subseteq D(x, \varepsilon) \cap D(x, \delta)$ olduğunda iki açık kümenin kesişiminin de açık olduğunu kolayca gözlemleyebiliriz. Bir takım açık kümelerin oluşturduğu bir $\mathcal{G}$ ailesine, ancak ve yalnız $A \subseteq \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}\}$ kapsamayı geçerliyse, başka bir deyişle her $a \in A$ için $a \in G$ gerçekleşecek biçimde bir $G \in \mathcal{G}$ bulunabiliyorsa, A kümesinin bir *açık örtülüşü* denir. Örneğin kolayca gözlemlenebileceği gibi

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ve

$$\mathcal{G}^* = \left\{ \left(\frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n-1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

açık aralık aileleri sırasıyla $(0, 1)$ ve $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ kümelerinin birer açık örtülüşüdür. Oysa yine kolayca görülebileceği gibi $\mathcal{G}$ ailesinin uygun sonlu sayıda üyesinin $(0, 1)$ aralığını "örtbilmesi" olanaklı değildir. Aynen $\mathcal{G}^*$ ailesindeki hiçbir sonlu üyeli altaile E kümesini "örtemez." Her açık örtülüşünden seçilmiş uygun sonlu sayıda üye ile örtülebilmeyi başaran bir altkümeye *tıkız küme* (= kompakt küme) denir. Demek ki $(0, 1)$ aralığı ile $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ kümesi tıkız değildir. Dikkat edilirse

$$\mathbb{R} = (-1, 1) \cup (-2, 2) \cup (-3, 3) \cup \dots$$

geçerlidir; oysa sağ yandaki açık aralıkların yalnızca sonlu tanesi ile $\mathbb{R}$ kümesini örtmek olanaklı değildir. Demek ki $\mathbb{R}$ kümesi de tıkız değildir. Peki hangi altkümeler tıkızdır? Bekleyelim! Bir x_0 gerçel sayısına, ancak her $0 < \varepsilon$ için $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ açık dolayında A kümesinden sonsuz tane eleman bulunabilirse, A kümesinin bir *yığılma noktası* denir. Her dolayda A kümesinden sonsuz tane eleman bulunması koşuluyla her dolayda $A \setminus \{x_0\}$ kümesinden en az bir eleman bulunması koşulu, belki şaşırtıcı gelebilir ama, eşdeğer koşullardır. Bu eşdeğerliği göstermeyeceğiz. Bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez. Aslında bir gerçel sayılar dizisinin yığılma noktaları, o dizinin yakınsak olan tüm alt-dizilerinin limit noktalarıdır. Söz gelimi $a_n = (-1)^n$ dizisinin yığılma noktaları $x = -1$ ve $x = 1$ 'dir; oysa $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{-1, 1\}$ kümesinin, yukarıda anlatılan nedenlerden ötürü hiç yığılma noktası yoktur. Tüm elemanları birbirinden farklı bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayılar dizisinin tüm yığılma noktaları ile $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ kümesinin

yığılma noktaları ise tastamam aynıdır. Okuyucunun, ancak bir ve yalnız bir yığılma noktasına sahip olan bir gerçel sayılar dizisinin yakınsak olabildiği gerçeğini bildiğini varsayıyoruz. Bu ve benzeri bilgiler için [1]'e bakılabilir. Aynı yazıda supremum ve infimum kavramları da tanımlanmaktadır. Dikkat: Herhangi bir K kapalı altkümesinin tüm yığılma noktaları zorunlu olarak K kümesine ait olurlar; çünkü $\mathbb{R} \setminus K$ açık kümesinin tüm noktalarının, K kümesi ile ayrılan, yani $\mathbb{R} \setminus K$ tarafından kapsanan, en az bir açık dolay vardı, anımsadık değil mi? Son olarak, $[a, b]$ şeklindeki bir aralık tarafından kapsanabilen bir altküme gerçel sayılarda *sınırlı küme* denildiğini belirtelim. Yukarıda sözü geçen E kümesi sözgelimi sınırlıdır, neden? Şimdi de birkaç temel eşitsizliği kısaca elde edelim. $n \in \mathbb{N}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ ne olursa olsun geçerli olan

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

özdeşliğini göstermek çok kolaydır; sağ yandaki ikinci parantez içindeki tüm terimleri önce x ile sonra $-y$ ile çarpıp gerekli kısaltmaları yapmak yeterlidir. Hem x ve hem de y sıfırdan farklı olduklarında, sözü edilen ikinci parantez içinde toplama katılan terim sayısı n 'dir. O halde x pozitif gerçel sayısı ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

$$n \leq (1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1$$

olduğundan, yukardaki özdeşlik nedeniyle kolayca

$$(1+x)^n - 1 = (1+x)^n - 1^n = x((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1)$$

ve sonuçta ünlü Bernoulli eşitsizliği

$$1 + nx \leq (1+x)^n \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

elde edilir.¹ Dikkat edilirse özellikle $x = 1$ alarak $n < 1 + n \leq 2^n$ bulunur. Benzer biçimde aynı özdeşlik ve benzer düşüncelerle $0 < x < 1$ için önce $1 - (1-x)^n \leq nx$ ve dolayısıyla $1 - nx \leq (1-x)^n$ geçerli olduğunu görebiliriz. İki teriminin açılım bağıntısı olan

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

¹ Bu eşitsizlik aslında $-1 < x$ gerçekleyen tüm x gerçel sayıları için geçerlidir.

ve onun kolay bir sonucu olan

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

sanıyoruz ki okur tarafından bilinmektedir.

3. Dokuz Temel Özellik

(1) **Dedekind kesim özelliği:** $\mathbb{R}$ kümesi, iki birden boştan farklı ve her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a < b$ gerçekleştirilecek biçimde A ve B altkümelerinin birleşimi ise, ya

$$A = (-\infty, \gamma], \quad B = (\gamma, \infty),$$

ya da

$$A = (-\infty, \gamma), \quad B = [\gamma, \infty)$$

gerçeklenecek biçimde (kesim sayısı adını alan) tek bir γ gerçel sayısı vardır.

(2) **Supremum özelliği:** $\mathbb{R}$ 'nin boştan farklı ve üstten sınırlı her altkümelerinin (tek) bir supremumu vardır.

(3) **İnfimum özelliği:** $\mathbb{R}$ 'nin boştan farklı ve alttan sınırlı her altkümelerinin (tek) bir infimumu vardır.

(4) **Bağlantılılık özelliği:** $\mathbb{R}$ kümesinde hem açık hem kapalı hiç bir özaltküme yoktur.

(5) **SMDY özelliği:** $\mathbb{R}$ kümesindeki her sınırlı monoton dizi yakınsaktır.

(6) **Heine-Borel özelliği:** $\mathbb{R}$ kümesinde kapalı ve sınırlı her aralık tıktır.

(7) **Bolzano-Weierstrass özelliği:** Sonsuz noktalı her sınırlı gerçel sayılar kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

(8) **Cantor azalan aralıklar özelliği:** Her $n \in \mathbb{N}$ için $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ gerçekleyen ve uzunlukları sıfıra yakınsayan herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıklar dizisinin kesişim kümesi tek elemanlıdır.

(9) **Tamlık özelliği:** $\mathbb{R}$ kümesindeki her Cauchy dizisi yakınsaktır.

4. Eşdeğerlik Kanıtlaması

Yukarıdaki dokuz özellik birbirlerine eşdeğerdirler. Kanıtlama (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) ve (2) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) gerektirme zincirleri gösterilerek yapılacaktır. (2) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$ (2) gerektirme zinciri ise, Cauchy dizilerine ait temel bazı bilgileri elde etmek bu yazıyı uzatacağı için yapılmayacaktır.

(1) $\Rightarrow$ (2): Boştan farklı ve üstten sınırlı herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümelerinin kesin üst sınırlar kümesi olan

$$\{z \in \mathbb{R} : \text{her } a \in A \text{ için } a < z\} \\ = \{z \in \mathbb{R} : A \subseteq (-\infty, z)\}$$

kümesi U_A ile gösterilsin. x_0 gerçel sayısı A kümesinin bir üst sınırı ise $1 + x_0$ gerçel sayısı U_A kümesine aittir. $A \cap U_A = \emptyset$ nedeniyle $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R} \setminus U_A$ ve üstelik her $y \in \mathbb{R} \setminus U_A$ ve her $x \in U_A$ için $y < x$ gerçekleştiği kolayca görülebildiğinden, (1) özelliği nedeniyle bu parçalanışın γ gibi tek bir kesim sayısı vardır. $\gamma = \sup A$ olur, neden? Çünkü ister $\mathbb{R} \setminus U_A = (-\infty, \gamma)$ ve $U_A = (\gamma, \infty)$, isterse $\mathbb{R} \setminus U_A = (-\infty, \gamma]$ ve $U_A = (\gamma, \infty)$ gerçekleşmiş olsun, her $a \in A$ için $a \leq \gamma$ gerçekleştiği ve herbir $0 < \varepsilon$ için $\gamma - \varepsilon \notin U_A$ nedeniyle $\gamma - \varepsilon \leq a$ gerçekleyen bir $a_\varepsilon \in A$ elemanının varlığı kolaylıkla görülecektir. Bunlar $\gamma = \sup A$ demektir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Altan sınırlı ve boş olmayan bir $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümeleri için $-A = \{-a : a \in A\}$ kümesinin boş olmadığını, üstten sınırlı olduğunu ve $-\sup(-A) = \inf A$ gerçekleştiğini görmek güç değildir. Ashnda (2) ve (3) özellikleri denktir, neden?

(3) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4): $A \neq \mathbb{R}$ altkümelerinin hem açık hem kapalı olduğunu varsayalım. Bir $x_0 \notin A$ gerçel sayısı var olduğundan, her $a \in A$ için ya $a < x_0$, ya da $x_0 < a$ gerçekleşir. O halde $A = (A \cap (-\infty, x_0)) \cup ((x_0, \infty) \cap A)$ olur. $A \cap (-\infty, x_0)$ kesişim kümesi boş olmak zorundadır. Apaçıktır ki x_0 gerçel sayısı ile üstten sınırlı olan bu açık küme boş olmasaydı, (3) $\Leftrightarrow$ (2) özelliği nedeniyle $\alpha = \sup(A \cap (-\infty, x_0))$ supremumu var olacak, $\alpha \leq x_0$ gerçekleştirilecek ve üstelik α gerçel sayısı A 'nın bir yığılma noktası olacaktı; çünkü her $0 < \varepsilon$ için $\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon < x_0$ ve dolayısıyla $\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon < \alpha$ gerçekleştirilecek biçimde bir tane (ashnda sonsuz tane) $a_\varepsilon \in A$ vardır, neden? A kapalı olduğundan $\alpha \in A$ ve sonuçta $\alpha < x_0$ bulunacaktı. O halde A açık olduğundan $D(\alpha, \delta_0) \subseteq A$ gerçekleyen $0 < \delta_0$ vardır. Şimdi

$$\alpha < y < \min\{x_0, \alpha + \delta_0\}$$

gerçekleyen y gerçel sayısı için

$$y \in [\alpha, \alpha + \delta_0] \cap (-\infty, x_0) \subseteq A \cap (-\infty, x_0)$$

nedeniyle $y \leq \alpha$ çelişkili sonucu doğacaktı. Tümöyle benzer düşüncelerle $(x_0, \infty) \cap A$ kesişim kümesi boş olmalıdır. Sonuçta bunların birleşimi olan A boş olmak zorundadır. Demek ki $\mathbb{R}$ 'nin

boş olmayan hiçbir özaltkümresi hem açık hem kapalı olamaz.

(4) $\Rightarrow$ (1): Boştan farklı A ve B altkümeleri (i) $\mathbb{R} = A \cup B$ ile (ii) her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a < b$ koşullarını gerçeklesin. Her $a \in A$ için $(-\infty, a) \subseteq A$ ve her $b \in B$ için $(b, \infty) \subseteq B$ gerçekleştiği apaçıktır. Bu parçalanışın bir kesim sayısı tanımlanamasaydı, özellikle her $a \in A$ için $a < x_a$ gerçekleyen en az bir $x_a \in A$ var olurdu, neden? Benzer olarak her $b \in B$ için $y_b < b$ gerçekleyen bir $y_b \in B$ var olurdu.

$$\delta_a = \frac{x_a - a}{2} \quad \text{ve} \quad \delta_b = \frac{b - y_b}{2}$$

yazılırsa her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $D(a, \delta_a) \subseteq A$ ve $D(b, \delta_b) \subseteq B$ gerçekleşirdi. Sonuçta A ve B kümeleri açık (ve birbirlerinin tümleyeni olduklarından) aynı zamanda kapalı olurlardı. Bu (4) özelliğine aykırıdır.

(2) $\Rightarrow$ (6): $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ açık kümeler ailesi tarafından örtülsün. Ancak ve yalnız bir $x \in [a, b]$ gerçel sayısı için $[a, x]$ aralığı bu ailenin sonlu tane uygun üyesi tarafından örtülebiliyorsa $x \in A$ yazılsın. Amacımız $b \in A$ göstermektir. Böyle tanımlanan A kümesi boş değildir, çünkü $a \in G_{\alpha_0}$ olacak biçimde bir $\alpha_0 \in I$ indisi ve G_{α_0} kümesi açık olduğundan $D(a, \delta_a) \subseteq G_{\alpha_0}$ gerçekleşecek biçimde $0 < \delta_a$ vardır. $(a, a + \delta_a) \subseteq A$ kapsaması apaçıktır. $A \subseteq [a, b]$ ve (2) özelliği nedeniyle $\xi = \sup A$ vardır ve $a + \frac{\delta_a}{2} \leq \xi \leq b$ olur. $\xi < b$ olsaydı $\xi \in G_{\alpha_1}$ gerçekleyen pozitif ε_0 sayesinde

$$\begin{aligned} \left[a, \xi + \frac{\varepsilon_0}{2}\right] &= \left[a, \xi - \frac{\varepsilon_0}{2}\right] \cup \left[\xi - \frac{\varepsilon_0}{2}, \xi + \frac{\varepsilon_0}{2}\right] \\ &\subseteq [a, y_0] \cup G_{\alpha_1} \end{aligned}$$

elde edilirdi. Burada, supremum tanımı gereği var olan $y_0 \in A$ elemanı

$$a < \xi - \frac{\varepsilon_0}{2} < y_0 < \xi = \sup A$$

gerçeklemektedir. Sonuçta $[a, \xi + \frac{\varepsilon_0}{2}]$ aralığı $\mathcal{G}$ ailesinin sonlu tane üyesi tarafından örtülebilir olduğundan $\xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \in A$ ve $\xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \leq \sup A = \xi$ çelişkisi doğardı. Demek ki hem $\xi = b$ ve hem de $b \in A$ gerçekleşmesi gerektiği artık anlaşılmıştır, nasıl?

(6) $\Rightarrow$ (7): Sonsuz elemanlı $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümresi $A \subseteq [a, b]$ gerçeklesin. A kümesinin hiç yığılma noktası olmasaydı her $x \in A$ için öyle bir $\varepsilon_x \in \mathbb{R}^+$ olurdu ki $(D(x, \varepsilon_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$ ve

dolayısıyla $D(x, \varepsilon_x) \cap A = \{x\}$ gerçekleşir. $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı tüm bu $[x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$ açık aralıkları ile $\mathbb{R} \setminus A$ açık kümesinin (bu küme neden açıktır?) oluşturduğu aile tarafından örtülür, nasıl? Oysa bu örtülüşün herhangi bir üyesi A kümesinden en fazla bir eleman kapsadığından bu ailenin sonlu sayıda üyesinin $[a, b]$ aralığını (ve sonuçta A kümesini) örtmesi (6) hipotezine aykırıdır. Demek ki A 'nın en az bir yığılma noktası var olmalıdır.

(7) $\Rightarrow$ (5): $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ gerçel sayılar dizisi monoton (örneğin monoton artan) ve sınırlı olsun. O halde $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq \alpha_0$ gerçekleşir. Bu dizinin tüm elemanlarının kümesi $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ apaçıktır ki $A \subseteq [a_1, \alpha_0]$ nedeniyle sınırlıdır. Eğer A kümesinin sonsuz elemanı varsa (7) özelliği nedeniyle A kümesinin var olan yığılma noktası $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin yığılma noktası ve aslında limit noktası olur, neden? A kümesinin yalnızca sonlu tane elemanı varsa, her $n \geq n_0$ için $a_n = a_{n_0}$ gerçekleşecek biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır ve dizi elbette a_{n_0} gerçel sayısına yakınsar.

