

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyasından

Gezegenlerin Hareketi (II)

Turgay Kaptanoğlu

Fizikte Zeta-Fonksiyonu (I)

M. Gündüz Ikeda

Doğrudaş Noktalar ve Masmis Teoremi

İsmail Haltaş

Konveks Fonksiyonlar, Jensen Eşitsizliği ve Bazı Uygulamaları

İlham Aliyev

Fields Ödülleri ve Matematikteki Gelişmenin Sınırları

Nurettin Ergun

Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Eşitsizliğinin Kullanımı Üzerine)

İhsan Karabulut

Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavı

H. İbrahim Karakaş-İlham Aliyev

Problemler ve Çözümleri



MATEMATİK DÜNYASINDAN

Akdenizin güzel kenti Antalya'dan dergimizin 7.cildinin 3.sayısı ile yeniden karşınızdayız. Bu sayıda, ülkemizin pek çok matematikçisinin doğrudan ya da dolaylı olarak "hocası" olan M. Gündüz İkeda'nın, Cahit Arf 'ın anısına kaleme aldığı, matematik ve fiziğin temel problemlerine yeni yaklaşımlar öneren yazısını iki bölümde sunuyoruz. İçerdiği teknik konulara tümüyle yabancı olanların bile düşünce ufuklarında izler bırakacağına inandığımız bu yazıyı ilginç bulacağınızı sanıyoruz.

7.cildimizin ilk iki sayısında arzu ettiğimiz baskı kalitesine ulaşamadığımızdan basım yerimizi değiştirmek zorunda kaldık. Üçüncü sayının baskı kalitesinin diğer iki sayıdan daha iyi olacağını umuyoruz.

Matematik Dünyası'nın tanıtımı ve abone durumu ile ilgili olarak geçen sayıdaki dileklerimizi yineliyoruz. Ayrıca, ülkemizin tüm matematikçi ve matematikseverlerini dergimize yazı yazmaya çağırıyoruz.

Dördüncü sayımızda daha iyi koşullarda buluşmak dileğiyle...

MATEMATİK DÜNYASI

İ Ç İ N D E K İ L E R

Matematik Dünyasından	1
Gezegenlerin Hareketi (II) Turgay Kaptanoğlu	2
Fizikte Zeta-Fonksiyonu (I) M. Gündüz İkeda	9
Doğrudaş Noktalar ve Masmis Teoremi İsmail Halaş	14
Konveks Fonksiyonlar, Jensen Eşitsizliği ve Bazı Uygulamaları İlham Aliyev	17
Fields Ödülleri ve Matematikteki Gelişmenin Sınırları Nurettin Ergun	21
Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Eşitsizliğinin Kullanımı Üzerine İhsan Karabulut	23
Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavı H. İbrahim Karakaş-İlham Aliyev	25
Problemler ve Çözümleri	29

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Ünal Ufuktepe, Güvenç Arslan
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1998) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 2.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 1.750.000 TL. (Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 111.91.79 no'lu Prof. Dr. Timur Karaçay hesabına ya da İş Bankası Antalya Şubesi 6200.30000.2192647 no'lu Prof. Dr. Timur Karaçay hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@ufuk.lab.akdeniz.edu.tr

GEZEĞENLERİN HAREKETİ (II)

H. Turgay Kaptanoğlu

ODTÜ, Matematik Bölümü, ANKARA

D. Gözlemden Kurama

İlk olarak Kepler'in üç kanununun doğruluğunu kabul edelim. Bunun yanında Newton'ın ikinci kanununu da kabul edeceğiz. Bu kanunu en kısa olarak

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (7)$$

şeklinde ifade edebiliriz; burada m bir cismin kütlesi, $\mathbf{F}$ ona etki eden kuvvet ve $\mathbf{a}$ da bu kuvvet altında hareket eden cismin ivmesidir. Bu kısımda amacımız ivmeyi belirleyerek kuvvetin nasıl bir şey olması gerektiğine karar vermek; sonuçta kuvvet Newton'ın kütle çekim kanununun belirttiği gibi çıkacak. Bizim cisminiz tabii ki gezegenlerden herhangi biri, m de onun kütlesi. Kolayca unutulmuş bir nokta da (7)'de cisimlerin birer nokta gibi düşünülmesi gerektiği. Biz de gezegenin bütün kütlesini, kendi merkezinde yoğunlaşmış gibi düşüneceğiz; onun boyutlarını veya kendi merkezi etrafındaki hareketini hesaba katmayacağız. Gezegenlerin güneşe olan uzaklıkları onların boyutlarından o kadar fazla ki, onları birer nokta gibi düşünmek hesaplarda gözlenenden farkedilir bir sapmaya yol açmıyor.

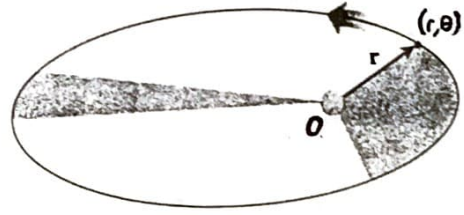
Newton'ın ikinci kanunu aslında yukarıda belirtildiğinden biraz daha genel olarak

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$$

şeklinde. Burada $m\mathbf{v}$ momentum'dur; yani Newton, hareket halindeki bir cismin momentumunun zamana göre değişme hızının cismin üzerindeki kuvvete eşit olduğunu söyler. Fakat cismin kütlesi değişmiyorsa, ki süre olarak yüzyılları aldığımızda bile gezegenlerin kütlesi yörüngelerini pek etkileyecek kadar değişmez, $dm/dt = 0$ olur ve bu kanun daha çok bilinen "kuvvet eşittir kütle çarpı ivme" haline dönüşür.

Bu kanunda $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{v}$ vektörler, m ise pozitif bir gerçel sayıdır. Buradan kanunun kısa halinde kuvvetin ve ivmenin aynı yönde olduğu çıkar. Kütlenin değişebildiği genel halde

böyle bir zorunluluk yoktur, çünkü yukarıda hızın ve ivmenin aynı yönde olması gerekmediğini görmüştük; o zaman kuvvet ikisi arasında bir yöndedir.



K1 bize her gezegenin bir düzlemde hareket ettiğini söyler. Bu düzlemde kutupsal koordinatlar [3] kullanalım; güneş O 'da olsun. Gezegenin koordinatlarına ise (r, θ) diyelim. Henüz x ve y eksenlerinin yönünü belirlememize gerek yok. Hem r , hem θ zamana bağlı olarak değişir; yani $r = r(t)$ ve $\theta = \theta(t)$ yazabiliriz. O 'dan (r, θ) 'ya giden konum vektörü $\mathbf{r}$ 'nin t zamanında süpürdüğü alanı $A(t)$ ile gösterirsek, **K2** kanunu, bunun değişme hızının, yani dA/dt 'nin sabit olduğu ifadesinden başka bir şey değildir. (6) yardımıyla bu iddiayı

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{sabit} = h \quad (8)$$

şeklinde yazabiliriz. Sonra her iki tarafın zamana göre türevini alarak

$$r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

buluruz. (5)'i göz önüne getirirsek, bu son denklemin sol tarafının, ivmenin θ yönündeki bileşeni olduğunu görürüz. O zaman gezegenin ivmesi $\mathbf{r}$ doğrultusundadır:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{b}_r. \quad (9)$$

Bu doğrultunun O ile (r, θ) 'yı, yani güneşle gezegeni birleştiren doğrultu olduğunu hatırlayalım.

İvme ile kuvvet aynı yönde olduğundan, Kepler'in ilk iki kanunundan, gezegenlerin üzerinde, güneşle onları birleştiren doğrultuda etki eden bir kuvvet olduğu ortaya çıkar. Güneşi O noktasında mihlanmış gibi düşündüğümüzden, böyle bir kuvvete *merkezsel kuvvet* denir.

K1 ayrıca gezegenin yörüngesinin elips olduğunu söyler. Güneşi O 'ya yerleştirmekle elipsin bir odağını seçmiş olduk. Şimdi x eksenini elipsin eksenini boyunca O 'dan bu odağa yakın olan tepe noktasına doğru gidiyor olarak alalım; y eksenini x ekseninin 90° saat yönünün aksi yönde çevrilmişidir. O halde yörüngenin kutupsal koordinatlardaki denklemi

$$r(1 + e \cos \theta) = ke \quad (10)$$

biçimindedir. Burada e elipsin dışmerkezliliğidir ve $0 < e < 1$ eşitsizliğini sağlar; O 'daki odağa karşılık gelen doğrultman ise $x = -k$ 'dir ($k > 0$) [3]. (10)'un iki tarafını zamana göre türevleyelim:

$$\frac{dr}{dt}(1 + e \cos \theta) - er \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

r ile çarpıp $r(1 + e \cos \theta)$ yerine ke yazalım:

$$ke \frac{dr}{dt} - er^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

e ile bölüp (8)'i kullanalım:

$$k \frac{dr}{dt} - h \sin \theta = 0.$$

Tekrar türev alalım:

$$k \frac{d^2r}{dt^2} - h \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

k ile bölüp tekrar (8)'i kullanalım:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{kr^2} \cos \theta.$$

$\cos \theta$ yerine (10)'dan elde edeceğimiz ifadeyi yazalım:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{kr^2} \left(\frac{k}{r} - \frac{1}{e} \right) = \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{ke r^2}.$$

(8)'den

$$r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = r \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 = \frac{h^2}{r^3}$$

çıkar. Son iki denklemi birbirinden çıkartalım:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{h^2}{ke r^2}.$$

Şimdi bu son denklemi (9) ile karşılaştırsak

$$a = -\frac{h^2}{ke} \frac{1}{r^2} b_r$$

buluruz. Newton'ın ikinci kanunu sayesinde ise

$$F = -\frac{h^2 m}{ke} \frac{1}{r^2} b_r$$

elde ederiz. Buradan iki önemli sonuç çıkar: Gezegenin üzerinde etki eden kuvvet, gezegenle güneşin arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Ve h^2, m, k, e, r^2 pozitif sayılar olduğundan, kuvvet b_r 'ye zıt yönde, yani gezegenden güneşe doğrudur.

