

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Giriş

Üçüncü Antalya Matematik
Olimpiyadı Birinci
Seçme Sınavı
Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev

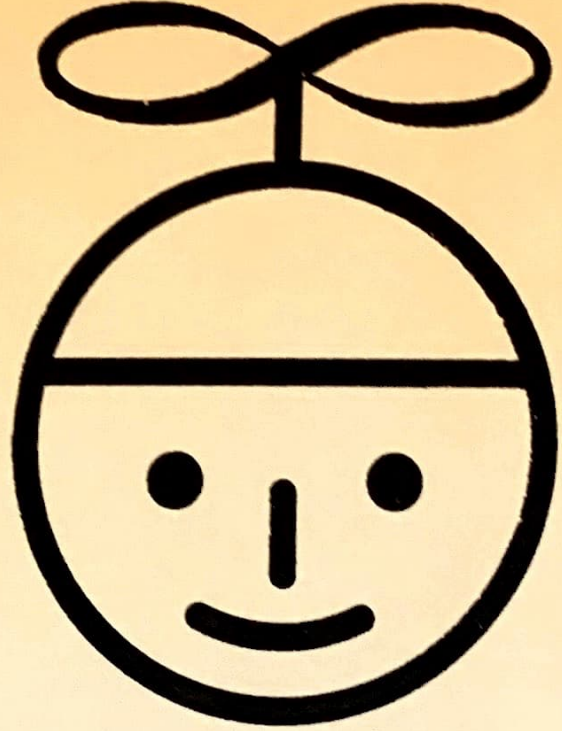
Aşkın Sayılar Üzerine
Aytek Erdil

Gezegenlerin Hareketi (I)
Turgay Kaptanoğlu

38. Uluslararası
Matematik Olimpiyadı
Halil İbrahim Karakaş

Hindistan Cevizleri...
ve Diyofant Denklemleri
Doğan Çoker

Problemler ve Çözümleri



GİRİŞ

Güneyin sıcak ve güzel kenti Antalya'dan **Matematik Dünyası**'nın 7. cildinin 2. sayısı sizlerle yeniden merhaba diyoruz. Bu sayımızda bolca olimpiyat haberi ve olimpiyat problemleri bulacaksınız. 38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı (IMO-1997) 'nın soruları ve çözümleri, 3. Antalya Matematik Olimpiyadının birinci aşama sorularının çoğunu çözümleriyle birlikte zevkle okuyacağınıza inanıyoruz.

Matematik Dünyası 'nın abone sayısının şimdilik istenen boyutlarda olmadığı bir gerçektir. Tanıtım ve dağıtım olanaklarımız çok kısıtlıdır. Sevgili okurlarımızın, derginin tanıtımı ve yeni aboneler sağlanması konusunda gayret ve desteklerini bekliyoruz. Ülkemizin, türünde tek dergisi olan **Matematik Dünyası** 'nın gelişmesi ve yaşaması için ülkemizin tüm matematikseverlerinin sürekli desteği gerekmektedir.

Bir sonraki sayıda buluşmak üzere Apollonius 'un anavatanı **Antalya** 'dan bol güneşli ve bol matematikli günler dileğiyle...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Giriş	1
Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadı Birinci Seçme Sınavı Halil İ. Karakaş - İlham Aliyev	2
Aşkın Sayılar Üzerine Aytek Erdil	6
Gezegenlerin Hareketi (I) Turgay Kaptanoğlu	11
38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı Halil İbrahim Karakaş	18
Hindistan Cevizleri... ve Diyofant Denklemleri Doğan Çoker	25
Problemler ve Çözümleri	29

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Ünal Ufuktepe, Güvenç Arslan
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1998) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 2.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 1.750.000 TL. (Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 111.91.79 no'lu Prof. Dr. Timur Karaçay hesabına ya da İş Bankası Antalya Şubesi 6200.30000.2192647 no'lu Prof. Dr. Timur Karaçay hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@ufuk.lab.akdeniz.edu.tr

ÜÇÜNCÜ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş - İlham Aliyev

İlki 1996 yılında yapılan Antalya Matematik Olimpiyadının üçüncüsünün birinci seçme sınavı, Matematik Dünyasının bundan önceki sayısında (Cilt 7, Sayı 1) duyurulduğu gibi, 7 Mart 1998 Cumartesi günü yapıldı.



Akdeniz Üniversitesi Sağlık Kültür ve Spor Dairesi - Matematik Kulübü tarafından düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatları, Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğü, Antalya Eğitim ve Araştırma Vakfı ve Akdeniz Üniversitesi Sosyal Dayanışma Derneği tarafından desteklenmekte; Lise III öğrencilerinden dereceye girenlere bu kurumlarca öğrenim bursları verilmekte, Lise I-II öğrencilerinden dereceye girenlere de çeşitli ödüller verilmektedir. Yediyüze yakın yarışmacının katıldığı seçme sınavı Lise I-II ve Lise III adıyla iki kategoride yapıldı. Lise I-II ve Lise III öğrencilerine ayrı testler verildi, ancak testlerin 8'er sorusu ortak idi. Sınava, çok az olmakla beraber bazı liselerin hazırlık sınıfından da öğrenciler katıldı. Lise I, Lise II ve Lise III öğrencilerinden birinci seçme sınavında başarılı olanlar 25 Nisan 1998 Cumartesi günü yapılacak ikinci sınava çağrılacaklar. Hazırlık sınıfından katılan öğrenciler başarılı bulundukları takdirde ikinci sınavda Lise I öğrencileri ile birlikte yarışacaklar.

Birinci Seçme Sınavında sorulan sorulardan bazılarını çözümleri ile birlikte sunuyoruz.

Lise I-II, Soru 1.

$T = 1! + 2! + 3! + \dots + 1997! + 1998!$ toplamının son iki basamağındaki rakamların toplamı kaçtır?

- A) 13 B) 9 C) 6 D) 4 E) Hiçbiri

Yanıt. $10!$ 'den sonra gelen terimlerin son iki basamağı 00 olduğundan sadece

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!$$

toplamının son iki basamağına bakmak yeter, ki bu da

$$1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80$$

toplamının son iki basamağı, yani 13 ile aynıdır. Yanıt $1 + 3 = 4$ tür, D seçeneği.

Lise I-II, Soru 2.

$A = 2^{1998}$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılışında en baştaki rakam silinip en sona yazılarak B sayısı elde ediliyor. $|A - B|$ 'nin rakamları toplamına a , a 'nın rakamları toplamına b , b 'nin rakamları toplamına c denirse c 'nin rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3 B) 18 C) 9 D) 19 E) $1 + 9 + 9 + 8$

Yanıt. $|A - B|$ 'nin rakamları toplamı 9 un bir katı olacaktır. c sayısının bir basamaklı olacağını görmek zor değildir. Dolayısıyla, doğru yanıt C seçeneğindeki 9 dur.

Lise I-II, Soru 6.

$[a]$ ile a reel sayısının tam kısmı gösterilmek üzere $x - [x] = [(0,5)x - 2]$ denkleminin reel çözümlerinin sayısı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Sonsuz

(Bu soru Lise III 'lerin 3 no'lu sorusudur.)

Yanıt. Denkleme dikkatle bakılırsa $x = [x] + [(0,5)x - 2]$ sayısının tamsayı olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$0 = x - [x] = [(0,5)x - 2]$$

ve buradan

$$0 \leq (0,5)x - 2 < 1,$$

$$2 \leq (0,5)x \leq 3,$$

$$4 \leq x < 6,$$

$$x \in \{4, 5\}$$

olduğu görülür. Doğru yanıt D seçeneğindeki 2'dir.

Lise I-II, Soru 8.

Bir dizinin ilk terimi 1'dir ve her $n \geq 2$ için ilk n teriminin çarpımı n^2 'dir. Dizinin altıncı ve onbirinci terimlerinin toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) $\frac{50}{27}$ D) $\frac{53}{20}$ E) $\frac{121}{36}$

Yanıt. Dizinin n -inci terimi a_n olmak üzere,

$$a_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

dir. O halde,

$$a_6 + a_{11} = \frac{6^2}{5^2} + \frac{11^2}{10^2} = \frac{53}{20}$$

ve doğru yanıt D seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 10.

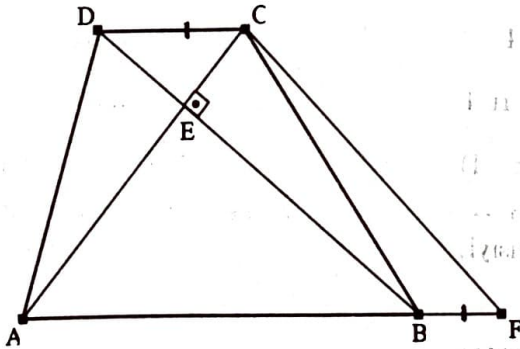
Bir $ABCD$ yamuğunun köşegenleri birbirine dik olmak üzere, uzunlukları 5 ve 12'dir. Yamuğun orta tabanının uzunluğu kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 6,5 D) 8,5 E) 8

(Bu soru Lise III lerin 8 no'lu sorusudur.)

Yanıt. $[AB]$ 'yi sağa doğru $|DC|$ kadar uzatarak

F noktasını bulalım. Bu takdirde, $DBFC$ bir paralelkenar olur. Pisagor Teoremi ile,



$$\begin{aligned} |AF|^2 &= |AC|^2 + |CF|^2 \\ &= |AC|^2 + |DB|^2 \\ &= 5^2 + 12^2 = 169. \end{aligned}$$

Böylece, $|AF| = |AB| + |BF| = 13$ ve yamuğun orta tabanı

$$\frac{|AB| + |DC|}{2} = \frac{|AB| + |BF|}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

olur. Doğru yanıt C seçeneğindeki 6,5'tir.

Lise I-II, Soru 11.

$x^2 + ax + 3a = 0$ denkleminin kökleri tamsayı ise a reel sayısının alabileceği değerler sayısı kaçtır?

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 1

Yanıt. Denklemin kökleri toplamı $-a$ ya eşit olduğundan, a bir tamsayı olmak zorundadır. Denklemden

$$a = -\frac{x^2}{x+3} = 3 - x - \frac{9}{x+3}$$

olur ve buradan da $(x+3)$ 'ün alabileceği değerlerin $\mp 1, \mp 3, \mp 9$ olduğu görülür. Basit hesaplamalardan sonra a için dört ayrı değer bulunur: $-4, 0, 12, 16$. Doğru yanıt D seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 12.

$x^2 + y^2 = x^3$ denklemini sağlayan (x, y) doğal sayı ikililerin sayısı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) Sonsuz E) Hiçbiri

(Bu soru Lise III 'lerin 10 no'lu sorusudur.)

Yanıt. $y^2 = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ eşitliğinde $x-1 = k^2$, dolayısıyla, $x = k^2 + 1$ olursa, $y = k(k^2 + 1)$ ($k \in \mathbb{N}$) olur. Yani denklemin doğal sayılarda sonsuz çoklukta çözümü vardır. Doğru yanıt D seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 14.

$101.102.103 \cdots 300 = 7^k \cdot n$; $k, n \in \mathbb{N}$ eşitliğini sağlayan en büyük k sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 26 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

(Bu soru Lise III 'lerin 12 no'lu sorusudur ve ne yazık ki, Lise III soru kağıdında doğru yanıt olan 32 yerine 33 verilmiş, bu nedenle bu soruya Lise III 'lerin tümünün doğru yanıt verdiği kabul edilmiştir.)

Yanıt. Her m doğal sayısı için $m = 7^r \cdot n$ eşitliğini sağlayan en büyük r sayısı

$$r = \left\lfloor \frac{m}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{7^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{7^t} \right\rfloor + \dots$$

toplamı hesaplanarak bulunur. Bu yolla $300! = 7^r \cdot n$ eşitliğini sağlayan en büyük r sayısı 48; $100! = 7^r \cdot n$ eşitliğini sağlayan en büyük r sayısı da 16'dır. Buradan, istenilen k sayısının 32 olduğu görülür. Doğru yanıt **E** seçeneğindeki 32'dir.

Lise III, Soru 7.

$2x^2 - 3x = 2x \cdot \sqrt{x^2 - 3x} + 1$ denkleminin kaç reel çözümü vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz

Yanıt. Verilen denklemi

$$x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 3x} + (x^2 - 3x) = 1,$$

$$(x - \sqrt{x^2 - 3x})^2 = 1$$

biçiminde yazarsak, $x - \sqrt{x^2 - 3x} = \pm 1$ elde ederiz. $x - \sqrt{x^2 - 3x} = 1$ denkleminin hiç reel çözümü yok; $x^2 - \sqrt{x^2 - 3x} = -1$ denkleminin ise tek reel çözümü vardır: $x = -\frac{1}{5}$. Doğru yanıt **B** seçeneğindeki 1'dir.

Lise III, Soru 9.

Her üçü de sıfırdan farklı $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ sayıları bir geometrik dizi oluşturmaktadır. Dizi çarpanı q ise, q aşağıdakilerden hangisini sağlar?

- A) $q^4 + q^2 - 1 = 0$ B) $q^4 - q^2 + 1 = 0$
C) $q^2 - q - 1 = 0$ D) $q^2 - q + 1 = 0$
E) $q^2 + q + 1 = 0$

Yanıt. Çok zor gibi görünen bu sorunun hilesi verilen terimlerin toplamının sıfır olmasıdır:

$$x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$$

Buradan uygun bir $a \neq 0$ için $a + aq + aq^2 = 0$, ve böylece $q^2 + q + 1 = 0$ olduğu görülür. Doğru yanıt **E**'dir.

Lise III, Soru 17.

$P(x) = (1+x+x^2+\dots+x^{99}+x^{100})^3$ polinomunda

parantezler açıldıktan sonra, x^{111} in katsayısı ne olacaktır?

- A) 6432 B) 6328 C) 6130 D) 5640 E) 5600

(Bu soru Lise I-II'lerin 15 no'lu sorusudur ve ne yazık ki, her iki kategoride de doğru seçenek olması gereken **C** seçeneği eksik yazıldığından bu soruyu tüm yarışmacıların doğru yanıtladığı kabul edilmiştir.)

Yanıt. $P(x)$ için verilen ifade

$$P(x) = (1+x+\dots+x^{100})(1+x+\dots+x^{100})(1+x+\dots+x^{100})$$

çarpımı olarak düşünülürse, bu çarpımın açılmasıyla elde edilen

$$x^{p+q+r}, 0 \leq p, q, r \leq 100,$$

terimlerinden $p+q+r = 111$ olanların sayısını belirlememiz gerekmektedir. p, q ve r , 111'e kadar değerler alabilseydi, bu sayı

$$\binom{111+3-1}{2} = \frac{111 \cdot 112}{2} = 6328$$

olurdu. Ancak p, q ve r en çok 100 değerini alabilirler, bu nedenle bu sayıdan

$$3 \cdot (1+2+\dots+10+11) = 198$$

sayısını çıkarmalıyız. (Bunun nedenini düşününüz!) Böylece, doğru yanıt 6130'dur; **C** seçeneği.

Lise III, Soru 18.

$N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere $f : N_0 \times N_0 \rightarrow N_0$ fonksiyonu her $(x, y) \in N_0 \times N_0$ için

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1 \\ f(x+1, 0) &= f(x, 1) \\ f(x+1, y+1) &= f(x, f(x+1, y)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1, 1998)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1998 B) 1999 C) 2000 D) 2002 E) Hiçbiri

Yanıt. $f(1, 0) = f(0, 1) = 2$;

$$f(1, 1) = f(0, f(1, 0)) = f(0, 2) = 3;$$

$$f(1, 2) = f(0, f(1, 1)) = f(0, 3) = 4.$$

Tümevarımla, $f(1, x) = x+2$ olduğu görülür. Demek ki, $f(1, 1998) = 2000$ 'dir. Doğru yanıt C seçeneğidir.

Lise III, Soru 19.

İki çocuk birlikte 10 menekşe, 15 lale, 14 karanfil topladı. Her çocuğa, her çiçekten en az 3'er tane düşmek üzere, tüm çiçekler kaç farklı şekilde bölüştürülebilir?

- A) 2640 B) 1998 C) 900 D) 450 E) 120

(Bu soru Lise I-II 'lerin 20 no'lu sorusudur.)