(5) $\Rightarrow$ (2): Üstten sınırlı ve boş olmayan $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümresinin elbette x_0 gibi bir kesin üst sınırı vardır. Şimdi $a_0 \in A$ alınsın, sabit tutulsun ve $0 < \delta = x_0 - a_0$ yazılsın. U_A her zaman olduğu gibi A 'nın kesin üst sınırlarının kümesini gösterebilir.

$$\begin{aligned} \text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{n+1} &\leq x_n \leq x_0, \\ x_n &\in U_A \quad \text{ve} \quad x_n - \frac{\delta}{2^n} \notin U_A \quad (*) \end{aligned}$$

gerçekleyen bir $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ kesin üst sınırlar dizisinin varlığını tümevarımla tanımlayabiliriz. $[a_0, x_0]$ aralığının orta noktası $\frac{1}{2}(x_0 + a_0) \in U_A$ ise $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + a_0)$, yok eğer $\frac{1}{2}(x_0 + a_0) \notin U_A$ ise $x_1 = x_0$ tanımlansın. Kolaylıkla $x_1 \leq x_0$, $x_1 \in U_A$ ve $x_1 - \frac{\delta}{2} \notin U_A$ gerçekleşir. (*) koşulları gerçekleşecek şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanımlanmış olsun. $[x_n - \frac{\delta}{2^n}, x_n]$ aralığının orta noktası olan $\frac{1}{2}(2x_n - \frac{\delta}{2^n}) = x_n - \frac{\delta}{2^{n+1}}$ eğer U_A kümesine aitse $x_{n+1} = x_n - \frac{\delta}{2^{n+1}}$; ait değilse $x_{n+1} = x_n$ tanımlansın. Yine kolayca $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} \in U_A$ ve $x_{n+1} - \frac{\delta}{2^{n+1}} \notin U_A$ gözlenecektir. Monoton azalan $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin (5) özelliği ile varlığı güvence altına alınan $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ limit noktası, $\ell = \sup A$ gerçektir; çünkü her $a \in A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a < x_n$ nedeniyle kolayca $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ geçerlidir ve üstelik $0 < \varepsilon$ verildiğinde Arşimet özelliği nedeniyle var olan ve $\frac{\delta}{\varepsilon} < n$ gerçekleyen $n \in \mathbb{N}$ yardımıyla $\frac{\delta}{2^n} < \varepsilon$ ve

$\ell - \varepsilon \leq x_n - \varepsilon < x_n - \frac{\delta}{2^n}$ ve $x_n - \frac{\delta}{2^n} \notin U_A$ nedeniyle $\ell - \varepsilon < x_n - \frac{\delta}{2^n} < a_n$ olacak biçimde bir $a_n \in A$ var olmak zorundadır.

5. Uyarı ve Bir Uygulama

Gerçel sayıların Dedekind kesim özelliği gerçekleştirilecek biçimde bir inşası ilk kez büyük Alman usta Richard Dedekind tarafından 1872'de verilmiştir. Dolayısıyla gerçel sayılar (i) tam sıralanmış, (ii) değişmeli, (iii) Dedekind kesim özelliğine sahip, bir (iv) Arşimet cismidir. Sonuçta $\mathbb{R}$ kümesi için (1) özelliği ve dolayısıyla yukarıdaki tüm dokuz özellik geçerlidir ve yukarıda verilen eşdeğerlik kanıtlaması, aynı zamanda bu özelliklerin $\mathbb{R}$ kümesindeki geçerliliklerinin kanıtlaması olmaktadır. Şimdi supremum özelliğinin basit fakat olağanüstü önemli bir uygulamasını görelim: Köklü değerlerin (radikallerin) varlığı!

Önerme. $0 < a$ gerçel sayısı ve n sabit doğal sayısı verildiğinde $x^n = a$ gerçekleyen (tek) bir pozitif x gerçel sayısı vardır.

Kanıtlama. $E = \{y \in \mathbb{R} : y^n < a\}$ kümesi boş değildir, çünkü $0 \in E$ 'dir. Arşimet özelliği nedeniyle $\frac{1}{n_0} < n_0$ gerçekleyen n_0 doğal sayısı için $(\frac{1}{n_0})^n < \frac{1}{n_0} < a$ nedeniyle $\frac{1}{n_0} \in E$ gerçekleşir. O halde Bernoulli eşitsizliği yardımıyla $0 < x = \sup E \leq 1 + a$ geçerlidir, neden? Amacımız $x^n < a$ ve $a < x^n$ gerçekleşemeyeceğini kanıtlamak olacaktır. $x^n < a$ geçerli olsaydı, Arşimet özelliği ile $\frac{(2^n-1)(1+x)^{n-1}}{a-x^n} < m$ gerçekleyen $m \in \mathbb{N}$ var olur ve sonuçta

$$\left(x + \frac{1}{m}\right)^n = x^n + \binom{n}{1} \frac{x^{n-1}}{m} + \binom{n}{2} \frac{x^{n-2}}{m^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{m^n}$$

$$\begin{aligned} & + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{m^n} \\ & < x^n + \frac{(1+x)^{n-1}}{m} \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \right] \\ & = x^n + \frac{(2^n-1)(1+x)^{n-1}}{m} < a \end{aligned}$$

nedeniyle $x + \frac{1}{m} \leq \sup E = x$ çelişkisi doğardı. Eğer $a < x^n$ olsaydı, bu kez de $\frac{n}{x} + \frac{nx^{n-1}}{x^n-a} < N$ gerçekleyen $N \in \mathbb{N}$ sayesinde

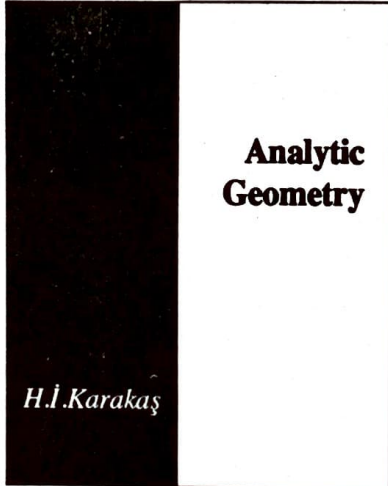
$$\left(x - \frac{1}{N}\right)^n = x^n \left(1 - \frac{1}{Nx}\right)^n \geq x^n \left(1 - \frac{n}{Nx}\right) > a$$

olduğunu gözleyerek, supremum tanımı gereği var olan uygun bir $y \in E$ yardımıyla $a < \left(x - \frac{1}{N}\right)^n < y^n$ ve sonuçta $y \notin E$ çelişkisi doğardı. Demek ki $x^n = a$ gerçekleşmelidir. Varlığı kanıtlanan bu pozitif x gerçel sayısı apaçıktır ki tektir ve $\sqrt[n]{a}$ işareti ile gösterilir.

Not. Dedekind'in inşasını öğrenmek isteyen okuyuculara aşağıdaki iki kitabı salık veririz. [2] bir klasik, [3] daha çağdaştır.

KAYNAKÇA

- [1] Y. Avcı & N. Ergun, *Limitler, Limitler, Matematik Dünyası*, 4, Sayı 1, 12-16 (1994).
- [2] E. Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea, 1951.
- [3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3. baskı, McGraw-Hill, New York, 1976.



- 1 Fundamental Principle of Analytic Geometry
- 2 Cartesian Coordinates
- 3 Vectors in the Plane
- 4 Conic Sections
- 5 Vectors in Three Space

254 sayfa

İsteme Adresi: ODTÜ Matematik Bölümü

MEKANİK KAVRAMLARININ GEOMETRİ PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Mehmet Tagiyev & Belgin Mazlumoğlu *

Bana bir destek noktası verin; dünyayı yerinden oynatayım.

Arşimet

1. Temel Kavramlar ve Örnekler

M.Ö. 3. yüzyılda yaşamış olan Arşimet, mekaniğin sade ve açık bir kavramı olan ağırlık merkezini geometri problemlerinin çözümünde ustalıkla kullanmıştır. Bu yazımızda Arşimet'in metodu nasıl kullandığını inceleyeceğiz.

Ağırlık merkezi kavramını ve onun özelliklerinin ciddi matematiksel tanımlarını vermeden önce, ağırlık merkezinin sezgisel olarak açık olan manasını anlatalım.

Aşağıda, tamamen mekanik düşüncelerden doğan maddesel nokta, maddesel noktalar sistemi, kütle, v.s., gibi terimleri kullanacağız. *Maddesel nokta* denilince anlaşılması gereken, kütlesi çok küçük hacimde toplanmış cisim olmalıdır; veya kütle ile teçhiz edilmiş geometrik bir nokta anlaşılmalıdır. Eğer A noktası bir m kütlesi ile teçhiz edilmişse, bunu (m, A) veya mA şeklinde göstereceğiz. $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktalar sistemi sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_n$ kütleleriyle teçhiz olunmuşsa bunu $(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$ şeklinde göstereceğiz.

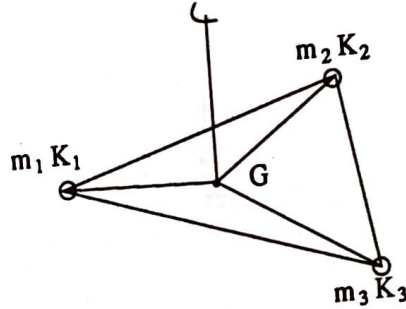
Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki küçük K_1 ve K_2 kürelerini gözönüne alalım ve onların kütesiz sert bir çubuk vasıtasıyla birleştirildiklerini farzedelim. O zaman bu çubuğun üzerinde öyle bir G noktası vardır ki, çubuk bu noktadan asıldığında küreler dengede kalır (Şekil 1). G 'nin bu sistemin ağırlık merkezi olduğunu mekanikten biliyoruz.



Şekil 1

Şimdi kütleleri m_1, m_2, m_3 olan ve doğru-

sal olmayan K_1, K_2, K_3 kürelerinin kütesiz sert çubuklar yardımıyla (Şekil 2) birleştirildiğini farzedelim. Bu durumda $K_1K_2K_3$ üçgeninde öyle bir G noktası vardır ki sistem bu noktadan asıldığında dengede kalır. $K_1K_2K_3$ üçgeninin bu özel noktasına (m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3) sisteminin ağırlık merkezi denir.



Şekil 2

Maddesel noktaları herhangi bir sayıda alıp, oluşan sistemin ağırlık merkezini bulmak mümkündür. Şimdilik (m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3) sistemiyle yetinelim ve ağırlık merkezinin sezgisel olarak açık olan aşağıdaki özelliklerini kabul edelim:

- (G1) Herhangi (m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3) sisteminin tek bir ağırlık merkezi vardır.
- (G2) (m_1K_1, m_2K_2) sisteminin ağırlık merkezi G , bu noktaları birleştiren doğru parçasının üzerindedir ve bu noktanın yeri Arşimet'in ünlü "kol kuralı" ile bulunabilir:

$$m_1d_1 = m_2d_2$$

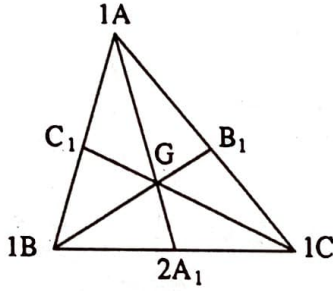
- (G3) Eğer (m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3) sisteminde herhangi iki noktayı (örneğin m_1K_1, m_2K_2 noktalarını) ayırıp onların ağırlık merkezi olan G_1 noktasına $m_1 + m_2$ kütlelerini yerleştirirsek, yani (m_1K_1, m_2K_2) alt sistemi yerine $((m_1 + m_2)G_1)$ sistemini yazarsak, şimdi elde ettiğimiz $((m_1 +$

* Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

$m_2)G_1, m_3K_3)$ sisteminin ağırlık merkezi ile (m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3) sisteminin ağırlık merkezi aynıdır.

Teori bu kadar. Şimdi mekaniğin basit ve açık gerçeklerinden kaynaklanan bu teori ile aşağıdaki geometri problemlerini çözelim. İlk önce bir üçgenin kenarortaylarının özelliklerini bulalım.

Teorem 1. (Arşimet, M.Ö. 3. yy) Herhangi bir üçgenin üç kenarortayı bir noktada kesişirler ve kesişme noktasında 2:1 oranında bölünürler.



Şekil 3

Kanıt. ABC üçgeninin A, B, C tepe noktalarına 1'er birim kütle yerleştirelim. (G1) özelliğine göre $(1A, 1B, 1C)$ sisteminin tek bir G ağırlık merkezi vardır. (G3) özelliğine göre $(1B, 1C)$ sisteminin toplam kütlelerini onların ağırlık merkezine yerleştirirsek tüm sistemin ağırlık merkezi değişmez. B ve C noktalarının kütlesi aynı olduğundan (G2)'ye göre onların ağırlık merkezi BC 'nin orta noktası olacaktır:

$$1 \times |BA_1| = 1 \times |A_1C| \quad (\text{kol kuralı}).$$

A_1 noktasına B ve C noktalarının toplam kütlesi olan $1 + 1 = 2$ birim kütleyi yerleştirerek $(1A, 2A_1)$ sistemine bakalım. O zaman $(1A, 2A_1)$ sisteminin ağırlık merkezi ile $(1A_1, 1B, 1C)$ sisteminin ağırlık merkezi aynı olacaktır. $(1A, 2B)$ sisteminin ağırlık merkezi AA_1 doğru parçası üzerindedir ve gene kol kuralını kullanarak

$$1 \times |AG| = 2 \times |GA_1|$$

ve buradan da

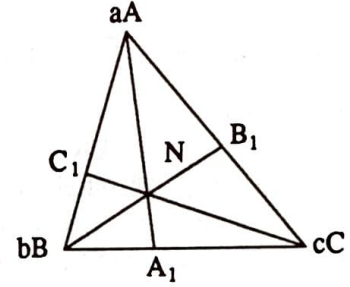
$$|AG| : |GA_1| = 2 : 1$$

buluruz.

Benzer olarak, $1A$ ve $1B$ noktalarının ağırlık merkezi $2C_1$ noktasıdır ve $(2C_1, 1C)$ sistemi ile tüm $(1A, 1B, 1C)$ sisteminin ağırlık merkezi de yine G noktası olmak zorundadır. Bu durumda $G \in [CC_1]$ ve $|CG| : |GC_1| = 2 : 1$

elde ederiz. Aynı metotla $G \in [BB_1]$ ve $|BG| : |GB_1| = 2 : 1$ olduğunu görmek çok kolaydır. Böylelikle $G \in [AA_1] \cap [BB_1] \cap [CC_1]$ olduğunu anlarız ki bu da bize kenarortayların bir noktada kesiştiklerini ve birbirlerini 2 : 1 oranında böldüklerini gösterir.

Teorem 2. Herhangi bir ABC üçgeninde $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ açıortayları bir N noktasında kesişirler ve birbirlerini $|AN| : |NA_1| = (b + c) : a$, $|BN| : |NB_1| = (a + b) : b$, $|CN| : |NC_1| = (b + a) : c$ oranlarında bölerler.



Şekil 4

Kanıt. A, B, C noktalarına sırasıyla a, b, c kütlelerini yerleştirelim ve (aA, bB, cC) sistemine bakalım. Bu sistemin (G1) özelliğine göre tek bir ağırlık merkezi vardır. (G3) özelliğine göre B ve C noktalarının ağırlık merkezini bulup oraya bu noktaların toplam kütlelerini yerleştirirsek sistemin ağırlık merkezi değişmez. (bB, cC) sisteminin ağırlık merkezi A_1 noktasıdır. Gerçekten de bu noktada Arşimet'in kol kuralı sağlanır:

$$b \times |BA_1| = c \times |A_1C|.$$

(Üçgende açıortay teoremini hatırlayalım!) Şimdi $(aA, (b + c)A_1)$ sistemine baktığımızda tüm (aA, bB, cC) sisteminin ağırlık merkezinin $[AA_1]$ doğru parçası üzerinde olduğunu görürüz; yani $N \in [AA_1]$. Şimdi de $(aA, (b + c)A_1)$ sistemine kol kuralı uygularsak

$$(b + c) \times |NA_1| = a \times |AN|,$$

buradan da

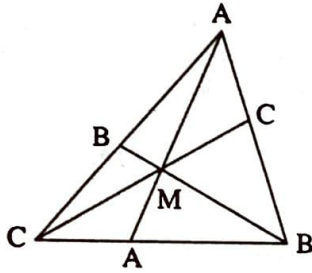
$$|AN| : |NA_1| = (b + c) : a$$

olduğunu görürüz. Benzer olarak $N \in [BB_1]$ ve $N \in [CC_1]$ olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir. Bu da açıortayların bir noktada kesiştiğini ve yukarıda verilen oranları sağladığını göstermiş olur.