Henüz h^2/ke sabiti hakkında pek bir şey bilmiyoruz, ama Kepler'in üçüncü kanununu kullanmadık daha. Önce elipste tepe noktaları arasındaki uzaklığa $2A$ dendiğini ve eksenini x eksenini olan elipsin tepe noktalarının $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ iken elde edildiğini hatırlayalım [3]. (Aslında A yerine a kullanılır genellikle, ama ivme vektörünün boyuyla karışmasın diye A 'yı tercih ettik.) O 'nun ve x ekseninin seçimi nedeniyle tepe noktaları sırayla gezegenin güneşe en yakın ve en uzak olduğu noktalardır; *günberi* ve *günöte* noktaları olarak adlandırılırlar. Buradaki r değerlerine r_o ve r_b diyelim. (10)'dan bunları bulup

$$2A = r_o + r_b = \frac{ke}{1-e} + \frac{ke}{1+e} = \frac{2ke}{1-e^2} \quad (11)$$

yazabiliriz. Elipsteki diğer bazı bağıntılar bu eşitlik yardımıyla

$$B^2 = A^2 - C'^2 = A^2 - (Ae)^2 = A^2(1-e^2) = Ake \quad (12)$$

verir. $r_o - r_b = 2C'$ bağıntısı da açıktır. Böylece

$$\frac{r_o - r_b}{r_o + r_b} = e \quad (13)$$

gerçeklenir. Öte yandan, gezegenin konum vektörünün güneşin çevresinde bir tam dönüş süresinde, yani T 'de süpürdüğü alan elipsin alanıdır, yani πAB 'dir [2]. Bu alanı aynı zamanda $hT/2$ diye de yazabiliriz; o halde

$$h = \frac{2\pi AB}{T} \quad (14)$$

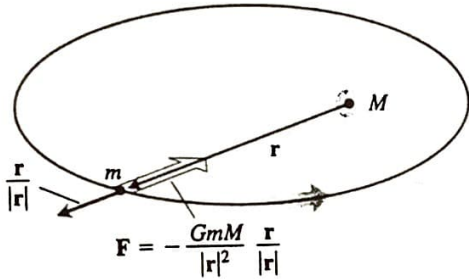
olur. Buradan da

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{ke} &= \frac{1}{ke} \left(\frac{2\pi AB}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{ke} \frac{A^2 B^2}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2}{ke} \frac{A^2 Ake}{T^2} = 4\pi^2 \frac{A^3}{T^2}\end{aligned}$$

elde ederiz. **K3** şimdi bize bu son ifadenin gezegenlerden bağımsız bir sabit olduğunu söyler. Halbuki h, k, e, A, T 'nin her biri gezegenden gezegegene değişir. Gene de sabitin bir güneş sisteminden diğerine değişebileceğini göz önünde tutmalıyız. O yüzden bu sabiti GM şeklinde yazabiliriz; burada M güneşin kütlesi ve G evrensel (yani değeri sadece kullanılan birim sistemine bağlı olan) bir sabittir. Sonuç olarak elimizde

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{b}_r \quad (15)$$

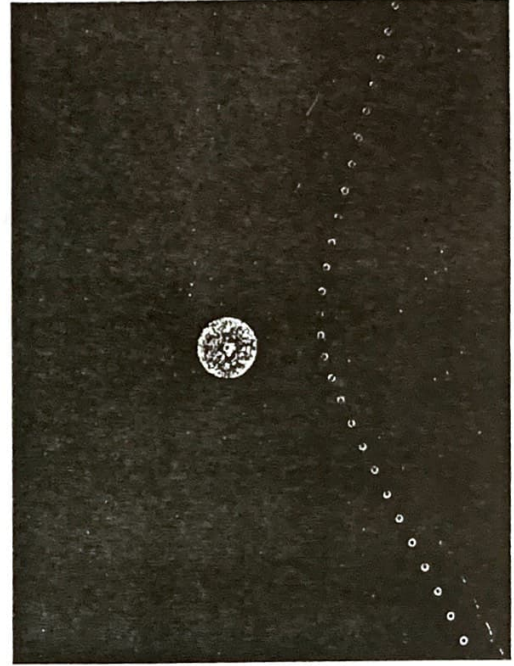
var. Tekrarlarsak, güneş gezegenler üzerinde, büyüklüğü güneşin ve gezegenin kütleleriyle doğru ve aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir kuvvet uygular; bu kuvvetin yönü gezegenden güneşe doğrudur (eksi işareti nedeniyle).



Dikkat edilirse bu kanunda gezegenin ve güneşin kütlelerinin yer değiştirmesi kuvveti değiştirmiyor. Buraya kadarki işlemleri gezegeni O 'ya ve güneşi (r, θ) 'ya koyarak yapsak, gene yukarıdaki denklemleri elde ediyoruz; üstelik bu sefer gezegen güneşi çekiyor sonucu çıkıyor. Dolayısıyla Newton'ın yaptığı gibi kütle çekim kanunu G 'ye ulaşıyoruz ki bunun matematiksel ifadesi gene (15) eşitliği.

Kuvvetin uzaklığın başka bir kuvvetiyle değil de karesiyle ters orantılı olmasının ilginç sonuçları vardır. Örneğin küpüyle ters orantılı olsaydı, bütün yörüngeler güneşin bulunduğu noktadan geçerdi, yani gezegenler eninde sonunda güneşe çekilip yok olurlardı. Ayrıca elektrik yüklü cisimlerin, bu yüklerin sonucu olarak birbirlerine uyguladıkları kuvvetin şiddeti de uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Ama şimdi

kuvvet elektrik yüklerinin aynı veya zıt olmasına bağlı olarak itme veya çekme olabilir. Cisimlerin hareketleri sırasında izledikleri yol da koninin diğer kesitleri olabilir. Örneğin artı yüklü bir cismin, gene artı yüklü ve sabit duran bir cisme yaklaşırken itme nedeniyle yolundan sapması, genellikle hiperbol bir yörünge üzerinde meydana gelir. Cisimler kütleleri nedeniyle ise birbirlerini hep çekerler.



E. Kuramdan Gözleme

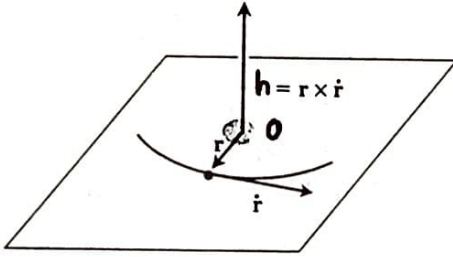
Kepler'in gözlemlerinin Newton'ın ikinci kanunu dediğimiz hareket ilkesiyle Newton'ın kütle çekim kanununu gerektirdiğini gösterdik. Bu gerektirme, Kepler kanunlarının Newton'ın kütle çekim kanunundan çıkan tek gezegen hareket sistemi olduğu anlamına gelmez; yalnızca Kepler kanunlarının Newton'ın kütle çekim kanunuyla tutarlı olduğunu gösterir. Newton'ın kütle çekim kanununu geçerli olarak kabul etmeden önce, onun gezegenlerle ilgili sonuçlarının Kepler'in gözlemleriyle aynı olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Bir kez daha Newton'ın ikinci kanununu (kuvvet eşittir kütle çarpı ivme) ve kuvvetin merkezsel ve çeken olduğunu kabul edeceğiz. Güneşi O 'ya yerleştirirsek, kuvvetin, güneşten gezegene doğru olan konum vektörünün zıt yönünde olması demektir bu. Kuvvetin ve ivmenin yönü aynı (7) olduğundan, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{r}$ paraleldir ve $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$ sağlanır. Aynı nedenden

dolayı $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ da doğrudur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

elde ederiz; yani $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ zamandan bağımsız olan sabit bir $\mathbf{h}$ vektörüdür. (İyi fizik bilenler için, $\mathbf{h}$, gezegenin birim kütle başına düşen *açısız momentum*udur.) Eğer $\mathbf{h} = 0$ olsaydı, $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{v}$ paralel olurdu ve $\mathbf{v}$ hareketin yönünü gösterdiğinden, gezegen güneşe doğru (veya güneşten uzaklaşan) bir çizgi üzerinde hareket ederdi. Dolayısıyla $\mathbf{h}$ sıfır vektörü olamaz. O zaman $\mathbf{r}(t)$ ve $\mathbf{v}(t)$ 'nin her biri t 'nin bütün değerleri için $\mathbf{h}$ 'ye diktir. Bu ise $\mathbf{r}(t)$ ve $\mathbf{v}(t)$ 'nin, $\mathbf{h}$ 'ye dik olarak tanımlanan düzlemde bulunması demektir; yani merkezsel kuvvet altında hareket, bir düzlemde meydana gelir. Bu Kepler'in birinci kanunu **K1**'in bir kısmıdır.



Şimdi z eksenini $\mathbf{h}$ ile aynı yönde seçelim. O zaman $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$ diyebiliriz ve gezegenin hareketi xy düzleminde gerçekleşir. Bu düzlemde kutupsal koordinatlar kullanalım; henüz $\theta = 0$ ışının yönünü belirlememiz gerekmiyor. (3), (4) ve (2)'yi hatırlayalım.

$$\begin{aligned} h\mathbf{k} &= \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (r\mathbf{b}_r) \times (\dot{r}\mathbf{b}_r + r\dot{\theta}\mathbf{b}_\theta) \\ &= r^2\dot{\theta}(\mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_\theta) = r^2\dot{\theta}\mathbf{k} \end{aligned}$$

eşitliklerinden $h = r^2\dot{\theta}$ elde ederiz. (Buradan h 'nin açısal momentum bölü kütle olduğu daha açık görülüyor.) (6) denkleminde $r^2\dot{\theta}$ 'nin alan süpürme hızının iki katı olduğunu biliyoruz. h sabit olduğundan, vardığımız sonuç Kepler'in ikinci kanunu **K2**'den başka bir şey değildir. Bu kanunu elde ederken kuvvetin sadece merkezsel olduğunu kullandık; onun uzaklığın karesiyle ters orantılı olduğunu kullanmadık.

Gezegenin yörüngesinin nasıl bir eğri olduğunu bulmak için Newton'ın kütle çekim kanununu, ikinci kanunuyla beraber bütün gücüyle kullanacağız. (15) ve (7)'deki kuvvetleri birbir-

lerine eşitlemek bize

$$m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r \quad (16)$$

verir. Zincir kuralından ve az önceki ikinci Kepler kanunundan

$$-\frac{GM}{r^2}\mathbf{b}_r = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{d\theta} \frac{h}{r^2}$$

yazalım. Buradan

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = -\frac{GM}{h}\mathbf{b}_r = \frac{GM}{h} \frac{d\mathbf{b}_\theta}{d\theta}$$

çıkar. G , M ve h sabit olduklarından

$$\mathbf{v} = \frac{GM}{h}\mathbf{b}_\theta + \mathbf{c}$$

buluruz; burada $\mathbf{c}$ sabit bir vektördür. Son eşitliği

$$|\mathbf{v} - \mathbf{c}| = \frac{GM}{h}$$

diye yazalım. İrlandalı William Hamilton'ın (1805-1865) bulduğu [1] bu sonuç şu anlama gelir: Gezegenin hız vektörünün ucu, dibi hep aynı noktada tutulursa, bir çember çizer. Gezegenlerinin yörüngelerinin çemberlerden meydana geldiği şeklindeki eski düşünceleri yıkan Kepler kanunlarından tekrar bir çember elde etmek biraz şaşırtıcı. Dikkat edilmesi gereken, çemberi çizenin konum vektörü değil, hız vektörü olduğu; konum vektörü tabii ki elips çizer.

Artık x ve y eksenlerinin yönünü belirleyebiliriz. y eksenini $\mathbf{c}$ vektörüyle aynı yönde seçelim; x eksenini de böylece y eksenini 90° saat yönünde çevrilerek bulunur. Şimdi pozitif bir e sabiti için

$$\mathbf{c} = \frac{GM\epsilon}{h}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v} = \frac{GM}{h}(\mathbf{b}_\theta + \epsilon\mathbf{j})$$

yazabiliriz. Sonra da $\mathbf{h}$ 'nin tanımından (1) ve (3)'ü kullanarak

$$\begin{aligned} h\mathbf{k} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{GM}{h}(\mathbf{b}_\theta + \epsilon\mathbf{j}) \\ &= (r\mathbf{b}_r) \times \left(\frac{GM}{h}\mathbf{b}_\theta \right) \\ &\quad + (r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}) \times \left(\frac{GM\epsilon}{h}\mathbf{j} \right) \\ &= \frac{GM}{h}r(1 + \epsilon \cos \theta)\mathbf{k} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi r için çözersek,

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + e \cos \theta} \quad (17)$$

sonucuna varırız. Bu ise dışmerkezliliği e olan bir koni kesitinin denklemdir [3]. Eğrinin bir odağı O 'dadır, yani güneş odaktadır; buna karşılık gelen doğrultmanı ise

$$x = \frac{h^2}{GM}$$

doğrusudur. Hangi eğri olduğu e 'nin değerine göre değişir. Gezegenlerin yörüngeleri elips (ya da onun özel hali çember) olmalıdır, çünkü gezegenler tekrar tekrar aynı yörüngede dönerler. Fakat güneş sistemine bir kez girip çıkan kuyruklu yıldızlar parabol veya hiperbol şeklinde yörüngeler izleyebilirler. İncelenen bir gök cismi için e 'nin değerini gözlem yapmadan bilmek imkânsızdır, çünkü yukarıdaki hesaplarda e matematiksel olarak herhangi bir pozitif sabit olabilir. Böylece Kepler'in birinci kanunu **K1**'in kalan kısmını da elde etmiş olduk.

