

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Yeniden Başlarken...

Ustaya Saygı: Cahit Arf (1910-∞)
Doğan Çoker

Binom Katsayılarının
Bazı Özellikleri
Emre Alkan

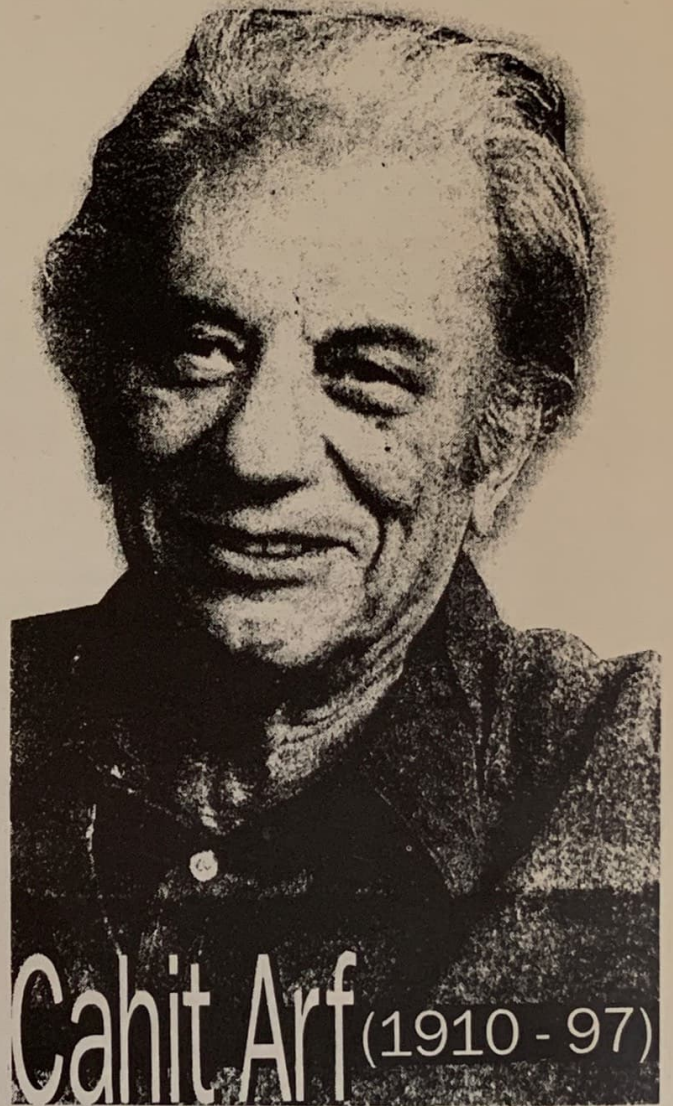
Bazı Fonksiyonel Denklemlerin
Analiz Yöntemleriyle Çözülmesi
Nizamettin İskenderov

ODTÜ Matematik Topluluğu
2.Liselerarası Matematik
Yarışması
Mustafa Kalafat

14. Balkan Matematik
Olimpiyadı Soru ve Çözümleri
N. Ergun-N. Ural-T. Yegül

Perge'li Apollonius
Ünal Ufuktepe

Problemler ve Çözümleri



ABC KÜLTÜR MERKEZİ

- ✓ Tıp Kitapları
- ✓ Yabancı Dil Kitapları
- ✓ Roman ve Güncel Kitaplar
- ✓ Toptan Hikaye, Dosya ve Klasör Dağıtımı
- ✓ BÜRO MALZEMELERİ
- ✓ Üniversite Ders Kitapları
- ✓ Üniversite Hazırlık Kitapları
- ✓ Bilgisayar Kitapları
- ✓ Çok Kaliteli Defter Çeşitleri
- ✓ Ve Tüm Kırtasiye Çeşitleri

*uygun fiyatlarla çeşitte bolluk
geniş mekanda kaliteli seçim*

ABC KÜLTÜR MERKEZİ

H. SUBAŞI CAD. (VALİLİK ARKASI) TELEFAX: 0(0242) 2411974 ANTALYA

SİSTEM

DERSHANESİ

"Bazı Seçimler Tüm Yaşantınızı Değiştirir."

- ✓ Seçkin, Deneyimli, Uzman Kadro.
- ✓ Başarı - devam durumunun düzenli ve sürekli izlenmesi.
- ✓ Güvenilir, güler yüzlü, uzman Rehberlik Servisi
- ✓ Uzman öğretmenlerince hazırlanan özgün, periyodik test kitapları
- ✓ Antalya'da ilk kez uygulanacak T.U.P. Sistemi

SİSTEM

DERSHANESİ

**ANTALYA ve TÜRKİYE DERECELERİ
YAPANLARIN ve YAPACAKLARIN
DERSHANESİ**

Adres: Hükümet Arkası Sıdika Başagan İşhanı

Kat: 3/4/5 ANTALYA

Tel: 0.242 • 247 11 69 - 79

Fax: 0.242 • 243 05 87

YENİDEN BAŞLARKEN ... İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası altı yıl birliktelikten sonra bir yıl ayrı kaldığı okurlarına yeni bir ortamdan -bu kez yurdumuzun güzellikler dolu bir köşesinden, ANTALYA'dan- yeniden ses veriyor... Güneyn sıcak ikliminde gürbüzleşerek kök-dal-budak salmasını dilediğimiz **Matematik Dünyası** 'nın matematiği seven genç kuşaklarla yıllarca, on yıllarca kucaklaşacağına, yayın yaşamını kesintisiz sürdüreceğine inanıyor, bunun için çalışıyoruz.

Küçük bir araştırma yapmakla kolayca saptanabilecek bir olgu vardır: Matematikte ve bilimin diğer dallarında ilerlemiş toplumların **Matematik Dünyası** 'na benzer -bir değil- bir çok dergileri vardır. Buralarda toplumun önde gelen matematikçileri ve konuyla ilgilenen tüm kişiler yazılarıyla bu dergileri beslerler.

Matematik Dünyası dergisinin gelişerek yayın yaşamını sürdürmesinin ve benzerlerinin ortaya çıkıp çoğalmasının ülkemizde matematiğin ve dolayısıyla diğer bilim dallarının gelişmesine önemli katkısı olacağını düşünüyoruz.

Bu duygularla tüm değerli okurlarımızın yeni yılını kutlar, ANTALYA 'dan selam ve sevgiler yollarız.

MATEMATİK DÜNYASI

Yeniden Başlarken ...	1
Ustaya Saygı: Cahit Arf (1910-∞) Doğan Çoker	2
Binom Katsayılarının Bazı Özellikleri Emre Alkan	11
Bazı Fonksiyonel Denklemlerin Analiz Yöntemleriyle Çözülmesi Nizamettin İskenderov	16
ODTÜ Matematik Topluluğu 2.Liselerarası Matematik Yarışması Mustafa Kalafat	19
14. Balkan Matematik Olimpiyadı Soru ve Çözümleri N. Ergun - N. Ural - T. Yegül	21
Perge'li Apollonius Ünal Ufuktepe	24
Problemler ve Çözümleri	27

Matematik Dünyası

SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU : H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Ünal Ufuktepe
DİZGİ : Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1998) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 2.000.000 TL; Yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 1.750.000 TL. (Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 111.91.79 no'lu hesaba ya da İş Bankası Antalya Şubesi 6200.30000.2192647 no'lu hesaba yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@ufuk.lab.akdeniz.edu.tr

USTAYA SAYGI : CAHİT ARF (1910-∞)

Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Türk Matematik Dünyasının en büyük adlarından birini, **Ord. Prof. Dr. Cahit Arf** 'ı, 26.12.1997 Cuma günü sabahı saat 5'te yitirmiş bulunuyoruz. Aşağıdaki satırlarda Cahit Arf 'ın yaşam öyküsünü, kendi ağzından Cahit Arf 'ı, yayınlarının bir çizelgesini ve onu tanıyanlardan Cahit Arf 'ı bulacaksınız.

Türkiyede genel olarak bilimin, özel olarak da matematiğin gelişmesi, yüksek bir düzeye çıkması yönünde elinden gelen tüm çabaları harcayan **Cahit Arf** 'a ülkemiz çok şey borçludur. Bu borcun altından nasıl kalkabileceğimiz sorusunun yanıtını sanırım gelecekte verebileceğiz.

Türkiyedeki tüm bilimciler ve matematikçiler **Cahit Arf** 'ın anısı önünde saygıyla eğilirler. Tüm bilimcilerin, tüm matematikçilerin ve tüm yakınlarının başı sağolsun...

CAHİT ARF 'IN YAŞAMÖYKÜSÜ [1,2,5]

1910'da Selanik'te doğan Cahit Arf yüksek öğrenimini Paris'te, École Normale Supérieure'de tamamladı. Galatasaray Lisesi'nde matematik öğretmeni, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde doçent adayı olarak çalıştı. 1938 yılında Göttingen Üniversitesi'nden doktorasını aldıktan sonra da İstanbul Üniversitesi'ndeki görevini sürdürdü. 1943'te profesör, 1955'de ordinaryüs profesör oldu. Bu arada Maryland Üniversitesi'nde misafir profesör olarak çalıştı ve Mainz Akademisi muhabir üyeliğine seçildi. 1962 yılında İstanbul Üniversitesi'nden ayrılarak bir yıl süreyle Robert Kolej'de öğretim üyeliği yaptı. 1964-1966 yıllarında Princeton'da Institute for Advanced Study'de araştırmalarını sürdürdü. California Üniversitesi'nde misafir öğretim üyesi olarak bulundu. 1967 yılında yurda dönerek Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde çalışmaya başladı.

Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu Bilim Kurulu başkanlığında bulundu, ve bu kurumun kurulması ve gelişmesi yönünde emek harcadı. 1980 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nden kendi isteğiyle emekli oldu. 1985-1989 yılları arasında da Türk Matematik Derneği'nin başkanlığını yürüttü, ayrıca TÜBİTAK'ın 'Doğa Turkish Journal of Mathematics' ile 'Turkish Journal of Mathematics' adlı dergilerinde yayın kurulu üyeliklerinde de bulundu. Ölümüne dek TÜBİTAK 'ın Marmara Araştırma Merkezi'nde ve Bebek-İstanbul'daki evinde matematik çalışmalarını sürdürdü.

1939 yılında yayınlanan ilk araştırması ile başlayarak Ord. Prof. Dr. Cahit Arf, cebir, sayılar kuramı, elastisite kuramı ve analiz gibi matematiğin değişik dallarında yaptığı çalışmalarında özgün ve kalıcı sonuçlar elde etmiştir. Matematik yazınında 'Arf değişmezleri', 'Arf halkaları' gibi sözcüklerle bugün de karşılaşılır. 1948'de İnönü Armağanını, 1974'de Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu Bilim Ödülünü kazanan Ord. Prof. Dr. Cahit Arf 'a 1980 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi ve Karadeniz Teknik Üniversitesi, 1981 yılında da Orta Doğu Teknik Üniversitesi Onur Doktorası vermişlerdir. Arf, 1988'de Musafa Parlar Bilim ve Onur Ödülünü, 1989'da da Ege Üniversitesi Şükran Plaketini almış, 1993'de Türkiye Bilimler Akademisinde Şeref Üyesi olmuş, 1994 'de Fransa'dan 'Commandeur des Palmes Académiques' nişanını almıştır.

CAHİT ARF 'IN AĞZINDAN CAHİT ARF [1,2,5]

"...Çocukluğumdan başlayacağım. 1910 yılında Selanik'te doğmuşum. Ailem sınıf değiştirmekte olan bir aile idi. Dolayısıyla bu tip ailelerde olan komplekslere sahipti. Mesela bir mahalle çocuğu kavramı

vardı ailemde. Beni sokağa koyvermezlerdi. Çünkü mahalle çocuğu olabilirdim ve bu da özenilecek bir şey değildi. Bu hava içinde de bir çocuk kendi içine kapanıyor, oyununu kendi başına kuruyor. Çocukluğumda sürekli olarak kağıttan oyuncaklar yaparmışım. Bu bir açıdan yararlı olmuş: Oyuncak icat ediyor ve sürekli olarak çevremi gözlemlemeye çalışıyordum. Balkan Savaşından sonra İstanbul'a geldik. O gerekçeyle doğduğum yeri bilmiyorum. Galiba dört yaşında iken okula gönderildim. Okulda oyunlara katılamayan, kendi içine kapanık bir çocuktum. Sonra okula Beşiktaş Sultanisi'nde devam ettim. Orada benden dört, beş yaş büyük bir komşu çocuğu vardı. O üst kısımda idi ve bana örnek oluyordu. Örneğin o da oyuncak yapıyordu ve bu işte benden daha usta idi. O çocuk, bir çoklarınız belki tanırırsınız, bir süre önce ölen Doktor Hazım Bey'di. 1918'de bir yangın sonunda Beşiktaş'tan ayrıldık ve oradan oraya taşınmaya başladık. En sonunda Süleymaniye'de bir ahşap kiralık ev bulundu ve ben de İstanbul Sultanisi'ne naklettim. Orada da aynı hava sürüyordu. Hala sokağa bırakılmıyordum. Dersler ise iyi gidiyordu okulda. 1919'da Atatürk Anadolu'ya geçti. O zaman babam Ankara'ya gitti. Bir süre sonra biz de peşinden gittik. Bu arada benim temayüz ettiğim şey okulda bilhassa gramer. Zaten henüz matematikle fazla bir ilgim yok. İlk önce tekrar İstanbul'a, sonra da İzmir'e taşındık. İzmir'de beşinci sınıfa geldim. İzmir Sultanisi'nde Nazmi İlter adında bir matematik hocası vardı. Onun kitapları okunurdu liselerde. Bir de müdürün kardeşi vardı. Matematiğe olan ilgim o adamla başladı. O adam bana Öklit geometrisinin Pisagor Teoremi'ne kadar olan bütün teoremlerini ispat ettirdi. Şu şekilde çalıştırıyordu: Teoremin hipotezlerini söylüyor, örneğin şu açı şu açığa eşittir, sen bunu gösterirsin diye soruyordu. Bu şekilde Pisagor Teoremi'ne kadar geldim. Pisagor Teoremi'nde ise hoca her şeyi söylemedi. Dedi ki: 'Bir dik üçgenin iki dik kenarının karelerinin toplamından yararlanarak hipotenüsü tayin ediniz'. Sürekli olarak şekiller yaptım ve ölçtüm, bir türlü sonuca ulaşamadım. En sonunda kendisine söylemeye mecbur oldum, ben bunu göremiyorum diye. Bu sefer o anlattı bana ispatı..."

"...O zamana kadar gramerdeki başarımla övünen annem-babam, bu sefer 'bizim oğlan ne güzel matematik beceriyor' diye övünmeye başladılar. Onlar övündükçe ben de heveslendim ve o andan başlayarak ben de her insan gibi alkışlanmaktan hoşlanmaya başladım. Lisenin birinci sınıfında yeni aritmetik problemleriyle karşılaştım. Örneğin bir kümeste şu kadar baş, şu kadar ayak varmış, kaç tavuk varmış gibi. Bu problemleri çözmeyi becerebiliyordum, ama kullanılan işlemler ve akıl yürütmeler uzun sürüyordu ve hoşuma gitmiyordu. Bir amcam vardı, ama meraklı, becerikli birisiydi. Kitapları arasında, örneğin, Maxwell Kuramını içeren bir kitap bile vardı, eski harflerle yazılmış. Onun kitapları arasında Salih Zeki Bey'in bir cebir kitabını buldum. Baktım, tavukların sayısına x , tavşanların sayısına y diyor, ve böylece daha rahat akıl yürütüyor. Böylece kendi kendime cebiri keşfettim..."