Not 1. Üçgenin açıortaylarının kesişme noktasının içteğet çemberin merkezi olduğu bilinen bir gerçektir. Yukarıda kanıtladığımız teoremden ise şöyle bir sonuç daha çıkmaktadır: “Eğer ABC üçgeninin tepe noktalarına sırasıyla a, b, c kütleleri yerleştirilirse elde edilen sistemin ağırlık merkezi içteğet çemberin merkezi olur.”

Örnek. ABC üçgeninin içindeki bir M noktasını üçgenin A, B, C köşelerine birleştiren $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ doğruları çizilmiştir. $|AC_1| : |C_1B| = p$ ve $|AB_1| : |BC| = q$ olsun. Bu durumda $|AM| : |MA_1| = p+q$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. ABC üçgeninin A, B, C köşelerine sırasıyla 1, p ve q yüklerini yerleştirelim; yani $(1A, pB, qC)$ sistemine bakalım. Bu sistemin ağırlık merkezi M noktasıdır.



Şekil 5

Gerçekten de $|AC_1| : |C_1B| = p$ ise $(1A, pB)$ sisteminin ağırlık merkezi $1+p$ kütleli C_1 noktasıdır. $(G3)$ özelliğine göre $(1A, pB, qC)$ ve $((1+p)C_1, qC)$ sistemlerinin ağırlık merkezleri aynıdır. $((1+p)C_1, qC)$ sisteminin ağırlık merkezi $(G2)$ 'ye göre $[CC_1]$ üzerindedir. Benzer olarak $(1A, pB, qC)$ sisteminin ağırlık merkezi $[BB_1]$ üzerindedir, yani ağırlık merkezi $[CC_1]$ ve $[BB_1]$ doğru parçalarının kesişme noktası olan M noktasındadır. A_1 noktasına $p+q$ kütlelerini yerleştirirsek M noktası aynı zamanda $(1A, (p+q)A_1)$ sisteminin de ağırlık merkezi olur. $(G2)$ 'ye göre

$$(p+q) \times |MA_1| = 1 \times |AM|$$

ve buradan da $|AM| : |MA_1| = p+q$ olduğu kanıtlanmış olur.

Soru. Yukarıdaki problemde M noktası $[BB_1]$ ve $[CC_1]$ doğru parçalarını hangi oranda böler?

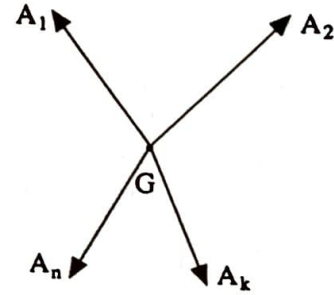
2. Ağırlık Merkezinin Özellikleri

Ağırlık merkezinin matematiksel tanımını verelim ve kanıtlayalım ki herhangi bir maddesel

noktalar sisteminin ağırlık merkezi gerçekten de $(G1)$, $(G2)$ ve $(G3)$ özelliklerine sahiptir.

Negatif kütleli bir maddesel noktaya fiziksel bir mana vermek güç olmasına rağmen biz tanımımızı yaparken kütlelerin herhangi bir reel sayı olmasına izin vereceğiz. Kütleli m olan bir maddesel A noktasını biz matematiksel anlamda m reel sayısı ve bir A noktası olarak düşüneceğiz. Yukarıda olduğu gibi m kütleli maddesel bir A noktasını mA ile göstereceğiz.

Tanım. $m_1A_1, \dots, m_nA_n$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_n \neq 0$ sistemi verilmiş olsun. $m_1\vec{GA_1} + \dots + m_n\vec{GA_n} = \vec{0}$ şartını sağlayan bir G noktasına bu sistemin ağırlık merkezi denir ve $m_1, \dots, m_n$ sayılarına da G ağırlık merkezinin $A_1, \dots, A_n$ sistemine göre barisentrık koordinatları adı verilir.



Şekil 6

Teorem 3. G noktasının $(m_1A_1, \dots, m_nA_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olması için gerek ve yeter şart herhangi bir O noktası için

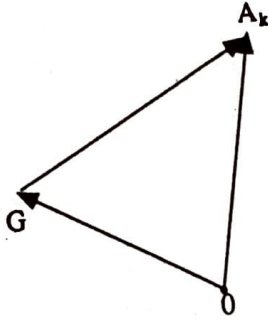
$$(m_1\vec{OA_1} + \dots + m_n\vec{OA_n}) : (m_1 + \dots + m_n) = \vec{OG} \quad (1)$$

olmasıdır.

Kanıt. G noktası $(m_1A_1, \dots, m_nA_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olsun. Bu durumda

$$m_1\vec{GA_1} + \dots + m_n\vec{GA_n} = \vec{0} \quad (2)$$

olur. $k = 1, 2, \dots, n$ için $\vec{GA_k} = \vec{OA_k} - \vec{OG}$ olduğundan bu eşitliği (2) için kullanırsak $m_1(\vec{OA_1} - \vec{OG}) + \dots + m_n(\vec{OA_n} - \vec{OG}) = \vec{0}$, ve $m_1\vec{OA_1} + \dots + m_n\vec{OA_n} = (m_1 + \dots + m_n)\vec{OG}$ bulunur.



Şekil 7

$m_1 + \dots + m_n \neq 0$ olduğuna göre $(m_1 \vec{OA_1} + \dots + m_n \vec{OA_n}) : (m_1 + \dots + m_n) = \vec{OG}$ yazılabilir. Teoremin bir yönü söylediği de budur.

Diğer taraftan, eğer bir G noktası için (1) eşitliği sağlanıyorsa yukarıda yaptıklarımızı ters sıra ile tekrar edersek G noktasının ağırlık merkezi olduğunu görürüz.

Bu teoremden, toplam kütlesi sıfır olmamak kaydıyla, herhangi bir $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezinin var ve tek olduğu derhal anlaşılır. Gerçekten, O herhangi bir nokta olsun. Bu durumda (1) formülü ile tanımlanan bir $\vec{OG}$ vektörünün varlığı ortaya çıkar ve bu vektör de (demek ki G noktası da) tek bir şekilde belirlenir.

Böylelikle (G1) özelliği kanıtlanmış oldu.

Teorem 4. İki noktadan oluşan $(m_1 A_1, m_2 A_2)$ sisteminin ağırlık merkezi G , bu noktaları birleştiren doğru parçasının üzerindedir ve bu noktanın yeri "kol kuralı" ile bulunabilir:

$$|m_1| \cdot |GA_1| = |m_2| \cdot |GA_2|$$



Şekil 8

Kanıt. G noktası $(m_1 A_1, m_2 A_2)$ sisteminin Teorem 3'e göre var ve tek olan ağırlık merkezi olsun. Tanıma göre $m_1 \vec{GA_1} + m_2 \vec{GA_2} = \vec{0}$ 'dan

$$m_1 \vec{GA_1} = -m_2 \vec{GA_2} \quad (3)$$

bulunur. Buradan da $|m_1| \cdot |GA_1| = |m_2| \cdot |GA_2|$ elde ederiz. Başka bir deyişle $|m_1| \cdot d_1 = |m_2| \cdot d_2$ yazabiliriz.

Not 2. (3) numaralı eşitlikten kolayca görüldüğü gibi, eğer $m_1 m_2 > 0$ olursa G noktası $[A_1 A_2]$ doğru parçasının içinde, $m_1 m_2 < 0$ olursa dışındadır.

Bu teorem ile (G2) de kanıtlanmış oldu.

Teorem 5. $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sisteminde, k tane noktadan oluşan $(m_1 A_1, \dots, m_k A_k)$ altsisitemini ayıralım. Bu noktaların ağırlık merkezi G_1 olsun. Bu noktaların toplam kütlesini $m_1 + \dots + m_k \neq 0$ olmak şartıyla) G_1 noktasına koyalım. $(G_1(m_1 + \dots + m_k), m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n)$ sistemi ile $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezleri aynıdır.

Kanıt. G noktası $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olsun. O zaman $m_1 \vec{GA_1} + \dots + m_n \vec{GA_n} = \vec{0}$ olur. Şimdi de $(m_1 A_1, \dots, m_k A_k)$ altsisitemini düşünelim. Bu sistemin ağırlık merkezi de G_1 olsun. Teorem 3'e göre

$$m_1 \vec{GA_1} + \dots + m_k \vec{GA_k} = (m_1 + \dots + m_k) \vec{GG_1} \quad (4)$$

olmalıdır. $m_1 \vec{GA_1} + \dots + m_k \vec{GA_k} + m_{k+1} \vec{GA_{k+1}} + \dots + m_n \vec{GA_n} = \vec{0}$ ifadesinde (4) eşitliğini kullanırsak $(m_1 + \dots + m_k) \vec{GG_1} + m_{k+1} \vec{GA_{k+1}} + \dots + m_n \vec{GA_n} = \vec{0}$ elde ederiz. Bu da bize G noktasının $(G_1(m_1 + \dots + m_k), m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olduğunu gösterir.

3. Uygulamalar

Aşağıdaki alıştırmalar geometri problemlerinin çözümünde çok faydalı olabilirler; bunların kanıtlanmasını okuyucuya bırakıyoruz.

Alıştırma 1. $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sistemindeki bütün noktaların kütleleri aynı bir k sabitiyle çarpılırsa, sistemin ağırlık merkezi değişmez.

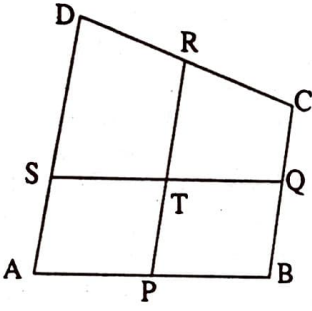
Alıştırma 2. G noktası $(m_1 A, m_2 B, m_3 C)$ sisteminin ağırlık merkezi ise, AG doğrusu BC kenarını $(m_2 B, m_3 C)$ sisteminin ağırlık merkezi olan A_1 noktasında keser.

Alıştırma 3. $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sisteminde herhangi bir noktanın kütlesini "parçalarsak" sistemin ağırlık merkezi değişmez. Örneğin $m_1 = m_{11} + \dots + m_{1k}$ şeklinde parçalanırsa, $(m_{11} A_1, \dots, m_{1k} A_{1k}, m_2 A_2, \dots, m_n A_n)$ sistemi ile $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezi aynıdır.

Alıştırma 4. Eğer bir G noktası hem $(m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n)$ sisteminin, hem de $(p_1 B_1, p_2 A_2, \dots, p_k B_k)$ sisteminin ağırlık merkezi ise, bu G noktası aynı zamanda bütün $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n, p_1 B_1, \dots, p_k B_k)$ sisteminin ağırlık merkezidir.

Alıştırma 5. Not 1'de ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezinin, (aA, bB, cC) sisteminin ağırlık merkezi olduğunu gördük. ABC üçgeninin a kenarına ait dışteğet çemberinin (yani $[BC]$ kenarına teğet ve $[AB]$ ve $[AC]$ 'nin de uzantılarına teğet olan çemberin) merkezinin $(aA, -bB, -cC)$ sisteminin ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

Problem 1. (*Matematik Dünyası*, problem Y28) Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeni üzerinde $\lambda = |PA| : |PB| = |RD| : |DC|$ ve $\mu = |QB| : |QC| = |SA| : |SD|$ olmak üzere P, Q, R, S noktaları alınıyor. $[PR]$ ve $[QS]$ doğruları T noktasında kesişiyorsa, $|TS| : |TQ| = \lambda$ ve $|TP| : |TR| = \mu$ olduğunu gösteriniz.



Şekil 9

Çözüm. A, B, D, C noktalarına sırasıyla $1, \lambda, \mu$ ve $\lambda\mu$ yüklerini yerleştirelim ve $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$ sistemine bakalım. $|PA| = \lambda|AB|$ olduğundan $(G2)$ özelliğine göre $(1A, \lambda B)$ sisteminin ağırlık merkezi $1 + \lambda$ kütleli P noktası olacaktır. Bunu şöyle göstereyim:

$$(1 + \lambda)P = (1A, \lambda B).$$

Benzer olarak $(\mu D, \lambda\mu C)$ sisteminin ağırlık merkezi $\mu + \lambda\mu$ kütleli R noktası olacaktır:

$$(\mu + \lambda\mu)R = (\mu D, \lambda\mu C).$$

O zaman $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$ sisteminin ağırlık merkezi $[RP]$ doğru parçası üzerindedir ve $(G2)$ 'ye göre

$$(\mu + \lambda\mu)|GR| = (1 + \lambda)|GP|$$

veya

$$|GP| : |GR| = (\mu + \lambda\mu) : (1 + \lambda) = \mu$$

elde ederiz. Şimdi $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$ sistemini $(1A, \mu D)$ ve $(\lambda B, \lambda\mu C)$ alt sistemlerine ayırıp

ağırlık merkezimizi bir de bu şekilde bulalım. $(1A, \mu D)$ sisteminin ağırlık merkezi $1 + \mu$ kütleli S noktası, $(\lambda B, \lambda\mu C)$ sisteminin ağırlık merkezi ise $\lambda + \lambda\mu$ kütleli Q noktası olur. Bu durumda tüm sistemin ağırlık merkezi G , $[SQ]$ doğru parçası üzerindedir ve $(G2)$ 'ye göre

$$(1 + \mu)|GS| = (\lambda + \lambda\mu)|GQ|$$

veya

$$|GS| : |GQ| = (\lambda + \lambda\mu) : (1 + \mu) = \lambda$$

elde ederiz. Böylece $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$ sisteminin ağırlık merkezi $[RP]$ ve $[SQ]$ doğru parçalarının üzerinde olmalıdır. Bu da G noktasının bu iki doğru parçasının ortak noktası olan T noktası olduğunu gösterir. Dolayısıyla $T = G$ yazarsak istenilenin kanıtlanmış olduğu görülür.

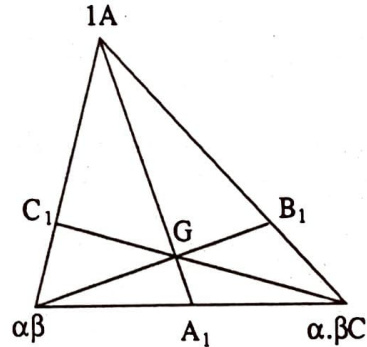
Problem 2. Eğer G noktası ABC üçgeninin içinde herhangi bir nokta ise, A, B, C köşelerine sırasıyla öyle m_1, m_2, m_3 kütleleri yerleştiriniz ki G noktası (m_1A, m_2B, m_3C) sisteminin ağırlık merkezi olsun.

Çözüm. A ve G noktalarından geçen ve BC kenarını A_1 noktasında kesen AA_1 doğrusunu çizelim. $|BA_1| = d_1$, $|CA_1| = d_2$, $|AG| = d_3$, $|GA_1| = d_4$ olsun. $d_1d_4 + d_2d_4 = m_1$, $d_3d_2 = m_1$, $d_1d_3 = m_3$ olsun. Bu durumda A_1 noktası (m_2B, m_3C) sisteminin ağırlık merkezi, G noktası ise (m_1A, m_2B, m_3C) sisteminin ağırlık merkezi olur.

Problem 3. (*Seva Teoremi*) ABC üçgeninin $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarları üzerinde sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktaları alınıyor.

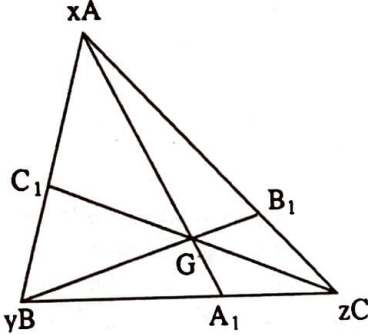
$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1 \quad (5)$$

olduğuna göre, AA_1, BB_1, CC_1 doğrularının bir noktada kesiştiğini gösteriniz.



Çözüm. $|AC_1| : |C_1B| = \alpha$, $|BA_1| : |A_1C| = \beta$, $|CB_1| : |B_1A| = \gamma$ olsun. Verilen şarta göre $\alpha\beta\gamma = 1$ olur. A, B, C noktalarına sırasıyla $1, \alpha, \alpha\beta$ yüklerini yerleştirip, $(1A, \alpha B, \alpha\beta C)$ sistemini gözönüne alalım. $|AC_1| = \alpha|C_1B|$ olduğundan, C_1 noktası $(1A, \alpha B)$ sisteminin ağırlık merkezi olur. Benzer şekilde A_1 noktası $(\alpha B, \alpha\beta C)$ sisteminin ve B_1 noktası da $(1A, \alpha B, \alpha\beta C)$ sisteminin ağırlık merkezi olur. $(1A, \alpha B, \alpha\beta C)$ sisteminin ağırlık merkezini G ile gösterelim. Ağırlık merkezi olan G , hem $[AA_1]$, hem $[BB_1]$, hem de $[CC_1]$ doğru parçalarının üzerinde olmalıdır. Bu bize bu doğru parçalarının bir noktada (G noktasında) kesiştiğini gösterir.