Burada merak edilebilecek bir nokta gezegenlerin yörüngelerinin neden çember olmadığı. Bu sorunun cevabı gene dışmerkezlilik kavramında yatıyor. (17)'ye dikkatlice bakarsak yörüngelerin şeklini belirleyen e sayısı olduğunu görürüz. $e = 0$ ise yörünge çember, $0 < e < 1$ ise elips, $e = 1$ ise parabol ve $e > 1$ ise hiperboldür. Yani yörüngenin çember olması bir tek e değeri ile mümkünken, elips olması 0 ile 1 arasındaki sonsuz sayıdaki e değeri ile gerçekleşir. Yörünge herhangi bir anda çember olsa bile, en ufak bir etki (meteor çarpması, hatta uzun vadede güneşten gelen ışıma) gezegenin hızı ve/veya kütlelerini değiştirir ve gezegen farklı bir yörüngeye oturur. Yeni yörüngenin çember olması olasılığı dışmerkezlilik nedeniyle sıfırdır. Etkiden önce yörüngesi elips olan bir gezegen, etkiden sonra (güneş sisteminden kopmamışsa) dışmerkezliliği başka fakat gene elips olan bir yörüngeye geçer. Güneş sisteminin oluşumundan bu yana geçen milyarlarca yılda gezegenlerin yörüngelerini elips yapacak yeteri kadar etki vardır. Gene aynı nedenden dolayı parabol yörünge olası değildir; en ufak etkide hiperbole ya da elipse dönüşür.

Gezegenin yörüngesinin asal eksen yarı uzunluğu ile yörüngesini tamamlamak için harcadığı süre arasındaki ilişki göstereceğimiz son şey. Artık yalnız elips ya da çember olan yörüngelerle ilgileneceğiz, çünkü hiperbol ve

parabol için T anlamsız. Önce yörünge çemberse, denklemini

$$r = \frac{h^2}{GM}$$

halini alır ve sağ taraf gezegenin güneşe olan uzaklığı A 'dır. Bunu h^2 için çözeriz. $2h$ 'nin güneşten gezegene olan vektörün alan süpürme hızı (8) olduğunu ve çember için $2hT = \pi a^2$ (14) yazılabildiğini hatırlayalım; T tabii ki periyottur. O zaman

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{A^3 h^2}{4\pi^2 A^4} = \frac{h^2}{4\pi^2 A} = \frac{GM A}{4\pi^2 A} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

sağlanır. Sağ taraf sabitler ve güneşin kütlelerinin bileşimi olduğundan her gezegen için aynıdır. Yörünge gerçek bir elipsse, o zaman yörünge denkleminde

$$\frac{h^2}{GM} = ke$$

olmalıdır [3]; bunu h^2 için çözeriz. Gene (14)'ü ve (12)'yi hatırlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{A^3}{T^2} &= \frac{A^3 h^2}{4\pi^2 A^2 B^2} = \frac{A h^2}{4\pi^2 B^2} = \frac{A h^2}{4\pi^2 A k e} \\ &= \frac{h^2}{4\pi^2 k e} = \frac{GM k e}{4\pi^2 k e} = \frac{GM}{4\pi^2} \end{aligned} \quad (18)$$

sağlanır; yani bu sefer de bu oran her gezegen için aynıdır. Kepler'in üçüncü kanunu **K3**'ü de gösterdik.

F. Sayısal Büyüklükler

Yazının başlarında uzaklıkları hesaplayabildiğimizi söylemiştik. Gök cisimlerinin kütlelerini hesaplamaya gelince ise evrensel G sabitinin değerini bilmekten başka çare yok. G 'nin değeri, kütlesi bilinen çok iri cisimlerin çekme güçleri laboratuvarında hassas olarak ölçülerek bulunur. Metre-kilogram-saniye birim sisteminde $G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ 'dir.

Dünyanın günberi ve günöte uzaklıkları sırayla $r_b = 1.47 \times 10^{11}$ ve $r_o = 1.52 \times 10^{11}$ metredir. (11)'den dünyanın yörüngesinin asal eksen yarı uzunluğu $A = 1.495 \times 10^{11}$ metre çıkar. (13)'ten dünyanın yörüngesinin dışmerkezliliğini $e = 0.0167$ olarak buluruz. Görüldüğü gibi dünyanın yörüngesi çembere çok yakındır. Gezegenlerden yörüngesinin dışmerkezliliği en büyük ikisi Pluton ve Merkür'dür; sırayla 0.2481 ve 0.2056 ile. Diğerlerinininki hep 0.1'den küçüktür. Dünya yörüngesini 365.256 günde, yani $T = 3.1558 \times 10^7$ saniyede tamamlar. O zaman güneş sistemi için $A^3/T^2 = 3.355 \times 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2$ elde

ederiz. Diğer gezegenlerin "yıl"larını ölçüp bu oran sayesinde güneşe olan yaklaşık uzaklıklarını hesaplayabiliriz. Asıl ilginç (18)'den güneşin kütlesini $M = 1.99 \times 10^{30}$ kilogram olarak buluruz.

Dünyanın yörüngesindeki hızı yaklaşık

$$v = \frac{2\pi(1.495 \times 10^{11})}{3.1558 \times 10^7} = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$$

olur. (6)'dan dünyanın konum vektörünün alan süpürme hızının yaklaşık

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r v = \frac{1}{2} (1.495 \times 10^{11}) (3 \times 10^4) \\ &= 2.24 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

olduğu ortaya çıkar. Son iki hesapta kolaylık olsun diye dünyanın yörüngesini çember gibi düşündük ve ikincisinde $\dot{r} = 0$ aldık.

Dünyanın kütlesini hesaplamak için ise güneş ve dünya yerine dünya ve ayı koyarız ve $m = 5.975 \times 10^{24}$ kilogram buluruz. Ayın kütlesi de 7.354×10^{22} kilogramdır. Meraklısı için yaklaşık olarak, dünyanın çapı 1.28×10^7 metre, ayın çapı 3.48×10^6 metre, ayın dünyaya olan ortalama uzaklığı 3.8×10^8 metre, ayın dünya çevresinde bir dönüş yapma süresi ise 2.36×10^6 saniyedir.

G. Bir Düzeltme

Bütün bu yaptıklarımız aslında tam anlamıyla doğru değil, çünkü bazı küçük etkileri ihmal ettik. Örneğin güneşi O 'da çakılı varsaydık; onu hareket edebilen bir cisim olarak görmedik. Yani aslında tek cisimli (gezegen) bir hareket sisteminin çözümünü bulduk. Halbuki Newton'ın kütle çekim kanunundan dolayı her bir gezegen de güneşi kendisine doğru çeker. Neyse ki bu etkiyi hesaba katmak kolay; bunu görelim [4].

Sabit bir O noktası alalım; r_1 bu noktadan gezegene, r_2 bu noktadan güneşe, r de güneşten gezegene giden vektör olsun. $r = r_1 - r_2$ bağıntısı açıktır. Newton'ın kütle çekim kanunu ile ikinci kanununda kuvvet için verilen ifadeleri gezegen ve güneş için ayrı ayrı birbirine eşitlersek,

$$m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{b}_r \quad (19)$$

$$M \frac{d^2 r_2}{dt^2} = +\frac{GMm}{r^2} \mathbf{b}_r \quad (20)$$

buluruz. Bu iki denklemin taraf tarafa toplamı $m\ddot{r}_1 + M\ddot{r}_2 = 0$ olur ve bu

$$m\dot{r}_1 + M\dot{r}_2 = \text{sabit}$$

verir. (İyi fizik bilenler için bu denklem, güneşle gezegenin toplam doğrusal momentumunun sabit olduğunun, yani sistemin doğrusal momentumunun *korunduğunun* ifadesidir.)

İki cismin kütle merkezinin konum vektörü $\mathbf{R}$,

$$(m + M)\mathbf{R} = m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2$$

ile verilir. Bu eşitliği R için çözer ve onun zamanına göre türevini alırsak,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}_1 + M\dot{\mathbf{r}}_2}{m + M} = \frac{\text{sabit}}{m + M} = \text{sabit}$$

olduğunu görürüz; yani kütle merkezi sabit hızla hareket eder. Gezegen veya güneş için bu söz konusu değildir. Koordinat sistemimizi kütle merkezi ile birlikte hareket edecek şekilde seçebiliriz. Hatta O noktasını kütle merkezi olarak alabiliriz. Vardığımız sonuç, güneşin ve gezegenin ortak kütle merkezleri etrafında döndükleridir. Aslında bu yapacağımız çok küçük bir düzeltme, çünkü güneş sisteminin kütle merkezi, güneşin dev boyutları ve kütlesi nedeniyle güneşin içinde bulunuyor!

(19) ve (20)'yi sırayla m ve M ile bölelim ve sonra birbirinden çıkartalım. O zaman

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \frac{GMm}{r^2} \mathbf{b}_r$$

buluruz.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$$

koyarsak,

$$\mu \mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{b}_r$$

elde ederiz. μ 'ya *indirgenmiş kütle* denir. μ , m 'den de M 'den de küçüktür. Fakat bu son denklem daha önce gezegenin hareket denkleminin olan (16) ile hemen hemen aynı; tek fark sol tarafta m yerine μ bulunması. Başka bir deyişle, ikisi de hareket eden iki cisimli sistem μ yardımıyla tek cisimli bir sisteme indirgenmiş oldu. μ da m gibi bir sabit olduğundan, bu denklemin incelenmesi de (16) gibi aynı sonucu verecek; yani gezegenin güneşe göre bağlı hareketinin bir odağında güneşin bulunduğu koni kesiti biçimindeki bir yörüngede meydana geldiğini.

Kullandığımız diğer bir sadeleştirme, her defasında güneş ve yalnız bir gezegeni ele almaktır.

Tabii güneş sistemi çok daha karışık ve gezegenler, uydular, meteorlar, kuyruklu yıldızlar, ... birbirlerini kütleleri nedeniyle, aralarındaki uzaklığın karesinin tersiyle orantılı bir kuvvetle çekiyorlar. Ama ne yazık ki yalnızca güneş, dünya ve ayı hesaba katan bir inceleme bile bu yazının ve bu derginin amacını ve seviyesini çok aşan zorlukta matematiksel problemler doğuruyor; biz de bunları okuyucuya bırakıyoruz. Şunu söylemekle yetinelim. Birbirlerini kütle çekim kanununa göre çeken sadece üç cismin üç boyutlu uzaydaki hareketi (bu derginin daha önceki sayılarında bahsi geçen) *kaos* olayının ilk gözlemlendiği örnektir. Yani birbirlerine çok yakın yerlerde ve hızlarla harekete başlayan cisimlerin yörüngeleri tahmin

edilemeyecek derecede birbirinden farklı olabilir.