"...Babam fakir olduğu için beni ucuza maletmek istiyordu. Bu sırada, yani 1926'da, Fransız frangında müthiş bir düşme olmuş. Dostlarının önerisi ve yardımı ile bol miktarda frank satın almış. Bu franklarla benim Fransa'da okumam, İstanbul veya İzmir'deki sultanide okumamdaki daha ucuza geliyordu. Bunun üzerine beni Fransa'ya, biraz evvel bahsettiğim amcamın ahbablarına gönderdiler. Orada St. Louis Lisesi'ne yazıldım. Pek Fransızca bilmiyordum, bildiğim okulda öğretilenlerdi. Fransızların vize organizasyonunu da anlamıyordum, korkuyordum sınıf kaybedeceğim diye. Fransızlarda sınıf geçmek diye bir şey yok o zaman. Herkes sınıf geçiyor, ama üst sınıfa gidildiğinde her hoca bir yoklama yapıyor ve not veriyor. Notlar iyi ise, çocuk o sınıfa devam edebiliyor; değilse, haydi geriye. Ben de bu işe girdim. Gittiğim sınıftan beni yeniden geriye gönderdiler; ama yalvardım, yakardım ve aynı sınıfta kalmayı becerdim. Bir ay sonraki matematik ara sınavlarından en iyi notu alarak yakayı kurtardım. Bu yüzden de liseyi üç yılda okuyacak yerde iki yılda bitirdim. Fakat o zaman da babamın frankları tükendi, Türkiye'ye geri döndüm. Maarif Vekaleti'nin açtığı Avrupa sınavlarına İzmir Sultanisi beni aday gösterdi. Sınavı kazandım ve bu şekilde babamın derdi de bitti. O arada bir ihtilaf oldu. Hem École Normal Supérieure'e hem de École Polytechnique'e girmiştim. Politeknigi bitirirsem, mühendis olacağım ve para kazanacağım. Öteki tarafa girersem, öğretmen olacağım ve para kazanamayacağım. ...Evet, zamanın havası buydu ve ben de Politeknigi bıraktım, École Normal Supérieure'e girdim ve iki yıl kaldım. Bitirdikten sonra, Maarif Vekaleti, 'Cahit, doktoranı yap, öyle gel' dedi. 'Olmaz' dedim, 'ben gelip Kastamonu Lisesi'nde öğretmenlik

yapacağım.' Döndüm, fakat Kastamonu Lisesi yerine Galatasaray Lisesi'ne gönderdiler. Bu da vatan, millet heyecanı ile oldu. Oradan ayrılan bir Fransız yerine ben stajyer öğretmen olarak onun yaptığı işi yapacaktım. Yerini aldığım Fransızın maaşı 600, benim maaşım da 60 lira idi. Bir yıl bende etkili olan idealizm ile hocalık yaptım bu şekilde. Öğretmenler arasında eskiden nazırlık yapmış olan koddamanlar da vardı. Bunlar bana acıyorlardı ve 'zavallı 60 liraya çalışıyor' diyorlardı. Bunların tesiriyle de olacak, o idealizmimi yitirdim. O sırada da üniversite reformu yapılıyordu. Bana, 'seni doçent adayı olarak tayin edelim' dediler. Bu sıfatla, beni, 'Ratip' ve bir de 'Ferruh Şemin'i üniversiteye aldılar. O sıralarda bende muvaffak olacağım hissi uyandı. Muvaffak olmak da şu idi: **Alim olmak, matematikte bir şeyler yapmak...**"

"...Daha okul yıllarında sentetik geometri problemlerini çok kolay çözebiliyordum. Resimlerini çok çabuk görüp münasebetlerini belirtebiliyordum. Şunu da söyleyeyim: Dünyanın bir çok yerinde bulundum, bu işi benden çabuk yapan bir kişi göremedim. Bu problemlerin bazıları cetvel ve pergelle çözülebiliyor, bazıları ise çözülemiyor. Hangileri böyle çözülebilir, hangileri çözülemez, diye daha lisede iken kendime soruyordum. Sonraları Galois Kuramını öğrendim; işte o zaman anladım. Yani bir problemin cetvel ve pergelle çözülebilmesi için o problemin cebrik olarak derecesi ikinin kuvveti olan bir denkleme irca edilmesi lazım. Problemi koyup, koca koca denklemler yazmak, sonra da Galois grubunu tayin etmek her zaman olacak iş değil. O sırada çözülebilen cebrik denklemlerin bir listesini yapayım, diye düşünüyordum, problemim buydu. 'Jordan' adında bir Fransız bütün çözülebilen grupları inşa etmiş. Oldukça kalın bir kitabı vardı. O kitabı okumaya çalıştım. Oradan oraya atlayarak okudum. Aksi halde bitmez tükenmez bir şeydi. Bu arada bir kusurumu belirteyim: Lise öğrenimim sırasında ben kitap okuyamazdım. O mütalaa denilen saatlerde ben dershanede otururdum, kitap okumadan. 'Ahmet' gelir, 'Mehmet' gelir, problemini sorar, çözdürürdü. Bir bakıma iyi idi bu, ama ben de kitap okuma kapasitemi, yeteneğimi yitirdim. Üniversitede de buna benzer durum oldu. O zaman benim not tuttuğum küçük defterlerim vardı. Kitaba, mecbur kaldığımda başvururdum. Şimdi, örneğin hala, bir makaleyi başından sonuna kadar okuyamam. Doğaldır ki, bu yüzden ıskala geçtiğim bir hayli şey oluyor. Neyse, problemimi bir proje haline getirdim. Ama sadece proje, yani ortada bir şey yok. Bunlarla uğraşırken zaman geçti, askerliğimi yaptım. Bu İstanbul'da olacak iş değil düşüncesi ile, haydi bakalım üniversiteden izin aldım ve Göttingen'e gittim..."

"...Göttingen'de hocam 'Hasse' idi. Ona projemden bahsettim. 'Çok acele ediyorsun' dedi, 'Sen önce şu özel hallere bak' dedi. Bu özel hallerden benim doktora tezime çıktı. Tezimde elde ettiğim sonuçlar, benim amacım bakımından yeterli değildi. Bir takım boşluklar vardı bir yerlerde ve o boşluklar bir ölçüde benim amacıma uyuyordu. Örneğin bir grup vardı. Grubun mertebesi, örneğin n ise, o bir yerde oluşan boşlukların paylarının toplamı da yine n idi ve birbirine tekabül ediyordu, fakat tam bir izomorfizm yoktu. Hala da o problem açık. Burada elde ettiğim sonuçlardan bir kısmı şimdi kitaplarda 'Hasse-Arf Teoremi' diye geçiyor. Tezim 1938'de bitmişti. 'Hasse', 'bir yıl daha kal, belki başka şeyler daha yaparsın' dedi. İzin alarak bir yıl daha kaldım. Hasse bana, 'bu problemi bırak, bu senin kafanı şişirdi, Witt'in buna benzer bir çalışması var, onunla uğraş' dedi. Witt'in yaptığı işte karakteristiği iki olan cisimler yok. Bu cisimler üzerindeki kuadratik formlar bilinmiyor. Onun üzerine, 'peki' dedim ve bu kuadratik formları bir hayli iyi bir şekilde sınıflandırdım. Bunların değişmezlerini inşa ettim. İşte 'Arf değişmezi' denilen şeyler bu ikinci çalışmamda elde edildi ve beni dünyaya tanıttı bir bakıma. O yılın sonunda Türkiye'ye döndüm. İstanbul'da aynı şeyin bu sefer aritmetik bakımından etüdünü yaptım..."

"...İstanbul'a geldiğimde bir yerde yeni yapılacak bir binanın şerefine neşredilecek bir kitap için makale istediler. Acele determinantlar hakkında bir şey yazdım. O önemli bir şey değildi. Savaş yıllarında İstanbul'a 'Duval' diye bir adam geldi İngiltere'den. Bir cebrik eğrinin bir noktası civarındaki singularitelerinin özelliklerini belirten bir teori vardı. Duval ondan bahsetti, yalnız bu düzlemde geçerli idi. 'Ah' dedim, 'bu iş olur, üç boyutlu uzayda da, n -boyutlu uzayda da ve analize gerek yok.' Duval'e konuyu bir seminerde anlattım. 'Sırf cebrik kavramlarla bu işin içinden çıkılabilir' diye iddia ettim. 'Eh yap bakalım öyleyse' dedi. Bir hafta üniversiteye gitmedim, eve kapandım. Hafta sonunda bir şeyler çıktı ortaya ve bu da dünyaya yayıldı. Bu işte bir takım halkalar vardı, o halkalara 'Arf halkaları', kapanışlarına da 'Arf kapanışı' deniyor. Yani bu şekilde başkasının yüzünden

şöhret sahibi oldum. Fakat asıl yapmak istediğim işler beni hiç bir zaman pek fazla tanıtmadı...”

“...Bundan sonra kötü bir iş yaptım: Çevreden alkış aradım. Bunun için de çevreden mühendislerle konuşup onların işlerini anlamaya çalıştım. Onların bir problemini çözersem, beni alkışlarlar diye düşündüm. Rahmetli ‘Mustafa İnan’ doktorasını yaparken kendisine şu problem verilmiş: O sırada Belçika’da bir beton köprü yıkılmış, nedeni bilinmiyor, nedenleri araştırılacaktı. Mustafa’ya bunu vermişler. O köprünün bir maddeden modelini yapmış, yüklemeleri koymuş üzerine ve çatlamların başladığı yerleri saptamış. Bu madde üzerinde gerilimlerin arttığı, yoğunlaştığı yerleri görmek olanaklı. Sonra jilette yontmuş çeşitli yerleri ve sonunda gerilme birikimleri artık görülmeye başlamış, yani gerilme sınır boyunda eşit bir şekilde dağılmış. Mustafa’nın düşüncesine göre, iyi köprü o profile olmalıdır. Bir özel durum olarak da köprü yerine bir düzlem almış, bir de bacak yapmış buna. O bacağın yapıştığı yeri yuvarlatmış ve yine o bulduğu şekilde hiç birikim almayacak biçimde yontmuş. O bulduğu profili musluktan suyun akışına benzetmiş.

Bana anlattı bunları ve ‘ona benzetiyorum, gerçekten idantik mi?’ diye sordu. Onun üzerine ben bütün problemi ele aldım. Köprü olsun, yıldız olsun ne cins plak olursa olsun, bütün o çeşit profilleri inşa eden formüller verdim. Bölgede delik yoksa, bunlar rasyonel fonksiyonlar yardımıyla yapılyordu; delik varsa, o zaman eliptik fonksiyonlar falan kullanılıyordu. Bu problemle ilgili olarak hepsi birbirini tamamlayacak şekilde beş-altı tane yazı yazdım. Alkış da kazandım, hatta İnönü mükafatı bunun için verildi bana. **Fakat böyle alkış için iş yapmak iyi bir şey değil. İnsan, sanıyorum ki, kendi problemini bütün gücü ile yapabildiği kadar götürmeye çalışırsa, bilime çok daha iyi bir katkısı olur.** İki yanlış söyledim: Birincisi okuyabilme alışkanlığının kaybolması, ikincisi de alkış aramak...”

“...Kendi problemim dışında başka işler de yaptım. Birisi, mekanikte olsun, uygulamalı matematikte olsun sürekli olarak karşılaştığımız eigen değer problemleri ile ilgili. Bu problemlerle ilgili bir ‘Rayleigh-Ritz Yöntemi’ var. Bu işle uğraşan ‘Weinstein’ diye birisi ile tanıştım Maryland’de. O bu yöntemi bir gün anlatırken ‘yahu bu iş için bin bir dereden su getirmeye gerek yok, bu çok daha iyi bir şekilde cebrik olarak formalize edilebilir’ dedim. Analizdeki ilk işim bu formalizasyon oldu. Gene Maryland’de ‘Martin’ diye biri vardı, parabolik, hiperbolik denklemlerde Cauchy probleminin çözümü ile uğraşıyordu. Bunu yaparken aslında sonsuz olan bir integralin esas değeri diye bir kavram kullanıyorlardı. Onu yok ettim, yani o kavramı kullanmadan yapılabilecek, çözülebilecek bir formül yazdım. 1963-1964’de Çekmece’de iki delikanlı vardı; birisi ‘Kaya’, birisi de ‘Ercüment’. Genç ve hevesli gençlerdi. ‘Sait Akpınar’ o zaman Çekmece’nin müdürü idi, bunları benimle tanıştırdı. Çocukların hevesleri benim de pek hoşuma gitti. Yardım etmek amacıyla iki-üç ay kadar Çekmece’ye gittim onlarla birlikte. Onlar istatistik fizikle, plazma ile uğraşıyorlardı, dolayısıyla istatistik mekanikte kullanılan her şey var. İstatistik mekanikte esas şey bir sistemin durumlarının olasılığının dağılışıdır. Bir mekanik sistem verildiği takdirde o faz uzayı ile temsil edilir. Bu faz uzayında nerede olma olasılığı şu kadar, bu kadar filan şeklinde bu dağılışı hesap etmek, esas problem bu. Bunun için de bir küçük altkümelere, parçacık, kısımlara ayrılıyor bir bakıma. Kısımların dağılışından öteki olasılık daha kolay hesaplanıyor. Bu mevcut, fakat burada da formalizm berbat, yani bu işleri yapanlar fizikçiler ve fizikçilerin pek alış-verişleri yok. Orada da ben pek güzel bir formalizm becerebildim ve birlikte o şeyi neşrettik. Hala hoşuma gidiyor o. Fakat burada ilginç olan şey, o çocuklarla çalışma tarzım idi. Bir odamız vardı, üçümüz oturuyorduk, tahta vardı, tahtada da daima bir şeyler yazılıydı. Bir gün birimiz gelir, sabahtan akşama kadar konuşurdu. Birbirimize anlattığımız şeyler tahtada kalıyordu. Akşam her birimiz evimizde ayrı ayrı düşünüyorduk, hatta telefonla bile o tartışmalar sürüyordu. Ertesi günü yeniden o düşündüklerimiz üzerinde sürüyordu o tartışmalar. En sonunda formalizm oluştu. Yani çalışma tarzı hep böyle: Gündüz gevezelik etmek, akşam düşünmek, ertesi günü gene gevezelik etmek; böyle sürekli olarak devam ediyor. Hatta bu konuşmalar, giderken-gelirken, minibüste de sürüyordu. Tartışmaları yaparken de kendimize özgü bir dil kullanıyorduk. Örneğin, bir kümenin içindeki bir parça kümelere, kümenin ayrışımına bir operatör diyelim. Zaten asıl temel kavram olarak da oydu sanıyorum; ayrışım operatörü. İki ayrışım operatörü vardı o zaman. Birisinin belirttiği parçalar, parçacıklar öbürünün parçalarını kapsıyorsa, öbürünün

parçalarının birleşimi şeklinde ise, o zaman birinci ayrışım operatörüne öbürünün babası diyorduk ve minibüste bu dille konuşuyorduk. Ağababalar, çocuklar, torunlar, ..., karman çorman. Birlikte şoför de vardı, dinliyordu bizi: 'Hepsi deli bunların' derdi..."

"...En sonunda kendi işlerime dönebildim. O zaman da benim şimdi kendi hesabıma en iyi yaptığım şey sandığım çalışmayı yaptım. Fakat o hala tutmadı. Kimse metelik vermiyor, ama bana göre en iyisi o. O sembolizmi hala benimsetemedim sanıyorum. Ama belki öldükten sonra benimserler. Ben devam edeceğim. Daha iş bitmedi..."

"...Benim kanımca önemli olan ve çözülmesini dilediğim bir-iki problem var. Bunlardan bir tanesi, Galois grubu komütatif olmayan sınıf cisimleri denilen cisimlerin inşası. Bu açık hala ve ben uğraşıyorum. Benim için çözülmesi ideal bir problem. İkincisi de zeta fonksiyonu ile ilgili. Bununla ilgili bir hipotez var: Riemann hipotezi. O zamandan beri ispat edilemiyor. İspattan ziyade buradaki münasebetin açık bir şekilde ortaya çıkarılması dilediğim ikinci şeydir..."

"...Yayılmasını istediğim bir şey var: Çocuklarımızın bellekten kurtarılması, anlamaya çalışmalarını sağlamak. Bazı gençlere böyle bir etki yapmış olduğumu sanıyorum. Bizde okullar hala böyle değil, belletiyorlar. Şimdi önemli olan çabuk ve kolay kazanmak. Bizim memleketimizde insanlar bilgiyi satmak için kullanıyorlar; neşretme amacı da bu. Bilim bu değil! Bilim, algılarımızı sınıflayıp kavramlar haline getirip bu kavramları neden-sonuç ilişkileriyle düzenlemektir..."

"...Bilimle uğraşan kişilerin bir muhitleri olması lazım, bir atmosfer yaratmaları lazım. Bir ülkede toplumun büyük kalabalıkları, başka bir gazetede söylediğim köşe dönücülük, dalkavukluk, bağnazlık gibi sahalara yönelmişse, o zaman bilim adamı için atmosfer yaratmak hemen hemen imkansız olur. Bu atmosfer olmayınca da bilim adamı yok olur..."

"...Bizim insanlarımız belli bir refah seviyesine erişemediği için, düşünmekten ziyade ihtiyaçlarını acilen karşılamak durumunda. Böyle bir insan bu ihtiyacını ya parayla ya da dalkavuklukla elde eder. Ya da milleti yobazlıkla aldatır. Eşkiyalık yapar. Bu şartlarda bir adamın düşünmeye ilgi duymasını beklemek imkanı çok azdır. İnsanlarımızın düşünmeye başlayabilmesi refah seviyelerinin yükselmesiyle mümkün olabilecektir..."

"...(Bilim adamları) rekabet edecekler... kayda kuyda sahip olmayacaklar... emir almayacaklar... özgür olacaklar... kendilerini özgür hissedecekler... bakkala çakkala ihtiyaçları olmayacak. Toplumun haylazlık baskısı çok güçlüdür. Onun için fazla imkanlar ellerine götürüldüğü zaman kayabilirler, yani bilim adamı zengin olmayacak, muhtaç da olmayacak..."

"...Bilim adamı da tıpkı bir kompozitör gibidir. Ama bilim kulaklarla duyulmayan ve gözle görülmeyendir, beyinle görüp beyinle duyduğumuzdur..."

CAHİT ARF 'IN YAYINLANMIŞ ARAŞTIRMALARI [1,2]

1. Untersuchungen über reinverzweigte Erweiterungen diskret bewerteter perfekter Körper, *J.Reine angew.Math.* **181** (1939) 1-44.
2. Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2.I, *J.Reine angew.-Math.* **183** (1941) 148-167 .
3. Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2.II, Über arithmetische Aequivalenz quadratischer Formen in Potenzreihenkörpern über einem vollkommenen Körper der Charakteristik 2, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* **8** (1943) 297-327.
4. Une théorème de géométrie élémentaire, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* **12** (1947) 153-160.