Yanıt. Çocuklar her çiçekten 3'er tane aldıktan sonra, geriye $10 - 6 = 4$ menekşe, $15 - 6 = 9$ lale, $14 - 6 = 8$ karanfil kalır. Bu çiçekler iki çocuk arasında

$$(4 + 1)(9 + 1)(8 + 1) = 450$$

farklı biçimde dağıtılabilir. Doğru yanıt D 'dir.

Lise III, Soru 20.

Reel sayıların bir geometrik dizisinde ilk 2 terimin toplamı 7 ve ilk 6 terimin toplamı da 91 'dir. İlk 4 terimin toplamı kaçtır?

- A) 25 B) 28 C) 32 D) 35 E) 49

Yanıt. Verilere göre

$$\begin{cases} a + aq = 7 \Rightarrow a(1 + q) = 7, \\ a + aq + \dots + aq^5 = 91 \Rightarrow a \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 91 \end{cases}$$

Taraf tarafa bölersek,

$$\frac{(q^2 - 1)(q^4 + q^2 + 1)}{q^2 - 1} = \frac{91}{7} = 13$$

$$\Rightarrow q^4 + q^2 + 1 = 13 \Rightarrow q^2 = 3$$

bulunur. Böylece, ilk 4 terimin toplamı,

$$a + aq + aq^2 + aq^3 = (a + aq)(1 + q^2) = 7 \cdot 4 = 28$$

olarak bulunur. Doğru yanıt B 'dir.

Lise I-II kategorisinde sorulan ve olimpiyadın

en basit sorusu olan 16 no'lu sorunun cevabı seçenekler arasında verilmediğinden bu sorunun

da tüm yarışmacılar tarafından doğru çözüldüğü kabul edilmiştir. (Sözkonusu soruyu hatırlatalım: 0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak yazılabilen tüm dört basamaklı çift sayıların en baştaki rakamlarının toplamı nedir?) Böylece, yukarıda belirtilenlerle birlikte, Lise I-II kategorisinde 15 ve 16 no'lu sorular, Lise III kategorisinde ise 12 ve 17 no'lu soruların her yarışmacı tarafından doğru çözüldüğü kabul edilmiştir. Antalya Matematik Olimpiyadı jürisinin, bu satırların yazarları dahil, daha dikkatli olmasını ve gelecek olimpiyatlarda hatasız sorular üretmesini, Antalya Matematik Olimpiyatlarının süreklilik kazanmasını diliyoruz.

AŞKIN SAYILAR ÜZERİNE

Aytek Erdil

Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü, Bilkent/ANKARA

Bu yazıda transandant ya da üstün diye de anılan aşkın sayılarla ilgileneceğiz. Aşkın sayılardan söz etmeye başlamadan önce, ilerde kullanacağımız kimi tanımları verelim:

Tanım. K kümesi için, bir $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow K$ örten fonksiyonu varsa, K sayılabilir bir kümedir denir.

Örnek 1. $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ fonsiyonunu

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \\ f(n) &= -\frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlarsak f örten bir fonksiyon olur, ve $\mathbb{Z}$ sayılabilir bir kümedir.

Örnek 2. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ da sayılabilir bir kümedir. $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$ örten fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{m}{k}, & n = 2^m 3^k \text{ biçimindeyse } (k > 0) \\ f(n) &= -\frac{m}{k}, & n = 5^m 7^k \text{ biçimindeyse } (k > 0) \\ f(n) &= 0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned}$$

Örnek 3. Acaba $[0, 1]$ aralığındaki tüm gerçel sayıların kümesi sayılabilir midir? Bu sorunun yanıtı 'Hayır!' dir. $[0, 1]$ 'in sayılabilir olmadığını, olmayana ergi yöntemiyle göstereceğiz:

$[0, 1]$ 'in sayılabilir olduğunu varsayalım. Tanım gereği, bir $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow [0, 1]$ örten fonksiyonu bulunmalıdır. Şimdi, $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ sayılarının ondalık düzendeki yazılımlarını listeleyelim:

$$f(1) = 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3} \dots a_{1,j} \dots$$

$$f(2) = 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3} \dots a_{2,j} \dots$$

⋮

$$f(i) = 0.a_{i,1}a_{i,2}a_{i,3} \dots a_{i,j} \dots$$

⋮

Yazılıştan da anlaşılacağı üzere $a_{i,j}, f(i)$ nin 0 'dan sonraki j 'yinci basamağını göstermektedir. f örten olduğundan, bu listede $[0, 1]$ aralığındaki tüm noktalar bulunmalıdır. b sayısını şöyle tanımlayalım:

Her $i \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} b_i &= 8, & a_{i,i} \neq 8 \text{ ise} \\ b_i &= 7, & a_{i,i} = 8 \text{ ise} \\ b &= 0, b_1 b_2 \dots b_i \dots \end{aligned}$$

Bu tanıma göre b 'nin 0 dan sonraki i -inci basamağı, $f(i)$ 'nin i -inci basamağından farklıdır, bu yüzden b , listedeki her sayıdan farklıdır ve aynı zamanda $[0, 1]$ aralığındadır. Bu da, $[0, 1]$ 'deki her gerçel sayının listede bulunduğu varsayımıyla çelişir. Böylece $[0, 1]$ 'in sayılabilir olmadığını kanıtladık.

Tanım. Sayılabilir olmayan kümlere **sayılamaz** denir.

Teorem 1. Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimi sayılabilirdir.

Kanıt. Sayılabilir birleşimle söylenmek istenen, birleşimi alınan kümelerin oluşturduğu kümenin sayılabilir olmasıdır, yani birleşimi alınan kümeler A_α 'lar ise, $S = \{A_\alpha\}$ kümesinin sayılabilir olmasıdır. S sayılabilir olduğu için örten bir $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow S$ fonksiyonu vardır. $f(i) = A_i$ olacak biçimde A_α 'ları adlandıralım. f örten olduğundan $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ yazabiliriz. Bu yazılıştaki kimi $i \neq j$ için $A_i = A_j$ olabilir.

Her $j \in \mathbb{Z}^+$ için bir örten $f_j: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A_j$ fonksiyonu vardır, çünkü A_j 'lerin her biri sayılabilirdi. $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} A_j$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} m, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ise,} \quad & g(2^m 3^n) = f_m(n), \\ k, 2^m 3^n \text{ biçiminde değilse} \quad & f(k) = a; \text{ öyle ki } a, A_1 \text{ 'in herhangi bir elemanı.} \end{aligned}$$

Bu şekilde tanımladığımız g fonksiyonunun örten olduğu açıktır, bu yüzden $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} A_j$, başka bir deyişle A_α 'ların birleşimi de sayılabilirdir. $\square$

Tanım. Verilen sonlu sayıda kümenin kartezyen çarpımı şöyle tanımlanır:

$$\prod_{i=1}^m K_i := K_1 \times K_2 \times \dots \times K_m := \{(a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_i \in K_i\}$$

Teorem 2. Sayılabilir kümelerin sonlu çarpımı sayılabilirdir.

Kanıt. İlk önce iki sayılabilir kümenin çarpımının sayılabilir olduğunu kanıtlayalım:

K_1 ve K_2 sayılabilirse, örten $f_1: \mathbb{Z}^+ \rightarrow K_1$ ve $f_2: \mathbb{Z}^+ \rightarrow K_2$ fonksiyonları vardır. $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow K_1 \times K_2$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} f(2^m 3^n) &= (f_1(m), f_2(n)), \\ k, 2^m 3^n \text{ biçiminde değilse,} \quad & f(k) = (f_1(1), f_2(1)). \end{aligned}$$

f fonksiyonunun örten olduğu açıkça görülür ve $K_1 \times K_2$ sayılabilirdir.

Şimdi, teoremi, kümelerin sayısı üzerine tümevarım yaparak kanıtlayabiliriz. $m = 1$ tane küme için teorem doğrudur, $m = k (\geq 1)$ tane küme için savın doğru olduğunu varsayalım. Verilen $k+1$ küme $K_1, \dots, K_k, K_{k+1}$ olsun. Tümevarım varsayımınızdan $K_1 \times \dots \times K_k$ kümesinin sayılabilir olduğunu biliyoruz, bu kümeye K' diyelim. O zaman $K_1 \times \dots \times K_k \times K_{k+1} = K' \times K_{k+1}$ olur. Sayılabilir iki kümenin çarpımının sayılabilir olduğunu kanıtlamıştık. Bu yüzden $K' \times K_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} K_i$ de sayılabilirdir; böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Tanım. Bir sayı, rasyonel katsayılı bir polinomun köküyse, o sayıya **cebirselsel sayı** denir. Bir cebirselsel sayının derecesi, o sayının kökü olduğu en küçük dereceli, rasyonel katsayılı polinomun derecesi olarak tanımlanır.

Örnek. $\sqrt{5}$, ikinci dereceden bir cebirselsel sayıdır, çünkü $\sqrt{5}$ 'in kökü olduğu en küçük dereceli, rasyonel katsayılı polinomlar $(x^2 - 5)$ 'in rasyonel katlarıdır.

Rasyonel sayılarsa birinci dereceden cebirselsel sayılardır.

Acaba cebirselsel olmayan sayılar var mı? Bu sorunun yanıtını vermek için önce bir teoremi kanıtlayalım:

Teorem 3. Cebirselsel sayılar kümesi sayılabilirdir.

Kanıt. $\mathcal{A}$ ile cebirselsel sayılar kümesini, $\mathcal{A}_n$ ile de n -inci dereceden cebirselsel sayılar kümesini gösterirsek, $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ olur. Yani, $\mathcal{A}, \mathcal{A}_i$ 'lerin sayılabilir birleşimidir. n -inci dereceden rasyonel katsayılı polinomlarla, her bileşeni rasyonel olan sıralı $(n+1)$ -liler arasında doğal bir birebir eşleme vardır. $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polinomuyla $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sıralı $(n+1)$ -lisini eşliyoruz. $\{(a_0, a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$ kümesi, $\prod_{i=0}^n \mathbb{Q}$ şeklinde de belirtilebilir, ve bu küme sayılabilir kümelerin (her biri rasyonel sayılar kümesi) sonlu çarpımı olduğu için sayılabilir (Teorem 2'den). Demek ki n -inci dereceden, rasyonel katsayılı polinomlar kümesi sayılabilirdir. n -inci dereceden bir polinomun en çok n tane değişik kökü olabilir. Buna göre n -inci dereceden ve rasyonel katsayılı polinomların köklerinin oluşturduğu küme n tane sayılabilir kümenin birleşimidir, dolayısıyla sayılabilirdir. Bu küme $\mathcal{A}_n$ olduğuna göre, $\mathcal{A}_n$ 'nin sayılabilir olduğunu kanıtlamış olduk. $\mathcal{A}$, yani cebirselsel sayılar kümesi, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathcal{A}_n$ 'lerin sayılabilir birleşimi olduğu için, sayılabilir (Teorem 1'den). $\square$

Sonuç. Cebirselsel olmayan sayılar vardır.

Kanıt. $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} = \mathcal{A}'$ diyelim. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}'$ kümesi de sayılabilirdir. $\mathbb{R}$ kümesi $[0, 1]$ kapalı aralığını içerdiği ve $[0, 1]$ sayılamaz olduğu için $\mathbb{R}$ de sayılamaz bir kümedir. Demek ki $\mathcal{A}' \subset \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A}' \neq \mathbb{R}$ 'dir ve $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}'$ kümesi boş küme değildir. Bu küme cebirselsel olmayan gerçel sayıların kümesidir. $\square$

Burada kanıtını vermeyeceğimiz, ama bir sonraki teoremin kanıtında kullanacağımız bir teoremi anımsatalım:

Teorem [Ortalama Değer Teoremi]. f , $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ vardır.

Teorem [Liouville]. α , derecesi n ($n > 1$) olan bir cebirselsel sayıysa, öyle bir $c = c(\alpha) > 0$ vardır ki, her p/q , ($q > 0$) rasyonel sayısı için $|\alpha - p/q| > c/q^n$ 'dir.

Kanıt. α nın kökü olduğu, rasyonel katsayılı en küçük dereceli polinomlardan biri P olsun. Polinomlar her noktada türevlenebilir olduğundan P 'nin türevi olan P' tanımlıdır. Ortalama Değer Teoreminden, her $p/q \in \mathbb{Q}$ ($q > 0$) için öyle bir ξ vardır ki $P(\alpha) - P(p/q) = (\alpha - p/q)P'(\xi)$ 'dir ve ξ , α ile p/q 'nin arasındadır.

p/q , P 'nin kökü değildir, öyle olsaydı, $xq - p$, P 'yi bölerdi ve $Q = \frac{P}{xq-p}$ derecesi P 'nin derecesinden az olan rasyonel katsayılı bir polinom olurdu. α 'nın derecesi 1 'den büyük olduğu için

α rasyonel olamaz, dolayısıyla α , p/q 'ya eşit değildir. Bu yüzden α aynı zamanda Q polinomunun da köküdür. Buysa P 'nin en küçük dereceli olmasıyla çelişir.

P rasyonel katsayılı bir polinom olduğundan $aP = R$ tamsayı katsayılı bir polinom olacak biçimde bir $a > 0$ tamsayısı vardır. $R(\alpha) = aP(\alpha) = 0$, $R(p/q) = aP(p/q) \neq 0$ 'dır.

R 'nin derecesi n olduğundan, $q^n R(p/q)$, 0 'dan farklı bir tamsayıdır. Dolayısıyla $|q^n R(p/q)| \geq 1$, yani $|R(p/q)| \geq \frac{1}{q^n}$ 'dir.

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |P'(\xi)| = |P(\alpha) - P(p/q)| = |P(p/q)| = \frac{|R(p/q)|}{a} \geq \frac{1}{a \cdot q^n}$$

'dir.

$|\alpha - p/q| \geq 1$ ise $c(\alpha) = 1/2$ seçeriz ve teorem sağlanır. $|\alpha - p/q| < 1$ ise, ξ , α ile p/q arasında olduğundan $|\xi - \alpha| < 1$ dir. Buradan $|\xi| - |\alpha| \leq |\xi - \alpha| < 1$ ve $|\xi| < 1 + |\alpha|$ elde edilir. $|\xi|$ üstten sınırlı olduğu için $|P'(\xi)|$ de üstten bir $s > 0$ sayısı ile sınırlıdır. $c(\alpha) = 1/s$ seçersek

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{P(p/q)}{P'(\xi)} \right| > \frac{1}{s} |P(p/q)| \geq \frac{1}{asq^n} = \frac{c}{q^n}$$

buluruz ve kanıt tamamlanır. $\square$

Bu teoremden önemli olan nokta, c 'nin sadece α 'ya bağlı olmasıdır. Bu teoremin yardımıyla aşkın sayılar kurmak kolaylaşıyor:

Sav. $\xi = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots$ aşkın bir sayıdır.

Kanıt. ξ 'nin aşkın olmadığını, yani cebirsel olduğunu varsayalım. ξ 'nin derecesi k olsun. Liouville Teoreminden, öyle bir $c > 0$ vardır ki, her p/q rasyonel sayısı için $|\xi - p/q| > c/q^k$ 'dır. $n!(k-n-1) < \log_{10} 9c - 1$ olacak biçimde bir $n > 10$ tamsayısı bulabiliriz. Buradan $-(n+1)! < -k \cdot n! + \log_{10} 9c - \log_{10} 10$ buluruz. Buna göre

$$10^{-(n+1)!} < 10^{-k \cdot n!} \frac{9c}{10} \quad \text{ve} \quad 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9} < \frac{c}{10^{k \cdot n!}} \quad (*)$$

buluruz. p/q rasyonel sayısını $10^{-1!} + \dots + 10^{-n!}$ olarak tanımlarsak, $q = 10^{n!}$ 'dir.