KAYNAKÇA

- [1] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*, 3. baskı, Addison-Wesley, Don Mills, 1995.
- [2] H. T. Kaptanoğlu, *Koninin Kesitleri (I)*, *Matematik Dünyası*, 6, sayı 4, 1-7 (1996).
- [3] H. T. Kaptanoğlu, *Koninin Kesitleri (II)*, *Matematik Dünyası*, 6, sayı 5, 1-9 (1996).
- [4] C. Kittel, W. D. Knight & M. A. Ruderman, *Mechanics: Berkeley Physics Course—Volume 1*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Analiz ve Cebirde İlginç OLİMPİYAT PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

Prof. Dr. Halil İ. KARAKAŞ
Doç. Dr. İlham ALİYEV



© TÜBİTAK 1998

Matematikseverlere Müjde

Dergimiz Yayın Kurulu üyelerinden, matematikseverlerin "Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri" adlı kitaptan da tanıdığı Halil İ. Karakaş ve İlham Aliyev'in hazırladığı

Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri

adlı kitap TÜBİTAK tarafından yayınlandı. 306 sayfadan oluşan kitapta *Ön bilgiler ve Gösterimler* in sunulduğu başlangıç bölümünden sonra problemler ve çözümlerinin verildiği bölümlerin başlıkları şöyle:

- Fonksiyonlarla İlgili Problemler
- Polinomlarla İlgili Problemler
- Diziler ve Limitler
- Eşitsizlik ve Ekstremler Problemleri
- Denklemler
- Fonksiyonel Denklem Problemleri
- Cebir Problemleri
- Karışık Problemler.

Fiatı: 400.000 TL.

İsteme Adresi: Atatürk Bulvarı No: 221
Kavaklıdere-06100 Ankara

FİZİKTE ZETA-FONKSİYONU (I)

M. Gündüz İkedâ

TÜBİTAK Feza Gürsey Enstitüsü, PK 6, Çengelköy, 81220-İSTANBUL

Cahit Bey ve Feza Bey'in anısına...

5 yıl önce Türk Fizikçisinin temsilcisi Prof. Dr. Feza Gürsey 'i kaybettikten sonra, geçen Aralık ayında da Türk Matematikçisinin en büyük öncüsü Ord. Prof. Dr. Cahit Arf 'ı kaybettik. Bu vesile ile sizlere, Cahit Bey ve Feza Bey ile ilgili bazı anılarımı, onların ilgi alanı olan iki branşın gelişme akışını da kısmen katarak, sunmak istiyorum.

1. Fizikte Zeta-Fonksiyonu ...

1970 'lerde bir gün ODTÜ Fizik bölümünde çay odasında idim. Ne için oraya gittiğimi hiç hatırlamıyorum, fakat orada tesadüfen Feza Bey ile karşılaştım, herhalde Yale 'den izinli olarak ODTÜ 'de kalıyordu. O zaman Feza Bey bana "Biz fizikte zeta-fonksiyonu kullanmak istiyoruz" dedi. Acaba hangi tipten zeta-fonksiyonunu nasıl kullanmayı düşündüğünü tam soracakken, araya başka bir iş mi girdi hatırlamıyorum, bu konuşma daha ilerlemeden orada kaldı. Ancak Feza Bey 'in sözünün arkasında Cahit Bey 'in fikrinin de olabileceğini hissettim. Zira o günlerde Cahit Bey ile aramızda geçen konuşmalarda buna benzer konular da geçmişti: Sadece rasyonel sayıların fiziksel ölçümde kullanıldığı, dolayısıyla Q rasyonel sayı-cisminin aritmetiğinin şu veya bu şekilde fiziksel teoriler için de yansması gerektiği, Q 'daki aritmetiği en iyi saklayanın da zeta-fonksiyonu olduğu v.s.

Bugünkü matematikte zeta-fonksiyonları pek çoktur. Riemann zeta-fonksiyonundan başlayıp, sırasıyla Dirichlet-, Dedekind-, Hecke-, Artin- v.s. gibi bir sürü zeta-fonksiyonları, ve karakterleri de içeren L-fonksiyonları var, hatta verilen cebrik bir varieteye ait zeta-fonksiyonları, örneğin Hasse-Weil-, veya "motivik" zeta-fonksiyonları, çok sofistike olanlar da var. Ancak, aralarındaki ortak bir nokta, bunların hepsinin, ya zamanın en seçkin matematikçilerinin adlarını taşımaları, veya onların yaptıklarıyla doğrudan doğruya ilgili olmalarıdır. Sadece bu gerçek bile, zeta-fonksiyonlarının matematik içindeki önemini yeter derecede göstermektedir. Fakat matematikçiler için, bilhassa genç iddialı olanlar için, bu tip fonksiyonlarla ilgilenmelerinde daha somut bir sebep, zeta-fonksiyonları ile ilgili hala çözülmemiş çok önemli ve zor bir çok problemin bulunmasıdır, ve bu problemler genç yetenekli matematikçilerin bunları çözmek için kurduğu hayallerini ve giriştiği gayretlerini kamçulamaya devam etmektedir.

Bu problemlerden bir örnek olarak, Riemann zeta-fonksiyonunun sıfır noktaları ile ilgili problemi ele alalım. $\zeta(z)$ Riemann zeta-fonksiyonu, herkesin analiz dersinde gördüğü gibi, z kompleks değişkeninin $Re(z)$ reel kısmının 1 'den büyük olduğu halde, $\sum_n n^{-z}$ yakınsak serisi ile tanımlanmaktadır. Ancak $\zeta(z)$ fonksiyonunun tanımını bütün kompleks düzlem üzerine genişletmek mümkündür, yani $\zeta(z)$ bütün kompleks düzlem üzerinde tarif edilmiş bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, $z = 1$ noktasında 1. dereceden bir kutup noktasına sahip olup, bu noktadaki rezidüsü 1 'dir, ama diğer bütün noktalarda regülerdir. Ayrıca

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(z\pi/2) \Gamma(1-z) \zeta(1-z)$$

şeklindeki bir fonksiyonel denklemi de sağlamaktadır, burada $\Gamma(z)$, gama fonksiyonudur. Bu fonksiyonun sıfır noktalarına gelince, $z = -2n$ ($n = 1, 2, \dots$) noktaları onun sıfır noktalarıdır ($\zeta(z)$ 'nin

bariz sıfır noktaları), fazla olarak, bariz olmayan bütün sıfır noktalarının $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ şeridi içinde olduğu bilinmektedir.

1859 'da yayınlanmış olan "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) adlı makalesinde, Riemann 'ın ortaya attığı bazı açık sorulardan çoğu sonradan çeşitli matematikçiler tarafından çözülmüş olmasına rağmen, en sonuncusu olan şu soru hala "Riemann hipotezi" adı altında (ne pozitif ne de negatif olarak) çözülmeyen ortada kalmaktadır: $\zeta(z)$ fonksiyonunun $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ şeridi içinde bulunan bütün sıfır noktaları $\operatorname{Re}(z) = 1/2$ doğrusu üzerinde midir? Bu arada, bu doğru üzerinde gerçekten sonsuz adette $\zeta(z)$ 'nin sıfır noktalarının bulunduğu tespit edilmiştir (örneğin, Titchmarsh: Riemann Zeta-function kitabına bakınız), ayrıca bu şerit içindeki bütün sıfır noktalarını kapsayan daha dar bölgelerin bulunmasına da çalışılmaktadır. Fakat bugüne kadar matematikçilerin bütün gayretlerine rağmen, bu soru hala çözülmeyen kalmaya devam etmektedir. E. Artin tarafından kendisinin doktora tezi (1924) içinde, kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann hipotezinin bir analogisi ortaya atıldığı vakit, zamanın matematik camiası tarafından büyük ilgi ile karşılanmasının nedeni de, yukarıda belirtilen durumdan kaynaklanmaktadır. 1945 yılında bu sorun en nihayet A. Weil tarafından çözüldüğünde zamanın Matematik camiasında "Artık esas Riemann hipotezinin de çözülme zamanı yaklaştı" görüşü yaygın olmuştu. Ancak bunun yanıltıcı olduğunu, o zamandan bugüne neticesiz geçen 50 yıl göstermiştir.

Cahit Bey 'in Göttingen'de büyük başarıyla doktorasını tamamlayıp, 1938 'de yurdumuza dönüşünden sonraki 15 yıl içinde, kendisinin bir müddet, yukarıda adı geçen (ve zamanın en aktüel konusu olan) "kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann hipotezi" ile ilgilenmiş olduğu muhtemeldir. Nitekim henüz yayınlanmamış olan bir makalesinde, F_q gibi sonlu bir cisim üzerinde (kompleks değişkenli) bir fonksiyon kurulmakta, ve bu fonksiyonun sıfır noktalarının hepsinin $\operatorname{Re}(z) = 1/2$ doğrusu üzerinde olduğu gösterilmektedir. Kendisinin, bu şekilde kurulan fonksiyon ile $F_q(x)$ rasyonel fonksiyon-cisminin kongruens zeta-fonksiyonu arasındaki bağlantıyı inceledikten sonra, daha genel duruma geçip, yani $F_q(x)$ cisminin sonlu mertebeden cisim genişlemelerinin haline geçip, "kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann hipotezi" 'ni ispatlamayı amaçlamış olabileceğini tahmin ediyorum. Pek kimsenin bilmediği bu çalışmanın yeniden incelenmesi çok yerinde olur kanısındayım.

2. Adeller ve İdeller

Herhalde Riemann-Roch Teoreminin adını duymuşsunuzdur. $\mathbb{C}$ kompleks sayı cismi üzerindeki Cebrik Fonksiyonlar Teorisinde (yani Kompleks Değişkenli Cebrik Fonksiyonlar Teorisinde) en önemli sonuçlardan biri olarak kabul edilen bu teorem kabaca şöyle özetlenebilir: $\mathcal{R}$ gibi kapalı (=kompakt) bir Riemann yüzeyi verilmiş kabul edelim. $\mathcal{R}$ üzerindeki analitik fonksiyonların hepsi, $\mathbb{C}$ üzerinde bir cebrik fonksiyon-cismi oluşturur. Şimdi $\{p_i | i = 1, \dots, r\}$ ve $\{q_j | j = 1, \dots, s\}$ gibi birbirine yabancı olan ($\mathcal{R}$ üzerindeki) iki nokta kümesi verildiğini, ayrıca $\{n_i | i = 1, \dots, r\}$ ve $\{m_j | j = 1, \dots, s\}$ gibi negatif olmayan tamsayılardan oluşan iki küme de verilmiş olduğunu varsayalım. Bu takdirde D ile $\{\{p_i\}, \{q_j\}; \{n_i\}, \{m_j\}\}$ ailesini gösterelim (böyle bir aileye "divizör" adı verilmektedir), ve $n(D) = \sum_i n_i - \sum_j m_j$ sayısına da D divizörünün derecesi diyelim. Ayrıca $\mathcal{R}$ üzerindeki analitik fonksiyonlardan

- (i) her $i (= 1, \dots, r)$ için, P_i noktasında en fazla n_i -inci dereceden bir kutup noktasına sahip olup,
- (ii) her $j (= 1, \dots, s)$ için q_j noktasında en az m_j -inci dereceden bir sıfır noktasına sahip olan

bütün fonksiyonları göz önüne alalım. O zaman bu fonksiyonlar $\mathbb{C}$ üzerinde $\mathcal{L}(D)$ ile gösterilen bir vektör uzayı oluşturur, ve $\mathcal{L}(D)$ uzayının $\mathbb{C}$ üzerindeki boyutu *sonludur*. Bu boyutu $l(D)$ işareti ile gösterelim. Bu takdirde ($\mathbb{C}$ üzerindeki) Riemann-Roch teoremi, herhangi D divizörü için geçerli olan, $n(D)$ ile $l(D)$ arasındaki bağlantıyı vermektedir. Bu bağlantı içinde, yalnız $\mathcal{R}$ Riemann yüzeyine bağlı olan, $\mathcal{R}$ 'nin cinsi adı verilen $g(\mathcal{R})$ gibi bir (negatif olmayan) tamsayı da yer almaktadır. Kabaca $\mathcal{R}$

Riemann yüzeyinin delik sayısı olarak da bilinen $g(\mathcal{R})$ sayısı, $\mathcal{R}$ yüzeyinin topolojik yapısını belirtmektedir.