5. Sur les zones de Brillouinn, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* 12 (1947) 161-163.
6. Sur la détermination des états d'équilibre d'un milieu élastique plan admettant des frontières libres à tensions constantes, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* 12 (1947) 309-344.
7. Sur la définition des déterminants, Recueil de mémoires commémorant la pose de la première pierre des Nouveaux Instituts de la Faculté des Sciences, *Univ. d'Istanbul, Faculte des Sciences, Istanbul* (1948) 9-20.
8. Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique, *Proc.London Math.Soc.* 2 (1948) 256-287.
9. Sur l'existence de la solution d'un problème d'élasticité, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* 14 (1949) 75-85.
10. Sur l'identité d'un problème de frontière libre en élasticité avec un problème d'écoulement, *Bull.Tech.Univ.Ist.* 4 (1951) 1-4.
11. On the methods of Rayleigh-Ritz-Weinstein, *Proc.Amer.Math.Soc.* 3 (1952) 223-232.
12. On the determination of multiply connected domains of an elastic plane body bounded by free boundaries with constant tangential stresses, *Amer.J.Math.* 74 (1952) 797-820.
13. Sur un problème de frontière libre d'élasticité bidimensionnelle, *Bull.Tech.Univ.Ist.* 5 (1952) 13-16.
14. Remarques à propos d'une mémoire de K. Erim, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* 19 (1954) 45-54.
15. On a generalization of Green's formula and its application to the Cauchy problem for a hyperbolic equation, *Studies in mathematics and mechanics presented to R. von Mises* (Academic Press Inc.) (1954) 69-79.
16. Sur le théorème de Reiss, *Rend.Math. e Appl.(5)* 14 (1954) 181-191.
17. Sur les frontières libres à tensions constantes d'un milieu élastique plan en équilibre, *Rev.Fac.Sci.Univ.İstanbul (A)* 19 (1954) 119-132.
18. Eine explizite Konstruktion der separablen Hülle eines Potenzreihenkörpers, *Abh.Math.Sem.-Univ.Hamburg* 19 (1955) 117-126.
19. Über den Satz von Dubourdieu, *Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg* 20 (1955) 112-114.
20. Über ein Analogon des Riemann-Rochschen Satzes in Zahlkörpern, *Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse, Jahrgang 1957* 9 (1957) 293-328.
21. Due dimonstrazioni elementari del teorema di Cartan e Dieudonné, *Rivista Mat.Univ.Parma* 6 (1965) 169-223.
22. On the algebraic structure of the cluster expansion in statistical mechanics, *J.Math.Phys.* 6 (1965) 1179-1188. (Kaya İmre ve Ercüment Özizmir ile birlikte ortak makale)
23. Sur la structure du groupe de Galois de la fermeture algébrique d'un corps de séries de puissances sur un corps fini et les conducteurs d'Artin, *Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris* (Les Tendances Géom. en Algèbre et Théorie des Nombres) (1966) 27-35.

TANIYANLARIN AĞZINDAN CAHİT ARF

[Mithat İdeman][3] "... Anlattığına göre, Adana'da yaşadıkları günlerde Fransızca'yı çok iyi bilen bir komşu kızları varmış. O, sinemalarda seyrettikleri sessiz filmlerin altyazılarını anında tercüme ederek filmi anlamalarını sağlarmış. Arf 'ın aile büyükleri de 'Sen de Fransızcanı ilerlet de bize yardımcı ol' derlermiş. Cahit 'in buna cevabı şöyle olmuş: 'Ben yabancı dil öğrenmeyeceğim. Benim

büyüdüğüm zamanda Türkiye çok gelişmiş olacak, yabancılar bizim dilimizi öğrenmeye çalışacak'... Bu, sanırım, bir imparatorluğun bir ferdi olarak Selanik'te dünyaya gözlerini açan, fakat doğduğu şehri okul kitaplarında bir başka coğrafyada öğrenmeye çalışan küçük Cahit 'in o yaşa gelinceye kadar peşpeşe gözlediği büyük felaketlerin, acıların, üzüntülerin ve Atatürk 'le beraber ortaya çıkan yeni umutların bir sonucudur... Çok iyi Almanca, Fransızca ve İngilizce bilen Arf 'ın olgunluk çağında bu olayı tekrar tekrar hatırlayıp anlatması, bunu çok önemsemiş olduğunun bir kanıtı olsa gerek..."

"... O ister istemez bir sembol olmuştu. Türk biliminin ve bilim adamlığının tek sembolü... O da iyice biliyordu ki; başkaları gibi yapmış, çok iyi uyum sağladığı Fransa'da veya Almanya'da kalmış olsaydı, bugün olduğundan çok daha fazla tanınmış bir bilim adamı olurdu. Ama O öyle yapmadı; Atatürk 'ün oluşturmaya çalıştığı '**Cumhuriyete Kanat Verenlerden**' biri olmayı yaşamının en anlamlı ve onurlu hedefi olarak seçti, Türkiye 'ye döndü..."

[Erdal İnönü][6] "... Cahit Arf 'ın önemli bir özelliği, her şeyin aslını anlamaya çalışmak olmuştur. Birisi bir konuşma yaparken, anlamadığı yeri hemen sorardı. Hiç bir şeyden çekinmezdi, onun için önemli olan anlamaktı; bilime değer veren bir insan olarak anlamak, araştırmacı zekasını kullanarak olayların nedenini anlamak..."

[M. Gündüz İkedâ][6] "... Tek tük problemler üzerinde, yani merak ettiği problemler üzerinde çalışanlar var. Şöyle anlatayım: Bazı dağcılar için Himalayalar'a çıkmak pek bir şey ifade etmese de 'kimse tırmanmamış' denildiğinde birden heveslenirler. Bu birinci tip matematikçiler için de geçerli. Çözülmemiş problemler onlar için dayanılmaz bir çekiciliğe sahiptir. Bir de genel bir sistemi ele alarak çalışanlar, 'bu sistemi nasıl karakterize edeceğim, benzer sistemler olduğunda bunları nasıl ayırdedebilirim?' diye düşünenler var. Cahit Bey bu ikinci sınıfa giriyor..."

[Turgut Önder][6] "... Yurtdışındayken, Türkiye'den geldiğimi duyar duymaz 'Arf ne yapıyor?' diye soruyorlardı; özellikle topolojiyle uğraşanlar. Cahit Bey bu buluşu cebirde yaptı; ama o kadar temel bir buluş ki -zaten bir şeyin büyüklüğü oradan belli oluyor- doğal olarak diğer alanlarda da uygulama buluyor; kavramlara kolayca bağlanabiliyor. Bir gün Cahit Bey'le Princeton'da bulunmuş bir topolojistle tanıştım. Hemen anısını anlattı bana. İlk karşılaşmalarında, Cahit Bey kendini 'Arf' diye tanıtmış. Onlar da hemen heyecanlanarak 'yani siz şu Arf değişmezi Arf mısınız?' diye sormuşlar. Kendisine topolojiyle ilgili soruların gelmek üzere olduğunu anlayan Cahit Bey de 'Evet, ama Arf değişmezi hakkında hiç bir şey bilmem' diye cevap verdi onlara! Artık Arf değişmezi o hale geldi ki, buna 'Arf değişmezi' demiyorlar; yalnızca 'Arf' demekle yetiniyorlar..."

"... Cahit Bey 'in her zaman anlatmaya çalıştığı şey, her ispatın arkasında, her matematiksel teoremin arkasında bir fikir olduğudur... Ondan aldığım en önemli şeylerden biri buydu: **Bir şeyi önceden keşfetmeye çalışmak... Ondan öğrendiğim ikinci şey de, o sıralar pek meraklı olduğumuz soyut ispatların hayatla ilişkisini kurmaya çalışmak oldu.** Somut üzerine eğilmemizi, daha sonra soyutla birleştirmemizi isterdi..."

[Hilmi Demiray][6] "... O zaman anladım; insan büyüdükçe ne kadar aşçakgönüllü olabiliyor... Bir sözü vardı: '**Bilim adamlığı bir meslek değil, bir yaşam biçimidir.**' Bunu en iyi uygulayan da yine kendisidir... Bütün hayatını gençleri yetiştirmeye adanmış. Gösterişli hayattan sürekli kaçan biriydi..."

[Halil İbrahim Karakaş] "... Cahit Arf, ömrünü, daha çocukluk yıllarında 'tutku' ile bağlandığı matematiğin, daha genel olarak bilimin gelişmesine adanmıştır. Bilim adamlığını yaşam biçimi olarak seçmiş ve öyle yaşamıştır. Nasıl bilim üretileceğinin en güzel örneklerini sergilediği gibi, ülkemizde bilimin filizlenip gelişebileceği ortam ve kurumların yaratılmasında da önderlik yapmıştır. TÜBİTAK 'ın kurulmasındaki katkısına ek olarak ODTÜ Matematik Bölümünün oluşumunu yönlendirmiştir..."

"... 'Hocalığı' konusunda tevazu gösterir, 'ben iyi hoca değilim' derdi. Ancak, derslerinde veya seminerlerinde ele aldığı konuyu sunarken sanki yeniden keşfediyormuş gibi heyecan ve haz duyduğu belli olur, gözleri çıkmak çıkmak parlardı... Cahit Arf, çağdaşları arasında matematiğin her dalında

bilgi ve söz sahibi olan ender matematikçilerden biri idi. ODTÜ'de bulunduğu yıllarda Matematik Bölümünün tüm seminerlerine katılır, ilgi ile izler, soruları ve yorumlarıyla önemli katkıda bulunurdu..."

[Turgut Önder] "... Cahit Arf 'tan aldığımız en büyük derslerden birinin ünvanlara, dış statü sembollerine değil, düşüncelere, fikirlere saygı göstermeyi öğrenmek şeklindeki temel terbiye olduğunu görüyorum. Bugün bile bölümümüze gelen birisi hala odalarımızda isimlerimizin ünvarsız yazıldığını görür..."

"... Biz böyle bir ekolün öğrencileri olarak yetiştik. **Katı kurallara değil, gönüllü katılıma dayalı** (ama kimsenin bunu istismar etmediği), ünvanların değil fikirlerin çarpıştığı bir ortamda büyüdük..."

"... Kısa bir süre sonra okulumuza dışardan bir rektör atandı. Bir gün bu rektör, herhalde o muhteşem eylemine tanıklık etsinler diye yanına aldığı yardımcılarla bölüme gelip, emekli olduktan sonra Cahit Arf'a olan saygımızın bir sembolü olarak tuttuğumuz odasındaki isim tabelasını bizzat söktü. O günün sansürlü basınında bile tepkiler yer alınca dönemin bölüm başkanını yanına çağırıp biraz günah çıkardı. Matematik Bölümü çay odasında Cahit Arf 'ın aslında bilimle ilgili bir yazısında '.....' diye bir cümle yer aldığı iletilmişti kendisine kuşlar tarafından. Bölüm Başkanına 'siz olsanız ne yapardınız?' diye soruyordu. Anlaşılan bizden anlayış bekliyordu. **Cahit Arf gibi tabu tanımayan, hiç bir kavramı yüceltmeden ve lanetlemeden sürekli irdeleyen birinin tabu bir kavramı olumlu ve olumsuz yönleriyle objektif bir şekilde irdelemesi bağışlanamaz bir suçtu dönemin mantığına ve hukukuna göre.** Bugün ibretle görüyorum ki tarihin geniş perspektifinin daha adaletli penceresinde her şey, herkes yerli yerine oturuyor. Bilimin, matematiğin, sanatın ne olup ne olmadığının hala anlaşılamadığı, filmi beğenmediği için sanatçı kurşunlayanların 'vatan seninle gurur duyuyor!' diye zafer işaretleriyle karakola uğurlandığı, bazı çok tirajlı kanalların ana haber bültenlerinde ünlü futbolcuların gerçek annesinin kim olduğunun su falına bakılarak saptandığı bir ülkede bile bazı televizyon kanalları tekrar tekrar Cahit Arf 'tan bahsedebiliyor, dolmuşta giderken radyoda Hasse-Arf Teoreminden, Arf Değişmezinden, Arf Halkalarından bahsedildiğini duyabiliyorum. **Devlet büyükleri olmasa bile lise öğrencileri bölümümüze çiçekler, buketler, çelenkler yollayarak hiç bir zaman tanışma şansına erişemedikleri bir Türk bilim adamına sahip çıkıyor, ona karşı son görevlerini yerine getiriyorlar.** Adeta bu memlekette **kimlerle gurur duyulacağını bilen insanlar bulunduğunu ve ilerde daha çok bulunacağını** müjdeliyorlar..."

[Yılmaz Akyıldız] "... Yurt içinde ve dışında değişik konularda pek çok insan tanıdım. Bunlar içinde Cahit Arf'ın bende çok özel bir yeri vardır: Cahit Bey tanıdığım **en hızlı düşünebilen, en hızlı muhakeme yapabilen ve kendine has mantığı içinde eriştiği neticeleri hiç çekinmeden ve sakınmadan anında dobra dobra söyleyen ender kişilerden birisiydi...**"

"... En takdir ettiğim yönleri: Bilimsel düşünceyi her şeyin üzerinde tutardı. **Devamlı matematikle uğraşır, lüzumsuz şeylerle ilgilenmez, vaktini asla boşa harcamazdı.** Acımasızdı, etrafında yalana, palavraya, yalaklanmaya, boş laflara, caf-cafa, entrikalara asla yer yoktu."

"... En tipik karakteristikleri: Egosantrik ve eksantrikti. **Tahmin edilemeyen bir düşünüş yolu vardı.** Onunla iken devamlı diken üzerinde oturuyormuş hissine kapılırdınız, zira onun beyin gücünü hisseder, tesirinde kalır ve biraz sonra ne gibi neticeler söyleyeceğini tahmin edemeyeceğinizden devamlı pür-dikkat halinde olurdunuz. Sizi her an sürprizlere boğabilirdi..."

"... **Müthiş bir muhakeme gücü vardı** ve kendine has mantığı çerçevesinde ulaştığı neticeleri anında hiç çekinmeden dobra-dobra söyler, tahmin edemeyeceğiniz bazı çok çarpıcı olabilecek iddialarla, ispatlarla sizi hayretler içerisinde bırakırdı. Problem çözmeye bayılırdı. Bilhassa başkalarının çözemeyip de kendisine getirdiği problemleri çözmekten müthiş bir zevk alırdı. Bu problemler sırf matematikten olabileceği gibi mühendisliğin herhangi bir dalından veya o andaki fiziğin en modern teorisinden, örneğin kuantum mekaniğinden de olabilirdi..."

"... Köpeğinden sıyrılmayı becerip, evinde kendisini ziyaret ettiğinizde tam bir centilmenle karşılaşır, onun ziyaretinizden nasıl bir çocuk gibi sevindiğine şahit olurdunuz. Size önce kendi yaptığı liköründen

sunar, sonra da kahvenizi pişirirdi, (ama falınıza bakmazdı; bu tip şeylere onun yaşamında şaka da olsa asla yer yoktu)..."

[A. M. C. Şengör][4] "... Türkiye Bilimler Akademisi 'nin (TÜBA) İstanbul Grubunun toplantılarından birindeydi. ...Konu, sosyal bilimlerle doğa bilimleri arasında bilimsel üretimin kişisel bazda karşılaştırılmasının nasıl yapılması gerektiği idi... Tartışmanın heyecanlı bir noktasında, daha önce konuşmalara hiç katılmamış olan Cahit Hoca 'nın gür sesi birden bizleri kendimize getirdi: '**Yahu, burada biraz da bilim konuşalım!**'... Daha önce de benzer davranışları nedeniyle, O 'nun 'realist olmamakla', 'çocuk gibi davranmakla', 'ayakları yere basmamakla' suçlandığını duymuştum. **An-cak Türk bilimi, eğer bir gün gerçekten dünya çapında saygınlığa ulaşacaksa, bilimcilik oyunu olmaktan çıkıp gerçekten bilim olacaksa, Cahit Arf gibi realist olmayan, çocuk gibi davranan, ayakları yere basmayan, bilim için bas bas bağırarak tutkunlara ihtiyacı olacaktır...**"

[Sinan Sertöz] "... Geriye dönüp baktığımda 'Cahit Hocadan öğrendiğim en önemli şey neydi?' diye şunu hatırlıyorum: Gebze Araştırma Merkezine Cahit Hoca, o sıralar 75 yaşında idi, her sabah servisle gelir, odasına çıkar, önüne kağıtlarını alır ve çalışmaya başlardı. Bir öğle yemeği ve kahve molası hariç akşam servisine kadar çalışırdı. Her gün! Beklentilerim aldıklarımın önüne çıkmaya başladığı zaman '**Cahit Hoca kadar çalıştın mı?**' diye sorardım kendime..."

[Mithat İdeman][3] "... Cahit Arf, temelde bir Cebir ve Sayılar Teorisi uzmanı idi. Bunun yanı sıra Analiz, Elastisite ve Geometri'de de çok özgün ve önemli eserler vermişti. Bunlara ek olarak tanrı, din, eğitim, öğretim, ahlak vb. konularda da kendine özgü düşünceleri vardı. Bunları yasalardan veya çıkarı bozulacak şahıslardan korkmadan, açıkça söylerdi..."

"... Onda, bilim adamlığının yanı sıra medeni cesaretin, alçakgönüllü olmanın, her şeyi kişisel çıkarına göre düzenlememenin, ahlaklı olmanın ve yalan söylememenin de, eşine az rastlanır bir örneğini gördük..."

"... O bir başkaydı..."

KAYNAKÇA

- [1] Cahit Arf, Ord. Prof. Dr. Cahit Arf 'a 06.11.1981 günü ODTÜ tarafından verilen "Onur Doktorası" nedeniyle hazırlanan kitapçık, ODTÜ, Ankara, 1981.
- [2] S. D. Erden, Bilim Adamı Özgür Olacak, Kendisini Özgür Hissedecek ki Bilim Üretebilsin, *Bilim ve Ütopya*.
- [3] M. İdeman, Cahit Arf Bir Başkaydı..., *Cumhuriyet Bilim Teknik* 563 (1998) 16-17.
- [4] A. M. C. Şengör, Cahit 'in Vasiyeti, *Cumhuriyet Bilim Teknik* 563 (1998) 5.
- [5] The Collected Papers of Cahit Arf, Türk Matematik Derneği, ODTÜ, Ankara, 1990.
- [6] Z. Tozar, Adını Matematiğe Vermiş Bir Bilimcimiz, *Bilim ve Teknik* 315 (1994) 72-78.

SON SÖZ DE YİNE USTA'DAN GELİYOR...[4]

"Matematik tümevarımsal bir bilimdir ve bu tümevarımsal bilim sonsuz kümeler için geçerli. Bu sonsuzlukları tümevarımsal bir şekilde kavırıyoruz ve kavradığımız zaman da o sonsuzluğu hissediyoruz, sınırsızlığı.