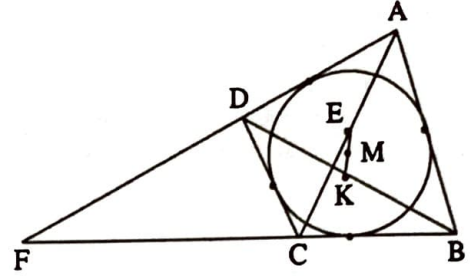
Problem 4. (Seva Teoremi'nin tersi) Eğer herhangi bir ABC üçgeninde $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ doğruları bir noktada kesişiyorlarsa, Problem 3'te verilen (5) koşulu sağlanır.



Çözüm. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ doğrularının bir G noktasında kesiştiklerini farzedelim. A, B, C noktalarına, G noktasını sistemin ağırlık merkezi yapacak şekilde, sırasıyla x, y, z kütlelerini yerleştirelim. (Bunun mümkün olduğunu Problem 2'den biliyoruz.) O zaman G 'den geçen $[AA_1]$ doğrusu $[BC]$ kenarını (yB, zC) sisteminin ağırlık merkezi olan A_1 noktasında keser. (G2) özelliğine göre A_1 noktasında $y|BA_1| = z|A_1C|$ bağıntısı vardır. Benzer şekilde $|AC_1| = y|C_1B|$ ve $x|B_1A| = z|B_1C|$ bağıntılarını kolaylıkla bulabiliriz. Buradan $|BA_1| : |A_1C| = z : y$, $|AC_1| : |C_1B| = y : x$ ve $|B_1A| : |B_1C| = x : z$ elde ederiz. Bu üç eşitliği taraf tarafa çarparsak Seva şartının sağlandığını görürüz.

Problem 5. (Newton Teoremi) $ABCD$ teğetler dörtgeninin içteğet çemberinin merkezi, bu dörtgenin köşegenlerinin orta noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerindedir.

Çözüm. M noktası çemberin merkezi, F noktası ise $[BC]$ ve $[AD]$ kenarlarının uzantılarının kesişme noktası ve E, K noktaları da $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin orta noktaları olsun.



Şekil 12

Baktığımız çember ABF üçgeninin içteğet çemberi olduğu için bu çemberin merkezi olan M noktası, $m_1 = |BF|$, $m_2 = |AF|$, $m_3 = |AB|$ alınırsa (m_1A, m_2B, m_3F) sisteminin ağırlık merkezi olur (Not 1). Bu çember aynı zamanda DCF üçgeninin f kenarına ait dışteğet çemberi olduğu için, M noktası aynı zamanda (m_4C, m_5D, m_6F) sisteminin de ağırlık merkezi olur ($m_4 = -|DF|$, $m_5 = -|CF|$, $m_6 = |CD|$, Alıştırma 5). Dolayısıyla M noktası $(m_1A, m_2B, m_3F, m_4C, m_5D, m_6F)$ sisteminin ağırlık merkezi olur (Alıştırma 4). Diğer taraftan $m_3 + m_6 = m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ olduğundan ($ABCD$ kirişler dörtgeni), $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$ eşitliğini elde ederiz. F noktasına baktığımızda bu noktanın hem (m_1C, m_5B) , hem de (m_2D, m_4A) sisteminin ağırlık merkezi olduğunu görürüz. Yani F noktası (m_1C, m_5B, m_2D, m_4A) sisteminin ağırlık merkezidir.

Böylece kütleyi parçalama (Alıştırma 3) fikrini kullanarak M noktasının aşağıda yazdığımız sistemlerin ağırlık merkezi olduğunu görürüz: ($M = (aA, bB)$ şeklindeki bir eşitliği, " M noktası (aA, bB) sisteminin ağırlık merkezidir" manasında kullanacağız.)

$$\begin{aligned}
 M &= (m_1A, m_2B, m_3F, m_4C, m_5D, m_6F) \\
 &= (m_1A, m_2B, m_4C, m_5D, (m_3 + m_6)F) \\
 &= (m_1A, m_2B, m_4C, m_5D, m_4A, m_5B, m_1C, m_2D) \\
 &= ((m_1 + m_4)A, (m_1 + m_4)C, (m_2 + m_5)B, (m_2 + m_5)D) \\
 &= (2(m_1 + m_4)E, 2(m_2 + m_5)K)
 \end{aligned}$$

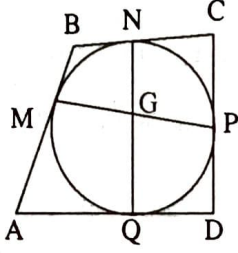
Böylece M noktasının kütlesi $2(m_1 + m_4)$ olan E ile, kütlesi $2(m_2 + m_5)$ olan K noktasının ağırlık merkezi olduğunu görürüz. (G2) özelliğine göre M noktası E ve K noktalarını birleştiren doğru parçası üzerindedir.

4. Problemler

Aşağıdaki problemleri önce alıştığınız yolla çözmeye çalışınız. Sonra bu yazıda kullanılan metotlarla çözünüz. Mekanik kavramlarının kolaylıklar sağladığını göreceksiniz.

1. ABC üçgeninin ağırlık merkezinin, çevrel çemberinin merkezi olması için, A, B, C köşelerine yerleştirilmesi gereken kütle miktarlarını bulunuz.

2. Herhangi bir üçgenin yüksekliklerinin bir noktada kesiştiklerini gösteriniz.

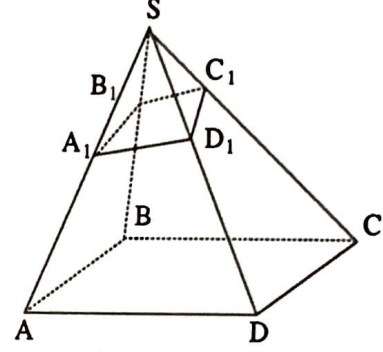


Şekil 13

3. $ABCD$ teğetler dörtgeni çembere M, N, P, Q noktalarında teğet ve $|AM| = a, |MB| =$

$b, |CN| = c, |DQ| = d$ olsun. $|MG| : |GP|$ ve $|NG| : |GQ|$ oranlarını bulunuz.

4. $SABCD$ piramidinin tabanı $ABCD$ paralelkenardır. p düzlemi bu piramidin SA, SB, SC, SD kenarlarını sıra ile A_1, B_1, C_1, D_1 noktalarında kesiyor ve $|SA_1| = |SA|/3, |SB_1| = |SB|/5, |SC_1| = |SC|/4$ veriliyor. $|SD_1|/|SD|$ oranını bulunuz.



Şekil 14

Yazarlar, bu makaledeki konunun incelenmesinde, biçim verilmesinde ve müzakere edilmesinde büyük yardım göstermiş olan sayın Ruza Burak'a derin minnettarlıklarını sunarlar.

DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

C. Alparslan Ertuğ *

1. Giriş

Ağırlıklı olarak [4]'ten yararlanarak hazırladığımız bu yazıda, çeşitli denklem tiplerinin çözüm yollarını vermeyi değil, denklem çözerken genel olarak dikkat edilmesi gereken hususları ve çok sık yapılan hataları göstermeyi amaçlıyoruz.

Okuyucularımıza cebirsel denklemlerin çözümleri için [2] ve [3]'ü, Diofant denklemleri için [5]'i, trigonometrik denklemlerin çözümleri için [1]'i, üstlü ve logaritmik denklemler içinse [4]'ü incelemelerini öneriyoruz.

2. Tanımlar

Daha fazla ilerlemeden önce, yazıda kullanacağımız bazı kavramları tanımlamamız uygun olacaktır.

a. Bir denklemde değişkenin (bilinmeyen) tanım kümesi, denklemin her iki tarafını anlamlı (tanımlı) kılan değerler kümesidir.

b. Bir a sayısı, bilinmeyen yerine koyulduğunda denklemi doğru bir ifade haline getiriyorsa (denklemi doğru bir sayısal ifadeye dönüştürüyorsa), denklemin bir *çözümüdür*, yani *köküdür*. Bu tanıma göre, bir denklemin *çözüm kümesi* (tüm çözümleri), değişkenin tanım kümesinin bir alt kümesidir.

c. Bir denklemi çözmek, tüm köklerini bulmak ya da kök bulunmadığını kanıtlamaktır.

d. Eğer bir denklemin tüm kökleri (çözüm kümesi), bir başka denklemin de kökleri ise, ikinci denklem birincinin sonucudur.

e. İki denklemden biri diğerinin sonucu ise, bu iki denklem *denktir* denir. Bir başka deyişle,

* Gemi inşaatı mühendisi

denk denklemler aynı çözüm kümesine sahiptirler.

f. İki denklem, değişkenin bazı değerlerinden oluşan bir kümeye ait aynı çözümlere sahiplerse, bu küme üzerinde denktirler denir.

Şimdi bu kavramları iki örnekle gösterelim:

(a) $x + 1 = \sqrt{x-1}$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin tanım kümesi, sol taraftaki $x + 1$ ve sağ taraftaki $\sqrt{x-1}$ ifadesinin anlamı olacağı tüm x değerlerinden oluşacaktır. Sol taraf x 'in her değeri için tanımlıdır. O halde bu denklemin tanım kümesi, $x \geq 1$ değerlerinden oluşur.

(b) Şimdi de şu iki denklemi gözönüne alalım:

$$\log_3(x-3) + \log_3(x+5) = 2$$

$$\log_3(x-3)(x+5) = 2$$

Kolayca görüleceği gibi, birinci denklemin her kökü ikincinin de köküdür ve dolayısıyla ikinci denklem birincinin sonucudur. İkinci denklem çözülerek, kökler (çözüm kümesi) $x_1 = 4$ ve $x_2 = 6$ olarak bulunur. x_2 kökü birinci denklemi sağlamaz ve ilk denklemin tanım kümesi içinde de değildir. Öyleyse bu iki denklem denk değildirler; fakat ilk denklemin tanım kümesi üzerinde denktirler. Tanım kümesi üzerindeki ortak kökleri $x_1 = 4$ değeridir.

İkinci denklemin kökü olan fakat ilk denklemin sağlamayan $x_2 = -6$ değerine ise *yalancı kök* diyoruz.

Dikkat edilecek olursa, ilk denklemin tanım kümesi $x > 3$ değerlerinden oluşmaktadır. İkinci denklemin tanım kümesi ise, $x > 3$ değerlerinin yanısıra $x < -5$ değerlerini de içermektedir. Yani ilk denklemden ikincisine geçilirken, tanım kümesinde bir genişleme söz konusu olmuş, ve bu bir yalancı kökün doğmasına yolaçmıştır. Şunu da belirtelim ki, yalancı kök doğmayabilirdi de.

Bir denklemi çözerken, bir dizi işlem ve dönüşümler yapılarak bir denklemden ötekine geçilir ve en sonunda da çözüm kümesi elde edilir. Bir başka deyişle, çözüm sürecinde her denklemin yerini bir başka denklem alır. Doğal olarak, yeni gelen her denklemin tanım ve çözüm kümeleri ilk denklemininkinden farklı olabilir. O halde denilebilir ki en iyi çözüm yöntemi, verilen denklemin yerine her defasında denk başka bir denklem yazmaktır. Böylece son denklemin çözüm kümesi ilk denklemin de çözüm kümesi olur. Fakat bu söyleneni her zaman uygulamak olanağı bulunmaz ve genellikle her denklem, kendisine denk olmayan bir sonuçla değiştirilir. Bu

durumda "sonucun" tanımına uygun olarak, ilk denklemin kökleri ikincinin de kökleridir; yani kök kaybı sözkonusu değildir, fakat yalancı kökler doğabilir.

Önemle belirtilmesi gereken bir diğer husus ise, verilen denklemin yerine ilkinin sonucu olmayan bir denklem yazılmayacağıdır. Çünkü ilk denklemin, yerine yazılan ikinci denklemin kökü olmayan kökleri de bulunabilir ve dolayısıyla ikinci denklemi çözmek, birincinin tüm köklerini vermez. Yani, *en iyi olasılıkla bir kökün kaybolması söz konusu olabilir*.

Özetlersek, herhangi bir denklemi doğru olarak çözmek işlemi, tanım ve çözüm kümelerindeki değişimleri dikkatle izlemek, köklerin kaybolmasına izin vermemek ve doğmuş olan yalancı kökleri atmak olarak özetlenebilir.

3. Yalancı Kök Doğmasının Sebepleri

Bir denklemi çözerken uyguladığımız, iki tarafın karesini, logaritmasını veya antilogaritmasını alma, üst alma, ya da denklemin bir bölümünün yerine ona eşit başka bir ifade koyma gibi işlemler, değişkenin tanım kümesinin genişlemesine ya da daralmasına yolaçar.

Tanım kümesinin genişlemesi yalancı köklerin doğmasına yolaçabilir. Bu nedenle kökleri bulduktan sonra, yalancı kökler ayıklanıp atılmalıdır.

Yalancı kökleri ayırırken, elde edilen köklerin ilk denklemi sağlayıp sağlamadığına bakmak çok uygulanan bir yöntemdir. Fakat köklerin ilk denklemden yerine konulması güç ve uzun hesaplar yapılmasını gerektiriyorsa, bir başka kuralı uygulayabiliriz. O da şudur: Eğer denklemin çözümü sırasında yapılan dönüşümler sonucu tanım kümesinin genişlemesi sözkonusu olmuşsa, elde edilen köklerden yalnızca ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olanlar gerçek kök, diğerleri ise yalancı köktürler.

Genellikle tanım kümesinin genişlemesine ve dolayısıyla yalancı köklerin doğmasına yolaçan işlemler şunlardır:

- Denklemin iki tarafının karesini almak.
- Logaritmaların toplamı yerine bir çarpımın logaritmasının yazılması.
- $x^{\log_x N} = N$ biçimindeki logaritmik formülün kullanılması.
- Denklemin iki tarafındaki benzer terimlerin kısaltılması.

- Denklemdaki kesirlerin kısaltılması ya da kaldırılması.

Aşağıda bunlara ilişkin örnekler verilmiştir.

Tanım kümesinin daralmasına yolaçan dönüşümlerden ise, kök kaybı söz konusu olabileceği için, kaçınılmalıdır.

4. Örnekler

Aşağıda çeşitli örnekler üzerinde, yalancı köklerin doğmasına yolaçan farkedilmesi güç kaynaklar, daha sonra da köklerin kaybolmasına yolaçan kaynaklar ele alınacaktır.

Örnek 1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4$ denklemini çözümlü.

Çözüm. Denklemin tanım kümesinin $x \geq 1/2$ değerlerinden oluştuğu kolayca bulunabilir. Şimdi iki tarafın karesini alalım

$$(\sqrt{x+3})^2 + 2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1} + (\sqrt{2x-1})^2 = 16$$

Kökleri kaldırarak (bu işlem tanım kümesini genişletmektedir) ve gerekli düzenlemeleri yaparak şu denklemi elde ederiz.

$$2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 14 - 3x \quad (1)$$

Şimdi de şöyle düşüneceğiz: (1) denkleminin sol tarafı, (izin verilebilir) her x değeri için negatif değildir; fakat sağ taraf $x > 14/3$ için negatiftir. Açık ki x 'in bu değerleri çözüm olmazlar ve bundan sonra (1) denklemini yalnızca $x \leq 14/3$ aralığında ele alacağız. Bu aralıkta her iki taraf pozitif olduğu için, kare almak, $x \leq 14/3$ aralığında (1)'e denk bir denklem verir.

$$(2\sqrt{2x^2 + 5x - 3})^2 = (14 - 3x)^2$$

Buradan da tanım kümesini bir kez daha genişleterek, $x^2 - 104x + 208 = 0$ denklemini elde ederiz ve bunun kökleri $x_{1,2} = 52 \pm 8\sqrt{39}$ olarak bulunur. Kolayca görüleceği gibi, bu köklerin ikisi de ilk denklemin tanım kümesi içinde bulunmaktadır. Dolayısıyla, $x \leq 14/3$ koşulunu sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek yeterli olacaktır. $x_1 = 52 + 8\sqrt{39}$ ve $x_2 = 52 - 8\sqrt{39}$ dersek, $x_1 > 14/3$ ve $x_2 < 14/3$ olduğu görülür. Öyleyse yalnızca, x_2 değeri köktür.

Burada bulunan kökleri denklemde yerine koyarak kontrol yapmanın bir hayli güç ve zaman alıcı olduğu kolayca görülmektedir.