1936 yılında F. K. Schmidt, herhangi katsayı-cismi üzerindeki cebrik fonksiyon-cisimleri için de Riemann-Roch teoreminin geçerli olduğunu, daha önce Dedekind-Weber tarafından geliştirilmiş yöntemleri daha da genişleterek ispatlamıştır. Ancak 1938 yılında A. Weil, "Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen" (J. für die reine u. angew. Math. 179) adlı çalışmasında, *adel* (= "adèle") kavramını kullanarak, aynı sonucu bambaşka bir yolla ispatlamayı başarmıştır. Sayılar Teorisi ve bununla ilgili sahalarda, hatta bu günlerde Teorik Fizikte bile, çok önemli bir yer işgal eden bu kavram üzerinde, kısa da olsa, durulması okuyucumuz için yararlı olur kanısındayım.

F gibi bir cisim üzerinde tanımlanmış, reel değerli φ gibi bir fonksiyon, her $a, b \in F$ için

$$(1) \varphi(a) \geq 0, \text{ ve } \varphi(a) = 0 \iff a = 0$$

$$(2) \varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$(3) \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

şartlarını sağlıyorsa, φ fonksiyonuna F 'nin bir valuasyonu adı verilmektedir. Ancak bariz bir hali gözönüne almamak için, " $\exists a \in F$, öyle ki $\varphi(a) \neq 0$ ve 1 " koşulunu da kabul ediyoruz. Not olarak belirtelim:

(i) F 'nin φ gibi bir valuasyonu verildiğinde, her $a, b \in F$ için $d_\varphi(a, b) = \varphi(a - b)$ koyarsak, F üzerinde bir metrik elde ederiz;

(ii) φ, φ', F 'nin iki valuasyonu olmak üzere, d_φ ve $d_{\varphi'}$ metrikleri F üzerinde aynı topoloji meydana getiriyorlarsa, " φ ve φ' eşdeğerdir" diyoruz.

Ostrowski 'nin temel teoremlerinden, özel olarak $F = \mathbb{Q}$ (rasyonel sayı cismi) halinde, $\mathbb{Q}$ 'nun herhangi bir valuasyonu için, onun ya $(|\cdot|_\infty$ ile gösterilen) mutlak değer fonksiyonuna, ya da $(|\cdot|_p$ işaretiyle gösterilen) p -adik valuasyonuna eşdeğer olduğunu görürüz. Not olarak hatırlayalım: p bir asal sayı olmak üzere, $a = A/B$ (A, B tamsayılar, ve $B \neq 0$) şeklindeki sıfırdan farklı bir rasyonel sayının, p -adik valuasyona göre değeri, $|a|_p = (1/p)^{\nu(A) - \nu(B)}$ olarak tanımlanmaktadır, burada $\nu(A)$ sayısı, $p^{\nu(A)}|A$, fakat $p^{\nu(A)+1} \nmid A$ olacak şekilde seçilir, ve $\nu(B)$ sayısı da aynı koşul altında seçilecektir. $a = 0$ için ise, $|0|_p = 0$ konulacaktır. Bu şekilde tanımlanan p -adik valuasyonun en belirgin özelliği, kendisinin, yukarıda (2) ile gösterilen eşitsizlikten daha çok kuvvetli olan şu eşitsizliği sağlamasıdır: Her $a, b \in \mathbb{Q}$ için $|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$. $|\cdot|_\infty$ mutlak değer fonksiyonu (valuasyonu) için bu kuvvetli eşitsizliğin geçerli olmadığı hemen görülür, dolayısıyla $|\cdot|_\infty$ valuasyonu ile $|\cdot|_p$ valuasyonunun birbirlerinden çok farklı olduğu anlaşılmaktadır. Bu ayrımı şu şekilde ifade ediyoruz: $|\cdot|_\infty$ Archimedean bir valuasyon, fakat $|\cdot|_p$ non-Archimedean bir valuasyondur. Böylece $\mathbb{Q}$ cismi için iki ayrı tipten valuasyonların var olduğunu gördük. Şimdi $\mathbb{Q}$ 'nun bir valuasyonu verildiğinde, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir metrik tanımlandığına göre, $|\cdot|_\infty$ valuasyonuna bağlı metriğe göre $\mathbb{Q}$ 'nun kapanışını düşünebiliriz. Reel sayıların rasyonel sayılardan Cantor Yöntemi ile nasıl kurulduğunu hatırlarsak, bu kapanışın $\mathbb{R}$ reel sayı cismi olduğunu anlarız.

Buna kısaca $\mathbb{Q}$ 'nun $|\cdot|_\infty$ 'a göre kapanışı diyelim. Benzer şekilde $|\cdot|_p$ 'ye göre kapanışını da düşünebiliriz. Ancak $\mathbb{Q}_p$ işaretiyle gösterilen, ve p -adik sayı cismi adı verilen bu kapanış, $\mathbb{R}$ 'den bambaşka karakterdedir. Örneğin, $\{1/p^n | n = 0, 1, \dots\}$ dizisi $\mathbb{R}$ içinde 0 'a yakınsar, fakat $\mathbb{Q}_p$ içinde ise yakınsak değildir; $\{p^n | n = 0, 1, \dots\}$ dizisi ise, $\mathbb{R}$ içinde yakınsamaz, fakat $\mathbb{Q}_p$ içinde ise 0 'a yakınsar.

Yukarıda $\mathbb{Q}$ cisminin çeşitli değişik kapanışlarının var olduğunu görmüş olduk. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ cisminin özellikleri, bilhassa aritmetik özellikleri, arasında $\mathbb{Q}$ 'nun $\mathbb{R}$ içindeki altküme olarak bakıldığında

belirgin olanlardan başka, kendisinin Q_p içindeki altküme olarak görüldüğünde daha açık şekilde belli olanlar da vardır. Şu halde Q 'nun özelliklerini incelemek için, $\mathbf{R}$ ve Q_p cisimlerinin hepsini yanyana koyarak, yani $\mathbf{R} \times \Pi_p Q_p$ kartezyen çarpımını gözönüne alarak, bunun içine gömülmüş Q cisminin durumunu araştırmamız, ayrı ayrı incelemekten daha yararlı olabilir. Bu basit fikir, "adel" ve "idel" kavramlarının arkasında yatan düşüncedir.

Bundan sonraki ifadeleri basitleştirmek için, p işaretiyle ya ∞ veya herhangi bir asal sayıyı göstereceğiz. O zaman $\Pi_p Q_p$ ile yukarıdaki $\mathbf{R} \times \Pi_p Q_p$ kartezyen çarpımını daha basit bir şekilde gösterebiliriz. Şimdi $\Pi_p Q_p$ içindeki her eleman, p -inci koordinatı Q_p içinde bulunan bir vektör olarak düşünebiliriz. Şu halde bunu $\Pi_p a_p$ ($a_p \in Q_p$) şeklinde ifade edelim, bazen de daha kısa olsun diye, $\Pi_p a_p$ yerine $\hat{a}$ gösterimi kullanılacaktır. Bu elemanlar arasında toplama ve çarpma işlemlerini

$$\Pi_p a_p + \Pi_p b_p = \Pi_p (a_p + b_p) \text{ ve } (\Pi_p a_p)(\Pi_p b_p) = \Pi_p (a_p b_p)$$

eşitlikleri ile tanımlarsak, $\Pi_p a_p$ kartezyen çarpımının bir halka oluşturduğunu görürüz. Ayrıca her p (∞ veya bir asal sayı) için, ve her $\hat{a} = \Pi_p a_p$ elemanı için, $|\hat{a}|_p = |a_p|_p$ koyarak,

$$(i) |\hat{a} + \hat{b}|_p \leq \max\{|\hat{a}|_p, |\hat{b}|_p\} \text{ (sadece } p \text{ 'nin bir asal sayı olduğu halde),}$$

$$(ii) |\hat{a}\hat{b}|_p = |\hat{a}|_p |\hat{b}|_p$$

bağıntılarının geçerli olduğunu da anlarız.

Ancak $\Pi_p Q_p$ halkası gayemiz için fazla büyüktür. Daha uygun bir althalkasına geçmek amacıyla, sadece şu koşulu sağlayan elemanları gözönüne alacağız: Sonlu sayıda p dışında daima $|\hat{a}|_p \leq 1$ 'dir. İşte bu koşulu sağlayan ($\Pi_p Q_p$ içindeki) her elemana **adel** adı verilmektedir. Yukarıdaki (i) ve (ii) bağıntılarından, bütün adellerin bir halka oluşturduğunu hemen görürüz, ve buna Q cismine ait adeller halkası adını verip, A_Q işaretiyle göstereceğiz. A_Q adeller halkası içindeki (çarpım işlemine göre) tersinir her adele de **idel** adını vereceğiz. İdellerin hepsinin bir grup oluşturduğu açıktır. Q 'ya ait idellerin grubunu da I_Q ile göstereceğiz.

Şimdi Q cismini A_Q içine nasıl yerleştirebiliriz? Buna geçmeden önce şuna dikkat edelim: Sıfırdan farklı her $a \in Q$ için, sonlu sayıda p dışında daima $|a|_p \leq 1$ 'dir, diğer taraftan her p için $|0_p| = 0$ 'dır. Şu halde, herhangi $a \in Q$ için $\tilde{a} = (\dots, a, \dots)$ (her koordinatı a) elemanı bir adeldir, yani $\tilde{a} \in A_Q$ 'dur. Üstelik, her $a, b \in Q$ çifti için, $(a+b) = \tilde{a} + \tilde{b}$, ve $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b}$ olur. Dolayısıyla $a \in Q$ ile $\tilde{a} \in A_Q$ adelinin aynı şey olarak görerek (identification), Q cismi A_Q içine yerleştirildi diyebiliriz. Fazla olarak sıfırdan farklı her $a \in Q$ için şu bağıntının geçerli olduğuna da işaret edelim:

$$\Pi_p |a|_p = 1 \quad (*)$$

burada p , ∞ ve bütün asal sayılar üzerinde değişecektir.