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| = 10^{-(n+1)!} + 10^{-(n+2)!} + \dots < 10^{-(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) \leq 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9}$$

'dur. Liouville Teoremine göre $|\xi - p/q| > c/q^k$ olduğundan

$$\frac{c}{10^{k \cdot n!}} = \frac{c}{q^k} < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9} \quad \text{ve dolayısıyla} \quad \frac{c}{10^{k \cdot n!}} < 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9} \quad \text{bulunur.}$$

Buysa (*) 'da bulduğumuzun tam tersidir ve çelişkiye ulaşılmış olduk; demek ki ξ cebirsel olamaz, yani ξ aşkın bir sayıdır. $\square$

Aşkın Sayıların Tarihinden

Matematiğin en ünlü sayılarından e ve π de aşkındır. e 'nin aşkınlığı 1873'te Hermite tarafından kanıtlanmış, π 'nin aşkınlığıysa 1882'de Lindemann tarafından açıklanmış. π 'nin cebirsel olmadığını göstermek, insanlığın yanıtını yüzyıllardır aradığı bir soruyu da açıklığa kavuşturdu. Bu soru, alanı,

verilen bir dairenin alanına eşit olan kareyi cetvel ve pergelle çizme problemi. π 'nin aşkın olmasının önemli sonuçlarından biri, $\sqrt{\pi}$ oranının cetvel ve pergelle çizilmesinin olanaksız olduğuydu, yani sadece cetvel ve pergel kullanarak, alanı verilen bir dairenin alanına eşit olan kare çizilemezdi.

1934'te açıklanan Gelfond-Schneider Teoremi, a ve b cebirsel, a , 0 ve 1 'den farklı ve b rasyonel değilse, a^b 'nin aşkın olduğunu söylüyordu. Bu teoremden $2^{\sqrt{2}}$ ve $\sqrt{7}^{\sqrt{3}}$ 'ün aşkın olduğu kolayca görülüyor. Aslında elimizde bir aşkın sayı varken, bir çok yeni aşkın sayı bulabiliriz, çünkü ξ aşkınsa, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ξ^n de aşkın bir sayıdır. Öyle olmasaydı ξ^n 'nin kökü olduğu rasyonel katsayılı polinom P olmak üzere, $Q(x) = P(x^n)$ alırsak, Q da rasyonel katsayılı bir polinom olur ve $Q(\xi) = P(\xi^n) = 0$ bulunur, bu da ξ 'nin aşkın olmasıyla çelişir.

Gelfond-Schneider Teoreminin yardımıyla e^π 'nin aşkın olduğu kanıtlanabilir: $e^{i\pi} = -1$ olduğundan $e^\pi = (-1)^{-i}$ 'dir. $-i, x^2 + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olduğundan cebirseldir. -1 de cebirseldir ve 0 ve 1 'den farklıdır. $-i$ rasyonel olmadığından, Gelfond-Schneider Teoreminden $e^\pi = (-1)^{-i}$ 'nin aşkın olduğunu buluruz.

e^e, π^π ya da π^e 'nin aşkın olup olmadığıysa hâlâ bilinmiyor.

Meraklılara

Aşkın sayılara ilişkin en önemli kaynak Alan Baker'ın **Transcendental Number Theory** adlı kitabı. Bu kitap oldukça zor okunan bir kitap, ama daha okunaklı kitaplar da var. Shidlovskii'nin **Transcendental Numbers** adlı kitabı bunlardan biri. Aşkın sayılar üzerine yazılmış kitaplar olmasa da Ian Stewart'ın **Galois Theory** ve A. Jones, S. A. Morris, K. R. Pearson'ın **Abstract Algebra and Famous Impossibilities** adlı kitapları e ve π 'nin aşkın olduğunun kanıtlarını içeriyor.

KAYNAKÇA

- [1] A. Baker, *A concise introduction to the theory of numbers*, Cambridge University Press, 1984.
- [2] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1975.

GEZEĞENLERİN HAREKETİ (I)

H. Turgay Kaptanoğlu

ODTÜ, Matematik Bölümü, ANKARA

Yukarıdaki başlık, yazının bir fizik ya da astronomi dergisinde yayımlanması gerektiğini düşündürülebilir. Yazının temel eksenini oluşturan Kepler kanunları ile Newton'ın kütle çekim kanunu kendi başlarına astronomi ve fiziğin konularıdır da. Bu yazıda inceleyeceğimiz bu iki kanun sistemi arasındaki ilişkiler ise tamamen matematik metotlarıyla olacak. Bu da matematiğin diğer bilimler için ne kadar vazgeçilmez olduğunu bir daha gözler önüne serecek.

A. Tarih

Tarih öncesi zamanlardan beri insanlar güneşin, ayın ve gökte sabit olmayan yıldızlar gibi görünen gezegenlerin hareketlerini incelediler. Mezopotamya ve Mısır uygarlıklarının yaptığı ayrıntılı gözlemler eski Yunan ve Roma çağlarında geliştirildi ve gezegenlerin hareketini tarif eden teoriler ortaya atıldı. İlk teorilerde hep dünya merkezdeydi; güneş, ay ve gezegenler onun etrafında bir yörüngede dönerlerdi, çünkü insanın evrenin merkezinde olması gerektiğine inanılıyordu. En mükemmel eğri o çağlarda bir çember olarak düşünülüyordu, halbuki gezegenlerin yörüngelerinin dünyadan bakıldığında çember olmadığı apaçıktı. O zaman güneş sistemindeki cisimlerin dünyanın çevresinde merkezleri sabit çemberler üzerinde dolanan daha küçük çemberlerden (*dış çemberler*) oluşan yörüngelerde döndükleri varsayıldı. Bu teori İskenderiyeli Batlamyus (Claudius Ptolemy) (100(?)–168) tarafından ay tutulmalarını bir-iki saat farkla tahmin edebilecek derecede geliştirildi. Halbuki yüzyıllar önce eski Yunanlı Aristarhus (İ.Ö. 310–230) dünyanın ve gezegenlerin güneşin, ayın da dünyanın çevresinde döndüğünü, yıldızların görünen hareketinin dünyanın kendi eksenini etrafında dönmesi nedeniyle olduğunu söylemişti. Ancak bu görüşler yanlış temellere dayanan Aristo fiziğiyle çeliştiğinden rağbet görmemişti. Aristarhus, dünya-güneş uzaklığının dünya-ay uzaklığına oranını da ilk hesaplayan kişiydi. Buna

rağmen dünyanın evrenin merkezi olduğu inancı 15. yüzyıla kadar yaygın olarak devam etti.

Polonyalı Kopernik'e (Nicholas Copernicus) (1473–1543) gelinceye dek, güneş, ay ve o zamanlar bilinen beş gezegenin hareketlerini o zamanlar elde edilebilen hassaslıkla tarif etmek için gereken çember sayısı 77'ye yükselmmişti. Kopernik, dünya merkezli sistemin doğruluğu konusunda şüpheye düşüp güneş merkezli bir sistem ve gene dış çemberlerden oluşan yörüngeler tasarladı; bu sefer 34 çember yetmişti. Bu sadeleştirme onu güneşin sistemin merkezi olduğuna iyice inandırdı. Üstelik güneşe dünyadan daha yakın olan gezegenlerle daha uzak olan gezegenleri farklı olarak görmek gerekmiyordu. Kopernik de Batlamyus gibi gezegenlerin hızını sabit olarak görmek istediğinden, sonradan güneşin tam merkezde değil de yakınında olduğunu söyledi.

Şimdiye kadarki birçok teorisinin temel yanlışlığı, gözlenen hareketlere uyan teoriler geliştirmek yerine, bu hareketleri insanların inançlarına ve düşüncelerine uydurma çabasıydı. Ayrıca gezegenlerin neden bilinen şekilde hareket ettikleri konusunda mistik veya dini bir takım iddialardan başka açıklama getirilememiştir.

Kopernik'in teorisini öğrenenlerden biri de Alman Johannes Kepler'di (1571–1630). Onun devrinde bilinen gezegen sayısı altıya çıkmıştı. Kepler önceleri eski Yunan'dan beri bilinen beş mükemmel cismin (dörtüzlü, küp, sekizyüzlü, onikiyüzlü, yirmiyüzlü) aralarına yerleştirilmiş altı küre ile güneş sistemini açıklamaya çalıştı. Güneş merkezdeydi ve kürelerin yarıçapları gezegenlerin güneşe olan uzaklıklarıydı. Aslında dokuz gezegen olduğunu bilseydi ne yapardı acaba? Çünkü mükemmel cisimler tam beş tane. Tahmin edilebileceği gibi bu teorisinin hataları o zamanların gözlemlerindeki hatalardan daha büyük çıktı.

Danimarkalı Tycho Brahe (1546–1601), eski çağlardan beri kullanılan verilerin yanlışlarla

dolu olduğunu ve daha hassas gözlemler yapılmadan gezegenlerin hareketi hakkında kesin bir yargıya varılamayacağını farkedenden ilk kişiydi. Bunun üzerine Brahe onyıllar boyunca gök cisimlerini gözledi ve yılın değişik zamanlarında gezegenlerin gökteki yerini gösteren verileri kaydetti. Kepler de onun verileri olmadan gezegenlerin hareketini açıklayamayacağını anlayınca onun asistanı oldu ve Brahe'nin ölümünden sonra verileri onun diğer asistanından kaçırdı [2].

Bu verileri yıllarca inceleyen Kepler, ilk olarak gezegenlerin hareketinin inişli çıkışlı olmayıp birer düzlemde meydana geldiğini fark etti. Sonra gezegenlerin sabit hızlarla hareket ettikleri yanlışlığını tamamen terketti. Yörüngelerin çember olmadığını da artık görüyordu. Ayrıntıları yanlış olsa da, güneşten yayılan bir kuvvetin buna yakalanan "tembel" gezegenleri yörüngelerinde hareket ettirdiği ve bu kuvvetin uzaklıkla azaldığı düşüncesine ulaştı yavaş yavaş. Bu ana fikirlerin ışığı altında uzun ve birbirini götüren yanlışlıklarla dolu hesapların sonucunda *Kepler kanunları* diye bilinen üç genel ilkeden aşağıdaki ikisini elde etti ve bunları 1609'da *Yeni Astronomi* adlı kitabında duyurdu.

- (K1) Gezegenler güneşi içeren bir düzlemde hareket ederler ve yörüngeleri bir odağında güneşin bulunduğu birer eliptir.
- (K2) Güneşten bir gezegene çizilen doğru parçası, eşit sürede eşit alan süpürür.

Kepler aslında kütle çekimi kavramına çok yaklaşmıştı. Bahsettiği kuvvet sayesinde, başka bir kuvvet olmasa, dünya ile ayın birer mıknatıs gibi birbirlerini çekeceğini söylüyordu kitabında. Üstelik bu kuvvet ışık gibi uzaklara yayılıyor ve bunun etkisine kapılan cisimleri hareket ettiriyordu. Kuvvet alanı ima eden bu fikirler, Newton'ın kütle çekimi için evrende her yeri kaplayan *esir* adlı maddeyi gerekli görmesinden çok daha moderndi [2].

Kepler 1618 yılında yayımlanan *Dünyanın Uyumu* adlı kitabında, mükemmellik arama tutkusuna geri döndü ve gezegenlerin hareketleri ile müzik ve notalar arasında ilişki kurmaya çalıştı. Gene de bu eserde uzun denemelerden sonra bulunduğu önemli bir bilimsel sonuç vardı; üçüncü Kepler kanunu:

- (K3) Bir gezegenin yörüngesinin asal eksen yarı uzunluğunun küpünün, gezegenin yörüngesinde bir tam dönüş yapma süresinin karesine oranı bütün gezegenler için aynıdır.

İtalyan Galileo Galilei (1564-1642), hareket kanunları için mistik veya estetik inançlar dışında fiziksel nedenler aradı ve modern bilim üzerinde derin etkiler yaptı. Uzaklık, zaman, hız, ivme, kuvvet, kütle gibi kavramlara açıklık getirdi. Teleskopu gök cisimlerine bakmak için kullanan ilk kişi oldu. Fakat ilginçtir, belki de dini otoritelerden çekindiği için, 1632'de hâlâ gezegen yörüngelerini dış çemberler olarak gören bir kitap yayımlıyordu [2]. Gezegenlerin hareketi ile ilgili modern görüşlerin genel kabul görmesi uzun zaman aldı. 18. yüzyılın ortalarında bile Avrupa'da dünya merkezli sisteme göre ayın ve gezegenlerin hareketini anlatan kitaplar yazılıyordu.

İngiliz Isaac Newton (1642-1727), Cambridge Üniversitesi'ndeki öğrenciliği sırasında Galileo ve Kepler'in eserleriyle tanıştı. 1664-1665 yıllarındaki büyük veba salgınında üniversite kapanınca ailesinin köyünde tek başına zamanının önemli bilimsel problemleri üzerinde çalıştı ve bilim tarihinin en önemli sonuçlarından birkaçına ulaştı. Newton önce Kepler kanunlarının geçerli olması halinde güneşle gezegen arasında bir çekim kuvveti olması gerektiğini gösterdi. Sonra bu cins bir kuvvetin yarlığı halinde Kepler kanunlarının tarif ettiği biçimde gezegen hareketi olacağını gösterdi. Daha sonraları merkezkaç kuvvetinden formülüyle Kepler kanunlarından çıkan sonuçları birleştirerek, *kütle çekim kanunu*'nun matematiksel ifadesini verebildi:

- (G) Kütlesi olan iki cisim birbirlerini, her birinin kütlesiyle doğru orantılı ve aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir kuvvetle çekerler.

Bu kanunu, türevsel ve integral hesabı da içeren diğer buluşlarıyla birlikte, 1687 yılında *Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri* adlı bilim tarihinin en önemli eserinde yayımladı.

Newton'ın teorilerinin büyük başarılarından biri 1846'da Neptün gezegeninin keşfi oldu. Uranüs'ün hareketindeki bazı düzensizlikleri inceleyen İngiliz John Adams ve Fransız Urbain le Verrier, birbirlerinden bağımsız olarak daha uzakta onu çeken başka bir gezegen olması gerektiği sonucuna vardılar. Berlin rasathanesinin teleskopunu Le Verrier'nin hesaplarının işaret ettiği yöne çeviren Alman Johann Galle, o zamana kadar bilinmeyen Neptün'ü birkaç saatlik bir aramadan sonra gördü.

Daha sonraları, Merkür'ün yörüngesindeki küçük sapmaların Newton teorisiyle tamamen

açıklanamayacağı anlaşıldı. Açıklama için iki buçuk yüzyıl sonra 20. yüzyılın başlarında Albert Einstein'ın (1879-1955) ortaya attığı *görecelik teorisi* beklenenecekti. Ancak Newton teorisinin gözlemlenenlerden belirgin farklar göstermesi, güneş gibi çok büyük bir kütleyle Merkür kadar yakın gezegenlerde söz konusu. Bu tip etkiler dünya üzerindeki bizlerin hayatını veya gündelik mühendislik hesaplarını değiştirmiyor. Ote yandan kütle çekimi kavramı o derece temel bir kavram ki, görecelik kuramı onu yanlışlamıyor, sadece genelliyor.

Osmanlılar'ın yeni astronomi ile tanışmalarını çok sürmedi. 1660'larda eski ve yeni astronomi teorilerinden bahseden, fakat gezegenlerin hareketini gene de dünya merkezli sisteme dayandıran bir kitap Fransızca'dan çevrildi [1]. Bu çeviride merkezin dünya veya güneş olmasından teknik bir ayrıntı gibi bahsedildi. Çevirilen kitaplar takvim yapılmasında yararlı olan, ayın ve gezegenlerin hareketlerini tarif eden kitaplarla sınırlı kaldı hep; Kepler'in ve Newton'ın teorilerinden ve fiziksel açıklamalardan bahseden kitaplar hiç önemsenmedi. Bu çevirilerde eski ve yeni astronomi karşılaştırılsa da dini nedenlerle eski astronomiden yana tavır alındı daha çok. 19. yüzyılın başlarında bile dünya merkezli sisteme dayandırılan astronomi kitapları yazılıyordu. Ancak 1834'te İshak Efendi'nin (?-1836) yayımladığı *Mecmûa-i Ulûm-i Riyâziye* adlı kitapta, yeni astronomi tartışmasız bir biçimde savunulduğu gibi kütle çekim kanunu da ilk olarak yer aldı [1].

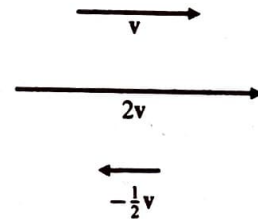
Dünyadan bakıldığında sabit görünen yıldızlar, ay ve güneş tutulmaları ve bunların süreleri, ve trigonometri gibi araçlarla dünyanın, ayın, güneşin yarıçaplarını ve birbirlerine olan ortalama uzaklıklarını bulmak mümkün. Antik çağlardan beri bu hesaplar yapılmış. Doğru değerlere varmak çok hassas gözlemler gerektiriyor, ama kaba hesapla bile iki uzaklığın oranını bilmek astronomiye büyük yararlar sağlıyor. Kepler de oldukça hatalı rakamlarla ise başlasa bile doğru sonuçlara varabildi.