Bir parametre içeren denklemlerde ise, doğrudan sağlama yapmak daha da güçleşir. Şimdi de şu örneği ele alalım:

Örnek 2. $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$ denklemini çözümlü.

Çözüm. Sağ taraf x 'in izin verilebilir tüm değerleri için, sol taraf ise $x \geq 1$ için negatif değildir. Bu yüzden, verilen denklem, $x \geq 1$ aralığında, $(x - 1)^2 = (\sqrt{a - x^2})^2$ denklemine; sonra da aşağıdaki denkleme indirgenebilir.

$$2x^2 - 2x + 1 - a = 0 \quad (2)$$

Bu işlem yapılırken değişkenin tanım kümesi genişletildiğinden, sonuçta bulunan köklerin kontrol edilmesi gerekecektir. Dolayısıyla (2) denklemini çözmemiz ve bulunan köklerden, $x \geq 1$ ve $a - x^2 \geq 0$ koşullarını sağlayanları almamız gerekecektir. Bu denklemin diskriminantı $2a - 1$ 'e eşittir. O halde $a < 1/2$ için bu denklemin gerçek kökleri yoktur. O halde ilk denklemin de bu a değerleri için kökü yoktur.

Şimdi $a \geq 1/2$ olduğunu kabul edelim. (2) denkleminin kökleri,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2a - 1}}{2}$$

sayılarıdır. x_2 kökünün, $x \geq 1$ koşulunu sağlamadığı açıkça görülmektedir, dolayısıyla bu, ilk denklemin kökü değildir. x_1 hakkında karar verebilmek için, $(1 + \sqrt{2a - 1})/2 \geq 1$ ya da $\sqrt{2a - 1} \geq 1$ eşitsizliğini çözmemiz gerekir. Bu eşitsizliğin $a \geq 1$ için sağlandığı kolayca görülmektedir. O halde $a < 1$ için, ilk denklemin gerçek kökleri yoktur. Fakat hâlâ, $a \geq 1$ için $a - x_1^2 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığını incelememiz gerekmektedir. Bu eşitsizlik, $a \geq \sqrt{2a - 1}$ eşitsizliğine denktir. $a \geq 1$ durumunu gözönüne aldığımız için, eşitsizliğin iki tarafı da negatif değildir ve dolayısıyla kare alınabilir:

$$\begin{aligned} a^2 &\geq 2a - 1 \\ a^2 - 2a + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik a 'nın tüm değerleri için sağlanmaktadır. Öyleyse $a < 1$ için başlangıç denkleminin kökleri yoktur. $a \geq 1$ içinse denklemin kökü, $x = (1 + \sqrt{2a - 1})/2$ 'dir.

Yer darlığı nedeniyle kökleri yerine koyarak sağlama yapmanın güçlüğü burada

gösteremiyoruz. Fakat okuyucularımız bu işlemi kendileri yapabilirler.

Yalancı köklerin oluşmasının kaynaklarından biri de çeşitli logaritma formüllerinin, özellikle de bir çarpımın logaritmasının alınması formülünün kullanılmasıdır. Gerçekten de $\log f(x) + \log g(x)$ yerine $\log(f(x)g(x))$ yazmakla, değişkenin tanım kümesini genişletmiş ve x bilinmeyen $\log f(x) < 0$ ve $\log g(x) < 0$ koşullarını aynı anda sağlayan değerlerine izin vermiş oluruz. Dolayısıyla yalancı kökler doğabilir. Fakat bunlar yalnızca değişkenin tanım kümesinin genişletilmesinden doğduklarından, bunları ayırmak için, tanım kümesinin elemanı olup olmadıklarına bakmak yeterli olacaktır. Ayrıca şunu belirtelim ki, tersine bir uygulama, yani bir çarpımın logaritması yerine logaritmaların toplamını yazmak ise, değişkenin tanım kümesini daraltacağı için, yapılmamalıdır.

Örnek 3. $\log_2(x+2) + \log_2(3x-4) = 4$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Bir çarpımın logaritmasına geçerek $\log_2(x+2)(3x-4) = 4$ ve buradan da $(x+2)(3x-4) = 16$ elde ederiz. Bu denklemin kökleri $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{73})/3$ biçimindedir. Yalnızca, x_1 'in ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olduğu ve dolayısıyla yalnızca bunun kök olduğu kolayca görülebilir.

Temel logaritma formülünün uygulanması da değişkenin tanım kümesini genişletmesi nedeniyle yalancı köklerin doğmasına yolaçar.

Örnek 4. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\log_{\sqrt{x}} 2x = \log_x(2x)^2$ olduğunu biliyoruz. O halde ilk denklemi şöyle yazabiliriz: $x^{\log_x(2x)^2} = 4$. Temel formülü kullanarak $(2x)^2 = 4$ elde ederiz. Buradan $x^2 = 1$; dolayısıyla $x_1 = -1$ ve $x_2 = 1$ bulunur. Fakat ne x_1 ne de x_2 ilk denklemin tanım kümesinin elemanı değildirler: $x_1 < 0$ ve $\sqrt{x_2} = 1$ logaritma tabanı olamazlar. O halde verilen denklemin kökü yoktur.

Yalancı köklerin doğması her zaman bu problemdeki kadar dikkat çekici olmayabilir. Kural olarak bu durum, hesaplar yapılırken değişkenin tanım kümesinin genişlemesinden doğmaktadır. Şimdi çözeceğimiz problemde görüleceği gibi, benzer terimlerin karşılıklı kısaltılmasından da yalancı kökler doğabilir. Bunda da şaşırarak

bir şey yoktur. Kısaltma yapmakla, silinen terimleri anlamlı kılan sınırlamaları kaldırmış ve dolayısıyla tanım kümesini genişletmiş oluyoruz.

Örnek 5. $\log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} = \log \sqrt{1-x^2} + 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.¹

Çözüm. $\log \sqrt{1-x^2}$ ifadesini aşağıdaki gibi dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1-x^2} &= \log \sqrt{1+x} \sqrt{1-x} \\ &= \log \sqrt{1+x} + \log \sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

Bu dönüşümün değişkenin tanım kümesini değiştirmedeği kolayca görülebilir ve dönüşüm sonucunda ilk denklem aşağıdaki şekle gelir:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} \\ = \log \sqrt{1-x} + \log \sqrt{1+x} + 2. \end{aligned}$$

Her iki taraftaki $\log \sqrt{1+x}$ ifadesini kısaltarak şunu elde ederiz: $2 \log \sqrt{1-x} = 2$. Bu denklemin tanım kümesi $x < 1$ koşulunu sağlayan sayılardan oluşmaktadır ve bu tanım kümesi ilk denklemin tanım kümesinden daha geniştir. O halde yalancı kök doğmasını beklemeliyiz. Son denklemi çözerek $x = -99$ buluruz. Bu ise ilk denklemin tanım kümesinin elemanı değildir. O halde verilen denklemin kökü yoktur.

Hata kaynaklarından bir diğeri ise, kesirlerin kısaltılması ya da kaldırılmasıdır. Bu işlem de değişkenin tanım kümesinin genişlemesine ve paydayı sıfır yapan değerlerin ortadan kalkmasına yolaçar.

Örnek 6. $\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2 \log_{0.25}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Bütün logaritmaları 2 tabanına çevirip gerekli düzenlemeleri yaparak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\log_2 6 - \log_2(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1 \quad (3)$$

Buradan da $\log_2 6 - \log_2(4-x) = \log_2(3+x)$ ve

$$\frac{6}{4-x} = 3+x \quad (4)$$

bulunur. Bu denklemin kökleri ise $x_1 = 3$ ve $x_2 = -2$ 'dir. (3) ve (4) denklemlerinde kesirleri kaldırmakla tanım kümesini genişletmiş olmamız nedeniyle yalancı kök doğmuş olabilir.

¹ Taban belirtmediğimiz zaman 10 tabanına göre logaritma alındığı anlaşılmalıdır.

Bu yüzden, bulduğumuz köklerin ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olup olmadığına bakmamız gerekir. Böylece de x_2 'nin tanım kümesinin elemanı olmadığı, fakat x_1 'in kök olduğu bulunmuş olur.

Sol tarafı bir kesir, sağ tarafı ise sıfır olan denklemlerin çözümünde sık sık şöyle bir hata yapılmaktadır. Payı sıfıra eşitleyip kökler bulunmakta, payda ise hiç gözönüne alınmamaktadır. Oysaki bulunan kökler içinde paydayı sıfır yapanlar varsa bu değerler atılmalıdır.

Örnek 7. $\tan 3x = \tan 5x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklemini şöyle yazabiliriz:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = 0.$$

Buradan da paydaları eşitleyip gerekli düzenlemeleri yaparak aşağıdaki denklemini elde ederiz:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0.$$

$\sin 2x = 0$ denklemini çözerek, $x = k\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sonucunu buluruz. Şimdi yalancı kökleri, yani paydayı sıfır yapan çözümleri çıkarmamız gerekir. k 'nin tek değerleri için, $\cos 3x \cos 5x$ ifadesi sıfır olur. O halde ilk denklemin kökleri, $x = k\pi/2$ değerlerinden k 'nin çift, yani $k = 2n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, olduğu açılarıdır. Dolayısıyla kökler; $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, değerleridir.

Sol tarafı çarpanlara ayrılmış, sağ tarafı ise sıfır olan denklemleri çözerken, tanım kümesine dikkat edilmemesi sonucu ciddi hatalar yapılmaktadır. Böyle bir denklem çözülürken genellikle her bir çarpan sıfıra eşitlenerek kökler bulunmaktadır. Oysa ki çarpanlardan birini sıfır yapan bir değişken değeri, bir diğer çarpanı anlamsız kılabilir. Dolayısıyla da bu değerler kök olamazlar. Bu yüzden, elde edilen köklerin değişkenin tanım kümesinin elemanı olup olmadığının mutlaka kontrol edilmesi gerekir.

Örnek 8. $(x+2)(x^2-1)\sqrt{x} = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Her çarpanı tek tek sıfıra eşitleyerek $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ ve $x_4 = 0$ köklerini buluruz. Oysa ki ilk denklemin tanım kümesi, $x > 0$ değerlerinden oluşmaktadır. Öyleyse, $x_1 = -2$ ve $x_3 = -1$ değerleri yalancı köktürler ve atılmaları gerekir.

5. Kök Kaybının Sebepleri

Şimdi de kök kaybının kaynaklarını ve bunu önlemenin yollarını görelim. Genellikle kök kaybı, verilen denklemin yerine, tanım kümesi daha dar başka bir denklemin yazılmasından doğar. Tanım kümesinde böyle bir daralma, daha önce gördüğümüz gibi, logaritmik ve trigonometrik formüllerin kullanılmasıyla meydana gelir.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, bir çarpımın logaritması yerine logaritmaların toplamını yazmak, tanım kümesinin daralmasına yol açar. Aynı durum, üstlü bir terimin logaritmasının alınması için de geçerlidir. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için,

(a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ($M, N > 0$),

(b) $\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N$ ($N > 0$, α herhangi bir sayı),

biçimindeki logaritma formüllerinin yerine aşağıdaki formülleri kullanmak gerekir:

(c) $\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|$ ($MN > 0$),

(d) $\log_a N^{2k} = 2k \log_a |N|$ ($N \neq 0$, k bir tam sayı).

Bu formüllerin kullanılması, tanım kümesini genişleterek yalancı köklerin doğmasına yolaçsa bile, bunları nasıl ayıklayacağımızı biliyoruz. Oysa kaybolan kökleri sonradan bulma şansımız yoktur.

Örnek 9. $\frac{3}{2} \log_{1/4}(x+4)^2 - 3 = \log_{1/4}(4-x)^3 + \log_{1/4}(x+6)^3$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\log_{1/4}(x+2)^2 = 2 \log_{1/4}|x+2|$, $\log_{1/4}(4-x)^3 = 3 \log_{1/4}(4-x)$, ve $\log_{1/4}(x+6)^3 = 3 \log_{1/4}(x+6)$ değerlerini denkleminde kullanarak, şu sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \log_{1/4}|x+2| - 1 &= \log_{1/4}(4-x) + \log_{1/4}(x+6) \\ \log_{1/4}|x+2| - \log_{1/4}(1/4) &= \log_{1/4}(4-x) + \log_{1/4}(x+6) \\ \log_{1/4}4|x+2| &= \log_{1/4}(4-x)(x+6) \\ \log_{1/4}4|x+2| &= \log_{1/4}(4-x)(x+6) \\ 4|x+2| &= (4-x)(x+6) \end{aligned}$$

Bu denklemin kökleri, $x_1 = 2$ ve $x_2 = 1 - \sqrt{33}$ 'tür. Her iki değer de, ilk denklemin tanım kümesinin elemanıdır ve gerçek köktürler.

Tanım kümesinin daralması ve bu nedenle de köklerin kaybolması, yeni bir logaritma tabanına geçilmesi sırasında da olabilir.

Örnek 10. $\log_{0.5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. İşte size bir çözüm: Taban değiştirme formülünü kullanarak ve x 'i yeni logaritma tabanı olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0.5x} - \frac{14 \log_x x^3}{\log_x 16x} + \frac{40 \log_x \sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0.$$

Kolayca görüleceği gibi, denklem $x = 1$ için anlamsızdır. Oysa ki ilk denklemin $x = 1$ için anlamlı olmasının yanısıra, bu değer yeni denklemin bir köküdür de. İşte bu noktada bir kök kaybedilmektedir.

Bu nedenle şöyle akıl yürütmeliyiz. x tabanına geçmek istiyoruz; bu durum $x > 0$ ve $x \neq 1$ koşullarını getirmektedir. İlk denklemin tanım kümesi $x > 0$ koşulunu zaten getirdiği için, bu koşul sağlanmaktadır. $x = 1$ değeri, ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olduğu için, bu değer kök olup olmadığını kontrol etmemiz gerekir. Bu değeri ilk denklemde yerine koyarak denklemi sağladığını görürüz. Böylece bir kök bulunmuş olur: $x_1 = 1$. Şimdi diğer kökleri arayalım. Artık x tabanına geçebiliriz.

Buradan sonra çözüm güç değildir. Logaritma özelliklerini kullanarak ve $\log_x 2$ yerine y koyarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{2}{1-y} - \frac{42}{1+4y} + \frac{20}{1+2y} = 0.$$

Buradan da $2y^2 + 3y - 2 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri ise $y_1 = 1/2$ ve $y_2 = -2$ 'dir. $\log_x 2 = 1/2$ diyerek $x_2 = 4$ ve $\log_x 2 = -2$ diyerek de $x_3 = 1/\sqrt{2}$ elde edilir. x_2 ve x_3 değerlerinin de gerçek kökler olduğu kolayca görülmektedir. O halde denklemin üç kökü bulunmaktadır.

Köklerin kaybolmasına yolaçan en önemli hatalardan biri ise, *bir denklemin her iki tarafındaki ortak bir çarpanın kısaltılmasıdır.*

Böyle bir durumda izlenecek en iyi yol, tüm terimleri sol tarafta toplamak ve sonra da aşağıdaki iki durumu gözönüne almaktır:

(1) Ortak çarpanın sıfıra eşit olması.

(2) Ortak çarpanın sıfıra eşit olmaması.

Kuşkusuz ikinci durumda ortak çarpanın dışındaki çarpan sıfır olacaktır.

Örnek 11. $x^{2^{2x+1}} + 2^{|x+3|+2} = x^{2^{|x-3|+4}} + 2^{x-1}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. İki durumu gözönüne alacağız:

(a) $x \geq 3$ olması hali. Bu durumda denklem aşağıdaki biçimi alacaktır:

$$x^{2^{2x+1}} + 2^{x-1} = x^{2^{2x+1}} + 2^{x-1}.$$

Bu denklem x 'in her değeri için sağlanır; dolayısıyla $x \geq 3$ değeri verilen denklemin kökleridir.

(b) $x < 3$ olması hali. Bu durumda denklem aşağıdaki biçimleri alacaktır:

$$\begin{aligned} x^{2^{2x+1}} + 2^{5-x} &= x^{2^{2^{7-x}}} + 2^{x-1}, \\ 2^{x-1}(4x^2 - 1) &= 2^{5-x}(4x^2 - 1). \end{aligned}$$

İşte burada iki taraftaki $(4x^2 - 1)$ çarpanını kısaltmak hatasına düşülmemelidir. Bütün terimleri sol tarafa toplayalım:

$$(2^{x-1} - 2^{5-x})(4x^2 - 1) = 0.$$

Şimdi de her çarpanı sıfıra eşitleyerek kökleri bulalım: $4x^2 - 1 = 0$ ise $x^2 = 1/4$ 'ten $x_1 = 1/2$ ve $x_2 = -1/2$. $x < 3$ koşulunu sağladıkları için bunlar köktür. $2^{x-1} - 2^{5-x} = 0$ ise $2^{x-1} = 2^{5-x}$ ve $x - 1 = 5 - x$ 'ten $2x = 6$ ve $x_3 = 3$. $x < 3$ olması gerektiği için bu kök değildir. O halde verilen denklemin kökleri, $x \geq 3$ ile $x_1 = 1/2$ $x_2 = -1/2$ değerleridir.