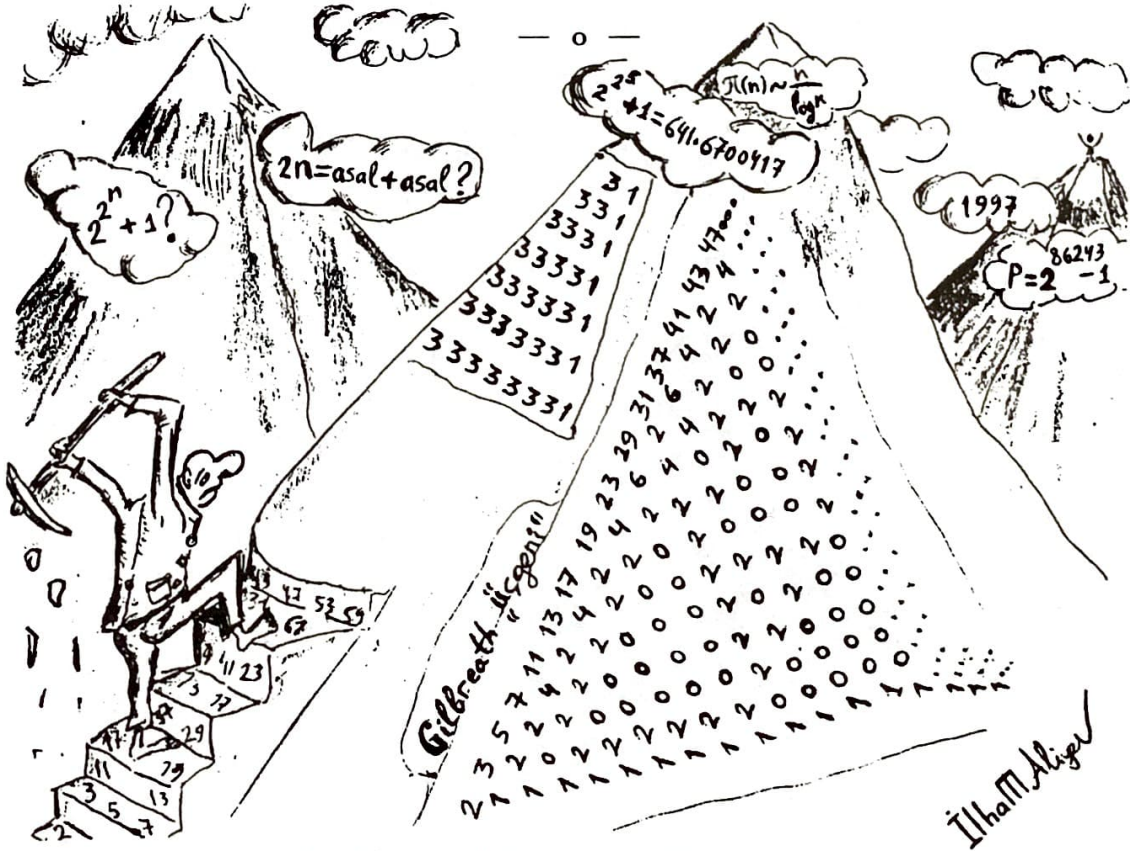
Şimdiye kadar, basit olsun diye, sadece Q cismi için yaptıklarımızı, herhangi cebrik sayı cismi veya cebrik fonksiyon cismi için genişletmek olanaklıdır. Genel olarak F gibi bir cisime ait adeller halkasını A_F ile, ideller grubunu da I_F ile göstereceğiz.

A. Weil 'in yukarıda belirtilen makalesinde yaptıklarını özetleyecek olursak, kabaca şöyledir. K ile, k gibi herhangi bir katsayı cismi üzerindeki bir cebrik fonksiyon cismini göstermek üzere, ilk olarak, K 'nın divizörleri yardımıyla A_K üzerine bir k -lineer topoloji konulmuş, ve A_K^* dual uzayı ($= A_K$ üzerindeki k -değerli, sürekli, k -lineer fonksiyonların k -vektör uzayı) içinde $K^\perp$ altuzayına ait olan her fonksiyonele " K 'nın diferansiyeli" adı verildikten sonra, $K^\perp$ altuzayının gerçekte K -vektör uzayı olduğu, üstelik bu uzayın K -boyutunun 1 olduğu gösterilmiştir: $\dim_K K^\perp = 1$. Bu durum, Cahit Bey'in deyişine göre, (uygun "identification" altında) K 'nın, A_K içinde "self-dual" olduğunu göstermektedir. (Not: Daha doğrusu, "self-annihilating" veya "self-killing" dememiz

gerekir.) Bundan sonra, K 'nın divizörleri için derece ve boyut fonksiyonlarını içeren hesaplar yapılarak, ayrıca yukarıda belirtilen "diferansiyel" kavramı ile daha somut bir kavram olan Hasse-diferansiyeli arasındaki bağlantı da açıklanarak, F. K. Schmidt 'in formüle ettiği Riemann-Roch Teoremi elde edilmektedir. (Not: A. Weil 'in fikrine dayanan Riemann-Roch teoreminin bir ispatı, "K. Iwasawa: Algebraic Functions, AMS Translation Series (1990)" kitabında bulunmaktadır. Bu kitap, sadece cebrik fonksiyonların cebrik teorisini kapsamakla kalmayıp analitik teorisini de, yani kapalı Riemann yüzeyler teorisini de, çok net bir şekilde içermektedir. Kanımca bu sahada az bulunan çok iyi bir kitaptır.)

1953 yılında Mainz Bilimler Akademisinde yayınlanmış olan "Über die Analogon des Riemann-Rochschen Satzes in Zahlkörpern" adlı makalesinde, Cahit Bey, o zamana kadar genelde cebrik fonksiyon cisimlerinde formüle edilip, ispatlanmış olan Riemann-Roch teoreminin sayı cisimlerinde analojisini formüle etmiş, ve ispatlamıştır. Bu makaledeki ana fikir, yukarıda belirtilen "Riemann-Roch Teoremi = K 'nın A_K içinde self-dual oluşu" ilkesine dayanmaktadır.

Bu vesile ile J. T. Tate 'in 1950 yılında hazırladığı doktora tezinden de bahsetmek yerinde olacaktır. Tate, "Fourier Analysis in Number Theory and Hecke's Zeta-functions" adını taşıyan, ve çok yankı uyandıran bu tezde, K gibi bir cebrik sayı-cismine ait A_K adeller halkası ve I_K ideller grubu üzerinde harmonik analiz yaparak, daha önce Hecke tarafından oldukça yapay bir şekilde ortaya atılan Hecke L -fonksiyonlarını, lokal L -fonksiyonlarının yardımıyla sistematik bir şekilde elde etmeyi başarmıştır (Not: Tate'in tezi, "J. W. Cassels ve A. Fröhlich: Algebraic Number Theory" kitabının son kısmında bulunmaktadır). Bu makale içinde de sayı cisimleri için Riemann-Roch Teoremi formüle edilip, ispatlanmaktadır. Ancak bu makaledeki teorem, formülasyonu ve ispatının yöntemi bakımından, Cahit Bey 'in teoreminden oldukça farklı gözükmemekte olup, aralarındaki bağlantı hiç apaçık değildir. Bu iki teorem arasındaki münasebetin incelenmesi kanımca çok ilginç bir konudur.



Asal Sayılar Dünyasından Görüntüler

DOĞRUDAŞ NOKTALAR VE MASMİS TEOREMİ

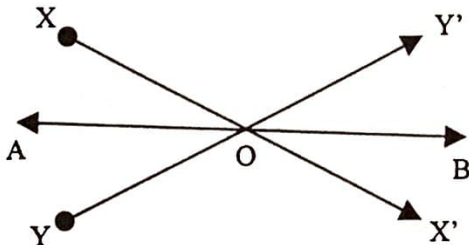
İsmail Halaş

ODTÜ, Fizik Bölümü, ANKARA

Geometriye ilgisi olanların, özellikle olimpiyat problemleri ile uğraşmaktan zevk alan geometriseverlerin sıkça karşılaştıkları bir ifade “bahsedilen üç noktanın doğrusal olduğunu gösteriniz” dir. Üç noktanın doğrusallığını ispatlamak için bir çok yöntem kullanılabilir. Ben bu yöntemlerden; hak ettiği kadar meşhur olamamış, fakat pek çok meşhur yöntemden daha kullanışlı bir tanesini size tanıtmaya çalışacağım.

Bu metot genel olarak üçgende Sinüs Teoremi ve Seva’ nın trigonometrik hali üzerinde kurulmuştur. İspatlar, Masmis olarak adlandırıldığım bir teorem sayesinde kolayca çözülebilmektedir. Bu metodun kullanımı ile ilgili sorulara geçmeden önce kısaca nasıl bir yöntem izleyeceğimizden bahsedelim.

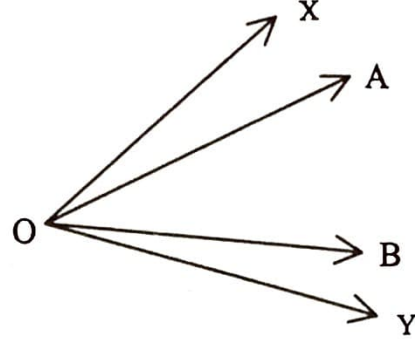
Durum 1. Şekil 1’de görüldüğü gibi XX' ve YY' ışınları bir O noktasında kesişsin ve A, O, B noktalarının doğrusal olduğunu ispatlamamız istensin.



Şekil 1

Durum 2. Şekil 2’de görülen O, A ve B noktalarının doğrusal olduğunu ispatlamamız

istensin.



Şekil 2

1. Durum için yapmamız gereken yalnızca $\hat{XOA} = \hat{X'OB}$ veya $\hat{YOA} = \hat{Y'OB}$ olduğunu görmemiz, 2. durum için ise, $\hat{XOA} = \hat{XOB}$ veya $\hat{YOA} = \hat{YOB}$ olduğunu göstermemizdir.

Şimdi Masmis Teoremini tanıtalım:

Masmis Teoremi. $\alpha, \alpha', \theta, \theta'$ pozitif açılar; $\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$ ve

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \theta'}$$

koşullarını sağlarsa, $\alpha = \alpha'$ ve $\theta = \theta'$ eşitlikleri de geçerlidir.

İspat.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \theta'} \Rightarrow \sin \alpha \sin \theta' = \sin \theta \sin \alpha'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \theta') - \cos(\alpha + \theta')) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \alpha') - \cos(\theta + \alpha'))$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos(\alpha - \theta') - \cos(\theta - \alpha') - \cos(\theta + \alpha') .$$

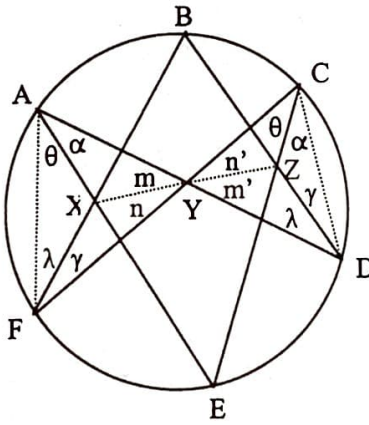
$\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$ olduğu verilmiş, buradan $\alpha - \theta' = \alpha' + \theta$ ve $\cos(\alpha - \theta') = \cos(\alpha' + \theta) =$

$\cos(\theta - \alpha')$ olur. $\cos(\alpha - \theta') = \cos(\theta - \alpha')$ eşitliğini yerine yazarsak $\cos(\alpha - \theta') = \cos(\theta - \alpha')$ bulunur. Buradan ise $\alpha + \theta' = \theta + \alpha'$ veya $\alpha + \theta' = -\theta + \alpha'$ bulunur. $\alpha, \theta, \theta', \alpha' > 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\alpha + \theta' = \theta + \alpha'$ bulunur. $\alpha + \theta = \theta' + \alpha'$ olduğunu biliyorduk, bu iki eşitlikten $\alpha + \alpha'$ ve $\theta = \theta'$ bulunur. Böylece ispatımız tamamlanır.