Bu yazıda türevsel ve integral hesap ile vektörler kullanarak gözlemlenen gerçeklerin (Kepler kanunları) Newton'ın ikinci hareket kanunu (kuvvet eşittir kütle çarpı ivme) ile birlikte teoriyi (kütle çekim kanununu) doğruduğunu göreceğiz; sonra da teorinin matematik yardımıyla nasıl gözlemlenen gerçeği gerektirdiğini göreceğiz; bunlar yazının ikinci kısmında yer alacak. Bilimsel metot budur işte; ince-

lenene bilimsellik kazandıran da inceleme metodudur. Deneyisel bilgi bir düzen bulununcaya kadar incelenir; sonra bu düzeni açıklayacak bir kural ortaya atılır. Eğer bu kuralın sonucu olarak gözlenen elde edilmezse, gözlenen olayı açıklayacak yeni kurallar aranır; ta ki olay açıklanana kadar. Newton kütle çekimiyle Kepler kanunları arasında ilişki kurduğunda türev veya integral kullanmamıştı aslında; fakat kullanmak işimizi kolaylaştırıyor; vektörler ise o dönemde hayal bile edilmiyordu. Biz önce vektörlerle ilgili ihtiyacımız kadar bilgiyi özetleyeceğiz.

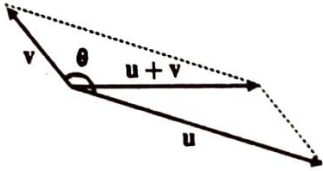
B. Vektörler

Kütle gibi yalnız büyüklüğü olan çoklukları göstermek için gerçel sayıları kullanırız. Birini büyüklük karşılaştırdıktan sonra bir tek sayı bir cismin kütlesini belirtmeye yeter. Hız ve kuvvet gibi çoklukların ise hem büyüklükleri hem de yönleri var. Bir cismin ne yöne gittiği veya onun ne yönde çekildiği de belirtilmeli. Bu çoklukları göstermenin akla hemen gelebilecek bir yolu oklar kullanmak. Okun uzunluğu çokluğun büyüklüğünü, işaret ettiği yön ise çokluğun yönünü bildirir. Biraz daha matematiksel düşünerek, ok yerine *yönlü doğru parçası* diyeceğiz. Ayrıca düzlemde veya uzayda bulundukları yer farklı olsa da uzunluğu ve yönü aynı olan bütün doğru parçalarını eşdeğer sayacağız, çünkü dediğimiz gibi önemli olan yön ve büyüklük, bulunulan yer değil. Düzlemde veya uzayda bu denklik altındaki yönlü doğru parçalarına *vektör* denir. Vektörleri elle yazarken genellikle üzerlerine bir ok koyarız: $\vec{v}$. Basılı yazılarda ise çoğunlukla koyu yazılan harfler kullanılır: $\mathbf{v}$.



Bir vektörü bir s gerçel sayısıyla çarpabiliriz ve sonuçta aynı doğrultuda ve uzunluğu $|s|$ oranında artmış (veya azalmış) başka bir vektör elde ederiz; sayı pozitifse yön korunur, negatifse tersine döner. Birbirlerinin bir gerçel sayı ile çarpımı olarak yazılabilen vektörlere *paralel vektörler* denir. Vektörler toplanabilir de. İki vektörü, yönlerini ve uzunluklarını değiştirmeden kaydırarak dip dibe koyarız ve bu vektörleri ke-

nar kabul eden paralelkenarı çizeriz. Paralelkenarın, vektörlerin dip noktalarından başlayan ve ucu karşı köşedeki yönlü köşegeni, iki vektörün toplamıdır. Bir vektörü sıfırla çarptığımızda elde ettiğimiz, uzunluğu sıfır ve yönü olmayan vektöre *sıfır vektörü* denir ve bunun başka bir vektörle toplandığında hiçbir etkisi yoktur. Bir vektörü başka bir vektörden çıkartmak demek, -1 ile çarpımını öbür vektöre eklemek demektir.

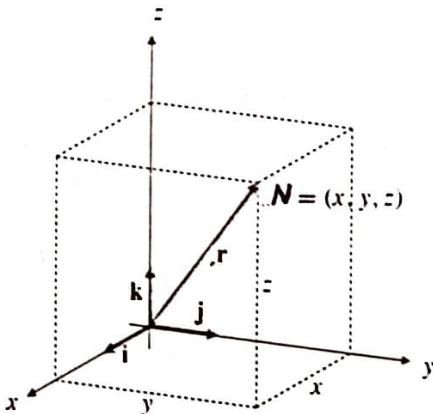


Boyu 1 olan her vektöre *birim vektör* adı verilir. Uzayda pozitif x, y, z yönündeki birim vektörler i, j, k olarak adlandırılırlar. i yönünde a, j yönünde b ve k yönünde c uzunluğunda üç vektörün toplamı olan $v = ai + bj + ck$ vektörü, üç vektörün *bileşkesidir*; üç vektörün her biri de v 'nin *vektör bileşenidir*. a, b, c sayılarına ise v 'nin *bileşenleri* diyeceğiz. Tersine, verilen her v vektörünü, x, y, z eksenlerine paralel doğrular yardımıyla i, j, k bileşenlerine ayırabiliriz. Bileşenlerin üstünde durmamızın nedeni, vektörleri toplama, çıkarma, gerçel sayılarla çarpma işlemlerini, vektörlerin her bir bileşeni üzerinde uygulamanın yetmesi. $u = \alpha i + \beta j + \gamma k$, $v = ai + bj + ck$ ve s bir gerçel sayı ise,

$$u + v = (\alpha + a)i + (\beta + b)j + (\gamma + c)k$$

$$s\mathbf{v} = (sa)i + (sb)j + (sc)k$$

olur.



Bir v vektörünün *büyükliğini* (boyunu, uzunluğunu) $|v|$ veya v ile göstereceğiz. $v = ai + bj + ck$ şeklinde verilmiş bir vektörün uzunluğunu, bir dik üçgenin hipotenüsünün

uzunluğunu hesapladığımız yöntemle

$$v = |v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

olarak elde ederiz. Bir v vektörüyle aynı yönde bir birim vektör (b_v) elde etmek için v 'yi boyuna böleriz, yani $1/v$ ile çarpıyoruz:

$$b_v = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{v}v.$$

Böylece her vektörü, uzunluğuna eşit bir gerçel sayı ile aynı yöndeki bir birim vektörün çarpımı olarak yazabiliriz:

$$v = |v|b_v = vb_v.$$

Henüz iki vektörün çarpımı gibi bir kavramdan söz etmedik, çünkü bu iki sayıyı çarpmak gibi basit değil ve birkaç değişik çarpım var. İki vektörün *nokta çarpımı*,

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta = uv \cos \theta$$

olarak tanımlanır; burada θ , vektörler dip dibe dokunduklarında, aralarındaki açının küçüğüdür; yani $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ alırız. Görüldüğü gibi nokta çarpımı bir gerçel sayı verir. v 'nin kendisiyle nokta çarpımından

$$v \cdot v = |v|^2 = v \cdot v$$

çıkar.

İki vektörün arasındaki açı dik açı ise, nokta çarpımları sıfırdır, çünkü $\cos 90^\circ = 0$ 'dır ve başka bir θ için bu sağlanmaz. Ayrıca i, j, k birim vektörlerinin kendileriyle nokta çarpımları 1, diğerleriyle nokta çarpımları 0'dır. O zaman bileşenler cinsinden

$$u \cdot v = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

elde ederiz. Bir vektörün i, j, k ile nokta çarpımı onun bileşenlerini verir: $v \cdot i = a$, $v \cdot j = b$, $v \cdot k = c$. Nokta çarpımının tanımını iki vektör arasındaki açıyı bulmak için de kullanabiliriz. Nokta çarpımının değişme ve birleşme özellikleri vardır. Ayrıca gerçel sayılarla çarpma ile yer değiştirebilir ve toplama üzerine dağıtılabilir.

İki vektörü birbiriyle çarpmanın bir başka yolu *çapraz çarpım*dır ve

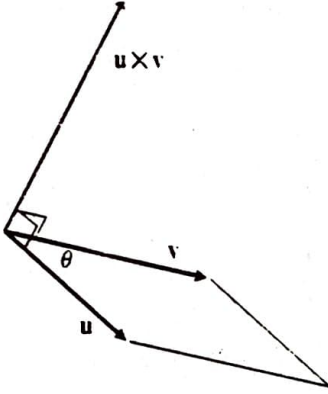
$$u \times v = |u||v|(\sin \theta)n = uv(\sin \theta)n$$

ile tanımlanır. Burada θ gene vektörler arasındaki küçük açı, n ise hem u hem de v 'ye dik bir birim vektördür. n 'nin yönü *sağ el kuralı*

ile belirlenir: sağ elin dört parmağı u 'dan v 'ye doğru kapanıyorsa, baş parmak n 'nin yönünü işaret eder. Bu kural sayesinde çapraz çarpımın değişme özelliğinin olmadığını, fakat

$$u \times v = -(v \times u)$$

eşitliğini sağladığını görürüz. Çapraz çarpımın birleşme özelliği de yoktur. Bunun örneğini bulmayı okuyucuya bırakıyoruz. Gene de çapraz çarpım gerçel sayılarla çarpma ile yer değiştirebilir ve toplama üzerine dağıtılabilir.



Paralel vektörlerin ve sadece onların birbirleriyle çapraz çarpımları 0'dır (çünkü $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$); dolayısıyla her vektörün kendisiyle çapraz çarpımı da. Birim vektörler arasında aşağıdaki eşitlikler de geçerlidir:

$$\begin{aligned} i \times j &= -(j \times i) = k, \\ j \times k &= -(k \times j) = i, \\ k \times i &= -(i \times k) = j. \end{aligned}$$

Buradan bileşenler cinsinden

$$u \times v = (\beta c - \gamma b)i + (\gamma a - \alpha c)j + (\alpha b - \beta a)k$$

elde ederiz. (Bunu kısaca sembolik olarak

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

determinantı şeklinde de yazmak mümkündür, ama biz bu yazılımı hiç kullanmayacağız.) çapraz çarpım dikkat edileceği üzere bir vektör verir ve $u \times v$ vektörü u ve v vektörlerinin belirlediği düzleme diktir.

Vektörlerin birbirleriyle olan çarpımlarını gerçel sayıların çarpımları gibi görmek yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. Gerçel sayılarda $p \neq 0$

ise, $pr = ps$ denkleminde $r = s$ çıkar. Fakat vektörlerde $u \neq 0$ ve $u \cdot v_1 = u \cdot v_2$ ise, $v_1 = v_2$ diyemeyiz. Gene $u \neq 0$ ve $u \times v_1 = u \times v_2$ ise, $v_1 = v_2$ diyemeyiz. Buna uygun örnekleri bulmayı okuyuculara bırakıyoruz.

Vektörler, uzaydaki doğru ve düzlemlerin denklemlerini yazmada, bunların kesişim noktalarını ya da birbirlerine veya bir noktaya olan uzaklıklarını bulmada çok yararlıdırlar ve basit formüller verirler. Konumuzun dışında kaldığı için hiç anlatmayacağız.

Düzlemdeki vektörler için de yukarıda anlattıklarımızın hemen hemen hepsi geçerlidir. Vektörleri bileşenleri cinsinden yazdığımızda i ve j bileşenlerini kullanırız yalnızca; k bileşenleri 0'dır. Yani aslında işler daha kolaydır. Bir fark çapraz çarpımda ortaya çıkar. u ve v düzlemdeyken, $u \times v$ 'nin her ikisine de dik olması gerekir; o zaman da $u \times v$ düzlemin dışında bir vektördür. Başka bir deyişle, düzlemde kalarak çapraz çarpım tanımlamak imkansızdır.

C. Konum, Hız ve İvme Vektörleri

$O(0,0,0)$ noktasını *başnokta* diye adlandırıyoruz. Şimdi uzaydaki noktaları da birer vektör olarak düşüneceğiz. N noktasını dibi başnokta ve ucu N 'de olan $\overrightarrow{ON}$ vektörüyle özdeşleştirebiliriz. Yaptığımız, $N(x,y,z)$ noktasıyla $xi + yj + zk = r$ vektörü arasında bir birebir eşleme kurmakla aynı şey. r vektörüne *konum vektörü* adı verilir. N noktası bir cismin bulunduğu yere, r vektörü başnoktadan o cismin bulunduğu yere işaret eder. Cisim hareket ediyorsa, N ve r zamana bağlı olarak değişir; yani zamanın bir fonksiyonudur; tabii x, y, z de. Zamanı t ile gösterirsek, bu durumda

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

yazarız. r, t 'nin yeteri kadar türevlenebilir bir fonksiyonuysa, birinci türevine *hız vektörü* v , ikinci türevine de *ivme vektörü* a adı verilir. Yani

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

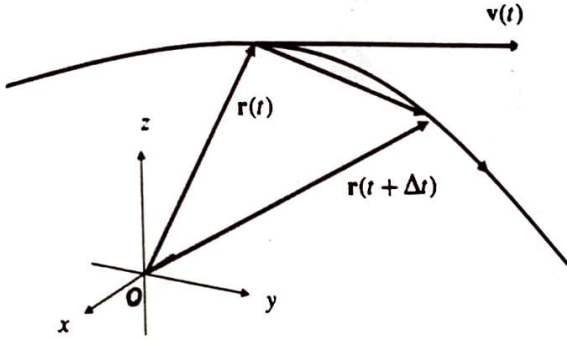
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k$$

olur. Hızın büyüklüğüne *sürat* diyelim; yani

$$\text{sürat} = |v| = v.$$

Sabit sürat altında bile hız değişebilir: yön değiştirerek.

Bir cisim uzayda veya düzlemde bir eğri boyunca hareket eder. Konum vektörü $\mathbf{r}$ 'nin ucu da bu eğri üzerinde dolanır. $\mathbf{r}(t)$ 'yi veren formül aynı zamanda bu eğrinin de denklemidir. Hız vektörü $\mathbf{v}$ 'nin yönü cismin gittiği yönü gösterdiğinden, $\mathbf{v}(t)$ eğriye $\mathbf{r}(t)$ noktasında teğettir.



Hareket sırasında cismin O 'ya olan uzaklığı, yani $|\mathbf{r}(t)| = r(t)$ sabitse, örneğin bir küre yüzeyinde veya düzlemde bir çember üzerinde harekette, konum da hız da sabit olmayabilir. Ama

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = \text{sabit}$$

eşitliğinde çarpım kuralıyla türev alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0 \\ 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0 \\ \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu, konum ve hız vektörlerinin hep birbirlerine dik olması demektir. Buna benzer bir şekilde, eğer hareket boyunca sürat sabitse, hız ve ivme vektörleri birbirlerine diktir.

Hareket bir düzlemde meydana geliyorsa, $\mathbf{k}$ bileşenlerine gerek kalmaz. O zaman konum vektörünün boyu $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, açıkça kutupsal koordinatların r 'sidir. Kutupsal koordinatlarda x 'in ve y 'nin r ve θ cinsinden nasıl yazıldığını hatırlarsak,

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} \quad (1)$$

yazılabildiğini görürüz. Bir noktanın etrafında dönerek yapılan harekette, konum, hız ve ivme vektörlerini Kartezyen koordinatlara sıkı sıkıya bağlı $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ cinsinden yazmak yerine, kutupsal koordinatlardan elde edilen başka iki birim vektör cinsinden yazmak büyük kolaylık sağlar. Bu iki birim vektör, r ve θ yönündeki $\mathbf{b}_r$ ve $\mathbf{b}_\theta$ birim vektörleridir. Şimdi bunların $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ ile aralarındaki ilişkiyi yazalım. $\mathbf{r}$ 'yi uzunluğu olan r 'ye

bölürsek

$$\mathbf{b}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

buluruz. Bu vektörü saat yönünün aksi yönde 90° döndürürsek, boyu değişmez ve θ 'nin arttığı yönü gösterir:

$$\mathbf{b}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

$\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ 'den farklı olarak, $\mathbf{b}_r$ ve $\mathbf{b}_\theta$ 'nin sabit birer yönleri yoktur; θ 'ya bağlı olarak değişirler; ama r 'den bağımsızdırlar. Ama

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_\theta &= (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \times (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \\ &= \cos^2 \theta (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - \sin^2 \theta (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2)$$

hep sabittir.