Çok sık yapılan bir diğer yanlış ise, şu kuralın yanlış kullanılmasıdır:

"Tabanları 0 ve 1'den farklı olmak kaydıyla, birbirine eşit iki üstlü ifadenin tabanları birbirine eşitse, üstleri de birbirine eşittir." Genellikle bu kuralın *tabanları 0 ve 1'den farklı olmak kaydıyla* bölümü unutulmakta ya da gözden kaçırılmaktadır. Sonuç, tabanı 0 ya da 1 yapan kök değerlerinin kaybolmasıdır.

Örnek 12. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem şöyle yazılabilir: $x^{\sqrt{x}} = x^{x/2}$. Böylece tabanları eşit olan iki üstlü terimin birbirine eşitliği durumuna geldik. Herhangi bir kökün kaybolmasına yolaçmamak için, tabanın 0 ya da 1 olup olamayacağını inceleyelim. 0^0 belirsizlik olduğu için $x = 0$ kök olamaz; $x_1 = 1$ ise köktür. Şimdi de 0 ve 1'den farklı kökleri arayalım. Üstleri birbirine eşitleyerek $\sqrt{x} = x/2$ buluruz. Buradan da $x_2 = 4$ elde ederiz.

Zaman zaman da şu hatalı akıl yürütmeyle karşılaşırız: *"Bir üstlü sayı 1'e eşitse, üstü sıfırdır."* Oysa ki bunun bir istisnası vardır: Taban 1 ise, üstü ne olursa olsun üstlü ifade 1'e eşit olur.

Örnek 13. $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}} = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Şöyle akıl yürüteceğiz: Eğer $|\cos x| = 1$ ise, üst ne olursa olsun sonuç 1'e eşit olacaktır. Fakat $|\cos x| \neq 1$ ise, üstün sıfıra eşit olması zorunludur. O halde denkleminizi ikiye ayrılmış olmaktadır:

(a) $|\cos x| = 1.$

(b) $\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} = 0.$

İlk denklemden, k herhangi bir tamsayı olmak üzere, $x_1 = k\pi$ bulunur. İkinci denklemden ise, $\sin x = 1/2$ ve buradan $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$ ya da $\sin x = 1$ ve buradan da $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ kökleri elde edilir. Ancak bu x_3 değerleri, ilk denklemi 0^0 haline getirdikleri için kök değildirler. Dolayısıyla denklemin kökleri şöyle olacaktır. $x_1 = k\pi$ ve $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$; burada k herhangi bir tamsayıdır.

Özetleyecek olursak, üstlü ifadelerin eşitliğinden üstlerin eşitliğine geçerken üç durumun gözönüne alınması gerekir: Tabanın 0 olması, tabanın 1'e eşit olması ve üstlerin eşit olması hal-leri. Bu tür bir uygulama köklerin kaybolması durumunu ortadan kaldırır.

Bununla beraber yalancı kökler doğabilir. Gerçekten her durumda, birbirinden yahtılmış denklemleri çözmek zorunda olduğumuz için, buralardan bulunacak bazı köklerin ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olmaması olasılığı vardır. Son örnekte bu durumla karşılaştık; ikinci denklemin bazı çözümlerinin, ilk denklemin tanım kümesinin dışında kalması nedeniyle bunları attık.

Bu yüzden üstlü bir denklemin çözümünde, yukarıda belirttiğimiz kuralı uyguladıktan sonra bulduğumuz kökleri kontrol etmemiz gerekir. Bunun için de bulunan köklerin, ilk denklemin tanım aralığı içinde olup olmadıklarına bakmak yeterli olacaktır.

Son olarak da köklerin kaybolmasına yol açan, bir başka kaynaktan, trigonometri formüllerinin kullanılmasından söz edelim.

Bir trigonometri formülünün sağ ve sol tarafları farklı tanım kümelerine sahip olabilir-

ler. Örneğin, sinüs ve kosinüsü yarım açının tan-jantı cinsinden ifade etmemizi sağlayan dönüşüm formülleri böyledir. Bu formüllerin sol tarafı daha geniş bir tanım kümesine sahiptir ve dolayısıyla sol tarafın yerine sağ tarafın yazılması halinde tanım kümesi daraltılmış olacak ve köklerin kay-bolması tehlikesi doğacaktır.

Örnek 14. $\sin x - 2 \cos x = 2$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Yarım açının tanjantlarını kullanarak şu denklemi elde ederiz:

$$\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{2(1 - \tan^2 \frac{x}{2})}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 2.$$

Buradan da, $\tan \frac{x}{2} = 2$ ve $x = 2 \arctan 2 + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, bulunur.

Fakat yukarıdaki çözüm kümesi, tüm çözümleri içermez. Kolayca kanıtlanabileceği gibi $x = (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ açıları da çözümdür. Yarım açının tanjantını kullanmakla bu çözümleri kaybetmiş olduk. İlk denklemin, x 'in tüm değerleri için anlamlı olmasına rağmen, ikinci denklem yalnızca $\tan(x/2)$ anlamlı iken, yani $x \neq (2n + 1)\pi$ olduğunda anlamlı olur. O halde ikinci denklemi anlamsız kılan bu değerlerin, ilk denklemin kökü olup olmadıklarının kontrol edilmesi gerekir.

KAYNAKÇA

- [1] Y. Aksoy, *Trigonometri*, İDMMA, No: 102, İstanbul, 1972.
- [2] P. Aubert, G. Papelier, *Liseler İçin Cebir Temrinleri: İkinci Derece Denklemleri*, 1960.
- [3] N. Çalışkan, *Cebirsel Denklemlerin Kökleri*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 3, 9-13 (1994).
- [4] G. Dorofeev, *Elementary Mathematics*, MIR, Moskova, 1973.
- [5] A.O. Gelfond, *Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi*, Türk Matematik Derneği, No: 8, İstanbul, 1962.

1994 ÖĞRENCİ YERLEŞTİRME SINAVI

MATEMATİK SORULARI VE CEVAPLARI (I)

Ülkü Öztaş * & Onur Sağsen †

1. $\frac{\sqrt{0.16} + \sqrt{0.04}}{\sqrt{0.36} - \sqrt{0.04}}$ kaçtır?

Çözüm. Verilen sayıların kareköklerini alarak $\frac{0.4+0.2}{0.6-0.2} = \frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{2}$ buluruz.

2. x, y, z pozitif tamsayı ve $2x + 3y - z = 94$ ise, x 'in en küçük değeri kaçtır?

Çözüm. Verilen denklemden x çözülerek $x = 47 - \frac{3y-z}{2}$ buluruz. x 'in alabileceği en küçük değer 1 için $3y = 92 + z$ denkleminin pozitif tamsayılar da çözülebilir olması gerekir. Aranılan z , $92 + z$ sayısı 3'le bölünebilir kılan en küçük sayı olmalıdır. Bu gözlem $z = 4$, $y = 32$ ve sonuçta $x = 1$ verir.

3. Ardışık iki pozitif tamsayıdan küçük olanının 3 katı ile büyük olanının 2 katının toplamı 107'dir Buna göre küçük sayı kaçtır?

Çözüm. Tamsayılardan küçük olanına x dersek, diğeri $x+1$ olur. Verilenlerden $3x+2(x+1) = 107$ denklemini elde ederiz. Denklemin çözümü küçük tamsayıyı 21 olarak verir.

4. Birler basamağı 0 olan, 3 ile bölünebilen iki basamaklı en büyük pozitif doğal sayının, birler basamağı 0 olan, 3 ile bölünebilen iki basamaklı en küçük pozitif doğal sayıya oranı kaçtır?

Çözüm. Verilen koşullar büyük tamsayıyı 90, küçüğünü ise 30 olarak belirler. Oranları 3'tür.

5. İki basamaklı ve birbirinden farklı 4 pozitif tamsayının toplamı 86'dır. Bu sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?

Çözüm. Diğer üç sayı toplamının en küçük olması gerekir. Örneğin 10, 11 ve 12 alındığında aranılan sayı $86 - 33 = 53$ olmaktadır. Ancak bu sayı yanıtlar arasında yok! Yanıtlar arasındaki 50, diğer sayıların 10, 12 ve 14 alınmasını gerekli kılıyor. Belki de sayılar çift olarak verilmeliydi.

6. Üç basamaklı abc sayısının birler basamağı 4'tür. Birler basamağı ile yüzler basamağı yer değiştirildiğinde oluşan yeni sayı abc sayısından 297 küçüktür. Buna göre abc sayısının yüzler basamağı kaçtır?

Çözüm. abc 'nin yüzler basamağı a 'dır. Verilenler $(100a + 10b + 4) - (400 + 10b + a) = 297$ denklemini, yani $99a - 396 = 297$ gerektirir ki, bu da $a = 7$ verir.

7. Bir bidonun ağırlığı, boş iken x gram, yarısı su ile dolu iken y gramdır. Bu bidonun tamamı su ile dolu iken toplam ağırlığı nedir?

Çözüm. Sorudan yarım bidon suyun ağırlığı olarak $y - x$ elde ederiz. Bu gözlem bidonun dolu olduğu haldeki ağırlığını $2(y - x) + x = 2y - x$ olarak verir.

8. Toplamları 166 olan 28 sayma sayısı vardır. Bunlardan bir kısmının ortalaması 7, ötekilerin ortalaması ise 5'tir. Buna göre ortalaması 7 olan sayılar kaç tanedir?

Çözüm. n tane sayı $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'nin aritmetik ortalaması $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ olarak tanımlanır. 28 sayıdan x tanesinin ortalaması 7 ise, bu x tane sayının toplamı $7x$ olacaktır. Benzer şekilde geriye kalan $28 - x$ tanesinin toplamı ise $5(28 - x)$ olacaktır. Elde edilen $7x + 5(28 - x) = 166$ denkleminde $x = 13$ bulunur.

9. Aylık geliri sabit olan bir kimse her ay gelirinin $\frac{1}{24}$ 'ünü A kasasına, $\frac{1}{x}$ 'ini de B kasasına koymaktadır. Bu iki kasaya koyulan toplam miktar bu kimsenin gelirinin yüzde yirmisi olduğuna göre, x ne olmalıdır?

Çözüm. Sorudan $\frac{1}{24} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ veya $\frac{1}{x} = \frac{3}{120}$ denklemi ve sonuçta da $x = 40$ elde ederiz.

* Emekli matematik öğretmeni

† Üçler Eğitim Dersanesi öğretmeni

10. Bir miktar kumaştan eş boyda 9 perde çıkmaktadır. Boyu bunlardan 60 cm daha kısa olan perdelerden ise 12 tane çıkmaktadır. Buna göre toplam kumaş kaç metredir?

Çözüm. Metre, cm tuzağına düşmeden, sorudan $\frac{x}{9} - 0.6 = \frac{x}{12}$ veya $\frac{4x-3x}{36} = 0.6$ bulunur. Bu da $x = 21.6$ verir.

11. x, y pozitif tamsayılar ve $y < 6$ ve $\frac{xy-x}{y} = 5$ ise, x kaçtır?

Çözüm. Sorudan $x = \frac{5y}{y-1} = 5 + \frac{5}{y-1}$ denklemi elde edilir. $0 < x$ tamsayı olduğundan $\frac{5}{y-1}$ tamsayı olmalıdır. $0 < y < 6$ aralığında $\frac{5}{y-1}$ sayısını tamsayı kılan tek sayı $y = 2$ 'dir. Buradan $x = 10$ bulunur.

12. $\frac{a+2b}{c} = 2$ ve $\frac{b-2a}{2c} = -\frac{1}{2}$ ise, $\frac{c}{a}$ kaçtır?

Çözüm. İkinci denklemden elde edilen $b = 2a - c$ ifadesi ilk denklemde kullanılırsa $a + 2(2a - c) = 2c$ veya $5a = 4c$ elde edilir. Bu da $\frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ verir.

13. $\frac{9x^2-6x+1}{9} = (x+a)^2$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm. İlk önce $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ gözlemini yapalım, sonra da

$$\begin{aligned} (3x - 1)^2 - 9(x + a)^2 &= [(3x - 1) - 3(x + a)] \\ &\quad \cdot [(3x - 1) + 3(x + a)] \\ &= (-1 - 3a)(6x + 3a - 1) \end{aligned}$$

yazalım. Çarpım sıfırdır ve çarpanlardan birinin sıfır olması gereğinden $x = -\frac{1}{3}$ bulunur.

14. $a + b$ ile $a - b$ sayıları aralarında asal ve $\frac{a+b}{a-b} = \frac{17}{7}$ ise, $1 - \frac{a^2}{b^2}$ kaçtır?

Çözüm. $a + b$ ve $a - b$ 'nin aralarında asal olmalarından $a + b = 17$ ve $a - b = 7$ denklemlerini elde ederiz. Çözüm $a = 12$, $b = 5$ olur. Buradan da $1 - \frac{a^2}{b^2} = -\frac{119}{25}$ buluruz.

15. Tamsayılar kümesi üzerinde her a ve b için $a * b = 2a - b$ işlemi tanımlanmıştır. $k * 7 = 5 * 13$ ise, k kaçtır?

Çözüm. $k * 17 = 5 * 13$ eşitliğinde $*$ işleminin tanımını kullanıp $2k - 17 = 10 - 13$, buradan da $k = 2$ buluruz.

16. $3^{1994} \equiv x \pmod{5}$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm. $3 \equiv 3 \pmod{5}$, $3^2 \equiv 4 \pmod{5}$, $3^3 \equiv 2 \pmod{5}$ ve $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$ bulunur. Son bağıntıda iki tarafın "gerekli" kuvveti alınırsa $(3^4)^{498} \equiv 1^{498} \pmod{5}$ buluruz. Buradan $3^{1992} \equiv 1 \pmod{5}$ elde ederiz. İki tarafı 3^2 ile çarparsak $3^{1994} \equiv 4 \pmod{5}$ buluruz.

17. E evrensel küme olsun ve bir C kümesinin eleman sayısı $s(C)$ ile gösterilsin. $s(E) = 9$, $s(A \cup B) = 6$, $s(A \cap B) = 3$, $s(B) = 4$ olduğuna göre, A kümesinin tümleyeni olan A' kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ formülünü anımsamamız yeterli. B yerine A' 'nin tümleyeni A' alırsa $A \cap A' = \emptyset$ 'dir. $s(E) = s(A \cup A') = s(A) + s(A')$ buluruz. Verilenler yerine konursa $s(A) = 5$ ve ikinci formülden $s(A') = 4$ buluruz.

18. $6^{x+1} = 3^{x+2}$ olduğuna göre 2^{x+1} kaçtır?

Çözüm. Üstlü ifadeleri anımsayalım. $6^{x+1} = (2 \cdot 3)^{x+1} = 2^{x+1} \cdot 3^{x+1} = 3 \cdot 3^{x+1}$ eşitliğinde $3^{x+1} \neq 0$ olduğundan, her iki tarafı 3^{x+1} 'in çarpımsal tersi ile çarparak $2^{x+1} = 3$ buluruz.

19. $x^2 - y^2 = 15$ ve $\frac{4^{x-y}}{4^{y-x}} = 16$ olduğuna göre $x + y$ kaçtır?

Çözüm. $\frac{4^{x-y}}{4^{y-x}} = 16$ ifadesini 4 'ün üstlerini kullanarak yazalım. $4^{x-y+x-y} = 4^2$ eşitliğinden $2x - 2y = 2$ veya $x - y = 1$ buluruz. Bunu $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 15$ eşitliğinde kullanarak $x + y = 15$ elde ederiz.

20. $P(x - 2) = (x^2 + 1)Q(x - 1) - x - 1$ eşitliği verilmiştir. $P(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan 20 olduğuna göre, $Q(x)$ polinomunun $x - 4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm. Öklit algoritmasına göre $p(x) = r(x)(x - 3) + 20$ ve $Q(x) = q(x)(x - 4) + k$ koşullarını sağlayan $r(x)$ ve $q(x)$ polinomları vardır ve $p(3) = 20$, $Q(4) = K$ sağlanır. p 'nin 3'teki değeri verilen ifadede $x = 5$ alınarak bulunabilir. Bu da $p(3) = 26Q(4) - 5 - 1 = 26k - 6$ verir. Buradan da $k = 1$ buluruz.