Şimdi Masmis Teoremini de kullanabileceğimiz örnek sorulara geçelim. İlk olarak Pascal Teoremi olarak bilinen bir doğrusallık sorusuna kolay bir ispat sunacağız.

Pascal Teoremi. Bir çemberin üzerinde çakışık olmayan ve verilen sırasıyla dizilmiş altı nokta A, B, C, D, E ve F olsun. $AE \cap BF = X$, $BD \cap CE = Z$, $AD \cap CF = Y$ olmak üzere X, Y, Z doğrusaldır.

İspat.



Şekil 3

İlk olarak çembersellikten eşit olan açılar yazalım. Şekil 3' de görüldüğü gibi Durum 1' den $m = m'$ veya $n = n'$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\triangle AYF$ ve $\triangle CYD$ üçgenlerinde Seva Teoreminin trigonometrik halini yazdığımızda,

$$\triangle AYF \rightarrow \frac{\sin n \sin \lambda \sin \alpha}{\sin m \sin \gamma \sin \theta} = 1$$

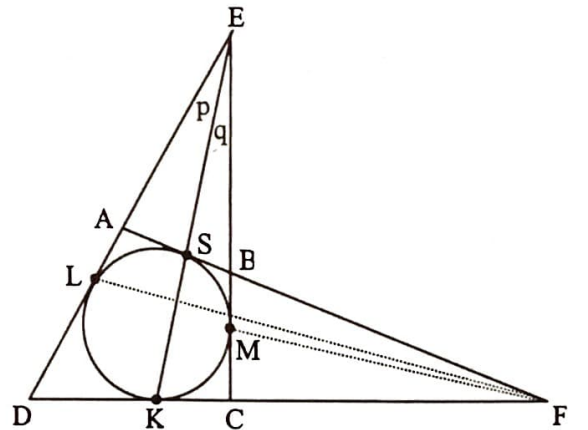
$$\triangle CYD \rightarrow \frac{\sin n' \sin \lambda \sin \alpha}{\sin m' \sin \gamma \sin \theta} = 1.$$

İki ifadeyi eşitlersek $\frac{\sin n}{\sin m} = \frac{\sin n'}{\sin m'}$ bulunur. Ayrıca $m + n = m' + n'$ ve $m, n, n', m' > 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda Masmis Teoreminden $m = m'$ ve $n = n'$ olur ve ispatımız tamamlanır.

İkinci örneğimiz 1996 Bilim Olimpiyatları Matematik hazırlama programı içerisinde yapılmış olan Kocaeli Yaz Kampı Kampsonu sınavının altıncı sorusudur.

Soru. $ABCD$ teğetler dörtgeninde $AD \cap BC = E$, $AB \cap DC = F$ ve içteğet çemberin AB, BC, CD ve DA kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla S, M, K ve L 'dir. E, S, K noktaları doğrusal ise, F, M, L noktalarının da doğrusal olduğunu gösteriniz.

İspat.



Şekil 4

Bu soru da Durum 2 ile benzeşmektedir. $\angle AFL = \alpha'$, $\angle DFL = \theta'$ dersek, $\alpha = \alpha'$ veya $\theta =$

θ' olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\triangle AEB$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin p}{\sin q} = \frac{AS}{BS} \cdot \frac{\sin A}{\sin B}$$

$\triangle AEC$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin p}{\sin q} = \frac{DK}{CK} \cdot \frac{\sin D}{\sin C}$$

bulunur. $\triangle BFC$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \theta'} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$\triangle AFD$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{AL}{DL} \cdot \frac{\sin A}{\sin D}$$

bulunur. İlk iki denklem eşitlendiğinde ve $AS = AL$, $BS = BM$, $DK = DL$, $CK = CM$ eşitlikleri yerlerine yazıldığında,

$$\frac{AL}{BM} \cdot \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{DL}{CM} \cdot \frac{\sin D}{\sin C}$$

bulunur. Buradan ise,

$$\frac{AL}{DL} \cdot \frac{\sin A}{\sin D} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

bulunur. Yani

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \theta'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

elde edilir. $\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$ olduğunu biliyoruz ve açılar pozitif. Böylece Masmis Teoreminden $\alpha = \alpha'$ ve $\theta = \theta'$ bulunur, ispat tamamlanmış olur.

Örneklerde de görüldüğü gibi Masmis Teoremi ve noktaların doğrusallığını ispatlamada kullanılabilecek bu metot bazı önermelerin ispatlarına çok basit çözümler getirmektedir. Bu metodun okuyucular tarafından benimsenip kullanılmasını umuyorum.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

Matematiği büyük bir kente benzetmek mümkündür; bu kentin kenar mahalleleri durmadan genişlemekte ve nüfusu artmakta, buna paralel olarak, zaman-zaman, her defasında daha açık ve görkemli bir planla, kent merkezi yeniden inşa ve restore edilmekte, zik-zaklı ve yıpranmış döngülerle dopdolu eski mahalleler yıkılıp kentin dışına doğru daha geniş, daha düz ve rahat caddeler açılmaktadır...

N. Bourbaki

KONVEKS FONKSİYONLAR, JENSEN EŞİTSİZLİĞİ VE BAZI UYGULAMALARI

İlham Aliyev

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Bu yazımızda Fonksiyonlar Teorisinin ilginç konularından biri olan konveks fonksiyonların bazı özellikleri ile tanışacak ve bu fonksiyonların en ilginç özelliklerinden biri olan Jensen eşitsizliğinin ispatını göreceksiniz. Bildiğiniz bir çok ünlü eşitsizliklerden (Aritmetik-Geometrik Ortalamalar, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz, Young vb) daha genel olan Jensen eşitsizliğinin kullanılmasıyla çözülebilen bir sıra problem örnekleri ile tanışmaktan memnun olacağınıza inanıyoruz.

Ayrıca, bu konuda bilgilerini daha da genişletmek isteyen sayın okurumuza [2], [3] kaynaklarına bakmasını tavsiye ediyoruz.

Tanım: Bir aralıkta sürekli olan f fonksiyonu bu aralıktan alınmış her x ve y için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (1)$$

eşitsizliğini sağlarsa, sözkonusu fonksiyona bu aralıkta dışbükey (yukarıya doğru konveks) fonksiyon denir.

(1) 'deki eşitsizliğin tersini sağlayan sürekli fonksiyonlar ise içbükey (aşağıya doğru konveks) diye adlanır.

Türevlenen fonksiyonların konveks olup olmadığını belirlemek için şu test kullanılabilir:

f' türevi artan değilse, f fonksiyonu dışbükeydir;

f' türevi azalan değilse, f fonksiyonu içbükeydir.

Bu sonunculardan da konvekslik için ikinci türev testi çıkar: Verilen aralığın her noktasında $f''(x) \geq 0$ ise, f fonksiyonu dışbükeydir.

Örneğin, $y = \ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında, $y = \sin x$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında, $y =$

$-x^2$ fonksiyonu tüm reel ekseninde dışbükeydir. (Bu fonksiyonların grafiklerine göz atarsanız, "dışbükeylik" teriminin kullanılma nedenini anlarsınız.)

Konveksliğin tanımını verir vermez önemli bir uyarı verelim. Eğer f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında sınırlıysa ve her $x, y \in [a, b]$ için (1) eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu (a, b) -açık aralığında otomatikman sürekli olur. Burada f fonksiyonunun sınırlılık koşulu çok önemlidir: Her noktada süreksiz, hiç bir aralıkta sınırlı olmayan, ancak buna karşın (1) eşitsizliğini her x, y için sağlayan fonksiyon örnekleri vardır [1]. Bu konuyu burada tüm ayrıntılarıyla vermek olanağımız olmadığından biz konveks fonksiyonun tanımında sürekliliği bir koşul olarak veriyoruz.

Şimdi, konveks fonksiyonlar için iyi bilinen Jensen eşitsizliğini bir teorem şeklinde verip ispatlayalım.

Teorem 1 (Jensen Eşitsizliği). f fonksiyonu dışbükey olsun ve $p_i \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) sayıları $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu takdirde konvekslik (dışbükeylik) aralığından alınmış her $x_1, x_2, \dots, x_n$ için

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \geq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) \quad (2)$$

olur.

Not 1. (-1) ile çarpma konveksliğin türünü değiştirdiğinden, içbükey fonksiyonlar için (2) eşitsizliği tersine döner.

Not 2. Negatif olmayan p_i 'ler için

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

koşulunu *eklemeden* (2) eşitsizliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right) \geq \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (2')$$

($\frac{p_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} + \dots + \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 1$ olduğuna dikkat ediniz.)

Not 3. $n = 2$ halinde (2) eşitsizliği şu biçimde yazılabilir ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2'')$$

Teoremin aşağıda verdiğimiz ispatı, sürekli fonksiyonlar için (1), (2) ve (2'') eşitsizliklerinin denk olduğunu gösterir.

İspat. İspatı üç aşamada yapalım.

I. $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ alalım ve her $x_1, x_2, \dots, x_n$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \\ \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \end{aligned} \quad (3)$$

olduğunu görelim. İlk önce tümevarım uygulayarak (3) eşitsizliğini $n = 2^m, (m \in \mathbb{N})$ biçimindeki sayılar için yapalım. $m = 1$ için konveksliğin tanımındaki (1) eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $n = 2^m, (m \geq 1)$ için (3) 'ün doğruluğunu varsayalım ve $n = 2^{m+1}$ için kanıtlayalım.

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^m}}{2^m}$$

ve

$$x'' = \frac{x_{2^m+1} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m}$$

dersek, o halde $n = 2^{m+1}$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \\ = f\left(\frac{x' + x''}{2}\right) \geq \frac{f(x') + f(x'')}{2} \\ \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \end{aligned}$$

olur. Böylece, (3) eşitsizliği $n = 2^m$ biçimindeki n 'ler için doğrudur. Şimdi, n sayısı $2^m, (m \in \mathbb{N})$ biçiminde olmasın. Bu takdirde $2^m > n$ sağlanacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ alalım ve

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

diyelim. O halde

$$A = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (2^m - n)A}{2^m}$$

kesrinin payında tam 2^m tane toplanan bulunduğundan (n tane x_i 'ler ve $(2^m - n)$ tane

A) ve 2^m tane toplanan halinde (3) eşitsizliği sağlandığından

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &= f(A) \\ &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + (2^m - n)A}{2^m}\right) \\ &\geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + (2^m - n)f(A)}{2^m} \end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &\geq \\ \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \end{aligned}$$

elde edilir. (Akıllıca düşünülmüş bu yöntem dahi matematikçi Cauchy'ye aittir).

II. Şimdi, her $0 < \alpha < 1$ ve her x, y için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2'')$$

eşitsizliğinin sağlanacağını görelim. Önce α rasyonel sayı olsun:

$$\alpha = \frac{k}{n}, \quad (k, n \in \mathbb{N}, k < n).$$

O halde (3) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= f\left(\frac{k}{n}x + \left(1 - \frac{k}{n}\right)y\right) \\ &= f\left(\frac{kx + (n - k)y}{n}\right) \\ &\geq \frac{kf(x) + (n - k)f(y)}{n} \\ &= \frac{k}{n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)f(y) \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \end{aligned}$$

Böylece, her rasyonel $0 < \alpha < 1$ için (2'') eşitsizliği doğrudur. Öte yandan, her irrasyonel sayıya rasyonel sayılar dizisi ile yaklaşabileceğimizden ve f sürekli olduğundan, (2'') eşitsizliği her irrasyonel (ve dolayısıyla, her reel) $\alpha : 0 < \alpha < 1$ sayısı için de doğru olacaktır.