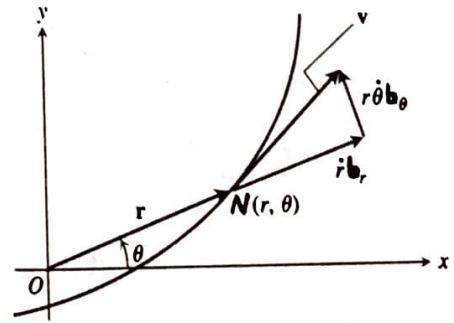
Doğrudan hesapla

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}_r}{d\theta} &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{b}_\theta \\ \frac{d\mathbf{b}_\theta}{d\theta} &= -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} = -\mathbf{b}_r \end{aligned}$$

olduğunu da görürüz. Zamana göre türevi değişkenin üzerindeki bir nokta ile gösterelim. Zincir kuralı yardımıyla

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}_r &= \frac{d\mathbf{b}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{b}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{b}_\theta \\ \dot{\mathbf{b}}_\theta &= \frac{d\mathbf{b}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{b}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{b}_r \end{aligned}$$

da çıkar.



Konum, hız ve ivme vektörlerini artık $\mathbf{b}_r$ ve $\mathbf{b}_\theta$ cinsinden yazabiliriz.

$$\mathbf{r} = r \mathbf{b}_r \quad (3)$$

olduğu görülüyor. Diğerleri de çarpım kuralıyla türev olarak kolaylıkla hesaplanır:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \mathbf{b}_r) = \dot{r} \mathbf{b}_r + r \dot{\theta} \mathbf{b}_\theta, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \mathbf{b}_r + r \dot{\theta} \mathbf{b}_\theta) \\ &= \ddot{r} \mathbf{b}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{b}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{b}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{b}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\theta} \mathbf{b}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{b}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{b}_\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Ç. Kutupsal Koordinatlardan Bir Formül

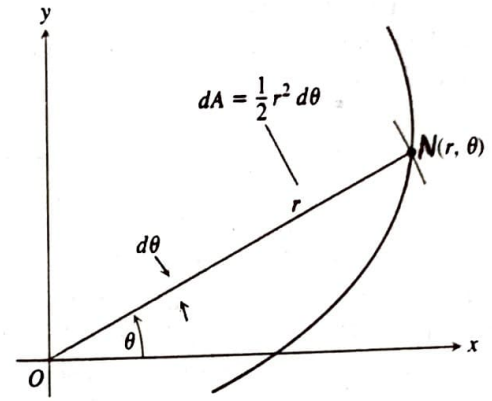
Kutupsal koordinatlarda $r = f(\theta)$ fonksiyonuyla verilen bir eğri ile O arasında kalan bölgeyi düşünelim. öyle ki bu bölge sabit bir φ açısıyla verilen ışıında başlasın ve değişken bir θ açısına kadar devam etsin. Şimdi amacımız, θ değiştikçe bu bölgenin alanı A 'nın değişim hızı için bir formül geliştirmek. θ , diyelim, Δt zamanı süresince $\Delta\theta$ kadar değişsin; aynı sürede alandaki değişikliğe de ΔA diyelim. Değişiklikler ufaksa r değeri, θ ile $\theta + \Delta\theta$ arasında yaklaşık olarak sabit kalacaktır. Bu ise bölgeye daire kesmesi gibi dilim eklenmesi demektir. Tüm dairenin açısal genişliği 2π olduğundan, dairenin alanıyla oranlayarak,

$$\Delta A \approx \frac{\Delta\theta}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

yazabiliriz. Her iki tarafı Δt 'ye böler ve $\Delta t \rightarrow 0$ iken limit alırsak,

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

eşitliğini elde ederiz.



KAYNAKÇA

- [1] E. İhsanoğlu, *Büyük Cihad'dan Frenk Foduluğuna*, İletişim, İstanbul, 1996.
- [2] A. Koestler, *The Watershed: A Biography of Johannes Kepler*, Doubleday Anchor, Garden City, 1960.

MC
1995

An Introduction to
Real Analysis

T. Terzioğlu

MC
1995

Lebesgue
Integral
Kuramına
Giris

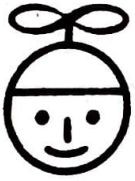
R. Bartle

38. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Halil İbrahim Karakaş

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı 18-31 Temmuz 1997 tarihlerinde Arjantin'in sahil kenti Mar del Plata'da yapıldı. 82 ülkeden 460 yarışmacının katıldığı olimpiyatta ülkemizi *Umut Akdemir, Deniz Gündüz, İsa Emin Hafalır, Fatih Sulak, Mehmet Bumin Yenmez ve Muhammet Ali Yıldırım* 'dan oluşan ulusal takımımız temsil etti. Takım lideri olarak, aynı zamanda Uluslararası Olimpiyat Komitesi Danışma Kurulu (Advisory Board) üyesi olan *Semih Koray*, lider yardımcısı olarak bu satırların yazarı *Halil İ. Karakaş* ve gözlemci olarak *Zafer Nurlu* görev yaptılar.



38th
International
Mathematical
Olympiad

ARGENTINA

Ulusal takımımız, bu satırların yazarı ile 20 Temmuz 1997 Pazar günü İstanbul'dan hareket ederek Paris üzerinden 21 Temmuz 1998 Pazartesi günü Buenos Aires'e, oradan da Mar del Plata'ya uçtu. Arjantin'e indiğimizde mevsim kış, hava yağmurlu idi. Takım liderimiz Semih Koray ve gözlemcimiz Zafer Nurlu 3 gün önce Arjantin'e ulaşmışlardı. Ancak, olimpiyat kurallarına göre onları ancak sınavların bitiminde görebilecektik.

Sınavlar, yazılı olarak, birincisi 24 Temmuz 1997 Perşembe günü; ikincisi 25 Temmuz 1997 Cuma günü olmak üzere herbiri 4,5 saat süren 3'er soruluk iki seansta yapıldı. Takımımız 1 gümüş, 4 bronz madalya kazanarak madalya sıralamasında şimdiye kadar bulunduğu yeri korudu.

38. Olimpiyatla ilgili ayrıntıları ve takımımızın hoş anılarını anlatmayı takım mensuplarına bırakarak

(Deniz, Fatih, Umut, İsa, Bumin ve Mali! Biriniz bu görevi yapmalısınız...) olimpiyatta sorulan 6 soruyu ve çözümlerini veriyorum. Kuşkusuz, burada verilen çözümlerden daha farklı çözümler vardır.

Sevgili okurlarımız! Soruları okuduktan sonra, çözümlere bakmadan önce, her soruyu kendiniz çözmeye çalışınız. Kolay gelsin...

İşte 38. Uluslararası Matematik Olimpiyatında sorulan sorular...

BİRİNCİ GÜN SINAV SORULARI

SORU 1. Köşeleri düzlemdeki tamsayı koordinatlı noktalar olan birim karelere bakalım. Bu kareler (satranç tahtasındaki gibi) sırayla siyah ve beyaza boyanmış olsun. Her (m, n) pozitif tamsayı çifti için, köşeleri tamsayı koordinatlı noktalar olan ve m ve n uzunluğundaki dik kenarları yukarıdaki karelerin kenarları üstünde bulunan bir dik üçgen alalım. S_1 ile bu üçgendeki siyah bölgelerin toplam alanını; S_2 ile de aynı üçgendeki beyaz bölgelerin toplam alanını gösterelim.

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

olsun.

a) Her ikisi de tek veya her ikisi de çift pozitif m ve n tamsayıları için $f(m, n)$ değerini hesaplayınız.

b) Her m ve n için $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ olduğunu kanıtlayınız.

c) $f(m, n) < C$ koşulunu m ve n 'nin tüm değerleri için sağlayan bir C sabitinin bulunmadığını gösteriniz.

SORU 2. A açısı ABC üçgenindeki açılardan en küçüğüdür. B ve C noktaları bu üçgenin çevrel çemberini iki yaya ayırıyor. U , B ve C arasındaki, A noktasını içermeyen yayın bir iç noktası olsun. $[AB]$ ile $[AC]$ 'nin orta dikmeleri AU doğrusunu sırasıyla V ve W noktalarında kesiyor. BV ile CW doğruları da T noktasında kesişiyor.

$$|AU| = |TB| + |TC|$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 3. $x_1, x_2, \dots, x_n, |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşullarını sağlayan gerçel sayılar olsun.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 'nin

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşulu sağlanacak biçimde bir $y_1, y_2, \dots, y_n$ permütasyonu bulunduğunu gösteriniz.

İKİNCİ GÜN SORULARI

SORU 4. Elemanları $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ kümesine ait bir $n \times n$ matrise (n sütun ve n satırdan oluşan kare biçimindeki bir tabloya), eğer her $i = 1, \dots, n$ için i -inci satır ile i -inci sütun birlikte S 'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa, bir gümüş matris diyoruz.

a) $n = 1997$ için hiç bir gümüş matrisin bulunmadığını;

b) n 'nin sonsuz sayıda değeri için gümüş matrislerin bulunduğunu gösteriniz.

SORU 5. $a \geq 1, b \geq 1$ olmak üzere,

$$a^{(b^2)} = b^a$$

eşitliğini sağlayan tüm (a, b) tamsayı sıralı ikililerini bulunuz.

SORU 6. Her n pozitif tamsayısı için, n 'nin, 2 'nin negatif olmayan tamsayı kuvvetlerinin toplamı olarak yazılış biçimlerinin sayısını $f(n)$ ile gösterelim. Toplamda geçen terimlerin yalnızca sırasının değişik olduğu yazılış biçimlerini aynı sayıyoruz. Örneğin 4 sayısı; $4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$ olarak dört şekilde yazılabileceğinden $f(4) = 4$ olur. Her $n \geq 3$ tamsayısı için

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

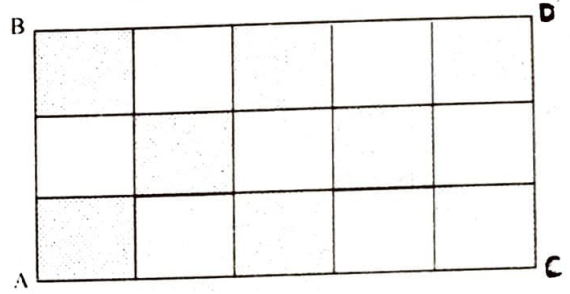
olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

SORU 1 'İN ÇÖZÜMÜ a) Köşeleri tamsayı koordinatlı noktalar olan ve dik kenarları problemin koşullarına uyan,

$$m(\hat{A}) = 90^\circ, |AB| = m \text{ ve } |AC| = n$$

olan bir ABC dik üçgeni alalım. Aşağıdaki şekilde gösterilen $ABCD$ dikdörtgenini düşünelim.



Herhangi bir P poligonu için o poligonun siyah kısmının toplam alanını $S_1(P)$ ile beyaz kısmının toplam alanını $S_2(P)$ ile gösterelim. Eğer m ve n her ikisi de tek veya her ikisi de çift ise, $ABCD$ dikdörtgeni BC hipotenüsünün (veya köşegeninin) orta noktasına göre simetriktir.

Bu nedenle,

$$S_1(ABC) = S_1(BCD) \text{ ve } S_2(ABC) = S_2(BCD)$$

'dir. Böylece

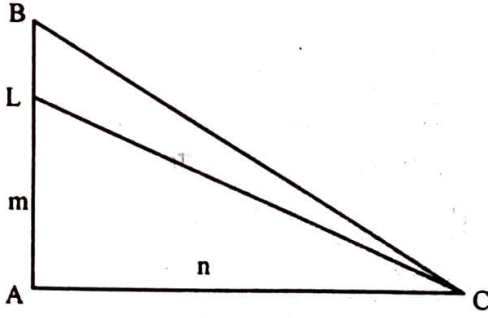
$$\begin{aligned} f(m, n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\ &= \frac{1}{2} |S_1(ABCD) - S_2(ABCD)| \end{aligned}$$

olur. Buradan, eğer m ve n her ikisi de çift ise, $f(m, n) = 0$; her ikisi de tek ise $f(m, n) = \frac{1}{2}$ olduğu görülür.

b) Eğer m ve n her ikisi de tek veya her ikisi de çift ise kanıtlamamız gereken eşitsizlik (a) şıkkının sonucu olarak hemen görülür. Şimdi m 'nin tek ve n 'nin çift olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, $[AB]$ üzerinde

$$|AL| = m - 1$$

olacak biçimde bir L noktası alalım.



$m - 1$ çift olduğundan $f(m - 1, n) = 0$; yani

$$S_1(ABC) = S_2(ABC)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(m, n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\ &= |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \\ &\leq \text{Alan}(LBC) = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

c) Her $k \geq 1$ tamsayısı için $f(2k + 1, k)$ 'yı hesaplayalım. Yukarıda olduğu gibi, $[AB]$ üzerinde, $|AL| = 2k$ olacak biçimde bir L noktası alalım. Bu takdirde, $f(2k, 2k) = 0$ ve $S_1(ABC) = S_2(ABC)$ olduğundan

$$f(2k + 1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$$

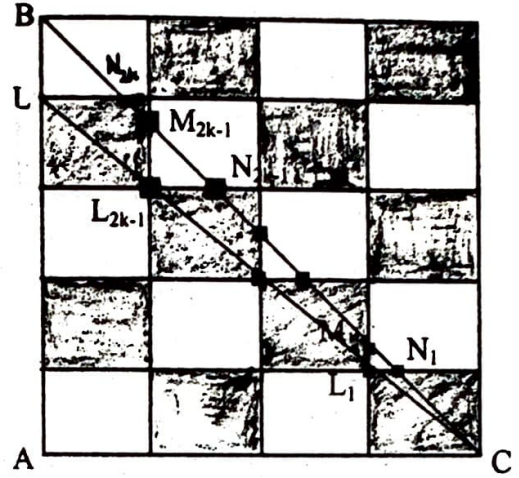
olur. LBC üçgeninin alanı k 'dır. Genelliği bozmadan $[LC]$ 'nin tamamen siyah bölgede kaldığını varsayabiliriz (aşağıdaki şekilden izleyiniz). Bu durumda, LBC 'nin beyaz kısmı, her biri BAC 'ye benzeyen BLN_{2k} , $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, ..., $M_1L_1N_1$ üçgenlerinden oluşur. Dolayısıyla LBC 'nin beyaz kısmının toplam alanı

$$\begin{aligned} S_2(LBC) &= \frac{1}{2} \frac{2k}{2k+1} \left(\left(\frac{2k}{2k} \right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4k(2k+1)} (1^2 + 2^2 + \dots + (2k)^2) \\ &= \frac{4k+1}{12}, \end{aligned}$$

siyah kısmının toplam alanı

$$S_1(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12}$$

olur.



$$f(2k + 1, 2k) = \frac{2k - 1}{6}$$

istenildiği kadar büyük değerler alabileceğinden

$$f(m, n) \leq C$$

koşulunu her m ve n pozitif tamsayısı için sağlayacak bir C sabiti bulunamaz.

Gözlem: $f(m, n)$ 'nin, m ve n 'nin biri tek diğeri çift aralarında asal sayılar olması durumunda da istenildiği kadar büyük değerler aldığını görmek mümkündür. Gerçekten, m tek ve n çift, m ve n 'nin en büyük ortak böleni d ise,

$$f(m, n) = f\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

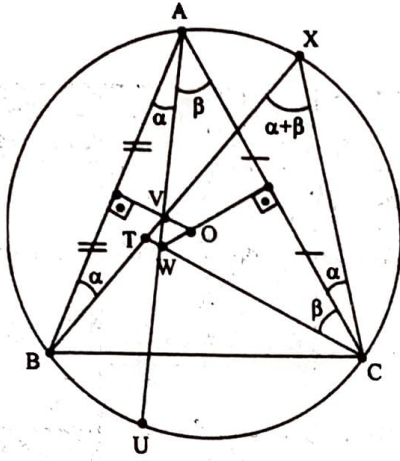
'dir.