21. x bir gerçel sayı ise, $|4x - 10| + |2x + 5|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm. Mutlak değer özelliklerinden

$$f(x) = \begin{cases} -6x + 5, & \text{eğer } x \leq -\frac{5}{2} \text{ ise;} \\ -2x + 15, & \text{eğer } -\frac{5}{2} < x \leq \frac{5}{2} \text{ ise;} \\ 6x - 5, & \text{eğer } \frac{5}{2} < x \text{ ise;} \end{cases}$$

olur. $f(x)$ her yerde süreklidir, fakat $-\frac{5}{2}$ ve $\frac{5}{2}$ noktalarında türevlenebilir değildir. Örneğin

$x = \frac{5}{2}$ noktasında sağdan türev 6 ve soldan türev -2 'dir. Dolayısıyla olası kritik noktalar sadece $\frac{5}{2}$ ve $-\frac{5}{2}$ 'dir. Ancak $f(x)$, $\frac{5}{2}$ 'ye kadar azalmakta, $\frac{5}{2}$ 'den sonra ise artmaktadır. Birinci türev testi, $\frac{5}{2}$ noktasında minimum olduğunu gösterir. Minimum değer ise 10'dur.

22. $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ polinomunun kökleri $x_1 = 1$, $x_2 = b$ ve $x_3 = c$ ise, $b^2 + c^2$ kaçtır?

Çözüm. Kökler ve katsayılar arasında bilinmesi gerekli bağıntılardan $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ve $x_1 x_2 x_3 = -4$ buluruz. Bunlardan da $b + c = 3$ ve $bc = -4$ elde ederiz. İlk eşitlikte her iki tarafın karesini alarak $b^2 + 2bc + c^2 = 9$ ve ikinciye kullanarak $b^2 + c^2 = 17$ buluruz.

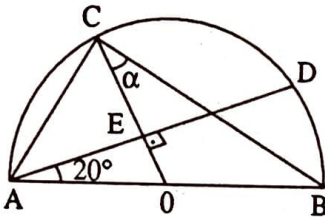
23. $f(x) = \log_2 x$ ve $(g \circ f)(x) = x + 2$ ise, $g(x)$ nedir?

Çözüm. Gerçel $0 < a$ sayısı için genelleştirilmiş üstel fonksiyon $a^x = e^{x \ln a}$ olarak tanımlanır. $y = \log_a x$ için gerekli ve yeterli koşul $x = a^y$ olmasıdır. Bu ise a tabanına göre logaritma fonksiyonu $\log_a x$ ile a^x fonksiyonunun birbirlerinin tersi olduğunu gösterir. $a = 2$ için $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonudur. Buradan $g(x) = (g \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f)(f^{-1}(x)) = g \circ f(2^x) = 2^x + 2$ bulunur.

24. $\log_3(9 \cdot 3^{x+3}) = 3x + 1$ eşitliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm. $y = \log_a x$ için gerekli ve yeterli koşul $x = a^y$ eşitliğinin sağlanmasıdır. $a = 3$ için, $\log_3(9 \cdot 3^{x+3}) = \log_3(3^2 \cdot 3^{x+3}) = \log_3 3^{x+5} = 3x + 1$ eşitliğinden $3^{x+5} = 3^{3x+1}$ veya $x + 5 = 3x + 1$ elde ederiz ki, bu da $x = 2$ verir.

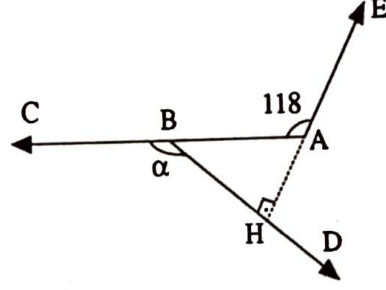
25. O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberde AB yayı üzerinde $[OC] \perp [AD]$ olacak şekilde C ve D noktaları alınıyor. $\widehat{DAB} = 20^\circ$ ve $\widehat{OCB} = \alpha$ ise, α kaçtır?



Çözüm. OC ve OB kenarları yarıçapa eşit olduklarından COB üçgeni ikizkenar bir üçgendir. Bu nedenle AOC açısı 2α 'dır. AD ve CO doğru parçalarının kesim noktası E ise,

AOE dik üçgeninde $20^\circ + 2\alpha = 90^\circ$ eşitliğinden $\alpha = 35^\circ$ elde edilir.

26. A, B, C, D, E noktaları düzlemsel, $\vec{AE} \perp \vec{BD}$, $\widehat{CAE} = 118^\circ$, ve $\widehat{CBD} = \alpha$ ise, α kaçtır?



Çözüm. AE doğrusunun BD doğrusunu kestiği noktayı H ile gösterelim. BHA bir dik üçgen olarak verildiğinden, bir dış açı olan $\widehat{CBD} = 90^\circ + 62^\circ = 152^\circ \alpha$ 'dır.

Değerlendirme

Bildiğimiz kadarı ile ÖYS sorularının değerlendirilmesi ilk kez yapılıyor. Matematik Dünyası, uzmanları çeşitli yönlerden bu sınavları değerlendirmeğe davet ediyor.

İlk bakışta sorular 3 bölüme ayrılabilir. Bunlardan ilki zaten birinci aşamada sorulan oldukça kolay sorular. İlk aşamada sınanan bilgi ve yeteneklerin bir kez daha sınanması ölçme ve değerlendirme uzmanları tarafından irdelenmelidir. İlk 26 sorudan bu türe örnekler 1, 3-7, 14 ve 25 numaralı sorulardır.

İkinci türden sorular konuların ana hatlarını bilen ve biraz da işlem yapma yeteneğini geliştirmiş öğrencilerin yapabileceği türden olanlar. Bunların örnekleri ise 2, 8-13, 15-20, 22-24 numaralı sorulardır.

Üçüncü türden sorular gerek birikim, gerek matematiksel yetenekleri gelişmiş öğrencileri ayırt etmek amacı ile sorulmuş olabilirler. 21 numaralı soru bu türe örnektir.

Ders programlarına göre incelendiğinde ilk 26 sorudan 7'sinin Orta 2 ve 6'sının Orta 3 sorusu olmak üzere 13 tanesinin ortaokul derslerinden, diğer 13 tanesinin ise Lise 1 derslerinden olduğu görülüyor. Oranlardaki isabet tartışılmalıdır. Bir yıl boyunca hazırlanan sorulardan 4 soruda iki basamaklı pozitif doğal sayı ifadesi yanıltıcı olabilir. Zira doğal sayılar tam sayılar içinde düşünüldüklerinde (sıfır dışında) pozitiflerdir. Aynı özensizliği 8. soruda da görüyoruz. Sorunun gidişinden aritmetik ortalama anlaşılmasına karşın, açıkça belirtilmesinde

yarar olabilirdi. 9, 10, 11 ve 23 numaralı sorularda olduğu gibi seçeneklerin *denenerek* doğru yanıtın bulunabileceği soruların olma-

masına dikkat edilmemiştir. 24. soru için gerekli bilgilerin 23. soru için gerekli bilgileri kapsadığını da söyleyebiliriz.

OLİMPİYAT HABERLERİ

Ali Doğanaksoy *

II. Ulusal Matematik Olimpiyadı 23-25 Aralık 1994 tarihlerinde Ankara'da yapılacaktır. Bu olimpiyatta, Mayıs ayındaki birinci aşamayı kazanan 39 öğrenci yarışacaktır.

I. ECO (Ekonomik İşbirliği Teşkilatı) Matematik Olimpiyadı 17-22 Eylül tarihleri arasında Tahran'da yapıldı. Takım sıralamasında ev sahibi İran birinci olurken, 1 gümüş ve 4 bronz madalya alan Türkiye ikinci oldu. Bu yarışmada ülkemizi Halil Bayrak (Bronz), Ethem Çanaköğlu (Bronz), Mustafa Günseli, Ali Ekber Gürel (Bronz), Caner Kazancı (Bronz) ve Bayram Yenikaya (Gümüş) temsil ettiler.

Aşağıda bu olimpiyatta yer alan sorular verilmektedir.

Birinci Gün, 18 Eylül 1994

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat.

1. Kenar uzunlukları tamsayı ve çevre uzunluğu çift (tamsayı) olan bir üçgende, kenar uzunluklarının, karelerinin toplamının sıfırdan farklı dört tam karenin toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

2. $6 \leq x, y, z \leq 73$ olmak üzere

$$x \cdot y \cdot z = 73 \cdot 3^4 \cdot 2$$

$$x + y + z = 106$$

denklemlerini sağlayan bütün x, y, z reel sayılarını bulunuz.

3. Birim çember üzerinde alınan A ve B noktaları, tamamen çemberin iç bölgesinde kalan

bi eğri ile birleştiriliyor. Eğrinin, çemberin iç bölgesini alanca iki eşit parçaya bölmesi halinde, uzunluğunun en az 2 olacağını gösteriniz.

İkinci Gün, 20 Eylül 1994

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat.

4. Her $x, y, z \in \mathbb{N}$ için

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = x + y + z$$

şartını sağlayan bütün fonksiyonları bulunuz. ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.)

5. İçteğet çemberinin yarıçapı r olan ABC üçgeninin ($B = 90^\circ$) $[BC]$ kenarı üzerinde $|BD| = r$ olacak şekilde D noktası işaretleniyor. O_1 ve O_2 , sırasıyla ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezleri olmak üzere,

$$|AO_1|^2 + |DO_2|^2 = |AO_2|^2 + |DO_1|^2$$

olduğunu gösteriniz. (İçmerkez: içteğet çemberinin merkezi.)

6. $2n \times 2n$ boyutunda ($n > 1$) bir satranç tahtasına, her adımda $n \times 1$ boyutunda bir dikdörtgen yerleştiriliyor. Yeni bir dörtgen yerleştirilemeyecek konuma gelinceye kadar bu işleme devam ediliyor. Geriye en fazla kaç tane boş kare kalacağını hesaplayınız.

(Yerleştirme işlemi, her dikdörtgen tam n tane kare örtecek ve herhangi iki dikdörtgen ortak bir kare örtmeyecek şekilde yapılıyor.)

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A96. Eğer $Z = \frac{(1+i)^3 + (1+i)^6 + \dots + (1+i)^{12n}}{(1-i)^3 + (1-i)^6 + \dots + (1-i)^{12n}}$ ise (n bir doğal sayı), $|Z|$ 'yi hesaplayınız. (Hasan Kullap)

A97. Bir ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 18^\circ$ ve $\widehat{ACB} = 54^\circ$ ise, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranını hesaplayınız. (Ali Akın)

A98. Bir ABC üçgeninin içmerkezi O , A açısı karşısında oluştan teğet çemberin merkezi O' olsun. $|OO'| = \frac{|AB||AC|}{|AO|} - |AO|$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

A99. Bir $ABCD$ karesinin içinde $\widehat{DAK} = \widehat{DCK} = 10^\circ$ olacak şekilde bir K noktası ve BC kenarı üzerinde $\widehat{BAL} = 35^\circ$ olacak şekilde L noktası işaretleniyor. $\widehat{AKL}$ açısını hesaplayınız. (Alaattin Aktaş)

A100. i basamaklı bir sayının, birler basamağı ve i 'yinci basamağındaki rakamlarının yeri değiştirilerek bulunan sayı ile ilk sayının farkının mutlak değerinin rakamları toplamını x_i ile gösterelim. $x_2 + x_3 + \dots + x_n$ toplamını hesaplayınız. (Cem Güzel)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y96. Bir üçgenin a, b, c kenar uzunlukları ve r içteğet çember yarıçapı için

$$\frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (Tamer Adanır)

Y97. Bir üçgenin S alanı ve r içteğet çember yarıçapı için $S \geq 3\sqrt{3}r^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (Dinçer Akay)

Y98. x, y, a, b, c doğal sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x^2 + a^3 &= y^4 \\ x^2 + a^3 + b^3 &= y^4 \\ x^2 + a^3 + b^3 + c^3 &= y^4 \end{aligned}$$

denklemlerinin herbirinin sonsuz sayıda tamsayı çözümü olduğunu gösteriniz. (Almas Rimov)

Y99. İçteğet çember yarıçapı r olan bir ABC üçgeninin içmerkezinin A, B, C köşelerine uzaklıkları sırasıyla X_A, X_B, X_C olsun. ABC üçgeninin A, B, C açıları karşısındaki dıştan teğet çemberlerin merkezlerinin içmerkeze uzaklıkları sırasıyla Y_A, Y_B, Y_C olsun. $r(Y_A + Y_B + Y_C) = X_A X_B + X_A X_C + X_B X_C$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Y100. Bir ABC dik üçgeninde ($\hat{A} = 90^\circ$), hipotenüse inilen dikme AD olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezlerini birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kessin. ABC ve AKL üçgenlerinin alanları sırasıyla S ve S' ise, $S \geq 2S'$ olduğunu gösteriniz. (Turgay Uçkun)

ÇÖZÜMLER

A86. Bir ABC üçgeni verildiğinde, $X, X' \in [BC]$, $Y, Y' \in [CA]$, $Z, Z' \in [AB]$ olacak şekilde, karşılıklı kenarları birbirine paralel dışbükey ve eşkenar bir $XX'YY'ZZ'$ altıgeninin cetvel ve pergeli ile çizilebileceğini gösteriniz. (Şahin Polat)

Çözüm. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ; altıgenin ortak kenar uzunluğu d , $|BX| = x$ ve $|CX'| = x'$ ise

$$\frac{|XZ'|}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{a}{b}d \quad (1)$$

$$\frac{|CX'|}{c} = \frac{x'}{a} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{x'}{a} \Rightarrow x' = \frac{a}{c}d \quad (2)$$

bulunur. Bunlardan da

$$d = a - \frac{ad}{b} - \frac{ad}{c} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)d = a$$

ve

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (3)$$

elde edilir. b ile c nin harmonik ortalaması k ise (3)'ten $\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{2}{k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k/2} \Rightarrow \frac{2}{2d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k/2}$ olup, $2d$ 'nin a ile $k/2$ 'nin harmonik ortalaması olduğu sonucu çıkar. k ile d çizilebilir [1]. d çizilince (1)'den x de çizilebilir. O halde XX' ve sonuç olarak $XX'YY'ZZ'$ de çizilebilir.

(Çözenler: Murat Aygen, Atasâğun Baykal.)

A87. $64 + 9^{2n}$ ifadesinin hiç bir n doğal sayısı için asal olamayacağını gösteriniz. (Mehmet Şahin)

Çözüm.

$$\begin{aligned} 64 + 9^{2n} &= (8 + 9^n)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9^n \\ &= (8 + 9^n)^2 - 4^2 3^{2n} \\ &= (8 + 9^n - 4 \cdot 3^n)(8 + 9^n + 4 \cdot 3^n). \end{aligned}$$

Her doğal sayı n için $8 + 9^n - 4 \cdot 3^n > 1$ ve $8 + 9^n + 4 \cdot 3^n > 1$ olduğundan, $64 + 9^{2n}$ sayısı 1'den büyük iki sayının çarpımı olur.

(Çözenler: Murat Aygen, Ruhi Tabur, Atasâğun Baykal, Çağatay Candan, Seyhun Kesim, Ergün Yaraneri, Ali Akın, Ülkü Öztaş, Emre Alkan.)

A88. Bir ABC üçgeninde I_b ve I_c dışçemberleri BC , CA , AB doğrularına D_b, E_b, F_b ve D_c, F_c, E_c noktalarında değişiyor.

$$\frac{\text{alan}(D_b D_c F_b F_c)}{\text{alan}(ABC)} > \frac{a^2}{bc}$$

olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. ABC 'nin alanı S , dörtgenin alanı S' , üçgenin yarı çevresi u ve çevrel çember yarıçapı R ise,

$$\begin{aligned} S' &= |BD_b F_b| + |CF_c D_c| - S + |AF_b F_c| \\ &= \frac{1}{2} u^2 \sin B + \frac{1}{2} u^2 \sin C - ur \\ &\quad + \frac{1}{2} (u - b)(u - c) \sin A \\ &= \frac{1}{4R} [bu^2 + cu^2 + a(a - b)(u - c)] - ur \\ &= \frac{1}{4R} [(a + b + c)u^2 - a(b + c)u + abc] - ur \\ &= \frac{u}{4R} [2u^2 - a(b + c) + 4Rr] - ur \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \frac{u}{4RS} [2u^2 - a(b + c)] \\ &= \frac{u}{8RS} [(a + b + c)^2 - 2a(b + c)] \\ &= \frac{u}{8RS} [a^2 + (b + c)^2] > \frac{u}{2abc} 2a^2 \\ &= \frac{(a + b + c)a^2}{2abc} > \frac{2a \cdot a^2}{2abc} = \frac{a^2}{bc} \end{aligned}$$

(Çözenler: Atasâğun Baykal, Ali Akın.)