Ve bu bize mutluluk veriyor, çünkü ölümü unutuyoruz...

Herkes ölümsüz olduğunu hissettiği alanda çalışmak ister.

Ben de matematikte kendimi ölümsüz hissettim..." CAHİT ARF (İstanbul, 26.12.1997)

BİNOM KATSAYILARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Emre Alkan

Boğaziçi Üniversitesi,
Matematik Bölümü, İstanbul

$0 \leq k \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$ şeklinde, n elemanlı bir kümenin, k elemanlı altkümelerinin sayısını veren ifadeler binom katsayıları diyeceğiz. Bunun nedeni $\binom{n}{k}$ sayılarının $(x+y)^n$ açılımında katsayılar olarak görünmesi. Şimdi bu katsayıların bazı özelliklerini göstereyim.

$$1. \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ kümesinin k elemanlı altkümelerinin sayısı $\binom{n+1}{k}$ dir. Her k elemanlı altkümeye a_{n+1} bulunur veya bulunmaz. a_{n+1} 'in bulunmadığı bu tür kümeler $\binom{n}{k}$ tanedir. a_{n+1} bulunuyorsa geriye $k-1$ eleman kalır ki bunların sayısı $\binom{n}{k-1}$ 'dir. Böylece istenen elde edilir.

$$2. \binom{M+N}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{M}{i} \binom{N}{k-i}.$$

Katsayıların biçimi sayma hakkında bir fikir veriyor. Sol taraf $M+N$ elemanlı bir kümenin k elemanlı altkümelerinin sayısıdır. Şimdi $M+N$ elemanı M ve N elemanlı iki ayrı kümeyle bölelim. k eleman seçmek için M elemanlı kümeden hiç almaz, N elemanlı kümeden k tane alırız. Bu $\binom{M}{0} \binom{N}{k}$ sayısıdır. M elemanlı kümeden bir eleman alır, N elemanlı kümeden $k-1$ tane alırız. Bu $\binom{M}{1} \binom{N}{k-1}$ sayısıdır. Böylece devam edildiğinde sağdaki ifadenin elde edildiği görülebilir. Bir başka yaklaşım şöyle yapılabilir. $\binom{M+N}{k}$ sayısı $(x+y)^{M+N}$ açılımında $x^k y^{M+N-k}$ 'nin katsayısıdır. $(x+y)^{M+N} = (x+y)^M (x+y)^N$ yazalım. x^k elde edebilmek için $(x+y)^M$ 'den x^0 , $(x+y)^N$ 'den x^k , $(x+y)^M$ 'den x^1 , $(x+y)^N$ 'den x^{k-1} ve diğerleri gözönüne alınırsa sağdaki toplam elde edilebilir.

$$3. \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Bu eşitlik de (1) 'in ardışık uygulanmasıyla elde edilir. Şöyle ki:

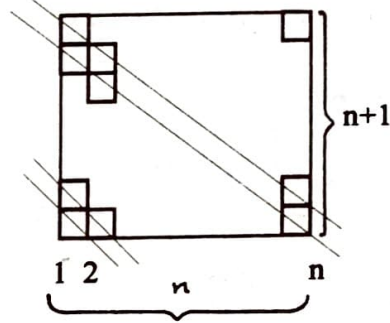
$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}, \text{ sonra}$$

$$\binom{n}{r+1} = \binom{n-1}{r+1} + \binom{n-1}{r} \text{ v.s.}$$

$$4. 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bunun için $1 = \binom{1}{1}$, $2 = \binom{2}{1}$, $\dots$, $n = \binom{n}{1}$ ve (3) kullanılırsa $1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ elde edilir.

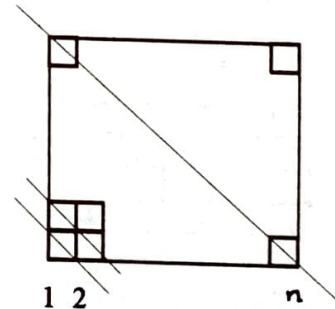
Bu eşitliği daha zarif bir şekilde şöyle gösterebiliriz. $n \times (n+1)$ lik bir satranç tahtası ele alalım. Toplam $n(n+1)$ tane kare var.



1 doğrusu üzerinde 1 kare, 2 doğrusu üzerinde 2 kare, n doğrusu üzerinde n kare var. Fakat aynı sayma karşı köşeden başlayarak yapılabileceğinden, $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1)$ elde ederiz.

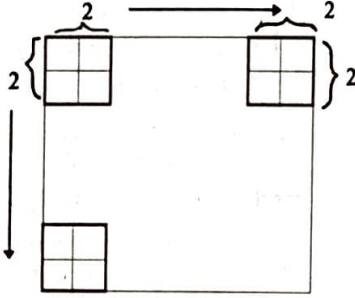
$$5. 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$n \times n$ lik bir satranç tahtasını ele alalım. Bu tahta üzerinde kenar uzunlukları 1 birimden, n birime kadar değişen karelerin sayısını bulalım. Kenar uzunluğu 1 birim olan n^2 tane kare var. Kenar uzunluğu 2 birim olan karelere bakalım. Şekil 2 'de görüldüğü gibi köşedeki 4 birimlik kare verir. Böylece $(n-1)^2$ tane 4 birimlik kare oluşturur. Böylece devam edilerek kenar uzunlukları 1 birimden n birime kadar değişen karelerin sayısı $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ olur.



Şekil 1

Şekil 1'e bakalım. 1. köşegen üzerinde 2 siyah nokta var. Böylece n . köşegen üzerinde $n+1$ siyah nokta var. Aynı bir köşegen üzerinde herhangi iki siyah nokta seçmek bir kare oluşturmak demektir.



Şekil 2

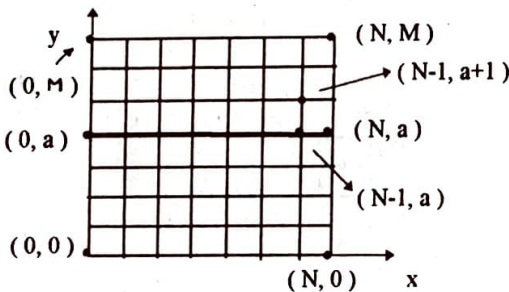
Böylece 1 birimden n birime kadar karelerin sayısı, n . köşegen bir defa sayılarak

$$2 \left\{ \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} \right\} - \binom{n+1}{2}$$

olur. (3) kullanılırsa bu sayı $2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}$ olur. Bu sayının $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğu görülebilir.

6. M ve N pozitif tamsayılar olsun. $a + 1 \leq M$ olacak şekilde bir a pozitif tamsayısı için $\sum_{k=0}^N \binom{N+a-k}{a} \binom{M-a-1+k}{k}$ ifadesi a 'dan bağımsızdır. İfadenin $\binom{M+N}{N}$ 'e eşit olduğunu görelim. Şekil 3'de $(0,0)$ noktasından (N,M) 'ye giden, her defasında koordinatlardan yalnızca birini bir arttıran yolların sayısı $\binom{M+N}{N}$ dir. Şimdi bu yolları farklı şekilde sayalım.

$$S = \{(N, a), (N-1, a), \dots, (0, a)\}$$



Şekil 3

kümesini ele alalım. $(0,0)$ 'dan (N,M) 'ye giden her yol S 'den geçer. (N,a) 'dan geçen yolların sayısı $\binom{N+a}{a} \binom{M-a-1}{0}$ olur.

$(N-1,a)$ 'dan geçen yolları sayarken (N,a) 'dan geçemeyiz, çünkü oradan geçen yolları saydık, böylece $(N-1,a+1)$ 'e geliriz. Böylece bu sayı $\binom{N+a-1}{a} \binom{M-a}{1}$ olur. Aynı sayımı $(N-2,a), \dots, (0,a)$ için yaparız. Bunların toplamı ise tüm yolları, yani $\binom{M+N}{N}$ 'yi verecektir.

Çok benzer bir fikrin kullanıldığı bir diğer sonucu göstermeye çalışalım:

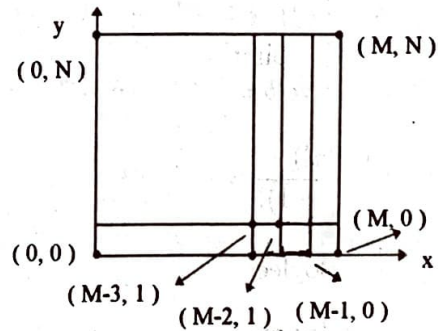
7. M, N pozitif tamsayılar olsun.

$$\binom{M+N}{N} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{M-1}{2}} \binom{M-a-1}{a} \binom{N+a}{2a+1} + \sum_{0 \leq a \leq \frac{M}{2}} \binom{M-a}{a} \binom{N+a}{2a}$$

Bir önceki sonuçtan farklı olarak

$$S = \{(M,0), (M-1,0), (M-2,1), \dots, (M-2a,a), (M-2a-1,a), \dots\}$$

kümesini ele alalım. $(0,0)$ 'dan (M,N) 'ye giden her yol S 'den geçecektir. $(M-2a,a)$ 'dan geçen yolların sayısı $\binom{M-a}{a} \binom{N+a}{2a}$ olur. $(M-2a-1,a)$ 'dan geçen yolların sayısını bulurken $(M-2a,a)$ 'yı kullanamayız. $(M-2a-1,a+1)$ 'e geliriz. Böylece yolların sayısı $\binom{M-a-1}{a} \binom{N+a}{2a+1}$ olacaktır. Sonuçta sağ taraftaki toplam elde edilecektir.



Şekil 4

8. $\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j}$ sadece n 'ye bağlı bir ifade $0 \leq b_j \leq p-1$ olmak üzere olarak yazılabilir. İfade

$$\binom{n}{0} \binom{0}{0} + \binom{n}{1} \left\{ \binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right\} + \binom{n}{2} \left\{ \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right\} + \dots + \binom{n}{n} \left\{ \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} \right\}$$

olarak yazılabilir. Bu ise $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$ demektir.

9. $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ ifadesini bulalım. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ olduğu görülebilir. Böylece ifade $n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n 2^{n-1}$ olur.

Aynı düşüncayı kullanarak,

10. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$ elde edilir.

Binom katsayılarının sayılar teorisinde de önemli kullanışları vardır.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

doğal olarak bir tamsayı olduğundan buradan şu önemli sonucu çıkarabiliriz. Ardışık k tamsayının çarpımı $k!$ ile bölünebilir.

11. $\binom{2n}{n}$ sayısı $n+1$ 'e bölünebilir.

a, b aralarında asal pozitif sayılar olsun. Bir p sayısı için ap ve bp tamsayı oluyorsa p tamsayı olmalıdır. Bunu görmek için $ap = x$, $bp = y$ alalım. Böylece $ay = bx$, a ve b aralarında asal olduğundan $a|x$ ve $b|y$, ve p bir tamsayı olmalıdır. Şimdi a, b aralarında asal olmak üzere ve $a+b = n+1$ için $p = \frac{n!}{a!b!}$ ifadesine bakalım. $ap = \binom{n}{b}$ ve $bp = \binom{n}{a}$ olmak üzere tamsayılarıdır. Böylece $p = \frac{n!}{a!b!}$ bir tamsayı olmalıdır. Şimdi özel olarak $a = n$ ve $b = n+1$ alalım. Şu halde,

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

bir tamsayıdır. Böylece $(n+1) | \binom{2n}{n}$ elde ederiz.

Binom katsayılarını içeren çok güzel bir sonuçla devam edelim:

12. p bir asal sayı olsun. $0 \leq a_j \leq p-1$ ve toplamını bulalım. Bu sayı,

$$m = \sum_{j=0}^r a_j p^j, \quad n = \sum_{j=0}^r b_j p^j$$

ise

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{j=0}^r \binom{a_j}{b_j} \pmod{p}$$

a_j ve b_j katsayıları m ve n 'nin p tabanına göre yazılışında ortaya çıkan sayılardır. m ve n 'nin p tabanında tek türlü ifade edilebildiğini biliyoruz. $r = 2$ için bir kanıt yapacağız. Genel hal benzer biçimde yapılabilir. $m = a_0 + a_1 p$, $n = b_0 + b_1 p$, $\binom{m}{n}$ sayısı $(1+x)^m$ açılımında x^n 'in katsayısıdır. $(1+x)^m \equiv (1+x)^{a_0} ((1+x)^p)^{a_1} \pmod{p}$ yazılabilir. Şimdi $1 \leq k \leq p-1$ için $\binom{p}{k}$ sayısının p ile bölündüğünü görelim.

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

ifadesinde $p, k!$ sayıları aralarında asal olduğundan $p | \binom{p}{k}$ elde ederiz. Böylece,

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod{p}$$

olur:

$$(1+x)^m \equiv (1+x)^{a_0} (1+x^p)^{a_1} \pmod{p}.$$

İki polinomun $\pmod{p}$ 'de özdeş olması, katsayılarının $\pmod{p}$ 'de denk olmasıdır. Şimdi x^n nin her iki tarafta katsayılarına bakalım. Sol tarafta, x^n nin katsayısı $\binom{m}{n}$ dir. Sağ tarafta x^n nin katsayısı $(1+x)^{a_0}$ in açılımındaki x^{b_0} in katsayısı ve $(1+x^p)^{a_1}$ in açılımındaki $x^{p b_1}$ in katsayısının çarpımı, yani $\binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1}$ dir. Sonuçta,

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \pmod{p}$$

elde ederiz.

13. $\binom{n-1}{1}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-3}{3}, \dots$ sayılarının en büyük ortak böleni bir olacak şekilde sonsuz sayıda n tek sayısı vardır. Örneğin, $n = 5$ için $\binom{4}{1}, \binom{3}{2}$ aralarında asal, $n = 11$ için $\binom{10}{1}, \binom{9}{2}, \binom{8}{3}, \binom{7}{4}, \binom{6}{5}$ sayılarının en büyük ortak böleni birdir. $n = 2m-1$ alalım. $3|m$ olduğunda,

$$\binom{2m-2}{1} - \binom{2m-3}{2} + \binom{2m-4}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1}$$

$$-\{x^{2m-4}(1-x)^{2m-2} + x^{2m-5}(1-x)^{2m-3} + \dots + x^{m-2}(1-x)^m + \dots + x(1-x)^3 + (1-x)^2\}$$

ifadesinde x^{2m-3} 'ün katsayısıdır. Bir an için ifadenin başındaki negatifliği unutalım ve parantez içindeki polinoma $P(x)$ diyelim. Bu polinomu dönüştürerek,

$$P(x) = \frac{1+x}{1+x^3}(1-x)^2$$

$$-\frac{1+x}{1+x^3}(1-x)^2x^{2m-3}(1-x)^{2m-3}$$

ve

$$\frac{1+x}{1+x^3} = (1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\dots)$$

olduğunu kullanarak,

$$P(x) = (1+x)(1-x)^2(1-x^3+x^6-x^9+\dots) - (1+x)(1-x)^2x^{2m-3}(1-x)^{2m-3} \text{ olur.}$$

$3|m$ olduğunda 1. ifadede x^{2m-3} 'ün katsayısı 0 'dır. 2. ifadede ise -1 olur. Böylece x^{2m-3} 'ün $P(x)$ 'te katsayısı -1 'dir. Şu halde x^{2m-3} 'ün $-P(x)$ 'te katsayısı 1 'dir. Böylece $n = 6k-1$ şeklinde bir sayı için $\binom{n-1}{1}, \binom{n-2}{2}, \dots$ sayılarının en büyük ortak böleni 1 'dir.

14. $n \geq k$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k}$$

sayılarının en büyük ortak böleni 1'dir. d bu sayıların bir ortak böleni olsun. (1) kullanılarak,

$$d \mid \binom{n}{k-1}, d \mid \binom{n+1}{k-1}, \dots, d \mid \binom{n+k-1}{k-1},$$

yine (1) kullanılarak,

$$d \mid \binom{n}{k-2}, d \mid \binom{n+1}{k-2}, \dots, d \mid \binom{n+k-2}{k-2}$$

ve böylece devam edilerek (sayıların sayısı azalıyor) $d \mid \binom{n}{0} = 1$ elde ederiz.

$$15. \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k} = (-1)^k$$

Eşitliği tümevarımla göstereyim. $n = 0$ için,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{i}{k} = (-1)^k \binom{k}{k} \binom{k}{k} = (-1)^k$$

olur. Tümevarımı tamamlamak için,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i+1}{k}$$

olduğunu görmeliyiz. Bu ise,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k-1} = 0$$

eşitliğine denktir. Bunu tümevarımla görmek için $n = 0$ halinin doğru olduğunu görebiliriz. Ayrıca,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k-1} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i+1}{k-1}$$

olduğunu görmeliyiz. Bu ise,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k-2} = 0$$

eşitliğine denktir. Bu $n = 0$ için doğrudur. Koylayca görüleceği gibi bir tümevarımlar dizisi elde ettik. Bu dizide bir tümevarımın doğruluğu ondan bir sonra gelen tümevarıma bağlıdır. Böylece en baştaki tümevarımı tamamlamak için şunları göstermeliyiz. $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{i}{k-j} = 0 \text{ (tümevarımda } n = 0 \text{ halinin kontrolü) ve}$$

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{0} = 0 \text{ (son tümevarım için); ikinci}$$

eşitlik $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0$ olarak hemen görülüyor. Birinci eşitlik için

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{i}{k-j} = \frac{k}{k-j} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-1}{i-1} \binom{i-1}{k-j-1}$$

$$= \frac{k(k-1)}{(k-j)(k-j-1)} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-2}{i-2} \binom{i-2}{k-j-2} = \dots,$$

en sonunda $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-i}{0} \binom{0}{k-i-j} = 0$ elde edilir.