SORU 2 'NİN ÇÖZÜMÜ: BV doğrusunun çevrel çemberi kestiği nokta X olsun.

$$m(\widehat{VAB}) = m(\widehat{VBA}) = \alpha,$$

$$m(\widehat{WAC}) = m(\widehat{WCA}) = \beta$$

olsun. Bu takdirde,



$m(\widehat{TXC}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha + \beta$ olur (aynı yayı gören çevre açıları). Böylece,

$$m(\widehat{TCX}) = m(\widehat{TXC}) = \alpha + \beta$$

ve TCX üçgeni ikizkenar; $|TC| = |TX|$ olur. Diğer yandan, $|VA| = |VB|$, $|VU| = |VX|$ ve dolayısıyla,

$$|AU| = |VA| + |VU| = |VB| + |VX| = |AX|$$

'dir. Böylece,

$$|AU| = |AX| = |TB| + |TX| = |TB| + |TC|$$

olduğu görülür.

SORU 3 'ÜN ÇÖZÜMÜ: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'nin herhangi bir permütasyonu $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$S(\pi) = y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$$

olsun. $\frac{n+1}{2} = r$ diyelim. Her π için $S(\pi) \leq r$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Birim permütasyonu π_0 ile, tersine sıralama veren permütasyonu da $\tilde{\pi}$ ile gösterelim:

$$\pi_0 = (x_1, \dots, x_n) \quad , \quad \tilde{\pi} = (x_n, \dots, x_2, x_1).$$

Eğer $|S(\pi_0)| \leq r$ veya $|S(\tilde{\pi})| \leq r$ ise kanıtlanacak birşey kalmaz; iddia doğrudur. Bu nedenle, $|S(\pi_0)| > r$ ve $|S(\tilde{\pi})| > r$ kabul edebiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned} S(\pi_0) + S(\tilde{\pi}) &= (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) \\ &+ (x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1) \\ &= (n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \end{aligned}$$

ve böylece

$$|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = n+1 = 2r$$

'dir. Yukarıdaki kabulümüze göre $|S(\pi_0)| > r$ ve $|S(\tilde{\pi})| > r$ olduğundan $S(\pi_0)$ ve $S(\tilde{\pi})$ ters işaretli olup biri r 'den büyük, diğeri de $(-r)$ 'den küçüktür. Başka bir ifadeyle, $S(\pi_0)$ ve $S(\tilde{\pi})$ her ikisi de $[-r, r]$ aralığının dışındadır.

Birim permütasyon π_0 'dan başlayarak, sonlu adımda, her adımda iki komşu elemanın yerlerini değiştirerek, her permütasyonu elde edebiliriz. Özel olarak, öyle bir permütasyonlar dizisi

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \pi_m = \tilde{\pi}$$

bulunabilir ki, her $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ için π_{i+1}, π_i 'nin iki komşu elemanının yerleri değiştirilerek elde edilmiştir. Daha açık bir ifadeyle, eğer

$\pi_i = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\pi_{i+1} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ise, uygun bir $k \in \{1, \dots, n-1\}$ için

$$v_k = u_{k+1}, v_{k+1} = u_k;$$

$$t \notin \{k, k+1\} \text{ için } v_t = u_t.$$

Diğer yandan, $|x_i| \leq r$ olduğundan

$$\begin{aligned} |S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |kv_k + (k+1)v_{k+1} - ku_k - (k+1)u_{k+1}| \\ &= |u_k - u_{k+1}| \leq |u_k| + |u_{k+1}| \leq 2r \end{aligned}$$

'dir. Bu durumda, sayı ekseninde

$$S(\pi_0), S(\pi_1), \dots, S(\pi_{m-1}), S(\pi_m)$$

sayılarından ardarda gelen herhangi ikisi arasındaki uzaklık $2r$ 'den büyük olamaz. $S(\pi_0)$ ve $S(\tilde{\pi}) = S(\pi_m)$ sayıları $[-r, r]$ aralığının dışında kaldıklarından, $S(\pi_i)$ 'lerden en az biri bu aralık içinde olmak zorundadır. Böyle bir i için $S(\pi_i) \leq r$ olur ve iddianın doğruluğu görülür.

SORU 4 'ÜN ÇÖZÜMÜ: a) $n > 1$ bir tamsayı olsun ve bir $n \times n$ gümüş matris A bulunduğunu kabul edelim. $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ kümesinin, A 'nın köşegeni üzerinde bulunmayan bir x elemanını alalım. (Köşegen üzerinde sadece n yer, kümede ise $2n-1$ eleman bulunduğundan böyle bir x vardır.) i -inci satırla i -inci sütunun oluşturduğu şekle i -inci çatal diyelim. x elemanı her çatalda tam bir kez görülür. Eğer x , A 'nın (i, j) girdisi (yani i -inci satır ve j -inci sütunun ortak elemanı) ise, bu takdirde, x hem i -inci çatalda

hem de j -inci çatalda görülür. Bu durumda i -inci ve j -inci çatallara x -geçişli çatallar diyelim. (Örneğin, aşağıdaki A matrisinde birinci ve dördüncü çatallar 6-geçişlidir.) Böylece A 'nın tüm çatalları (ki, n tanedir) x -geçişli ikililere ayrılmaktadır. O halde n çift olmalıdır. 1997 tek olduğundan, 1997×1997 gümüş matris yoktur.

b) $n = 2$ için

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

bir gümüş matristir. $n = 4$ için çeşitli gümüş matrisler yazabiliriz. Örneğin,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada dikkat edilirse, A_4 matrisi A_2 'yi altmatrisler olarak içermektedir. A_4 'ün A_2 'den elde edilişi genelleştirilebilir. A_n gümüş matrisi verilmişse (n çift!) A_{2n} 'yi şöyle oluşturabiliriz: A_n 'nin her girdisine $2n$ eklenerek elde edilen matris B_n ve B_n 'nin köşegen girdilerini $2n$ ile değiştirilerek elde edilen matris C_n olsun. Bu takdirde,

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{bmatrix}$$

matrisi bir gümüş matristir. Bunu görmek için A_{2n} 'nin i -inci çatalına bakalım. Eğer $i \leq n$ ise, bu çatal A_n 'nin i -inci çatalı ile B_n 'nin i -inci satırı ve C_n 'nin i -inci sütunundan oluşur. A_n 'nin i -inci çatalı $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ kümesindeki tüm sayıları kapsar. B_n 'nin i -inci satırı ile C_n 'nin i -inci sütunu da $\{2n, 2n+1, \dots, 4n-1\}$ kümesinin elemanlarını kapsar. $i > n$ için de benzer tartışma ile A_{2n} 'nin i -inci çatalının $\{1, 2, \dots, 4n-1\}$ kümesinin tüm elemanlarını kapsadığı görülebilir.

SORU 5'İN ÇÖZÜMÜ: $a, b \geq 1$ tamsayıları verilen denklemin bir çözümü; a ve b 'nin en

büyük ortak böleni d olsun. $a = dx$, $b = dy$ diyelim. x ve y aralarında asal tamsayılardır. Verilen denklem

$$(dx)^{dy^2} = (dy)^x \quad (1)$$

denkleminde denktir. (1) denkleminde üsler karşılaştırılırsa aşağıdaki üç durum söz konusu olur:

1.Durum: $dy^2 = x$. Bu durumda, (1)'den $x = y$ olması gerekir. x ve y aralarında asal olduğundan $x = y = 1$; $dy^2 = x$ 'ten $d = 1$ ve böylece $a = b = 1$ çözümü elde edilir.

2.Durum: $dy^2 > x$. Bu durumda, (1) denklemini

$$d^{dy^2-x} \cdot x^{dy^2} = y^x \quad (2)$$

biçiminde yazarsak, x^{dy^2} 'nin y^x 'i böldüğünü görürüz. x ve y aralarında asal olduğundan $x = 1$ ve

$$d^{dy^2-1} = y \quad (3)$$

elde ederiz. Eğer $d = 1$ ise, (3) ten $y = 1$ olur ve bu durum $dy^2 > x$ ile çelişir. O halde, $d \geq 2$ ve her $y \geq 1$ için

$$d^{dy^2-1} \geq 2^{2y^2-1} \geq 2^{2y-1} > y$$

olmalıdır (buradaki son eşitsizlik tümevarımla görülebilir). Bu eşitsizlik (3) ile çelişir ve bu durumda hiç çözüm bulunmadığı görülür.

3.Durum: $dy^2 < x$. Bu durumda, $x > d$ olur ve (1) denklemini

$$x^{dy^2} = y^x \cdot d^{x-dy^2} \quad (4)$$

biçiminde yazarak y^x 'in x^{dy^2} 'yi böldüğünü görürüz. x ve y aralarında asal olduğundan, $y = 1$ ve (4) denkleminde

$$x^d = d^{x-d} \quad (5)$$

elde edilir. (5)'teki üslü ifadelerin tabanları $x > d$ koşulunu sağladığından üsler de $d < x - d$ koşulunu sağlar. x 'i bölen her p asal sayısı d 'yi de böler. Böyle bir asal sayının x ve d 'yi bölen en büyük kuvvetleri, sırasıyla, p^α ve p^β olsun. Bu takdirde, (5)'ten $\alpha d = \beta(x - d)$ ve böylece $\alpha > \beta$ olduğu görülür. Dolayısıyla, d sayısı x 'i böler;

uygun bir k için $x = kd$ dir. $x > 2d$ olduğundan $k \geq 3$ olduğuna dikkat ediniz. (5) denkleminde $x = kd$ alınırsa

$$k = d^{k-2} \quad (6)$$

elde edilir. Buradan, $d \neq 1$ olduğu, yani $d \geq 2$ olduğu görülür.

$k = 3$ için (6) 'dan $d = 3$ ve böylece, $x = 9$ ile $a = 27$, $b = 3$ çözümü elde edilir.

$k = 4$ için (6) 'dan $d = 2$ ve böylece, $x = 8$ ile $a = 16$, $b = 2$ çözümü elde edilir.

$k \geq 5$ için tümevarımla, $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$ ve böylece (6) 'nın sağlanmadığı görülür.

Sonuç olarak, denklemin çözüm kümesi $\{(1, 1), (27, 3), (16, 2)\}$ 'den ibarettir.

SORU 6 'NİN ÇÖZÜMÜ: $n = 2k + 1 \geq 3$ herhangi bir tek sayı ise, n 'nin belirtilen biçimde her yazılışında toplanan terimlerden en az biri "1" olacaktır. Bu terim silinirse, $2k$ 'nın bir yazılışı elde edilir. Karşıt olarak, $2k$ 'nın herhangi bir yazılışına "1" toplanırsa $2k + 1$ 'in bir yazılışı elde edilir. Böylece, $2k$ 'nın belirtilen biçimde yazılışlarının kümesi ile $2k + 1$ 'in belirtilen biçimde yazılışlarının kümesi bire-bir eşlenebilmekte, yani aynı sayıda elemana sahiptir. Başka bir ifadeyle,

$$f(2k + 1) = f(2k). \quad (1)$$

Ek olarak, eğer $n = 2k$ herhangi bir pozitif çift tamsayı ise, n 'nin belirtilen biçimde her yazılışı için aşağıdaki iki durumdan biri geçerlidir: Ya bu yazılışta toplanan terimlerden en az biri "1" dir ya da hiç biri "1" değildir. Birinci durumda, n 'nin yazılışından bir "1" silerek $2k - 1$ 'in bir yazılışını elde ederiz; bu durumda, daha önce olduğu gibi $n = 2k$ 'nın "birinci tür" yazılışları ile $2k - 1$ 'in yazılışları arasında bire-bir bir eşleme olduğunu görürüz. İkinci durumda, toplanan terimlerin her birini 2 'ye bölerek k 'nın bir yazılışını elde ederiz. Böylece, ikinci durumda da $n = 2k$ 'nın "ikinci tür" yazılışları ile k 'nın yazılışları arasında bire-bir bir eşleme olduğunu görürüz. Bu gözlemlerden

$$f(2k) = f(2k - 1) + f(k) \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) formülleri her $k \geq 1$ için geçerlidir. Tanımdan hemen $f(1) = 1$ olduğu

görülür. $f(0) = 1$ tanımlarsak (1) denklemini $k = 0$ için de doğrudur. (1) ve (2) 'den f 'nin azalmayan bir fonksiyon olduğu görülür.

(2) denkleminde, (1) 'den yararlanarak $f(2k - 1)$ yerine $f(2k - 2) + f(k)$ yazarsak her $k \geq 1$ için

$$f(2k) = f(2k - 2) + f(k) \quad (3)$$

elde ederiz. Herhangi bir $n \geq 1$ için (3) 'teki denklemler ($k = 1, \dots, n$ için) taraf tarafa toplanırsa her $n \geq 1$ için

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n) \quad (4)$$

elde edilir.

Şimdi $f(2^n)$ için alt ve üst sınırları bulmağa çalışalım. Üst sınırı bulmak zor değil. $f(2) = 2$ olduğundan ve f azalmayan olduğundan her $n \geq 2$ için ((4) 'e göre)

$$f(2n) = f(0) + f(1) + (f(2) + \dots + f(n))$$

$$\leq 2 + (n - 1)f(n)$$

$$\leq f(n) + (n - 1)f(n) = nf(n)$$

'dir. Dolayısıyla,

$$f(2^n) \leq 2^{n-1}f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1}2^{n-2}f(2^{n-2})$$

$$\leq 2^{n-1}2^{n-2}2^{n-3}f(2^{n-3}) \leq \dots$$

$$\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1}f(2) \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

Tümevarımla, her $n \geq 3$ için $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$ olduğu ve sonuç olarak $f(2^n) \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$ olduğu görülür.

Altsınırı elde etmek için, önce a ve b her ikisi de tek veya her ikisi de çift tamsayılar ve $b \geq a \geq 0$ ise,

$$f(b + 1) - f(b) \geq f(a + 1) - f(a) \quad (5)$$

olduğunu göstereceğiz. Gerçekten, eğer a ve b her ikisi de çift ise, bu takdirde (1) 'den dolayı, (5) eşitsizliğinin her iki tarafı da sıfır olur; eğer a ve b her ikisi de tek ise, bu takdirde (2) 'den dolayı,

$$f(b + 1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right),$$

$$f(a + 1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

olduğu görülür ve f 'nin azalmayan olması (5) eşitsizliğini verir.

Şimdi, $r \geq k \geq 1$ olan bir çift sayı r alalım ve (5) 'te $j = 0, 1, \dots, k-1$ için, ardarda, $a = r - j$, $b = r + j$ yazalım ve ortaya çıkan eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım. Sonuçta

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$$

elde ederiz. r çift olduğundan $f(r+1) = f(r)$ ve böylece her $k = 1, 2, \dots, r$ için

$$f(r+k) - f(r-k+1) \geq 2f(r)$$

elde edilir. Son eşitsizlikler de $k = 1, 2, \dots, r$ için taraf tarafa toplanınca

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r) \quad (6)$$

elde edilir. (4) denklemine göre (6) 'nın sol tarafı $f(4r) - 1$ 'dir. Böylece, her $r \geq 2$ için

$$f(4r) \geq 2rf(r) + 1 > 2rf(r);$$

$r = 2^{m-2}$ alınarak

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}) \quad (7)$$

olur. $r = 2^{m-2}$ 'nin çift olduğundan emin olmak için $m > 2$ olmalıdır; ancak, (7) 'nin $m = 2$ için de doğru olduğuna dikkat ediniz.

Çözümü tamamlamak için $n > 1$ herhangi bir tamsayı olsun. $2p \leq n$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı p alalım ve (7) eşitsizliğini $m = n, n-1, \dots, n-2p+2$ için ardarda uygulayalım:

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1} 2^{n-3} f(2^{n-4}) \\ &> 2^{n-1} 2^{n-3} 2^{n-5} f(2^{n-6}) > \dots \\ &> 2^{(n-1)+(n-3)+\dots+(n-2p+1)} \cdot f(2^{n-2p}) \\ &> 2^{p(n-p)} \cdot f(2^{n-2p}). \end{aligned}$$

Eğer n çift ise $p = \frac{n}{2}$; n tek ise $p = \frac{(n-1)}{2}$ alalım. O zaman, her $n \geq 2$ için

$$n \text{ çift ise } f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}},$$

$$n \text{ tek ise } f(2^n) > 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}$$

elde edilir. Böylece, problemde iddia edilen alt sınırın her $n \geq 2$ için geçerli olduğunu kanıtlamış olduk. Aynı altsınırın $n = 1$ için de geçerli olduğunu görebilirsiniz.