A89. $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ olsun. $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $P_i(x) = \frac{Q(x)}{x - a_i}$ olmak üzere, $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x)$ polinomunun bütün köklerinin gerçel olduğunu gösteriniz. (Ozan Hafızoğulları)

Çözüm. $Q(x)$ 'in birbirinden farklı n tane kökü vardır. Rolle teoremi gereği, herhangi iki kök arasında $Q'(x)$ 'in sıfır olduğu en az bir nokta bulunacaktır. O halde $Q'(c) = 0$ olacak şekilde en az $n - 1$ tane nokta vardır. Öte yandan $Q'(x)$ 'in derecesi $n - 1$ olduğundan, köklerinin sayısı $n - 1$ 'den fazla olamaz. O halde $Q'(x)$ 'in birbirinden farklı tane $n - 1$ tane gerçel kökü vardır. $Q'(x) = P(x)$ olduğundan $P(x)$ 'in bütün kökleri gerçeldir.

(Çözenler: Ruhi Tabur, Uğur Yıldırım, Atasâğun Baykal, Çağatay Candan, Seyhun Kesim, Emre Alkan.)

A90. Tepesi A olan ikizkenar ABC üçgeninin içinde, tabana, yan kenarlardan birine ve birbirine teğet eş iki çember ile bu çemberlere ve yan kenarlara teğet bir çember çiziliyor. Taban açılarının hangi değeri için bu çemberlerin kenarlara değdiği altı nokta çemberdeş olur? (Hüseyin Demir)

Çözüm. $[BC], [CA], [AB]$ üzerindeki değme noktaları sırasıyla X, X', Y, Y', Z, Z' olsun. Y, Y', Z, Z' çemberdeş olup, X, X', Z, Z' noktaları çemberdeş ise $\widehat{ZXY'} = \widehat{Y'ZA} = \widehat{B}$ olmalıdır. Bu bilgilerden, $\widehat{CXY'} = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) - B = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$ ve $\widehat{XY'C} = \pi - \widehat{CXY'} - c = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) - B = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$ olup, CYX üçgeni ikizkenar olur. O halde $|CX| = |CY'|$ olup, $|XX'| = |YY'|$ elde edilir. Bu da üçüncü çemberin ilk ikisine eşliğini gösterir ve $B = 60^\circ$ bulunur.

(Çözenler: Muammer Keleş, Atasâğun Baykal, Uğur Yıldırım, Ergün Yaraneri, Ali Akın.)

Y86. Dar açılı bir ABC üçgeninin A köşesinden harekete başlayan bir nokta kenarlara geldiği zaman bilinen yansıma kurallarına göre harekete devam etmektedir. Bu nokta, sırasıyla $[BC], [BA], [AC], [BC]$ kenarlarına D, E, F, G noktalarında çarpıp yansıyarak tekrar A köşesine ulaşıyor. $ADEFGA$ yolunu çizin ve uzunluğunu hesaplayınız. (Hüseyin Demir)

Çözüm. A 'nın BC 'ye göre A' simetriği alınrsa, D ve G 'deki yansımalar nedeniyle

E, D, A' noktaları doğrudur ve F, G, A' noktaları doğrudur. A' 'nin AB ve AC 'ye göre A_1 ve A_2 simetrikleri alındığında E ve F 'deki yansımalar nedeniyle A_1, E, F, A_2 noktaları doğrudur. Şu çizim elde edilir.

1) A', A_1, A_2 çizilip A_1A_2 'nin AB ve AC ile olan E ve F arakesitleri çizilir.

2) EA' ve FA' 'nin BC ile olan D ve G arakesitleri çizilir.

$|AD| + |DE| = |EA'| = |EA_1|$ ve benzer olarak $|AG| + |GF| = |FA_2|$ olup, aranan yol uzunluğu $|AA_2|$ olur. $|AA_1| = |AA'| = |AA_2|$ olduğundan AA_1A_2 ikizkenar üçgendir ve tepe açısı $2A'$ 'dir. O halde

$$|A_1A_2| = 2|AA_1|\sin A = 2|AA'|\sin A = 4k_a \sin A$$

bulunur.

(Çözenler: Tamer Adanır, Murat Aygen, Ergün Yaraneri, Atasagun Baykal.)

Y87. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasının bu üçgene göre ayak üçgeni DEF olmak üzere, AD, BE, CF doğruları noktada ise P noktasının geometrik yeri nedir? (Hüseyin Demir)

Çözüm. Bir yanlışlık sonucu, Y82 numaralı yarışma problemi Y87 numarası ile tekrarlanmıştır. Özür dilerim. (A.D.)

AD, BE, CF doğruları bir Q noktasında kesişirler. QBC, QCA, QAB üçgenlerinin alanları sırasıyla x, y, z olsun. ABC 'nin kenar uzunluğu a ve alanı s ise, D 'nin $[BC]$ 'yi bölme oranı $\lambda = \frac{|BD|}{z} = \frac{|DC|}{y} = \frac{a}{y+z} = \frac{a}{s-x}$ olup $|DB| = \frac{az}{s-x}$ ve $|DC| = \frac{ay}{s-x}$ bulunur. E ve F 'nin $[CA]$ ve $[AB]$ 'yi bölme oranlarından

$$|EC| = \frac{ax}{s-y}, \quad |EA| = \frac{az}{s-y}$$

$$|FA| = \frac{ay}{s-z}, \quad |FB| = \frac{ax}{s-z}$$

elde edilir. DP, EP, FP dikmelerinin noktadaşlığı ile [2]'deki formülden

$$\sum \left[\frac{a^2 y^2}{(s-x)^2} - \frac{a^2 y z^2}{(s-x)^2} \right] = 0$$

olarak yazılır. Bu da $\sum \frac{y-z}{s-x} = 0$ olarak kısaltılıp $\sum (y-z)(s-y)(s-z) = 0$ eşitliğini verir. Buradan aşağıdakileri elde ederiz:

$$\sum (y-z)[s^2 - (y-z)s + yz] = 0$$

$$\sum (y-z)[s^2 - (s-x)s + yz] = 0$$

$$\begin{aligned} \sum (y-z)(xs + yz) &= 0 \\ s \sum x(y-z) + \sum yz(y-z) &= 0 \\ yz(y-z) + zx(z-x) + xy(x-y) &= 0 \\ (y-z)(z-x)(x-y) &= 0 \end{aligned}$$

$$y = z, \quad z = x, \quad x = y.$$

O halde geometrik yer yüksekliklerin bileşimi olan nokta kümesidir.

(Çözenler: Atasagun Baykal.)

Y88. $u = u(x)$, reel sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, w ve z fonksiyonları

$$w(x) = \int \left(\int [2(u')^2 + 2u''u] dx \right) dx,$$

$$z(x) = \int \left(\int \left[\frac{uu'' - (u')^2}{u} \right] dx \right) dx$$

olarak tanımlanıyor. $\sqrt[3]{w}$ değerini hesaplayınız. (Dinçer Akay)

Çözüm. $(uu')' = (u')^2 + uu''$ ve $(u^2)' = 2uu'$ olduğu gözönüne alınarak

$$w = \int \left(\int 2(uu')' dx \right) dx = 2 \int (uu') dx = u^2,$$

$\left(\frac{u'}{u}\right)' = \frac{uu'' - (u')^2}{u^2}$ ve $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ olduğu düşünülerek,

$$z = \int \left(\int \left(\frac{u'}{u}\right)' dx \right) dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln u$$

olduğu görülür. Buradan

$$\sqrt[3]{w} = (u^2)^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{2}{3}} = e$$

elde edilir.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Şuayyip Salim Özkurt, Emre Alkan.)

Y89. O merkezli ve çapı $[BC]$ olan birim yarıçaplı bir yarıçemberin üzerinde bir A noktası alınıyor ve ABC dik üçgeni çiziliyor. A noktası yayı çizirken, homojen kabul edilen $[AB] \cup [AC]$ kırık doğrusunun G ağırlık merkezinin geometrik yerinin denklemini elde ediniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. $|AC| = b$, $|AB| = c$ diyelim. $|BC| = 2$ 'dir. $[AC]$ 'nin ağırlık merkezi B' noktasında, $[AB]$ 'nin ağırlık merkezi ise C' noktasında olmak üzere, arasından G ağırlık merkezi vektörel olarak

$$\frac{G - C'}{b} = \frac{B' - G}{c}$$

eşitliğini sağlar. Bu da

$$\begin{aligned}(b+c)G &= bB' + cC' \\ (\sin B + \cos B)G &= (\sin B)B' + (\cos B)C' \\ 2(\sin B + \cos B)G &= (\sin B)(A+C) \\ &\quad + (\cos B)(A+B)\end{aligned}$$

verir. O 'yu koordinat düzleminin merkezi kabul eder ve G 'nin koordinatlarına (x, y) dersek, buradan

$$\begin{aligned}2x &= \frac{\sin B(\cos 2B + 1) + (\cos B)(\cos 2B - 1)}{\cos B + \sin B} \\ &= \frac{\sin B(2\cos^2 B) - \cos B(2\sin^2 B)}{\cos B + \sin B} \\ &= \frac{\sin 2B(\cos B - \sin B)}{\cos B + \sin B} \\ 2y &= \frac{\sin B \sin 2B + \cos B \sin 2B}{\cos B + \sin B} \\ &= \frac{\sin 2B(\cos B + \sin B)}{\cos B + \sin B} = \sin 2B \\ y &= \frac{\sin 2B}{2} = \frac{2 \sin B \cos B}{2} = \sin B \cos B\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2} &= \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{\cos B - \sin B}{\cos B + \sin B}\right)^2 \\ &= \frac{1 - 2 \cos B \sin B}{1 + 2 \cos B \sin B} \\ x^2 &= y^2 \frac{1 - 2y}{1 + 2y}\end{aligned}$$

elde edilir.

(Çözenler: Murat Aygen, Uğur Yıldırım, Tamer Adanır, Çağatay Candan, Atasağun Baykal, Ergün Yaraneri.)

Y90. Gerçel sayılar üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir f fonksiyonu ve bir pozitif a sabiti için

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

denklemini her x için geçerli olsun. f fonksiyonunun periyodik olduğunu (yani, her x için

$f(x+b) = f(x)$ veren bir b sayısının varlığını) gösteriniz. Ayrıca $a = 1$ için istenilen özelliklerde ve sabit olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

Çözüm. Verilen denklem $f(x+a) \geq \frac{1}{2}$ olduğunu gösterir ve böylece her x için $f(x) \geq \frac{1}{2}$ olur. $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ dersek, her x için $g(x) \geq 0$ olur ve verilen denklem

$$\begin{aligned}g(x+a) &= \sqrt{g(x) + \frac{1}{2} - [g(x)]^2} - g(x) - \frac{1}{4} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} - [g(x)]^2}\end{aligned}$$

halini alır. Kare alarak

$$[g(x+a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x)]^2, \quad (*)$$

ve bu eşitlikler her x için doğru olduğundan x yerine $x+a$ koyarak $[g(x+2a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x+a)]^2$ elde ederiz. Son ikisi $[g(x+2a)]^2 = [g(x)]^2$ verir. g her yerde pozitif olduğundan karekök alır ve $g(x+2a) = g(x)$ buluruz. Bu ise $f(x+2a) - \frac{1}{2} = f(x) - \frac{1}{2}$ ve her x için $f(x+2a) = f(x)$ demektir. Yani, f periyodiktir ve periyodu da $2a$ 'dır.

Verilen denklemin bütün çözümlerini bulmak için $h(x) = 4[g(x)]^2 - \frac{1}{2}$ yazarız ve bu $(*)$ 'ı $h(x+a) = -h(x)$ haline sokar. Karşıt olarak, eğer $h(x) \geq -\frac{1}{2}$ ise ve bu son denklemi sağlarsa, $g(x)$ de $(*)$ 'ı sağlar. Böylece kolaylıkla bir h bulup ondan f 'yi elde edebiliriz.

$a = 1$ için $h(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ fonksiyonunu kullanabiliriz. Buradan $g(x) = \frac{1}{2} |\sin \frac{\pi}{2}x|$ ve de $f(x) = \frac{1}{2} |\sin \frac{\pi}{2}x| + \frac{1}{2}$ elde ederiz.

(Çözenler: Muammer Keleş, Tamer Adanır, Murat Aygen, Uğur Yıldırım, Atasağun Baykal, Seyhan Kesim.)

KAYNAKÇA

- [1] H. Demir, *Bazı Ortalamalar, Matematik Dünyası*, 1, sayı 1, 17-21 (1991).

DİZİN (4. CİLT)

Yazar	Yazı	Sayı	Sayfa
Alkan, E.	Fermat ve Euler Teoremleri	3	7-8
Alkan, E.	İlginç Geometri Problemleri	4	17-20
Alpay, Ş.	California Matematik Ligi Sınavları	4	24-25
Alpay, Ş.	Japonya Üniversite Giriş Sınavları	4	25-28
Alpay, Ş.	Moskova Bağımsız Üniversitesi Giriş Sınavı	1	27
Alpay, Ş.	Üç Bir Dört Bir ve Gerisi	1	17-19
Avcı, Y. & Ergun, N.	Limitler, Limitler	1	12-16
Bergil, M.S.	Daireyi Kare Haline Getirmek: π ile φ Arasındaki Bağlantı	2	23-24
	Geçmişle Bugün Arasında Bir Köprü Kurabilir mi?	3	9-13
Çalışkan, N.	Cebirsel Denklemlerin Çözümü	1	20-24
Demir, H.	İlgin Düzlem Geometri (III)	5	27
Doğanaksoy, A.	Olimpiyat Haberleri	4	29
Doğanaksoy, A.	35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı Soruları	3	28
Doğanaksoy, A.	35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı	1	6-11
Eden, A.	Katastrof ve Kaos Teorileri Hakkında	5	6-10
Ergun, N.	Gerçel Sayılarda Dokuz Temel Eşdeğerlik	3	3-6
Ergun, N.	Sonsuz Tür Sonsuzluk Vardır	1	12-16
Ergun, N. & Avcı, Y.	Limitler, Limitler	5	17-23
Ertuğ, C.A.	Denklemlerin Çözülmesi	2	18-22
Ertuğ, C.A.	Geometri Problemlerinin Çözüm Yöntemleri	4	21-24
Ertuğ, C.A.	Geometri Problemlerinin Çözüm Yöntemleri (II)	2	5-6
Erkip, A.	Ulusal Matematik Olimpiyadı	3	27
Gökpinar, H.	Matematikle Eğlenelim	4	1-6
Halmos, P.	Yaratıcı Sanat: Matematik	3	26
Hilbert, D.	Bilmeliyiz, Bileceğiz	2	7-14
Kaptanoğlu, H.T.	Dinamik Sistemler, Garip Çekerler ve Kaos	4	12-16
Kaptanoğlu, H.T.	Sayılar Dünyasında Gezintiler	1	24-26
Kocatepe, M.	Eisenstein Kriteri	2	15-17
Kocatepe, M.	L'Hôpital Kuralı Üstüne	1	2-5
Koç, C.	Öklit Algoritması	5	11-17
Mazlumoglu, B. & Tagiyev, M.	Mekanik Kavramlarının Geometri Problemlerine Uygulanması	2	1-5
Nesin, A.	Bir Tane Rasgele Çizge Var!	3	18-22
Nesin, A.	Fermat Ne Biliyordu?	4	6-11
Nesin, A.	Oyunlar (I)	5	1-5
Nesin, A.	Oyunlar (II)	5	1-5
Öztaş, Ü. & Sağsen, O.	1994 Öğrenci Yerleştirme Sınavı Matematik Soruları ve Cevapları	5	24-27
Öztaş, Ü. & Sağsen, O.	1994 Öğrenci Yerleştirme Sınavı Matematik Soruları ve Cevapları	5	24-27
Sertöz, S.	Arşimet'in Küreleri	3	1-3
Şekercioğlu, A.	"Bulanık" Kümeler	3	14-18
Şenkon, H.	Ünlü Kadın Matematikçiler: Emmy Noether (1882-1935) (I)	2	24-28
Şenkon, H.	Ünlü Kadın Matematikçiler: Emmy Noether (1882-1935) (II)	3	23-25
Tagiyev, M. & Mazlumoglu, B.	Mekanik Kavramlarının Geometri Problemlerine Uygulanması	5	11-17

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Doç. Dr. Ali Doğanaksoy, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 15 Mart 1995 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarih ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünüyle bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığılanlardan kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara**

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

Matematik Dünyası'nın üç ve dört cildini kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 250.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte postalanacaktır.

Matematik Dünyası'nın, 1995 yılı abone ücreti 300.000.-TL., tane satış fiyatı ise 75.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