Böylece birinci eşitlik de doğrudur; tümevarım tamamlanır. Bu sonucun (14) 'e bir diğer çözüm teşkil ettiği de görülebilir.

Binom katsayılarının, Fibonacci sayılarıyla ilgisine değinelim:

16. F_n , n . Fibonacci sayısı ise, $n \geq 2$ için,

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \dots +$$

$+\binom{n-j}{j-1}$ olur. ($j, 2x \leq n+1$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayıdır.)

Okuyucu bunu $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olduğunu kullanarak tümevarımla gösterebilir.

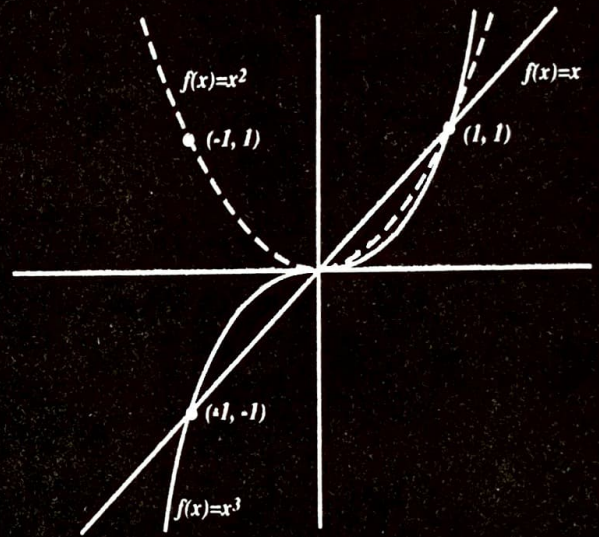
17. Bir n tamsayısı için, $f(n), 1, 2, \dots, n$ sayılarının en küçük ortak katını, $g(n)$ ise, $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ sayılarının en küçük ortak katını gösteriyorsa, $g(n) \leq f(n)$ dir.

$$\begin{aligned} 2 \binom{n+1}{2} &= (n+1) \binom{n}{1} \\ 3 \binom{n+1}{3} &= (n+1) \binom{n}{2} \\ &\vdots \\ (n+1) \binom{n+1}{n+1} &= (n+1) \binom{n}{n} \end{aligned}$$

eşitliklerinden hemen $f(n+1)|(n+1)g(n)$ elde ederiz. $(n+1)g(n)|f(n+1)$ olduğunu görelim. Bunun için bir $1 \leq k \leq n$ sayısı alıp $(n+1)\binom{n}{k}|f(n+1)$ ya da $(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)|k!f(n+1)$ olduğunu göstermeliyiz. Üst taraftaki sayıların her biri ayrı ayrı $f(n+1)$ 'i böler. Bu sayıların herhangi ikisinin en büyük ortak böleni en fazla k olabilir. Bir $p \leq k$ sayısı alalım. p ile bölünen sayılar bir aritmetik dizi oluşturacaktır. Böyle her p için $p|k!$ olduğundan ortak bölenlerin çarpımı $k!$ 'i böler. $(n+1), n, \dots, (n-k+1)$ sayıları herhangi ikisi aralarında asal $a_{k+1}, a_k, \dots, a_1$ sayıları haline gelirler. $a_{k+1}.a_k \dots a_1|f(n+1)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $f(n+1) = (n+1)g(n)$ buluruz. $f(n+1) \leq (n+1)f(n)$ olduğundan $g(n) \leq f(n)$ elde edilir.

CALCULUS

M. Spivak



M ⊕ V

İsteme adresi:
Matematik Vakfı
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

CALCULUS

BAZI FONKSİYONEL DENKLEMLERİN ANALİZ YÖNTEMLERİYLE ÇÖZÜLMESİ

Nizamettin İskenderov

Matematiğin, mekaniğin ve fiziğin bir çok çeşitli problemleri fonksiyonel denklemlere indirgenir. Bu denklemlerdeki bilinmeyenler fonksiyonlar olur. Örneğin,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \\ x, y \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty),$$

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = x + y + z, \\ x, y, z \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$f(x+2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fonksiyonel denklemin çözümü, onun hangi sınıfta aranmasına bağlıdır. $f(3x) = 3f(x)$ denkleminin çözümü differansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfında $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) şeklindedir. $f(x)$ fonksiyonu $\frac{1}{3} < x < \sqrt{3}$ aralığında tanımlanmışsa ve differansiyellenebilir ise, o zaman kolayca görülür ki, $f(x) = x \tan(\pi \log_3 x)$ fonksiyonu da, (1) denklemini sağlar. Yani $f(x)$ fonksiyonunun tanım sınıfını küçülttüğümüzde iki farklı çözüm ortaya çıkar.

1. Önce sürekli fonksiyonlar sınıfında, limite geçmenin yardımı ile bir kaç denklem çözelim.

Örnek 1. $f(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}\right) + x$ (1)

denklemini sürekli fonksiyonlar sınıfında çözüyoruz. Burada $x \in \mathbb{R}$ dir.

Çözüm. (1) denkleminde x 'in yerine $\frac{x}{2}$ yazar ve $\frac{1}{3}$ 'le çarparsak,

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{9}f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2.3} \quad (2-1)$$

elde ederiz. Aynı dönüşümü $(2-1)$ 'de yerine yazarsak ve her iki tarafı $\frac{1}{3}$ 'le çarparsak

$$\frac{1}{9}f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{27}f\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{x}{4.9}, \quad (2-2)$$

$$\frac{1}{27}f\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{1}{81}f\left(\frac{x}{16}\right) + \frac{x}{8.27}, \quad (2-3)$$

olur. Tümevarım yöntemiyle, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için

$$\frac{1}{3^k}f\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{3^{k+1}}f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + \frac{x}{2^k.3^k}, \quad (2-k)$$

olduğunu kolayca göstermek olanaklıdır. Bu eşitliğin sağ ve sol tarafını $k = 0$ dan n 'ye kadar toplarsak,

$$f(x) = \frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + x\left(1 + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6^n}\right) \\ = \frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{6x}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right) \quad (3)$$

olur. $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, keyfi sabit alınmış x için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(0)$$

dır. (1) denkleminde $x = 0$ yazarsak, $f(0) = \frac{1}{3}f(0)$ veya $f(0) = 0$ elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^n} = 0$$

olduğundan, (3) eşitliğinden

$$f(x) = \frac{6}{5}x$$

olur. Kolayca gösterebiliriz ki, bulduğumuz $f(x) = \frac{6}{5}x$ fonksiyonu (1) denklemini sağlar.

Örnek 2. Negatif olmayan sayılar kümesinde tanımlanmış ve

$$f(x^3) + f(x) = x^3 + x$$

denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. $h(x) = f(x) - x$ dersek,

$$h(x^3) = -h(x) \quad (4)$$

olur. (4) denkleminde n defa $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ dönüşümünü yaparsak,

$$h(x) = -h(\sqrt[3]{x}),$$

$$-h(\sqrt[3]{x}) = h(\sqrt[3]{x}),$$

$$\dots (-1)^{n-1}h(\sqrt[3]{x}) = (-1)^n h(\sqrt[3]{x})$$

elde ederiz. Bunları taraf tarafa toplarsak,

$$h(x) = (-1)^n h(\sqrt[3]{x}) \quad (5)$$

ve (5) 'ten

$$\begin{aligned} h(x) &= (-1)^n (-1)^n h(\sqrt[3]{x}) \\ &= h(\sqrt[3]{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

olur. Keyfi $x \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = 1$$

olduğundan (6) 'dan $h(x) = h(1)$ elde edilir. (4) 'ten ise $h(1) = -h(1)$ ve dolayısıyla, $h(1) = 0$ olur. Böylece, $h(x) = 0$, $f(x) = x + h(x) = x$ olur.

2. Şimdi ise, sürekli türevi olan fonksiyonlar sınıfında bazı fonksiyonel denklemlerin çözüm yöntemlerini öğrenmeye çalışalım.

Örnek 3. Varsayalım ki, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'dir ve her $x \in \mathbb{R}$ için sürekli türevi vardır.

$$f(3x) = 3f(x) \quad (7)$$

denkleminin çözümünün $f(x) = ax$ şeklinde olduğunu gösteriniz. (Burada $a \in \mathbb{R}$ keyfi sabittir).

Çözüm. (7) denkleminin her iki tarafının türevini alırsak, $3f'(3x) = 3f'(x)$ olur. Buradan

$$f'(3x) = f'(x) \quad (8)$$

elde edilir. Bu denklem için limite geçme yöntemini uygulayalım. $x \rightarrow \frac{x}{3}$ dönüşümünü (8)'de yerine yazarsak,

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{3}\right) = f'\left(\frac{x}{3^2}\right) = \dots = f'\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

olur. $f'(x)$ sürekli olduğundan, sonuncu eşitlikte limite geçsek, $f'(x) = f'(0)$ olur. Böylece, $f'(x) = a$, ($a = f'(0)$) elde edilir. Buradan $f(x) = ax + b$ olur. (7) denkleminde $f(0) = 3f(0)$ veya $f(0) = 0$ olduğundan $b = f(0) = 0$ dır. Yani, $f(x) = ax$, ($a = f'(0)$) şeklindedir.

Kolayca görülür ki, $f(x) = ax$ fonksiyonu keyfi $a \in \mathbb{R}$ için (7) denklemini sağlar.

Bazı durumlarda, fonksiyonel denklemleri çözerken onun bir kaç defa türevini almak gerekebilir.

Örnek 4. İkinci türevi sürekli olan fonksiyonlar sınıfında

$$f(kx + b) = k^2 f(x), \quad (k \neq 0, 1; x \in \mathbb{R}) \quad (9)$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. (9)'un her iki tarafının iki defa türevini alalım. O zaman,

$$f'(kx + b) = kf'(x), f''(kx + b) = f''(x) \quad (10)$$

olur.

Önce varsayalım ki, $|k| > 1$ dir. n defa ardışık olarak $x \rightarrow \frac{x-b}{k}$ dönüşümünü yaparsak, (10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''\left(\frac{x-b}{k}\right) = f''\left(\frac{x-b}{k^2}\right) = \dots = \\ &= f''\left(\frac{x-b}{k^n}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için $f''(x) = f''(0)$ olur.

$0 < |k| < 1$ olduğunda ise, (10)'da $x \rightarrow kx + b$ dönüşümünü yazarsak,

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''[k(kx + b) + b] \\ &= f''(k^2x + kb + b) \\ &= f''(k^3x + k^2b + kb + b) \\ &= \dots = f''[k^n x + (k^{n-1} + \dots + k + 1)b] \\ &= f''\left(k^n x + \frac{1-k^n}{1-k}b\right) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için, $0 < |k| < 1$ olduğundan, $f''(x) = f''\left(\frac{b}{1-k}\right)$ olur. $c = f''(0)$ (veya $c = f''\left(\frac{b}{1-k}\right)$) dersek her iki halde de $f''(x) = c$ denklemini elde ederiz. Buradan

$$f'(x) = cx + d \quad (11)$$

olur. (9) ve $f'(kx + b) = kf'(x)$ denklemlerinde $x = \frac{b}{1-k}$ yazarsak,

$$f\left(\frac{b}{1-k}\right) = k^2 f\left(\frac{b}{1-k}\right), \quad f'\left(\frac{b}{1-k}\right) = kf'\left(\frac{b}{1-k}\right)$$

ve dolayısıyla, $f(\frac{b}{1-k}) = 0$, $f'(\frac{b}{1-k}) = 0$ elde ederiz. (11)'den $c \cdot \frac{b}{1-k} + d = 0$, $d = c \cdot \frac{b}{k-1}$ olur. Bunu (11)'de gözönüne alırsak,

$$f'(x) = c(x + \frac{b}{k-1});$$

buradan ise

$$f(x) = \frac{c}{2}(x + \frac{b}{k-1})^2 + l$$

olur. $f(\frac{b}{1-k}) = 0$ olduğundan, sonuçta

$$f(x) = a(x + \frac{b}{k-1})^2$$

buluruz. Burada $a \in \mathbb{R}$ keyfi sabittir.

Çoğu zaman türevin tanımını kullanarak, fonksiyonel denklemleri çözümlemek olanaklıdır.

Örnek 5. $(0, \infty)$ aralığında tanımlanmış, türevi olan ve

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. Kolayca görünür ki, $f(x) = 0$ fonksiyonu (12) denkleminin çözümlerinden biridir. Denklemin sıfırdan farklı çözümünü bulmaya çalışalım. Varsayalım ki, $f(x)$ fonksiyonu (12) denklemini sağlıyor ve bir a için $f(a) \neq 0$ olsun. O zaman (12)'den $y = \frac{a}{x}$ için

$$f(x) \cdot f(\frac{a}{x}) = f(x \cdot \frac{a}{x}) = f(a) \neq 0$$

olur. Yani, bu durumda her $x > 0$ için $f(x) \neq 0$ dır.

$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2$ olduğundan dolayı $f(x) > 0$ dır.

Koşulumuza göre,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

türevi her $x > 0$ için vardır. (12)'den

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x(1 + \frac{h}{x})] - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{h}{x}) - f(x)}{h} \\ &= \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{h}{x}) - 1}{\frac{h}{x}} \end{aligned}$$

olur. $h \rightarrow 0$ olduğunda $\frac{h}{x} \rightarrow 0$ dır. $f(1) = 1$ olduğundan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{h}{x}) - f(1)}{\frac{h}{x}} = f'(1) = c$$

sonludur. Sonuçta

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot c \text{ veya } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{c}{x}$$

elde edilir. Buradan ise,

$$\ln f(x) = c \ln x + b$$

olur. Bu denklemde $x = 1$ alırsak, $f(1) = 1$ olduğundan $b = 0$ bulunur. Böylece, (12) denkleminin çözümü $f(x) = 0$ ya da $f(x) = x^c$ olur. Burada $c \in \mathbb{R}$ keyfi sabittir.

EK PROBLEMLER:

1. Sürekli fonksiyonlar sınıfında aşağıdaki denklemleri çözünüz:

$$(a) f(x) = f(\frac{x}{5})2^x,$$

$$(Yanıt: f(x) = k2^{\frac{x}{5}}, k \in \mathbb{R})$$

$$(b) f(2x+1) = f(x).$$

$$(Yanıt: f(x) = k, k \in \mathbb{R})$$

2. Türevlenebilen fonksiyonlar sınıfında aşağıdaki denklemleri çözünüz:

$$(a) f(f(x)) = f(x) + x,$$

$$(Yanıt: f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x)$$

$$(b) f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$(x, y \in \mathbb{R}^+)$$

$$(Yanıt: f(x) = c \ln x, c \in \mathbb{R})$$

KAYNAKÇA

[1] Brodskiy Y. S, Slipenko. A. K., Fonksiyonel Denklemler, Kiev, Vişa Şkola, 1983.

ODTÜ MATEMATİK TOPLULUĞU 2.LİSELERARASI MATEMATİK YARIŞMASI

Mustafa Kalafat

ODTÜ, Matematik Bölümü, 06531-ANKARA

Ortadoğu Teknik Üniversitesi Matematik Topluluğunun düzenlemiş olduğu 2.Lise-lerarası Matematik Yarışması 24-26 Mayıs 1997 tarihlerinde yapıldı. 217 okul arasından seçilmiş olan, 23 takımın yarıştığı yarı finalden finale kalan okullar ve sıralamaları şöyledir:

1. Ankara Özel Arı Fen Lisesi.
2. Ankara Özel Samanyolu Fen Lisesi.
3. İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi.
4. İzmir Fen Lisesi.
5. Adana Kurttepe Anadolu Lisesi.

Soru grubu olarak bizden, yardımlarını esirge-meyen Prof. Dr. Zafer Nurlu ve Prof. Dr. Albert Erkip 'e, jüri üyesi olarak katılan Prof. Dr. Okay Çelebi 'ye, topluluk başkanımız Selçuk Eren'e, soru grubundaki diğer arkadaşlarım Bilal Yurdakul ve Buğra Özer 'e teşekkürlerimi sunu-yorum.

Şimdi sizi yarıfinal sınavından seçtiğimiz soru-larla başbaşa bırakıyoruz:

SORU 10: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ sayısının n -inci ($n \in \mathbb{Z}^+$) dereceden köklerine kompleks düzlemde karşılık gelen noktaları köşe kabul eden konveks çokgenin alanına A_n diyelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{\pi} \right)^n = ?$$

ÇÖZÜM: Bir sayının n -inci ($n \geq 3$) derece-den kökleri, kompleks düzlemde köşelerinin ori-jine uzaklığı $\sqrt[n]{r}$ olan düzgün bir n -gen belir-tir. n 'yi artırdığımızda bu n -genler limit halinde yarıçapı $\sqrt[n]{r}$ olan bir daireye yaklaşır:

$$A_n \rightarrow \pi.(\sqrt[n]{r})^2 \text{ olur.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{\pi} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi r^{2/n}}{\pi} \right)^n = r^2$$

elde edilir.

SORU 15: Düzlemde, herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin köşelerinin koordinatları veriliyor. Daha sonra koordinatları verilen bir P noktasının $\triangle ABC$ üçgeninin içinde, sınırlarında (üzerinde) veya dışında olduğu nasıl tespit edilebilir?

NOT: Bu soruyu, "bakalım nasıl testler çıkacak, ilginç yöntemler çıksın da biz de öğrenelim" düşüncesiyle, öğrencileri denemek amacıyla sormuştuk. Farklı olarak iki test ortaya atıldı:

ÇÖZÜM 1: Önce

$$A = A(\triangle ABC) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1/2 \\ x_2 & y_2 & 1/2 \\ x_3 & y_3 & 1/2 \end{vmatrix}$$

determinantıyla bulunabilir. Sonra

$T = A(\triangle PAB) + A(\triangle PBC) + A(\triangle PAC)$ toplamı bu-lunur.