Olimpiyat takımımız Arjantin yolunda, Paris'te

HİNDİSTAN CEVİZLERİ... VE DİYOFANT DENKLEMLERİ

Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Giriş

Yazımızın amacı Sayılar Kuramında geçen önemli bir kavram olan **diyofant denklemleri** [5,7] konusuna kısa bir giriş yapmak. Burada, okuyucuya kuralların tümünü vereceğimiz diye bir kaygımız olmayacaktır. Onun yerine, okuyucudan, verilen temel kavramları üstüste koyarak yeni yöntemleri kendi elleriyle kurabilmesi yönünde çaba harcamasını isteyeceğiz. Bu konuya bulmaca tarihinin belki de en ünlü problemi ile başlamak istiyoruz. Aşağıda öyküleyeceğimiz bulmaca ilk kez 1926 yılında "Saturday Evening Post" gazetesinde "Ben Ames Williams" adlı bir yazarca yayınlanan "Hindistan Cevizleri" adlı bir kısa öyküye dayanmaktadır ve olağanüstü ölçüde büyük bir ilgi kazanarak ününü günümüze dek sürdürmüştür [4].

Hindistan Cevizleri Bulmacası

Tekneleri batan 5 gemici güçlkle küçük bir adaya yüzerek çıkarlar. Gece olunca çok yorgun oldukları için adada bulunan hindistan cevizi ağacına çıkıp uyurlar. Uykuya dalan gemicilerden birincisi açlık nedeniyle uyanıp ağaçtaki hindistan cevizlerini 5'e bölüp kendi payına düşeni yer, bu arada artmış olan bir hindistan cevizi de ağaçtaki maymuna verip yeniden yatar. Bunun ardından, sırayla, 2.gemici, 3.gemici, 4.gemici ve 5.gemici uyanır, ağaçta kalan hindistan cevizlerini 5'e bölüp kendi payını yer, her bir paylaşımda artan bir hindistan cevizi de ağaçtaki maymuna verip yeniden yatar. Sabah olunca hepsi birden uyanan gemiciler kendi paylarına düşen hindistan cevizlerini yediklerini belirtince işin içinden çıkamaz ve bu kez ağaçta kalan hindistan cevizlerini 5'e bölüp bunları yerler ve bu arada artan son hindistan cevizi de ağaçtaki maymuna verirler. Doğal olarak bu öyküde sorulabilecek olan soru şu: **Acaba ilk başlangıçta ağaçta toplam kaç tane hindistan cevizi vardı?**

Bulmacaya saldırmanın en iyi yolu değişkenlerimize ad vermek olmalı. Başlangıçta ağaçta bulunan hindistan cevizi sayısını x ile, 1.adımda 1.gemicinin yediği hindistan cevizi sayısını x_1 ile, 2.adımda 2.gemicinin yediklerini x_2 ile, ..., 5.adımda 5.gemicinin yediklerini x_5 ile ve son ortak paylaşımda her bir gemicinin yediklerini t ile gösterecek olursak, çözmemiz gereken denklem,

$$x = 5x_1 + 1, \quad 4x_1 = 5x_2 + 1, \quad 4x_2 = 5x_3 + 1,$$

$$4x_3 = 5x_4 + 1, \quad 4x_4 = 5x_5 + 1, \quad 4x_5 = 5t + 1$$

paylaşımlarını yaptıktan sonra ara değişkenleri elersek,

$$1024x = 15625t + 11529$$

biçimine dönüşecektir. Buradan da görülebileceği gibi, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 değişkenleri artık önemlerini yitirmekte, ve sorumuz t ve sonuçta x değişkeninin bulunmasına indirgenmektedir. Yazmış olduğumuz denklem, gerçekte, bir **diyofant denklemi** olup denklemin katsayılarının birer tamsayı olmasının yanı sıra denklemin aranan çözümleri de birer tamsayı olmak durumundadır. Burada geçen "diyofant" sözcüğü Yunanlı matematikçi **Diohantos** (İ.S. 325-410) 'un adından kaynaklanmaktadır. Belirtmiş olduğumuz bu iki özellik diyofant denklemlerinin bir yerde tanımını oluştururlar. Siz alışmış olduğunuz gibi, katsayıları tamsayı olan iki bilinmeyenli bir doğrusal denklemle karşılaştığınızda bunun gerçel sayılar içinde sonsuz sayıda çözümünün bulunduğunu bilirsiniz. Ancak çözümün tamsayılar olması zorunluluğu çözümlerin sayısını büyük ölçüde kısıtlayacaktır.

Diyofant Denklemlerine Giriş

$1024x - 15625t = 11529$ denkleminin tamsayısal çözümünü gerektiren yukarda anlattığımız bulmacayı çözme görevini biraz çıldırtıcı zevkli bir uğraşı olarak size bırakıyoruz. Ne kadar ağlarsanız ağlayın, bulmacanın çözümünü burada vermeyeceğiz, ve bunu ilerde de vermeyeceğiz. Şunu belirtmekle yetinelim, gerçekten çok estetik çözümler de var. Ancak biz burada biraz daha kaba güç gerektiren bir çözüme ilişkin bilgiler vereceğiz.

Önce a, b tamsayılar olmak üzere $ax + by = c$ denklemini sağlayan x ile y tamsayılarını bulmak istediğimizi belirtmekle işe başlayalım derseniz. Bu tür bir denkleme **diyofant denklemi** adını vereceğiz. Bu doğrusal türde iki bilinmeyenli bir diyofant denklemdir. Gerçekte doğrusal olmayan ya da ikiden daha çok sayıda bilinmeyen içeren diyofant denklemlerinden de söz edebiliriz. Örneğin x, y, z birer tamsayıyı göstermek üzere $x^2 + y^2 = z^2$ ikinci dereceden üç bilinmeyenli bir diyofant denklemini olup bunun çözümlerinin **Pisagor üçlülere** adını alan

$$x = \pm(a^2 - 2b^2), \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + 2b^2$$

tamsayıları olduğu (burada a, b birer tamsayıdır) bilinmektedir [5,7]. Bir başka örnek olarak, $n > 2$ ve x, y, z birer tamsayı olmak koşuluyla $x^n + y^n = z^n$ diyofant denkleminin de ne denli ünlü olduğunu sanırın anımsayacaksınız. Daha da açık olmak istersek, söz konusu denklemini sağlayan x, y, z tamsayılarının var olup olmadıkları sorunu **Fermat Teoremi** adıyla bilinmektedir. Çok uzun bir süre bunun doğruluğu gösterilememiş, ancak 1995 yılında A. Wiles, Fermat Teoreminin kanıtını vererek **Fermat üçlüsü** adını alan bu tür tamsayıların bulunmadığı sonucunu elde etmiştir [8]. İlgilenen kişiler [1,2,3] numaralı kaynaklarda çeşitli türde diyofant denklemleriyle ilgili bilgiler bulabilirler.

Şimdilik biz burada özel bir durum olarak, a ile b aralarında asal tamsayılar olmak üzere $ax + by = 1$ denkleminin çözümünü bulacağız. $ax + by = c$ genel durumuna ise daha sonra değineceğiz.

Her şeyden önce $ax + by = 1$ denkleminin x_0, y_0 gibi bir özel çözümü varsa, diğer tüm çözümleri de bulunabilir. Gerçekten, x, y bu denklemin genel bir çözümü ise, bu durumda $ax + by = 1$ ve $ax_0 + by_0 = 1$ eşitliklerinden $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$ bulunur. a ve b aralarında asal olduklarından, t bütün tamsayıları dolaşmak üzere $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$ diye genel çözüme ulaşılabilir. Dolayısıyla, eğer bir çözüm bulabilirsek, $ax + by = 1$ denkleminin sonsuz sayıda çözümünün bulunduğu sonucuna kolayca ulaşabiliriz. O halde yapmamız gereken şey, ne yapıp edip bu denklemin özel bir çözümünü bulabilmek olacaktır. Gerçi küçük sayılar için deneme-yanılma yöntemiyle özel çözümü bulabilirsiniz, ancak böyle bir yolun sağlıklı olduğunu pek söyleyemeyiz.

Yukarda değindiğimiz gibi a, b tamsayıları aralarında asal olarak alınmaktaydı; bir başka deyişle, bu iki sayının en büyük ortak bölenini gösteren (a, b) sayısı 1'e eşittir. Cebir bilgilerimize göz atarsak şu bilgiyle karşılaşırız: $(a, b) = 1$ olması için gerek ve yeterli koşul $ax + by = 1$ eşitliğini sağlayan x, y tamsayılarının bulunabilmesidir [6]. O halde çözümün kesinlikle var olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi, örneğin $215x + 48y = 1$ denklemini çözmek isteyelim. Bu diyofant denkleminde $(215, 48) = 1$ olup hiç bir kuşkuyla yer verilmeksizin özel bir çözüm vardır; ancak bu özel çözümü bulmak, en azından şimdilik, biraz güç görünüyor...

Biraz da Cebir Yapalım!

Konudan biraz uzaklaşmak gibi gözükecek belki ama, şimdi size $\frac{215}{48}$ rasyonel sayısının "sürekli kesir" olarak yazılışını anlatacağız [6]. Bu konuyu bilmiyorsanız üzülmene hiç gerek yok, söz konusu kavram ve uygulaması çok kolay olacaktır. İşin temeli tamsayı olmayan bir x pozitif rasyonel sayısı verildiğinde

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} \quad \text{ve} \quad x_1 > 1$$

olacak biçimde bir x_1 rasyonel sayısının varlığıdır. Burada $[|x|]$, x 'ten küçük ya da eşit olan en büyük tamsayıyı göstermektedir. Örneğin

$$\frac{215}{48} = 4 + \frac{1}{\frac{23}{2}}$$

gibi. Bunun ardından anlatılan olayı, sonuçta en sağ yanda bir tamsayının çarpımsal tersi gelene dek yinelersek, istenilen "sürekli kesiri" elde edebilirsiniz. Önceki örneği sürdürecektir, şu işlemleri yapmamız gerekecektir:

$$\frac{215}{48} = 4 + \frac{1}{\frac{23}{2}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{2}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}}$$

Böylece, sonuçta, istenen kesiri

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}}$$

diye bir sürekli kesire dönüştürmüş oluruz. Cebirciler yukarda vermiş olduğumuz sürekli kesiri, genellikle, $\frac{215}{48} = [4, 2, 11, 2]$ biçiminde gösterirler.

Bu yaptığımızla diyofant denklemlerinin ilişkisi nedir diye kendinize soru sorduğunuzu duyar gibiyim, ancak bunun nedenini öğrenmek istiyorsanız yazıyı okumayı sürdürmeniz gerekecektir. Bu iş için, $\frac{215}{48}$ sayısının "sürekli kesir" olarak yazılışında sağdaki gösterimde son kesir olan $\frac{1}{2}$ sayısının atılmasıyla elde edilen

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11}} = 4 + \frac{11}{23} = \frac{103}{23}$$

rasyonel sayısının (bir başka deyişle $[4, 2, 11]$ sayısının) bizim açımızdan, oldukça güzel bir sayı olduğunu gözlemlememiz gerekir. Gerçekten her iki sayıyı birbirinden çıkartırsak

$$\frac{215}{48} - \frac{103}{23} = \frac{1}{48 \cdot 23} \quad \text{ya da başka bir deyişle,} \quad 215 \cdot 23 + 48 \cdot (-103) = 1$$

bulunur. Son yazılan eşitlik, umarım, çok hoşunuza gitmiştir. Bunu $215x + 48y = 1$ denklemiyle karşılaştıracak olursanız, çözümünü aradığımız denklemin özel bir çözümünün $x_0 = 23$, $y_0 = -103$ olduğunu görebilirsiniz. Böylece denkleminizin genel çözümünü, t parametresi tüm tamsayıları dolaşmak koşuluyla, $x = 23 + 48t$, $y = -103 - 215t$ diye elde ederiz.

Şimdi de Bulmacamızı Çözmeye Girişir misiniz?

Size daha önceden söz vermiş olduğumuz gibi "Hindistan Cevizleri" bulmacasının çözümünü yapmayacağız, ancak çözüme giden yolu sanırım açmış durumdayız. Bunun için sizden şunları isteyeceğiz:

- * Doğrusal diyofant denklemlerinin genel biçimini, şimdilik $(a, b) = 1$ varsayımı altında, $ax + by = c$ diye vermiş olmamıza karşın, daha sonra, belirli koşullar altında, $ax + by = 1$ diyofant denklemini ile ilgileneceğimizi söylemiştik. O halde birinci sorumuz şöyle: Eğer $ax + by = 1$ diyofant denkleminin bir özel çözümünü biliyorsanız, $ax + by = c$ diyofant denkleminin özel bir çözümünü nasıl bulursunuz? Örneğin $215x + 48y = 11$ denkleminin özel bir çözümünü bulabilir misiniz?
- * $(1024, 15625) = 1$ olduğunu düşünürsek, $1024x - 15625t = 1$ diyofant denkleminin bir özel çözümünü bulabilir misiniz?

- * $1024x - 15625t = 11529$ diyofant denkleminin genel çözümünü bulabilir miniz? Sanırım sonsuz sayıda çözüm bulacağınıza göre, bunlar arasında en gerçekçi çözüm hangisi olacaktır?
- * “Hindistan Cevizleri” bulmacasının diğer çeşitlemelerini yapmaya ne dersiniz?
- * Diyofant denklemlerinin genel çözümleri tamsayılar içinden seçildiğine göre, bunların özel çözümleri arasında eksi tamsayılar da olabilir. Bu gerçeği aklınızdan çıkarmayarak, yazımızın başında söz etmiş olduğumuz “estetik çözümü” bulabilir miniz?
- * Şimdi $ax + by = c$ denkleminde $(a, b) = 1$ biçiminde almış olduğumuz kısıtlamayı yok edelim; yani $(a, b) = d$ ve $d \neq 1$ olsun. Bu durumda $a = Ad$ ve $b = Bd$ olup denkleminiz $d(Ax + By) = c$ biçimine girer. O halde $ax + by = c$ diyofant denkleminin en az bir çözümünün olması için gerek ve yeterli koşul nedir? Bulacağınız bu koşul altında, denklemin özel bir çözümü x^*, y^* ise, denklemin genel çözümünü nasıl bulursunuz?

KAYNAKÇA

- [1] S. Atabey, 1. Dereceden İki ve Üç Boyutlu Diofant Denklemleri, Matematik Dünyası, 5-1 (1995) 17-18.
- [2] S. Atabey, $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ Şeklindeki Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, 5-2 (1995) 19-20.
- [3] S. Atabey, İki Üslü Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, 5-4 (1995) 23-24.
- [4] M. Gardner, More Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin Books, London-Reading-Fakenham, 1971.
- [5] A. O. Gelfond, Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi (Diofant Denklemleri), Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı: 8, İstanbul, 1962.
- [6] A. Kaya, Sayılar Teorisine Giriş, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No: 112, İzmir, 1988.
- [7] B. M. Stewart, Theory of Numbers, The MacMillan Company, New York, 1952.
- [8] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Annals of Mathematics (2) 141-3 (1995) 443-551.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

UYARI: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.156. $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq c < 3$ olmak üzere, kenar uzunlukları a, b, c olan üçgenler içinde en büyük alana sahip üçgenin alanı kaç olabilir?

A.157. 11 111 den 99 999 'a kadar tüm beş basamaklı sayılar, her kart üzerinde birer sayı olmak üzere yazılmış ve bu kartlar rasgele (gelişigüzel) biçimde yanyana dizilmiştir. Bu şekilde elde edilen 444 445 basamaklı sayının 3' ün bir kuvveti olamayacağını kanıtlayınız.

A.158. $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bulunan α ve β sayıları için

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

A.159. $2^{\sqrt[13]{1998}} + 2^{\sqrt[13]{1998}} > 2^{\sqrt[13]{1998}+1}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

A.160. Tüm köşegen ve kenar uzunlukları rasyonel sayılar olan konveks $ABCD$ dörtgeni veriliyor. Köşegenlerin kesişim noktası O olmak üzere, AO doğru parçasının uzunluğunun bir rasyonel sayı olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.156. n herhangi bir doğal sayı olmak üzere,

$$n, n+1, n+2, \dots, n+37, n+38$$

dizisinde, rakamları toplamı 11 ile bölünen bir sayı bulunduğunu gösteriniz.