A ve T 'nin karşılaştırması yapılır: $T > A$ ise nokta üçgenin dışındadır. $T = A$ olup olmadığına bakılır.

(a) T toplamını oluşturan üçgenlerden birinin alanı 0 ise nokta sınırdadır.

(b) Aksi durumda nokta üçgenin iç bölgesin-de dir.

ÇÖZÜM 2: AB doğrusunun $ax + by + c = 0$, kapalı şekilde denklemini bulunur. $ax + by + c$ ifadesine üçgenin diğer köşesi olan C noktası ile P noktası konularak aynı, tarafta olup olma-dıklarına bakılır. İfade her ikisi için de aynı işaretli çıkıyorsa doğrunun aynı tarafındadırlar. Bu, her kenar için sağlanıyorsa nokta üçgenin iç bölgesindedir. Herhangi birisinde ters işaretlilik sözkonusuysa nokta üçgenin dışındadır. Eğer P noktası herhangi bir kenarda ifadeyi "0" yapıyorsa o zaman kenarın üstündeki doğru üzerinde demektir. Diğer kenarlar için yapılan

testlere göre, kenarın aynı zamanda üçgenin dışında veya üzerinde olduğu belirlenir.

SORU 17: $x^2 = 2py, p \in \mathbb{R}^*$ eğrisi ile $d: x - k = 0, k \in \mathbb{R}$ doğrusunun kesişim noktasındaki eğri teğetine t diyelim. k değişirken, d 'nin t 'ye göre simetriği olan doğruların ortak özelliği nedir?

ÇÖZÜM 1: Probleme fiziksel açıdan yaklaşırsak, parabolik aynalarda ($x^2 = 2py$), asal eksene (y -ekseni) paralel gelen ışınlar ($x = k$), odakta ($F(0, \frac{p}{2})$) geçerler. Fizikçilere güvenerek bu yaklaşımı kabul edebiliriz.

ÇÖZÜM 2: Veya güvenmeyiz, bir matematikçi olarak ispatlarız:

$$y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(k, \frac{k^2}{2p})} = \frac{k}{p}$$

$$= m_t \text{ (teğetin eğimi).}$$

$k = 0$ için $m_t = 0$ ve aranan doğru $x = 0$ doğrusu olur.

$k \neq 0$ için $m_t \neq 0$ ve simetrik doğrunun eğimi şöyle bulunur:

$$m_s = \frac{m_t - \frac{1}{m_t}}{1 + m_t \cdot \frac{1}{m_t}} = \frac{m_t^2 - 1}{2m_t}$$

$$= \frac{(\frac{k}{p})^2 - 1}{2 \cdot \frac{k}{p}} = \frac{k^2 - p^2}{2kp}$$

Böylece, simetrik doğru $P(k, \frac{k^2}{2p})$ noktasından geçeceğinden, doğrunun denklemi

$$\frac{k^2 - p^2}{2kp} = \frac{y - \frac{k^2}{2p}}{x - k},$$

$$x \left(\frac{k^2 - p^2}{k} \right) + p^2 = 2py$$

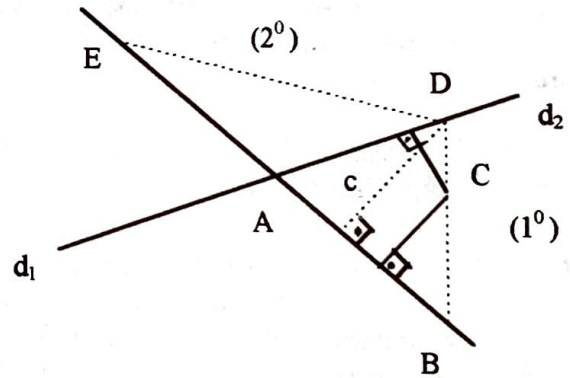
olarak elde edilir. $x_0 = 0$ için doğru denklemi k 'dan bağımsız yapılabilir, o zaman $y_0 = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}$ olur. Bu da parabolün odağının ordinatıdır.

SORU 18: Kesişen iki düzleme olan uzaklıkları toplamı sabit bir $c \in \mathbb{R}^+$ sayısı olan noktaların geometrik yeri nedir?

ÇÖZÜM: Düzlemlere olan uzaklık, dik uzaklık demektir. Öyleyse bu iki düzleme dik bir düzlemdeki arakesitte durumu inceleyelim.

(1⁰) bölgesinde incelediğimizde, aradığımız parçanın, eşitkenarları d_1 ve d_2 üzerinde, eş yükseklikleri c birim olan bir ikizkenar üçgenin tabanı olduğu görülür. Çünkü, ikizkenar üçgende, tabandaki herhangi bir noktanın ikizkenarlara olan uzaklıkları toplamı sabittir ve eş yüksekliğin uzunluğu kadardır.

(2⁰) bölgesine bakıldığında yine aynı durum söz konusudur. Yeni üçgen ile öncekinin birer kenarı ortaktır. Çünkü her ikisi de aynı eş iki yükseklik olan c yüksekliğindedirler. 4 bölge birlikte düşünüldüğünde ortaya bir paralelkenar çıkar. Dikkat edilirse, bu hiç de sıradan bir paralelkenar değildir. $|AB| = |AD| = |AE|$ gereğince bu bir dikdörtgendir.



Bu iki düzlemi, ikisine de dik hangi düzlemle kesersek keselim, aranan yerin bir dikdörtgen olduğunu görürüz. Bu dikdörtgenleri de üst üste ko, arsak, ortaya tabanı dikdörtgen olan silindirik yüzey çıkar. Yüksekliği sonsuz olan bir dikdörtgenler prizması şeklinde de tanımlanabilir.

14.BALKAN MATEMATİK OLİMPİYADI SORU VE ÇÖZÜMLERİ

N. Ergun , N. Ural , T. Yegül
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü,
İSTANBUL

29 Nisan-5 Mayıs 1997 tarihleri arasında Yunanistan'ın Tesselya bölgesinde yer alan 15 bin nüfuslu Kalampaka kentinde yapılan 14.Balkan Matematik Olimpiyadına, dokuz Balkan ülkesinden toplam $9 \times 6 = 54$ öğrenci katıldı. Bulgaristan 4 altın, 2 gümüş (231 puan), Romanya 3 altın, 3 gümüş (226 puan) ve Yunanistan 1 gümüş, 5 bronz(163 puan) ile ilk üç sırayı paylaştılar. Türkiye 1 gümüş ve 2 bronz madalya alarak altıncı oldu; takımımız toplam 117 puan elde etti. Aşağıda, 1 Mayıs 1997 Perşembe günü Kalampaka lisesinde yapılan 4,5 saat süreli yarışmanın sorularını ve çözümlerini bulacaksınız.

Bilindiği gibi tüm yarışmacı ülkeler sınavdan aylar önce ev sahibi ülkeye dörder aday soru gönderdiler. Ev sahibi ülke Yunanistan'ın oluşturduğu Problem Seçme Komitesinin bu aday sorular arasından ön elemeye belirlediği 12 soru içinden, bu kez, yarışmacı ülkelerin takım liderlerinden oluşan uluslararası jüri (sınavdan bir gün önce) yarışma sorularını belirler. Soruların daha önce yapılan ulusal ya da uluslararası matematik yarışmalarında sorulmamış olan bir güç, bir kolay ve iki orta düzeyde soru olmasına ve lise düzeyindeki kavramlara ilişkin olmasına özen gösterilir.

UYARI: Soruların hiçbirisi sıradan değildir! Çözümleri incelemeye geçmeden önce, okuyucunun kendisini sınamak amacıyla, soruları kendi başına çözmeye çalışmasını salık veriyoruz. Burada verilenlerden daha farklı (ama elbette doğru ve sağlıklı) çözümler de bulabilirsiniz. Son bir bilgi daha: zorluk düzeyleri farklı olmasına karşılık soruların tümü eşit (10'ar) puandır. Her bir sorunun yanında parantez içinde, o soruyu öneren ülkenin adı yazılıdır. Kolay gelsin!

SORU 1: (Yugoslavya)

Bir dışbükey (konveks) $ABCD$ dörtgeninde bir O iç noktası

$$|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2 = 2.S(ABCD)$$

eşitliğini gerçeklesin; $S(ABCD)$ dörtgenin alanını göstermektedir. $ABCD$ 'nin O merkezli bir kare olduğunu gösteriniz.

SORU 2: (Yugoslavya)

S kümesi n elemanlı ($n \geq 2$); $A_1, A_2, \dots, A_m$ ise S 'nin verilen altkümeleri olsun. ($m \geq 2$). Eğer farklı herhangi $x, y \in S$ noktaları için ya $x \in A_i, y \notin A_i$ ya da $x \notin A_i, y \in A_i$ olacak şekilde bir A_i altkümesi varsa, $n \leq 2^m$ eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösteriniz.

SORU 3: (Yunanistan)

C_1, C_2 ve Γ çemberlerini gözönüne alalım. C_1 ve C_2 çemberleri Γ çemberine sırasıyla B ve C noktalarında içten teğet, birbirlerine ise D noktasında dıştan teğet olsunlar. A noktası ise C_1 ve C_2 nin D den geçen ortak teğet doğrusunun Γ çemberi ile kesişim noktası olsun. Ayrıca K ve L noktaları AB ve AC nin sırasıyla C_1 ve C_2 çemberleri ile, M ve N ise BC 'nin C_1 ve C_2 çemberleriyle kesişim noktaları olsun. AD, KM ve LN doğrularının aynı bir P noktasından geçtiğini gösteriniz.

SORU 4: (Bulgaristan)

Her x ve y için

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

eşitliğini gerçekleyen bütün $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1: Verilen dışbükey dörtgenin alanı S , elbette, OAB, OBC, OCD ve ODA üçgenlerinin alanlarının toplamıdır. Bu üçgenlerin O noktasındaki tepe açılarını sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 ile gösterirsek,

$$S = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \sin \alpha_1 + \frac{1}{2}|OB| \cdot |OC| \sin \alpha_2 +$$

$$\frac{1}{2}|OC| \cdot |OD| \sin \alpha_3 + \frac{1}{2}|OD| \cdot |OA| \sin \alpha_4$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}|OA||OB| + \frac{1}{2}|OB||OC| + \frac{1}{2}|OC||OD| \\ &+ \frac{1}{2}|OD||OA| \quad (2ab \leq a^2 + b^2 \text{ nedeniyle}) \\ &\leq \frac{1}{4}(2|OA|^2 + 2|OB|^2 + 2|OC|^2 + 2|OD|^2) = S \end{aligned}$$

nedeniyle tüm ara adımlardaki $\leq$ işaretleri eşitlik haline gelir. Bu ise zorunlu olarak

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4 = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 90^\circ,$$

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$$

sonuçlarını verir, çünkü örneğin $\sin \alpha_1 < 1$ olsa,

$$\frac{1}{2}|OA||OB| \sin \alpha_1 < \frac{1}{2}|OA||OB|$$

nedeniyle sonuçta $S < S$ bulunacaktı; aynı nedenden ötürü, örneğin $|OA| \neq |OB|$ olsa,

$$|OA||OB| < \frac{1}{2}(|OA|^2 + |OB|^2)$$

ve sonuçta yine $S < S$ çelişkisi elde edilecekti. Bitti!

2: Önce bir gözlem yapalım: $A_1, A_2, \dots, A_m$ kümelerinin S 'nin altkümeleri olmaları gerekmez. S ve A_i altkümelerinin bir X kümesinin, verilen "nokta ayırma" koşullarını gerçekleyen (ve elbette $S \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ kapsamasının gerçekleştiğini gözleyiniz) altkümeleri olmaları yeterlidir, üstelik bazı A_k kümeleri boş bile olabilir! Şimdi, karakteristik fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan

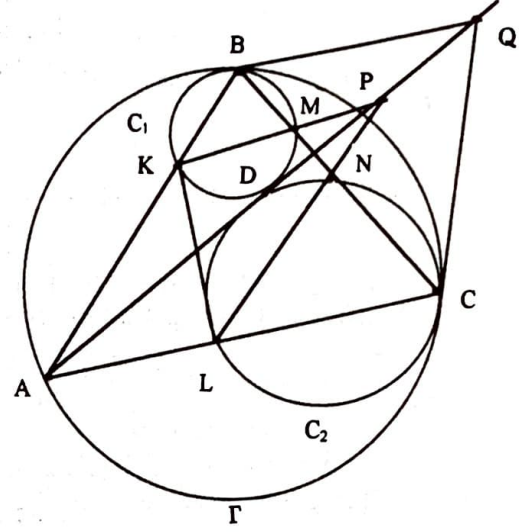
$$f(x) = (\chi_{A_1}(x), \chi_{A_2}(x), \dots, \chi_{A_m}(x)) \quad (x \in S),$$

$$f : S \rightarrow \{0, 1\}^m$$

fonksiyonunun birebir olduğunu kolayca gözleyebiliriz, çünkü $x \neq y$ iken, varsayım nedeniyle, $x \in A_i, y \notin A_i$ ya da $x \notin A_i, y \in A_i$ koşullarını gerçekleyen bir A_i altkümesi var olduğundan, $f(x)$ ve $f(y)$ sıralı m-lilerinin i-inci bileşenleri farklı ve dolayısıyla $f(x) \neq f(y)$ olmaktadır. O halde $n = |S| \leq |\{0, 1\}^m| = 2^m$ bulunur.

3: Büyük bir Γ çemberinin içinde yer alan ve birbirlerine D noktasında, Γ çemberine ise sırasıyla

B ve C noktalarında teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerini çizelim.



Γ çemberinin B ve C noktalarındaki teğetlerinin kesişim noktası Q olsun. Γ çemberinde aynı yayı gören $\angle QBC$ ve $\angle QCB$ teğet-kiriş açıları için

$$m(\angle QBC) = m(\angle QCB) \quad (1)$$

ve benzer biçimde C_1 çemberinde $\angle BKM$ çevre açısı ile aynı yayı gören $\angle QBM$ teğet-kiriş açısı için

$$m(\angle BKM) = m(\angle QBM) \quad (2)$$

ve C_2 çemberinde $\angle CLN$ çevre açısı ile aynı yayı gören $\angle QCN$ teğet-kiriş açısı için

$$m(\angle CLN) = m(\angle QCN) \quad (3)$$

geçerlidir. B, M, N ve C noktaları aynı doğru üzerinde olduklarından bu son üç sonuçtan

$$m(\angle BKM) = m(\angle QBM) = m(\angle QBC)$$

$$= m(\angle QCB) = m(\angle QCN) = m(\angle CLN)$$

bulunur. C_1 ve C_2 çemberlerinin ortak teğet doğrusu üzerinde bulunan A noktası için $|AK| \cdot |AB| = |AD|^2 = |AL| \cdot |AC|$ olur. A köşesindeki açıları ortak olan ALK ve ABC üçgenleri için

$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AB|}$$

olduğundan, bu iki üçgen benzerdir. Böylelikle

$$m(\angle AKL) = m(\angle ACB),$$

$$m(\angle ALK) = m(\angle ABC)$$

olur. Şimdi P köşesindeki açılar ortak olan PMN ve PLK üçgenlerini gözönüne alalım:

$$m(\angle PMN) = m(\angle BMK)$$

$$= 180^\circ - (m(\angle BKM) + m(\angle KBM))$$

$$= 180^\circ - (m(\angle BKM) + m(\angle ABC))$$

$$= 180^\circ - (m(\angle CLN) + m(\angle ALK))$$

$$= m(\angle PLK)$$

ve benzer biçimde

$$m(\angle PNM) = m(\angle CNL)$$

$$= 180^\circ - (m(\angle CLN) + m(\angle LCN))$$

$$= 180^\circ - (m(\angle CLN) + m(\angle ACB))$$

$$= 180^\circ - (m(\angle BKM) + m(\angle AKL))$$

$$= m(\angle PKL)$$

bulunur. Böylelikle benzer oldukları anlaşılan PMN ve PLK üçgenleri için geçerli olan

$$\frac{|PM|}{|PL|} = \frac{|PN|}{|PK|}$$

eşitliği bize istenen sonucu verecektir.

4: Verilen fonksiyonel eşitlik koşulu

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

bize, kolayca, x yerine sıfır ve y yerine x yazarak

$$f(f(x)) = f^2(0) + x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

eşitliğini verir. (UYARI: O halde, $f(x) = f(y)$ bize $x = y$ verir, yani f birebirdir; üstelik $ff(x)$ birinci dereceden bir polinom ve sonuçta f fonksiyonu örtendir. Oysa f fonksiyonunun birebir ve örtenlik özellikleri aşağıda kullanılmayacaktır.)

Şimdi $a = f(-f^2(0))$ özel gerçel sayısını tanımlayalım. Dikkat edilirse,

$$f(a) = ff(-f^2(0)) \stackrel{(2)}{=} f^2(0) + (-f^2(0)) = 0$$

ve dolayısıyla (1) nedeniyle

$$\begin{aligned} 0 &= f^2(a) = f(a.f(a) + f(x)) - x = ff(x) - x \\ &= f^2(0) \end{aligned}$$

ve sonuçta $f(0) = 0$ bulunur. O halde (1) ve (2) kullanılarak

$$ff(x) = x, f(x.f(x)) = f^2(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

ve bu son sonuçlar yardımıyla

$$\begin{aligned} x^2 &= f^2(f(x)) = f(f(x).ff(x)) = f(x.f(x)) \\ &= f^2(x) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $f(x) = \mp x$ bulunur. Aman dikkat, aranan tüm f fonksiyonlarının

$$\text{ya } f(x) = x, \text{ (her } x \in \mathbb{R} \text{ için)}$$

$$\text{ya da } f(x) = -x \text{ (her } x \in \mathbb{R} \text{ için)} \quad (4)$$

şeklinde yalnızca iki tane olduğunu henüz kanıtlamadık. Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$f(x_0) = x_0$ olduğunda $f(y_0) = -y_0$ 'ı gerçekleyen $y_0 \neq 0$ gerçel sayısı var olamaz; olsaydı,

$$\begin{aligned} \mp(x_0^2 - y_0) &= f(x_0^2 - y_0) = f(x_0 f(x_0) + f(y_0)) \\ &= f^2(x_0) + y_0 = x_0^2 + y_0 \end{aligned}$$

çelişkisi bulunurdu. Demek ki tüm çözümler (4)'de yazılanlardır.

DUYURU

Akdeniz Üniversitesi Matematik kulübü tarafından düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatlarından üçüncüsünün birinci aşama sınavı 7 Mart 1998, ikinci aşama sınavı 18 Nisan 1998 günü Akdeniz Üniversitesi Kampüsü, Merkezi Dersliklerde yapılacaktır. Olimpiyada Lisel, 2 ve 3 üncü sınıf öğrencileri katılabilmektedir. Olimpiyatta dereceye gireceklere Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğü ve Antalya Eğitim Vakfı çeşitli ödüller verecektir.

PERGE'Lİ APOLLONIUS

Ünal Ufuktepe

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Yolunuz hiç Antalya'ya düştü mü? Peki Perge'yi gördünüz mü? Görmediyseniz dilerim bu yazının aklınızda bırakacağı iz sizi bir gün oraya sürükler:

Kasım ayının güneşli bir hafta sonu Antalya'dan Alanya'ya doğru yola çıktık ve 10-15 dakikada Aksu'ya vardık. Sarı bir zemin üzerine siyah harflerle yazılmış Perge levhasını görür görmez işaret yönüne döndük ve beş dakikada tarihi şehirdeyiz. Yolun sol tarafında kocaman bir tiyatro, biraz ileride sağ tarafta arena ve ileride şehrin giriş kapısı. Altın çağın görkemli şehrini kısmen de olsa ayakta. Yerlere devrilip kırılmış sütunlar, kimi sütunlar üzerinde Eski Yunanca bazı yazılar ya da o dönemin insanların resimleri var. Karşı yakadaki tepelerin oradan giriş kapısına kadar yolun sağından ve solundan akan su kanalları şehre serinlik getirsin diye yapılmış. Yolun sol tarafında hamamlar, alış-veriş merkezleri var. Perge'nin estetik sokaklarında birini aradı kalbim, ama şehir şimdi harabe, soğuk sular artık kanallarda akıyor, tarih su'yu çürütmüş. Şehir suskun, gizemli bir sessizlik, kulaklarımda garip bir çınlama var. Uzun etekli giysisileri ile, pamuk saçlı, Akdeniz kadar temiz yüzlü; elinde asası ile biri belirdi karşımda:

- Kimi arıyorsunuz?

- Apollonius... (dedim ama aklıma Pauly-Wisowa'nın bibliografyasını çıkarttığı tam 129 Apollonius geldi, hangi biri? Sorumdan utandım ve düzelttim)

- Perge'li Apollonius, dedim.

Helenistan'da altın çağ dediğimiz M. Ö. 300-200'li yılların en önemli üç filozofu vardır; Euclid, Archimedes ve bizim Apollonius. Bu filozoflar o dönemin kaymağıdır. Eserlerinin bir kısmı kayboldu, ama bir çoğu günümüze kadar geldi. Euclid İskenderiye'de yaşadı ve orada çok değerli öğrenciler yetiştirdi. Eski Yunan'ın onun zamanına kadar gelmiş bütün matematiksel bulgularını toparlayıp, kendi buluş ve ispatlarını da ekleyip 13 ciltlik Elemanlar kitabını yazdı. Bazı kaynaklar bu kitabın daha fazla ciltleri olduğunu yazar, ama inanmıyorum. Bu kitabın o günden bu güne eminim kutsal kitaplar kadar baskısı yapıldı. Archimedes üzerine de söylenecek çok şey var ama sen bizim Apollonius'u sordun. Kendisi Archimedes'den 20-40 yaş daha gençtir. Ne zaman doğdu? Ne zaman öldü? Belli değil. Yaşadığı dönem için M.Ö. 247-205 diyenler var, M.Ö. 262-190 diyenler de var, ama bence önemli olan bu değil önemli olan onun sizlere bıraktığı düşün mirası ve o düşünce sisteminin hala yaşıyor olması. Apollonius İskenderiye ve Bergama'da eğitim gördü. Matematigi Euclid'in öğrencilerinden öğrendiği söyleniyor. Bir süre oralarda çalıştı ve buralara geri döndü, ne de olsa toprak çekiyor. Bir çok eser yazdı ama bunlardan biri en az Euclid'in Elemanlar'ı kadar çok önemlidir.

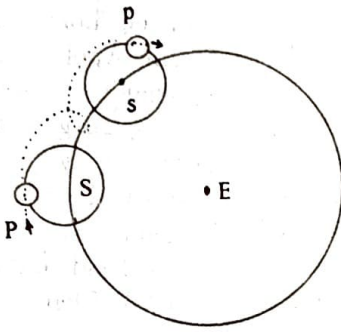
- Koni Kesitleri mi?

- Evet. Bu kitap ona "Büyük Geometrici" ünvanını kazandırdı.

- Peki Astronomi ile ilgili çalışmaları hangi boyuttaydı?

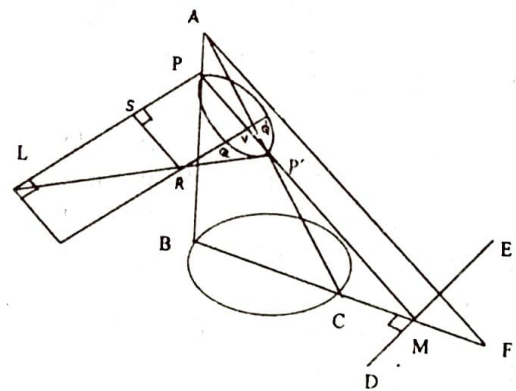
- Bu konu biraz karışık. O dönemde yine aynı dönemde yaşamış astronom olan bir başka Apollonius daha var. Pappus'un bizlere aktardığı kadarıyla bizim Apollonius da bu konuyla ilgilenmiş. Söylentilere göre Perge'nin girişindeki anfitiyatro'nun taşın sıraları üzerine geceleri uzanır, ayı ve gezegenleri gözlermiş. Gel seni oraya götürüyem. (Tiyatro'ya geldiğimizde kapının demir zincirler ile kapatılmış olduğunu gördük. Tepeye tırmanıp arka surlardan içeriye girdik. Bilge insan eline bir kömür parçası alıp şu şekli çizdi:

(Bilgin bakışlarını gökyüzünün mavi derinliklerine kilitleyip konuşmaya başladı) Anadolu ve



- Bu resimden ne anlıyorsunuz?
- Sanki bir uydu gezegeninin hareketini gösteriyor...
- Doğru. Bu Apollonius'un çizimi.
- Eminim Koni Kesitleri üzerine bana aktaracağınız çok şey vardır...
- (Bilge insan derin bir iç çekti) 8 ciltlik bir kitaptır. İlk dört cildi Latince, üç cildi Arapça yazılı ve sonuncu cilt, ne yazık ki kayıp. Yıllardır ben bu 8. cildi aradım durdum, ama nafle bulamadım.
- Fermat'ın ispatını da insanlar gazete köşelerinde üçyüz yıl kadar aradı ama sonuçta birisi çıkıp kendi ispatını yaptı...
- Doğru söyledin evlat. Özellikle 17. Y.Y.'de bir çok bilim adamı Eski Yunan'ın klasik kitaplarını hızla bir çok dile çevirdiler, kayıp kitaplar bulunamayınca eldeki veriler ve kayıtlardan yola çıkılarak onları yeniden yazmaya çalıştılar. Fakat verimli oldukları söylenemez. Apollonius'un Konik Kesitleri ilk 1537'de Venedik'te basıldı. Sonra kaç dile çevrildi bilemiyorum...
- "Kitâb al-Mahrutât" adlı eseri 20 Eylül 1996 tarihinde Nazım Terzioğlu'nun anısına bilim dünyasına sunuldu.
- Buna çok sevindim. Apollonius Koni Kesitleri kitabında elips, parabol ve hiperbol'ü dairesel bir koninin kesitleri olarak gösterdi. Bu gün hala aynı adları kullanıyor musunuz?
- Evet.

- Apollonius'un cebirsel bir gösterim biçimi olmadığı için sizin koordinat yönteminize sahip değildi. Bununla birlikte bulunduğu sonuçların çoğu doğrudan doğruya koordinat diline çevrilebilir. Bu Apollonius'un bazı bölümleri korunabilen, "cebirsel" geometriyi, geometrik ve bunun sonucunda türdeş bir dille inceleyen diğer kitapları için de geçerlidir.
- Burada onun Teğet Problemiyle karşılaşmıyor muyuz? Hani verilen üç çembere de teğet olan çemberler çizimi gibi...
- Evet. Buradaki çemberler doğrular ya da noktalarla yer değiştirilebilir. Geometrik çizimlerin pergel ve cetvelle sınırlandırılması koşuluyla açık biçimde ilk kez Apollonius'ta karşılaşırız.
- Koni Kesitler'in içeriği hakkında başka neler biliyorsunuz?
- İlk dört cilt yeni olan çok az şey içerir. Koni Kesitler üzerine temel tanımlar ve özellikler de içerir. Euclid'in var olan bilgileri toparlayıp yeniden organize etmesi gibi bir çalışmadır. Fakat V-VII ciltleri tamamen onun keşif ve buluşlarını içerir. (Bilge kişi yere kömürü ile bir başka şekil çizmeye başladı.) Şimdi şu şekle bir bakalım:



A 'dan tabandaki dairenin merkezine inilen doğruya koninin ekseni denir. Eğer bu doğru tabana dik ise, koniye dairesel dik koni denir. **Koni**

D , E ve P den geçen Π düzlemi ile kesilsin. BC , koni'nin taban dairesinin çapı ve DE 'ye M noktasında dik olsun. ABC üçgeni ise koni içinde kalan eksen üçgenidir. $PP'M$ doğrusu ABC eksen üçgeni ile koniyi kesen düzlemin kesim noktalarından elde edilir. ABC üçgeni Π düzleminin belirlediği koni kesitini PP' 'de kessin. Koni kesitinde DE 'ye paralel bir QQ' kirişi alalım. (PP' , QQ' 'ye dik olmak zorunda değil.) Apollonius $P'P$ 'nün $[Q'Q]$ 'yü ortalaadığını yani VQ 'nün $Q'Q$ 'nün yarısı olduğunu ispatladı. Şimdi A 'dan PM 'ye paralel olacak şekilde bir doğru çizelim ve bu doğru BM doğrusunu F 'de kessin. PL 'yi PM 'ye dik olacak şekilde çizelim. Elips ve hiperbol için L ,

$$\frac{|PL|}{|PP'|} = \frac{|BF| \cdot |FC|}{|AF|^2}, \quad (0.1)$$

parabol için ise L ,

$$\frac{|PL|}{|PA|} = \frac{|BC|^2}{|BA| \cdot |AC|} \quad (0.2)$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçilir. Elips durumunda $P'L$ 'yi çizelim. V 'den PL 'ye paralel olan ve $P'L$ 'yi R noktasında kesen VR 'yi çizelim. Bu çizimlerden sonra uzun işlemler sonucunda Apollonius,

$$|QV|^2 = |PV| \cdot |VR| \quad (0.3)$$

ve parabol için de

$$|QV|^2 = |PV| \cdot |PL| \quad (0.4)$$

bağıntısını bulmuştur. Bunların ispatı uzun ama bakmanda yarar var. Elbette ki Apollonius'un çalışmalarında bu tür cebirsel işlemler yoktu. Her şey anlatım ile ifade ediliyordu. Şimdi onun bu çalışmasını gününüz Analitik Geometrisine uyarlayalım. $|PL|$ 'yi $2p$, $|PP'| = d$, $|PV| = x$, $|QV| = y$ olarak seçersek (0.4) denklemi bugünün

$$y^2 = 2px$$

parabol denklemine dönüşür. (0.3) denklemi de

$$y^2 = |PV| \cdot |VR|$$

olur. Fakat $|PV| \cdot |VR| = x(2p - |LS|)$ dir. LSR ve LPP' üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|LS|}{|PL|} = \frac{x}{d}$$

$$|LS| = \frac{2px}{d}$$

dir. Öyle ise

$$y^2 = x(2p - \frac{2px}{d})$$

elde edilir. İşte evlat, parabol, hiperbol ve elips'in hikayesi böyle.

- Kafam karıştı. İyisi mi ben eve gidip Apollonius'un şu Türkçe'ye çevrilmiş kitabını baştan sona bir gözden geçireyim, dedim. Bilgin insan güldü. O anda birinin omuzuma vurduğunu hissettim.

- Hocam, ne zaman yemek molası vereceğiz? Çok acıktık.

- Perge'nin harabelerinde bir kolonun üzerindeki Eski Yunanca harflere takılıp kalmışım. "Tamam arkadaşlar geliyorum" dedim.

KAYNAKÇA

- [1] E. Bell, Büyük Matematikçiler, Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, 1945.
- [2] Dirk J. Struik, Kısa Matematik Tarihi, Sarmal Yayınevi (1996) 84-85.
- [3] D. E. Smith, History of Mathematics (1923).
- [4] Sinan Sertöz, Matematik'in Aydınlik Dünyası, Tübitak Yayınları, 1996.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A151. Bir ABC üçgeninin kenarortayları AA_0 , BB_0 , CC_0 ve yükseklikleri de AA_1 , BB_1 , CC_1 dir. Bu durumda, $A_0B_1C_0A_1B_0C_1A_0$ — kapalı çokgeninin (poligonunun) çevre uzunluğunun ABC üçgeninin çevresinin uzunluğuna eşit olduğunu ispat ediniz.

A152. $\frac{2499}{10000} < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük n doğal sayısı nedir?

A153. Bir dörtyüzlünün (tetrahedron) ayırtlarından, her ayırt bir kez kullanılarak, iki tane üçgen yapılabileceğini kanıtlayınız.

A154. m bir doğal sayı olmak üzere

$$\int \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+m)}$$

integralini hesaplayınız.

A155. $z = \sum_{k=0}^{999} \frac{(1+i)^{2k}}{2^k} = \frac{(1+i)^2}{2} + \frac{(1+i)^4}{2^2} + \frac{(1+i)^6}{2^3} + \dots + \frac{(1+i)^{1998}}{2^{999}}$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y151. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin içinde rasgele bir P noktası alınıyor. P noktasından dikdörtgenin kenarlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen 4 küçük dikdörtgene ayrılıyor. A ve C yi köşe kabul eden küçük dörtgenlerden en az birinin alanının $ABCD$ nin alanının $\frac{1}{4}$ ünden daha büyük olamayacağını gösteriniz.

Y152. Tüm terimleri $[0,1]$ aralığında bulunan öyle bir ıraksak $\{a_n\}$ reel sayı dizisi tanımlayınız ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ olsun.

Y153. $0 < a < 1$ olsun. Her x gerçel sayısı için

$$f(x) + f(ax) = x$$

denklemini sağlayan f sürekli fonksiyonunu bulunuz.

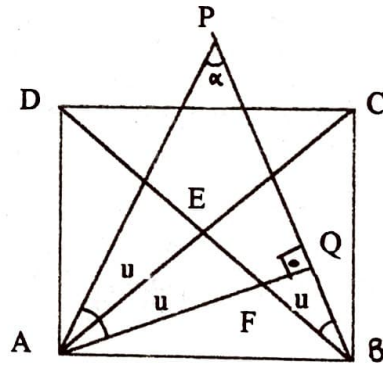
Y154. Öyle bir üçgen bulunuz ki, tam 1997 tane eşit üçgene bölünebilsin.

Y155. $x^2 + y$ ve $y^2 + x$ her ikisi de tam kare olacak biçimde x ve y pozitif tamsayıları var mıdır?

ÇÖZÜMLER

A141. Bir $ABCD$ karesinin A ve B köşeleri merkez alınarak $|AC|$ yarıçaplı iki çember çiziliyor. Çemberlerin AB doğrusuna göre D ve C ile aynı tarafta bulunan kesişme noktası P olmak üzere, A 'dan BP doğrusuna AQ dikmesi çiziliyor. $\hat{PAC} = \hat{QAC}$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. Karenin köşegenleri E noktasında kesişsin. Bu durumda,



$$m(\hat{PAE}) = m(\hat{PBE}) = u$$

ve

$$m(\hat{APB}) = \alpha$$

olmak üzere, $2u + \alpha = m(\hat{AEB}) = 90^\circ$ dir. AQ doğrusu DB doğrusunu F 'de kesmişse, $m(\hat{AFE}) = 90^\circ - u$ olur. Buradan

$m(\hat{EAF}) = u$ bulunur ve $\hat{PAC} = \hat{QAC}$ elde edilir.