Y.157. Konveks $ABCD$ dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarlarının uzantıları üzerinde

$$\vec{BB'} = \vec{AB}, \vec{CC'} = \vec{BC},$$

$$\vec{DD'} = \vec{CD}, \vec{AA'} = \vec{DA}$$

sağlanacak biçimde B', C', D', A' noktaları alınmıştır. A', B', C', D' dörtgeninin alanının $ABCD$ dörtgenin alanının 5 katı olduğunu kanıtlayınız.

Y.158. $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$ sayısının tam kısmının 1998 ile bölünmesinden kalan nedir?

Y.159. Alfa burcunun 1001 gezegenden ibaret bir gezegenler sisteminin her gezegeninde bir astronom, kendi gezegenine en yakın olan gezegeni gözlemlemektedir. (Gezegenler birbirinden farklı uzaklıktalar.) Astronomların hiç birinin gözlemediği bir gezegenin varlığını kanıtlayınız.

Y.160. Alanı S ve çevre uzunluğu P olan konveks dörtgenin içine, yarıçapı $\frac{S}{P}$ olan bir daireyi (dışarıya taşmaksızın) yerleştirmek mümkündür; kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.146. Bir XY doğrusu köşeleri aynı olan üç dik açının kenarlarını sırasıyla A, B, C, D, E, F noktalarında kesiyorsa

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz. (Cemil Uğurlu, 1946).

Çözüm. Sözkonusu üç dik açının ortak köşesi O olmak üzere, $\hat{AOB} = \hat{DOE} = \alpha$, $\hat{BOC} = \hat{EOF} = \beta$ ve $\hat{COD} = \gamma$ diyelim.

$$\begin{aligned} |AB|/|BC| &= |OA| \sin \alpha / |OC| \sin \beta \\ |CD|/|DE| &= |OC| \sin \gamma / |OE| \sin \alpha \\ |EF|/|FA| &= |OE| \sin \beta / |OA| \sin(-\gamma) \end{aligned}$$

olduğundan çarpım (-1) olur.

(Çözenler: Ülkü Öztas)

A.147. (Soru dergide eksik basılmış; doğrusu:) Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin $\hat{B}$ açısı dik olup, $[BD]$ köşegenine A ve C 'den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F ise, $|BE| = |DF|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $\hat{FDC} = \beta$ olsun. $|DC| \cos \beta = |DF|$, $\hat{BAC} = \beta$ olacağından,

$$|AB|/|AC| = \cos \beta$$

ve dolayısıyla,

$$|DC| \cdot |AB|/|AC| = |DF|$$

olur. $\hat{HAC} = \alpha$ olsun, $\hat{DAC} = \beta - \alpha$ olur. $\sin(\beta - \alpha) = |DC|/|AC|$ ve $|AB|\sin(\beta - \alpha) = |BE|$ ve dolayısıyla, $|DC| \cdot |AB|/|AC| = |BE|$ bulunur. O halde $|BE| = |DF|$ 'dir.

(Çözenler: Cemal Özboğa)

A.148. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerine DBC ve EBC eşkenar üçgenleri kuruluyor. $|AD|^2 + |AE|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ olduğunu ispatlayınız. (a, b, c , ABC üçgeninin kenar uzunluklarıdır.)

Çözüm. $[BC]$ 'nin orta noktası F olmak üzere, DAE üçgeninde $[AF]$ kenarortay olacağından,

$$\begin{aligned} |AF|^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{|AD|^2 + |AE|^2}{2} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$|AD|^2 + |AE|^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

(Çözenler: Cemal Özboğa, Ülkü Öztas, Fatih Karakoç, Kadir Gençay, Hasan Karabıyık)

A.149. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ eğrisi bir elips ise, içindeki bölgenin alanını ABC cinsinden hesaplayınız. (Turgay Kaptanoğlu)

Çözüm. Yarı eksen uzunlukları a ve b olan elipsin içindeki bölgenin alanı πab dir. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ elipsinin eksen uzunluklarını bulmak için, uygun bir dönme ile denklem $A'X^2 + C'Y^2 = 1$ haline dönüştürülür; elipsin eksenleri X ve Y eksenleri olacağından yarı eksen uzunlukları $\frac{1}{\sqrt{A'}}$ ve $\frac{1}{\sqrt{C'}}$ dür; istenen alan $\frac{\pi}{\sqrt{A'C'}}$ olur. Öte yandan dönme sonrasında $B^2 - 4AC = (B')^2 - 4A'C'$ ve $B' = 0$ olduğundan; $A'C' = \frac{1}{4}(4AC - B^2)$ ve alan $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}}$ olarak bulunur.

(Çözenler: Ülkü Öztas, Hasan Karabıyık)

A.150. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsiyle $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ hiperbolünün, eğer

$$A^2 \leq a^2 \text{ ve } a^2 - b^2 = A^2 + B^2$$

ise (yani eşodaklı iseler), dik olarak kesiştiklerini gösterin. (Turgay Kaptanoğlu)

Çözüm. İki denklemi ortak çözerek elipsle hiperbolün kesişme noktaları (x_0, y_0) , $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ ve $(-x_0, -y_0)$ için

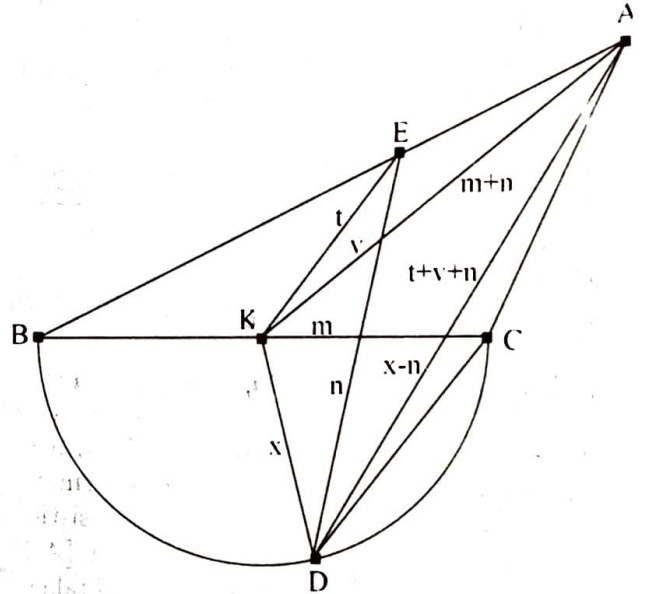
$$x_0^2 = \frac{a^2 A^2 (b^2 + B^2)}{a^2 B^2 + A^2 b^2}, \quad y_0^2 = \frac{b^2 B^2 (a^2 - A^2)}{a^2 B^2 + A^2 b^2}$$

buluruz. (x_0, y_0) noktasında elipsin eğimi $m_e = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}$, hiperbolün eğimi ise $m_h = \frac{B^2 x_0}{A^2 y_0}$ olduğundan; teğetlerin dik olması için gerek ve yeter koşul $-1 = m_e \cdot m_h$, yani $b^2 B^2 x_0^2 = a^2 A^2 y_0^2$ ve yukarıdan yerine koyup sadeleştirirsek $b^2 B^2 = a^2 A^2$ olarak bulunur.

(Çözenler: Cemal Özboğa, Ülkü Öztas)

Y.146. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı çap alınarak üçgenin dışına bir yarım çember çiziliyor. Bu çember yayının orta noktası D olmak üzere D 'den öyle bir doğru geçiriniz ki, yarım çember ve üçgenden oluşan konveks bölge alanca eşit iki bölgeye ayrılsın.

Çözüm.



ABC üçgeninin A köşesi, BC yayının D orta noktasıyla birleştirilir, elde edilen AD doğrusuna $[BC]$ 'nin K orta noktasından paralel çizilir, bu paralelin AB kenarını kestiği nokta E ile gösterilirse, DE aranan doğru olur.

(Çözenler: Ülkü Öztas)

Y.147. Dar açılı bir ABC üçgeninde yükseklik ayakları D, E, F olmak üzere DEF üçgeninin çevresi v , ABC üçgeninin çevresi $2u$ ise, $u \geq v$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. D, E, F noktaları ABC üçgeninin

yükseklik ayakları olmak üzere,

$$|AF| = b \cos A, |AE| = c \cos A$$

ve

$$\begin{aligned} |EF|^2 &= |AF|^2 + |AE|^2 - 2|AE||AF| \cos \alpha \\ &= a^2 \cos^2 A, \end{aligned}$$

$|EF| = a \cos A$ bulunur. Benzer biçimde, $|FD| = b \cos B$, $|DE| = c \cos C$.

$$v = a \cos A + b \cos B + c \cos C, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin A, \\ b &= 2R \sin B, \\ c &= 2R \sin C. \end{aligned} \quad (2)$$

(R , çevrel yarıçaptır)

$$v = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C),$$

$$v = 4R \sin A \sin B \sin C,$$

$$v = 4R \frac{a}{2R} \frac{b}{2R} \frac{c}{2R} = \frac{2abc}{4R} = \frac{2A(ABC)}{R}$$

yani, $v = \frac{2ru}{R}$.

$R \geq 2r$ olduğundan $v \leq u$ bulunur.

(Çözenler: Cemal Özboğa, Murat Aygen)

Y.148. Bir çember üzerinde ardışık A, B, C, D noktaları alınarak ADC ve DCB açılarınin açıortayları çiziliyor. Bu açıortayların kesiştiği K noktasından AB 'ye çizilen paralel doğru $[AD]$ ve $[BC]$ kenarlarını, sırasıyla, E ve F noktalarında kesiyor.

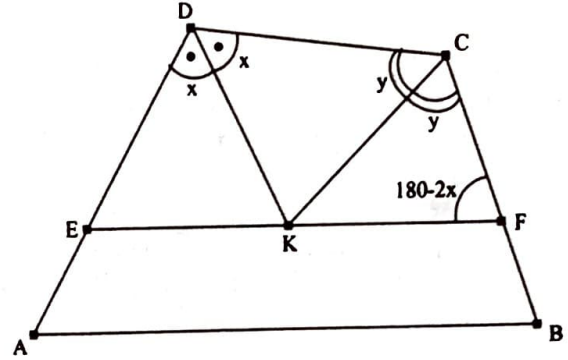
$$|EF| = |ED| + |FC|$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Sözkonusu açıortaylar K noktasında kesişsin. Herhangi x, y açıları için

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sin 2y &= 2 \sin(2y - x) \cos x \\ &+ 2 \sin(2x - y) \cos y, \end{aligned}$$

$\hat{D} = 2x$ ve $\hat{C} = 2y$ olmak üzere; $\hat{E} = 180 - 2y$, $\hat{F} = 180 - 2x$ dir. $\hat{E}K\hat{D} = 2y - x$, $\hat{C}K\hat{F} = 2x - y$ olur. K noktasının ED, DC, CF kenarlarına uzaklığı h olsun.



Bu takdirde,

$$\begin{aligned} &\frac{|EK| + |KF| - |ED| - |FC|}{h} \\ &= \frac{1}{\sin 2y} + \frac{1}{\sin 2x} - \frac{\sin(2y - x)}{\sin x \sin 2y} - \frac{\sin(2x - y)}{\sin y \sin 2x} \\ &= \frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x \sin 2y} \\ &- 2 \frac{\sin(2y - x) \cos x + \sin(2x - y) \cos y}{\sin 2x \sin 2y} = 0. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} |EK| + |KF| &= |ED| + |FC|, \\ |EF| &= |ED| + |FC|. \end{aligned}$$

(Çözenler: Ülkü Öztaş)

Y.149. $\sqrt{2}(xy + yz) \leq x^2 + y^2 + z^2$ eşitsizliğinin her x, y, z gerçel sayısı için doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her a, b gerçel sayısı için $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliğinden,

$$\sqrt{2}xy = 2x \frac{y}{\sqrt{2}} \leq x^2 + \frac{y^2}{2}$$

ve

$$\sqrt{2}yz = 2 \frac{y}{\sqrt{2}} z \leq \frac{y^2}{2} + z^2$$

çıkar; toplarsak istenen eşitsizlik bulunur. Eşitlik durumu $x = \frac{y}{\sqrt{2}}$ ve $\frac{y}{\sqrt{2}} = z$; yani $x = z = \frac{y}{\sqrt{2}}$ durumunda vardır.

(Çözenler: Cemal Özboğa, Ülkü Öztaş)

Y.150. Her n pozitif tamsayısı için $a_n = x^n + x^{-n}$ bir tamsayı ise, x reel sayısı hangi değerleri alabilir?

Çözüm. Önce $a_1 = x + \frac{1}{x}$ tamsayı ise geri kalan tüm $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ sayılarının da tam sayı olduğunu gözleyelim. $a_1^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a_2 + 2$ 'den $a_2 = a_1^2 - 2$, $a_1^3 = (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = a_3 + 3a_1$ 'den, $a_3 = a_1^3 - 3a_1$ olduğundan a_1 tamsayı iken a_2, a_3 ün de tamsayı olacağı görülür. Aynı yolla, binom açılımından

$$a_1^n = a_n + \binom{n}{1}a_{n-2} + \binom{n}{2}a_{n-3} + \dots$$

bağıntısı gözlemimizi kanıtlar.

$x + \frac{1}{x} = k, k$ tamsayı ise, $x^2 - kx + 1 = 0$, $x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ bulunur. x 'in gerçel olması istendiğinden; $k \geq 2$ tamsayıları için $x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ şeklindeki sayılar istenen sayılardır.

(Çözenler: Murat Aygen)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Matematik Dünyası Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü 07058 ANTALYA adresine,

30 Mayıs 1998 tarihine kadar gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- Konu sunuşları.
- Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

**Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi
Matematik Bölümü
07058 Antalya**

adresine gönderilecektir



Antalya

YILMAZ KOLEJİ



"... Zirveye uzanan çizgi"

- Seklin Deneyimli, Uzman Kadro**
Seklin Deneyimli, Uzman Kadro
- Her Dada Projeler**
Her Dada Projeler
- Üniversite Hazırlık**
Üniversite Hazırlık
- 10 Kişilik Özel Sınıflar**
10 Kişilik Özel Sınıflar
- İnternet Bağlantısı ve Multimedya**
İnternet Bağlantısı ve Multimedya
- Uluslararası Yarışmalara ve Olimpiyatlara Hazırlık**
Uluslararası Yarışmalara ve Olimpiyatlara Hazırlık
- Müzik Odası**
Müzik Odası
- Sosyal Aktiviteler**
Sosyal Aktiviteler
- Her Dörtü Spor Faaliyetleri**
Her Dörtü Spor Faaliyetleri
- Nezih bir Restaurant**
Nezih bir Restaurant
- Bilimsel Çalışma ve Araştırmaların Yapılacağı Laboratuvarlar**
Bilimsel Çalışma ve Araştırmaların Yapılacağı Laboratuvarlar
- Çağdaş, Modern Teknoloji ile Donatılmış Bilgisayar Laboratuvarı**
Çağdaş, Modern Teknoloji ile Donatılmış Bilgisayar Laboratuvarı
- 24 Saat Sıcak Su**
24 Saat Sıcak Su
- 4'er Kişilik Odalardan Oluşan Pansiyon Ortamı**
4'er Kişilik Odalardan Oluşan Pansiyon Ortamı
- Öğrencilerin Boyaları Kendileri ile Karıştırdığı Resim Atölyesi**
Öğrencilerin Boyaları Kendileri ile Karıştırdığı Resim Atölyesi
- Güvenilir, Güler yüzlü, Uzman Rehberlik Servisi ve Danışmanlık Hizmetleri**
Güvenilir, Güler yüzlü, Uzman Rehberlik Servisi ve Danışmanlık Hizmetleri
- daha ve dahasını eğitimin akışı içerisinde okulumuzda BULACAĞSINIZMI**
daha ve dahasını eğitimin akışı içerisinde okulumuzda BULACAĞSINIZMI

"BAZI ŞEYLER ZİRVEYİ ÇAĞRIŞTIRIR....."

ADRES: Çakırlar Cad. No: 215 07070-5 Konyaaltı / ANTALYA
Tel: 0(242) 227 71 65 (3 Hat) Fax: 0(242) 227 67 62 E-mail: yilmaz lisesi @ turk.net