Çözüm 2. Şekilde, $\triangle PAB$ ikizkenar üçgen, $[PR]$ onun AB kenarına ait yüksekliğidir. $[PR]$ aynı zamanda açıortay olduğundan

$$\hat{APR} = \hat{BPR} \quad (1)$$

dir. Kolları birbirine dik açılar olarak

$$\hat{BPR} = \hat{BAQ} \quad (2)$$

dur. Diğer yandan,

$$\hat{APR} = \hat{DAP} \quad (3)$$

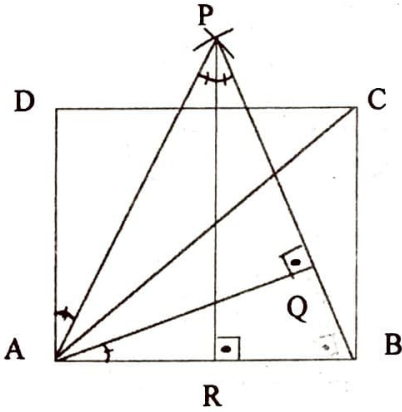
dir (içters açılar). (1), (2) ve (3) ten

$$\hat{DAP} = \hat{BAQ}$$

ve buradan

$$\hat{PAC} = \hat{QAC}$$

olduğu görülür.



(Çözenler: Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Erol Ünal, Mustafa Dönmez)

A142. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ ve $[CA]$ üzerinde sırasıyla alınan noktalar D , E ve $DE \parallel AB$ olmak üzere BE doğrusunun AD doğrusunu kestiği nokta F ise, CF doğrusunun $[AB]$ 'nin orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

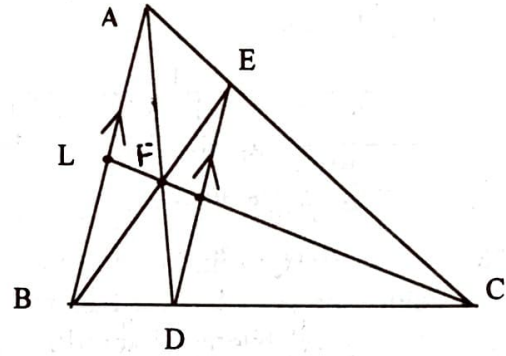
Çözüm. CF nin AB yi kestiği nokta L olsun. Ceva Teoreminden,

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

ve $DE \parallel AB$ koşulundan

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

bulunur. Buradan $|AL| = |LB|$ elde edilir.



(Çözenler: Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Erol Ünal, Mustafa Dönmez)

A143. Bir ABC üçgeninde B ve C açılarının iç ve dış açıortayları çizilerek A noktasından bu açıortaylara dikmeler indiriliyor. Bu dört dikme ayaklarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. ABC üçgeninin $\hat{B}$ açısının iç ve dış açıortaylarına A noktasından indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E, D ve $\hat{C}$ açısı için de bu dikme ayakları F, G olsun. BE ile BD ve CF ile CG birbirlerine dik olduğundan, $ADBE$ ve $AFCG$ birer dikdörtgendir. Dikdörtgende köşegenler birbirini ortaladığından DE , $[AB]$ 'nin ve FG , $[AC]$ 'nin orta noktasından geçer ve ikisi de BC doğrusuna paralel olur, dolayısıyla çakışırlar.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Erol Ünal, Mustafa Dönmez)

A144. $x, y, a, b > 0$ için

$$\left(\frac{ax+by}{y}\right)^2 + \left(\frac{ay+bx}{x}\right)^2 \geq 2(a+b)^2$$

eşitsizliğini gösteriniz.

Çözüm. $I = \left(\frac{ax+by}{y}\right)^2 + \left(\frac{ay+bx}{x}\right)^2 = (a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ tir. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden her $t > 0$ için $t + \frac{1}{t} \geq 2$ olduğundan ($t = \frac{x^2}{y^2}$ ve $t = \frac{y}{x}$ alarak)

$$I \geq 2(a^2 + b^2 + 2ab) = 2(a+b)^2$$

bulunur. Eşitlik ancak $t = 1$, yani $x = y$ iken vardır.

(Çözenler: Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Mustafa Dönmez)

A145. (Soru dergide yanlış basılmış; doğrusu) n pozitif bir tamsayı olsun.

$$n! < p < n! + n + 1$$

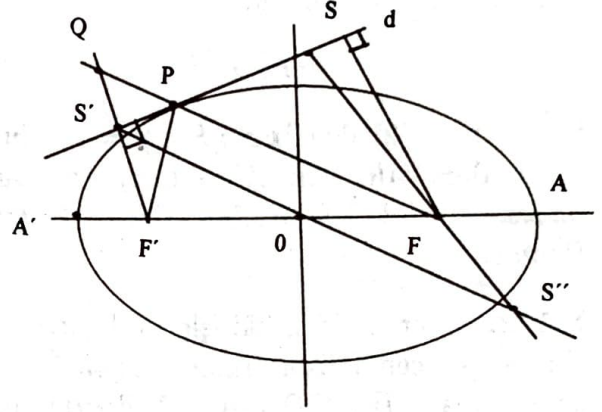
koşulunu sağlayan kaç p asal sayısı olabilir?

Çözüm. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $p = n! + k$ şeklindedir, yani k ile bölünür. O halde $k \geq 2$ iken $n! + k$ sayıları asal değildir; istenen koşulu sağlayan en çok bir ($p = n! + 1$) asal sayısı olabilir. ($n! + 1$ sayısı n ye göre asal olabilir veya olmayabilir; örneğin $7 = 3! + 1$ ve $25 = 4! + 1$).

Y141. Odakları F, F' olan $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsinin herhangi bir teğeti d doğrusu olmak üzere F ve F' noktalarının d üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla S ve S' ise $|FS| \cdot |F'S'| = b^2$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. Büyük eksen uzunluğu $2a$, küçük eksen uzunluğu $2b$ dir. d teğetinin değme noktası P olmak üzere, $\hat{F}PS = \hat{F}'PS'$ dir. FP doğrusu $F'S'$ doğrusunu Q noktasında kesmişse $|QS'| = |S'F'|$, $\hat{Q}PS' = \hat{F}'PS'$ olur. Buradan, $|F'P| = |PQ|$, $|FP| + |PQ| =$

$|FP| + |PF'| = 2a$ ve $|OS'| = a$ bulunur. Yani S' ve S noktaları elipsin asal çemberi üzerindedir. S' noktasının O noktasına göre simetriği olan S'' bu çember üzerindedir; $|S'F'| = |FS''|$ dır.



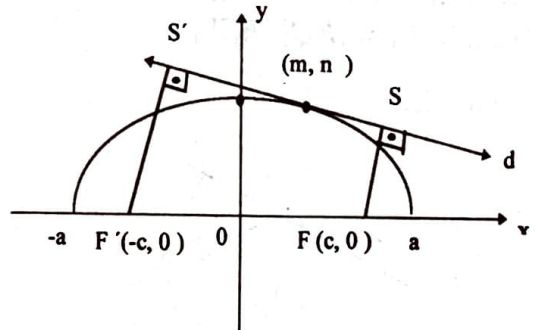
$|FS| \cdot |F'S'| = |FS''| \cdot |FS| = |A'F| \cdot |AF| = (|A'O| + |OF|)(|AO| - |OF|) = |AO|^2 - |OF|^2 = b^2$ den $|FS| \cdot |F'S'| = b^2$ bulunur.

Çözüm 2. Elipsin (m, n) noktasındaki d teğetinin denklemi

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1,$$

$$mb^2x + na^2y - a^2b^2 = 0$$

dır.



Bir noktadan bir doğruya olan uzaklık formülü kullanılarak,

$$|FS| = \frac{|mb^2c - a^2b^2|}{\sqrt{m^2b^4 + n^2a^4}} \quad (1)$$

$$|F'S'| = \frac{|-mb^2c - a^2b^2|}{\sqrt{m^2b^4 + n^2a^4}}$$

elde ederiz. Ayrıca, (m, n) noktası elips üzerinde bulunduğundan,

$$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) den $|FS| \cdot |F'S'| = b^2$ olur. (Çözenler: Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Erol Ünal, Mustafa Dönmez)

Y.142. Bir $ABCD$ kirişler dikdörtgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir E noktasından BC, CD, DA, AB doğrularına sırasıyla EP, EQ, ER, ES dikmeleri indiriliyor. $|EP| \cdot |ER| = |EQ| \cdot |ES|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. Bir ABC üçgeninde, a, b, c kenar uzunlukları; h, a kenarına ait yükseklik ve çevrel yarıçap g ise $2gh = bc$ dir. Bundan yararlanarak;

$$2g|ER| = |EA| \cdot |ED| \quad (1)$$

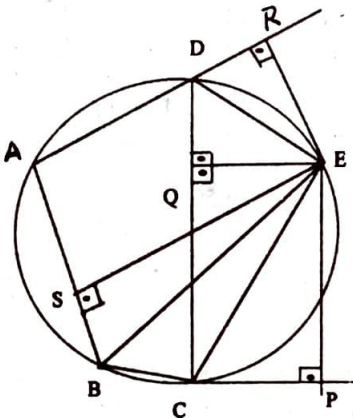
$$2g|EP| = |EB| \cdot |EC|$$

$$2g|EQ| = |ED| \cdot |EC| \quad (2)$$

$$2g|ES| = |EA| \cdot |EB|$$

(1) ve (2) eşitliklerinde ikinci tarafların çarpımları birbirine eşittir. Bu $|ER| \cdot |EP| = |EQ| \cdot |ES|$

demektir.



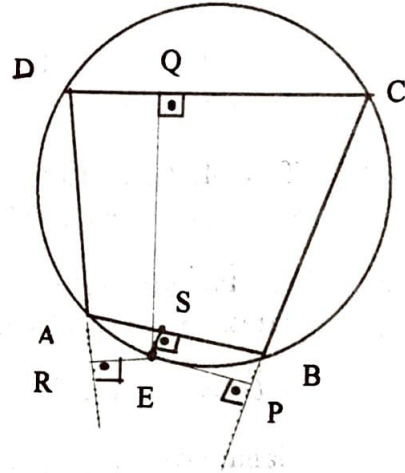
Çözüm 2. $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ADE})$ dir. Buradan $\triangle ESB \sim \triangle ERD$ ve dolayısıyla,

$$\frac{|ES|}{|ER|} = \frac{|EB|}{|ED|} \quad (1)$$

$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{EBP})$ dir. Buradan $\triangle EQD \sim \triangle EPB$ ve dolayısıyla,

$$\frac{|EQ|}{|EP|} = \frac{|ED|}{|EB|} \quad (2)$$

(1) ve (2) den $|ES| \cdot |EQ| = |ER| \cdot |EP|$ olur.



(Çözenler: Ali Akın, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Murat Aygen, Mustafa Dönmez)

Y.143. Çevrel yarıçapı R olan $A_1A_2 \dots A_n$ düzgün çokgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir P noktası için

$$\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2nR^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. P noktası, $\widehat{A_1A_n}$ (küçük) yayının bir iç noktası olmak üzere, $\widehat{PA_1}$ 'nin ölçüsü α olsun. Bu durumda,

$$\widehat{PA_2} = \alpha + \frac{2\pi}{n}, \widehat{PA_3} = \alpha + \frac{4\pi}{n}, \dots, \widehat{PA_n} = \alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

olur. R yarıçaplı bir çemberde bir $[AB]$ kirisinin uzunluğu $2R \sin \frac{1}{2} (\widehat{AB})$ olduğundan, söz konusu toplam

$$T = 4R^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \dots + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \right)$$

olur. $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \dots + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \\ = \frac{n}{2} - [\cos \alpha + \dots + \cos(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n})] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\cos \alpha + \dots + \cos(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}) = 0$$

olduğundan, $T = 4R^2(\frac{n}{2})$, $T = 2nR^2$ bulunur.

Çözüm 2. İki vektörün toplamının uzunluğunun karesi

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

formülünü kullanacağız. O noktası, düzgün çokgenin çevrel çemberinin merkezi olmak üzere,

$$P\vec{A}_1 = P\vec{O} + O\vec{A}_1$$

$$P\vec{A}_2 = P\vec{O} + O\vec{A}_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P\vec{A}_n = P\vec{O} + O\vec{A}_n$$

ve buradan da

$$|P\vec{A}_1|^2 = R^2 + R^2 + 2P\vec{O} \cdot O\vec{A}_1$$

$$|P\vec{A}_2|^2 = R^2 + R^2 + 2P\vec{O} \cdot O\vec{A}_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|P\vec{A}_n|^2 = R^2 + R^2 + 2P\vec{O} \cdot O\vec{A}_n$$

elde ederiz. Sonuncu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=1}^n |P\vec{A}_i|^2 = 2nR^2 + 2P\vec{O} \cdot (O\vec{A}_1 + O\vec{A}_2 + \dots + O\vec{A}_n) = 2nR^2 + 2P\vec{O} \cdot \vec{O} = 2nR^2$$

olur (burada $\vec{O}$ -sıfır vektörüdür).

(Çözenler: Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Murat Aygen, Mustafa Dönmez)

Y.144. (Soru dergide yanlış basılmış; doğrusu) n pozitif bir tamsayı, I ise uzunluğu $\frac{1}{n}$ olan bir açık aralık olsun. $p \in \mathbb{N}$ ve $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı I 'da olacak şekilde en çok kaç tane (p, q) ikilisi bulunabilir?

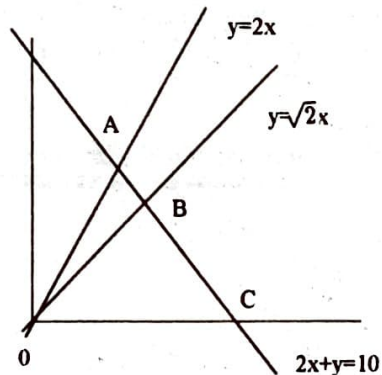
Çözüm. $p, p' \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq q \leq n$ için

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q} \right| = \frac{|p-p'|}{q} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{n}$$

olacağından, her $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p'}{q}$ sayıları I 'da olacak biçimde en çok bir (p, q) ikilisi vardır. $q = 1, 2, \dots, n$ olabileceğinden, istenen türde en çok n tane (p, q) ikilisi bulunabilir. İstenilen türde (p, q) ikililerinin tam sayısı I 'ya bağlıdır. Örneğin $I = (0, \frac{1}{n})$ için istenen tür ikili yoktur. $I = (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ aralığı için $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, n)$ ikilileri bulunur.

Y.145. Çevresi 10 birimden küçük olan rastgele bir ikizkenar üçgen çiziliyor. Bu üçgenin geniş açılı olma olasılığı nedir?

Çözüm. x, y iki pozitif gerçel sayı olsun. Kenarları x, x ve y birim olan bir ikizkenar üçgenin varlığı için gerek ve yeter koşul, üçgen eşitsizliğinden $y < 2x$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır. Bu üçgenin geniş açılı olması ise kosinüs teoreminden



$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \theta > 2x^2$$

yani $y > \sqrt{2}x$ eşitsizliğinin doğru olması ile eşdeğerdir. Bu bölgeleri, şekildeki gibi düzlemde belirleyelim.

Çevresi 10 birimden küçük ikizkenar üçgenler kümesi OAC bölgesi ile, bunlardan geniş açılı olanlar ise OAB bölgesi ile birebir eşlenmiştir. O halde aranan olasılık

$$p = \frac{\text{alan}(OAB)}{\text{alan}(OAC)} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

dir. $A = (\frac{5}{2}, 5)$, $B = (10 - 5\sqrt{2}, 10\sqrt{2} - 10)$, $C = (5, 0)$ olduğundan $p = 3 - 2\sqrt{2} \cong 0.17175 \dots$ olarak bulunur.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Murat Aygen)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Matematik Dünyası Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 07058 ANTALYA adresine,

30 Mart 1998 tarihine kadar gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik dünyasından güncel haberler. Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağını umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi
Matematik Bölümü
07058 Antalya**

adresine gönderilecektir.

Antalya Koleji



**Avrupa Okullar
Birliği Üyesi**



**Cambridge Üniversitesi
Dil Sertifikası
Açık Sınav Merkezi**

- ✓ **Özel Antalya Lisesi**
- ✓ **Özel Antalya Fen Lisesi**
- ✓ **Özel Antalya Anadolu Otelcilik ve Turizm Meslek Lisesi**
- ✓ **Özel Antalya Lisesi İlköğretim Okulu**

"Hedef Eğitilmiş İnsan"

ANTALYA KOLEJİ EĞİTİM TESİSLERİ A.Ş.

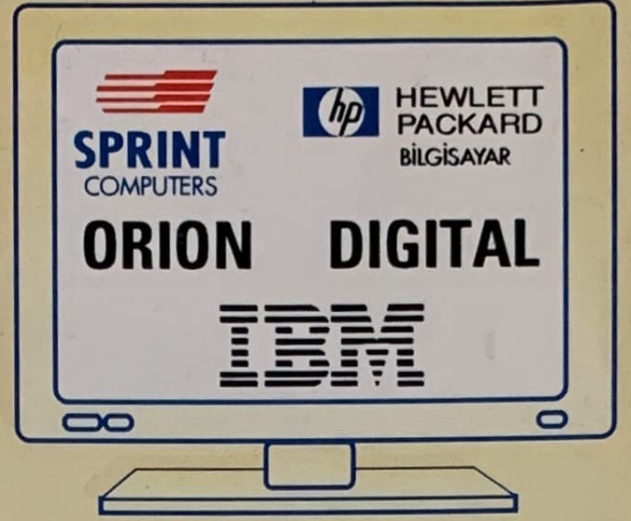
İl Jandarma Alay Komutanlığı arkası ANTALYA

Tel:(242) 334 72 00 (15 Hat) Fax: 346 31 12



AK - B İ M

AKDENİZ BİLGİ İŞLEM MERKEZİ
Turizm ve Ticaret Ltd. Şti.



Microsoft



NOVELL

AK-BİM (AKDENİZ BİLGİ İŞLEM MERKEZİ)

*11 Yıllık deneyimi, 20 kişilik teknik ekip ve kadrosuyla
en önemlisi seçkin ve geniş referansları ile hizmetinizdedir.*

Elmalı Mah. 15. Sk. Güçlü Han No:5 Kat:1/11 Tel:0.242.248 57 80 - 241 05 48 - 243 52 09 ANTALYA