III. Nihayet, esas amacımız olan (2) eşitsizliğini ispatlayalım. Kolayca anlaşılabileceği üzere, $n = 3$ durumunu incelemek yeter. (Genel hal tümevarımla kanıtlanabilir.)

Negatif olmayan p_1, p_2, p_3 sayıları

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & f(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) \\ &= f(p_1x_1 + (1-p_1) \cdot \frac{p_2x_2 + p_3x_3}{1-p_1}) \geq \dots \\ & [(2'') \text{ eşitsizliğini } \alpha = p_1 \text{ için uyguluyoruz!}] \\ & \dots \geq p_1f(x_1) + (1-p_1)f(\frac{p_2}{1-p_1}x_2 + \frac{p_3}{1-p_1}x_3) \end{aligned}$$

olur. Sonuncu ifadeye yine (2'') eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} & f(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) \\ & \geq p_1f(x_1) + (1-p_1)[\frac{p_2}{1-p_1}f(x_2) + \frac{p_3}{1-p_1}f(x_3)] \\ &= p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + p_3f(x_3) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Not 4. Teoremda p_i 'ler üzerine konulmuş

$$p_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ve

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

kısıtlaması çok önemlidir. Eğer bu kısıtlamalar kalkarsa, (2'') eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar sınıfı çok fakir olur ve sadece, afin-doğrusal fonksiyonları (yani, $y = ax + b$ fonksiyonlarını) içerir. Bu çok ilginç sonucu bir teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 2. Eğer f fonksiyonu

$$f(px + (1-p)y) \geq pf(x) + (1-p)f(y) \quad (4)$$

eşitsizliğini her $x, y, p \in \mathbf{R}$ için sağlarsa, $f(x) = ax + b$ sağlanacak biçimde a ve b sabitleri vardır.

İspat. $c = px + (1-p)y$ diyelim. $p \neq 0$ için

$$x = \frac{1}{p}c + (1 - \frac{1}{p})y$$

olur ve (4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & f(x) = f(\frac{1}{p}c + (1 - \frac{1}{p})y) \\ & \geq \frac{1}{p}f(c) + (1 - \frac{1}{p})f(y) \end{aligned}$$

ve sonuncudan da her $p > 0$ için

$$f(c) \leq pf(x) + (1-p)f(y)$$

olur. Yani,

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y). \quad (5)$$

(4) ve (5) eşitsizliğinden, her $p > 0$ ve $x, y \in \mathbf{R}$ için

$$f(px + (1-p)y) = pf(x) + (1-p)f(y) \quad (6)$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikte $p = x, a = 1, b = 0$ koyarsak, her $x > 0$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= xf(1) + (1-x)f(0) \\ &= [f(1) - f(0)]x + f(0) \\ &= ax + b \end{aligned}$$

olur. Şimdi de (6) 'da $1-p = x, a = 0, b = 1$ koyarsak, her $x < 1$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)f(0) + xf(1) \\ &= [f(1) - f(0)]x + f(0) \\ &= ax + b \end{aligned}$$

olur. Böylece, her $x \in \mathbf{R}$ için $f(x) = ax + b$ dir.

Jensen eşitsizliğinden bir çok ünlü eşitsizlik, örneğin, Aritmetik-Geometrik Ortalama, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz, Young ve diğerleri, özel hal olarak elde edilebilir.

$$f(x) = \ln x, \quad p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$$

dersek, (2) 'den

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq$$

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}$$

ve buradan da iyi bildiğiniz

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2) eşitsizliğinde $f(x) = -x^2$ koyarsak, her $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ eşitliğini sağlayan her $p_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ için

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)^2 \geq p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2$$

olur. Sonuncuda $x_k = \frac{a_k}{b_k}$ ve

$$p_k = b_k^2 (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{-1}, (k = 1, \dots, n)$$

yazarsak, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz eşitsizliği elde edilir:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

Yine (2'') eşitsizliğinde $f(x) = \ln x$ alırsak, her $x, y \in (0, \infty)$ ve

$$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$$

için

$$\ln(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \ln x + \beta \ln y = \ln(x^\alpha y^\beta) \Rightarrow$$

$$\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta \Rightarrow \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}} \geq xy$$

elde edilir. Sonuncuda $\frac{1}{\alpha} = p, \frac{1}{\beta} = q$ dersek,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitliğini sağlayan her $p > 1, q > 1$ ve $x \geq 0, y \geq 0$ için

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

eşitsizliğini (Young eşitsizliği) elde ederiz.

Jensen eşitsizliği, yukarıda adları geçen eşitsizliklerin her birinden daha genel bir eşitsizlik olduğundan, doğal olarak, söz konusu eşitsizliklerden daha geniş uygulama alanına sahiptir. Bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek. x, y ve $z, [0, \pi]$ aralığından alınmış herhangi sayılar olmak üzere,

$$\sin x + \sin y + \sin z \leq 3 \sin \frac{x+y+z}{3} \quad (7)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayalım.

Yukarıda adları geçen eşitsizlikler (Aritmetik-Geometrik Ortalama vb) burada bir sonuç vermezler. Ancak (7) eşitsizliği, Jensen eşitsizliğinin basit bir sonucudur: (2) eşitsizliğinde $f(x) = \sin x$ ve $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ almak yeter. (Fakat bu söylediklerimiz, (7) eşitsizliğinin, Jensen eşitsizliği kullanılmaksızın ispatlanamayacağı anlamına gelmez. Örneğin, türev tekniği kullanılarak da aynı problem çözülebilir: [3] 'te 4.70 no'lu problemin çözümüne bakınız.)

Sonda, alıştırma olarak, Jensen eşitsizliği kullanılarak kanıtlanabilen bir kaç eşitsizlik verelim:

$$(a) \ 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{5} \geq 10 \sqrt[10]{30}$$

(b)

$$1000x^{\frac{1}{1000}} + 998y^{\frac{1}{998}} \geq 1998(xy)^{\frac{1}{1998}}, (x, y \geq 0);$$

(c) Negatif olmayan her $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve doğal sayılar $p_1, p_2, \dots, p_n$ için

$$p_1 a_1^{\frac{1}{p_1}} + p_2 a_2^{\frac{1}{p_2}} + \dots + p_n a_n^{\frac{1}{p_n}} \geq p(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{p}}.$$

Burada $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ 'dir.

[(a) ve (b) 'nin (c) 'nin özel halleri olduğuna dikkat ediniz!]

(d) Her $\alpha, \beta, \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \cos^3 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

KAYNAKÇA

- [1] I. P. Natanson; Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi; Moskova, "Nauka", 1974.
- [2] H. Turgay Kaptanoğlu, Dışbükey fonksiyonlar, *Matematik Dünyası*, 6-1 11-18 (1996).
- [3] Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev: Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri; Ankara, TÜBİTAK, 1998.

FIELDS ÖDÜLLERİ VE MATEMATİKTEKİ GELİŞMENİN SÜREKLİLİĞİ

Nurettin Ergun

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Vezneciler, İSTANBUL

Fizik, kimya, fizyoloji-tıp gibi bilim dallarında Nobel ödülü vardır da, bilimlerin kraliçesi diye nitelendirilen matematikte neden yoktur bu ödül? Özellikle matematikçiler, Nobel ödüllerinin verilmeye başlandığı 1901 yılından bu yana bu soruya bir yanıt arayıp durmuşlardır. Uzun yıllar boyu, azımsanmayacak sayıda matematikçi için aşağıdaki söylenti yeterince açıklayıcı ve doyurucu bulunmuştur: Alfred Nobel, gençlik döneminde, nişanlısının kendisini terkedip kendisinden küçük matematikçi G. Mittag Leffler ile önce nişanlanıp sonra evlenmesini hiç bir zaman unutmamıştır bu söylentiye göre. Ve neredeyse 30 yıl sonra, dünya üzerindeki onlarca patlayıcı fabrikasından, Süveyş kanalının patlayıcılarla açılması konusundaki girişimciliğinden ve Bakü'deki zengin petrol yatağı hisselerinden kazandığı olağanüstü servetin büyük bölümünü, beş dalda (yukarda anılanların dışında edebiyat ve barış), ölümünden sonra ödül olarak dağıtılması amacıyla kendi kurduğu Nobel vakfına bağışladığında, 1890 'ların İsveç'inde tartışmasız en yetenekli matematikçi Leffler'in, ileride bir gün (matematik dalına bir ödül koyarsa) bu ödülü alabileceği olasılığı, işte bu dayanılmaz düşünce, Nobel'i bu dala ödül koymaktan alıkoymuştur. Kısacası Nobel, nişanlısını elinden alan Leffler 'e olan hıncını tüm dünya matematikçilerinden çıkartmıştır. Bir başkası ise, *Mathematical Intelligencer* adlı ünlü popüler matematik dergisinde 1985 yılında yazdıkları bir yazıda Lars Garding ve Lars Hörmander 'in, günümüzün bu iki ünlü İsveçli matematikçinin savundukları şu yalın görüştür: Matematikte bir Nobel ödülü yoktur, çünkü matematik'e bir ödül koymak Nobel'in *aklına gelmemiştir*. Bu ikiliye göre Nobel, 1865 'in sonunda 32 yaşında İsveçten ayrıldığında Leffler henüz öğrenciydi ve bu yaygın söylenti asılsızdı. Gerçek hangisidir, bunu belirlemeyi matematik tarihçilerine bırakalım dilerseniz.

Sonuçta, matematikte saygın bir bilimsel ödülün yokluğu, bu yüzyılın başında matematikçiler için yeterince onur kırıcı bulunmuştur. İşte, 1863 Toronto doğumlu, Toronto Üniversitesi matematik profesörlerinden John Charles Fields, 1924 'de Toronto'da gerçekleştirilen ve başkanlığını yaptığı Uluslararası Matematik Kongresinde (Uluslararası Matematik Birliğinin 1897 'den beri dört yılda bir gerçekleştirdiği en önemli, en kapsamlı ve en saygın bilimsel toplantı), bir "matematik madalyası" konulmasını önerdi. Sekiz yıl sonra 1932 'de Zürich'deki kongrede bu öneri çoğunlukla kabul edildi ve hem ödüle hem de ödülü somutlaştıran altın madalya(lara) onun adı verildi. 1936 'da Oslo'daki kongrede ilk ödüller Lars Ahlfors ve Jesse Douglas'a verildi. Günümüzde Fields ödülleri, dört yılda bir yapılan kongrelerde, (buraya dikkat lütfen) ödüle değer görülen çalışmalarını *gerçekleştirdiklerinde 40 yaşını aşmamış* olan 4 başarılı matematikçiye verilir; ödülü kazanabilmek için olağanüstü önemli ve tarihsel bir matematik sorusunu (Hilbert problemleri ya da benzeri bir problemi, bak. aşağıya) *tümüyle yeni bir yöntemle* çözmek koşulu getirilmiştir. Fields ödüllerinin bilimsel ağırlığı ve saygınlığının Nobel ödüllerinden aşağı kalmadığı yaygın (ve kanımızca gerçek) bir görüştür. J. C. Fields'in yaşamöyküsü, bu ödüller konusunda ayrıntılı bilgi ve bugüne değin bu saygın ödülü kazanan 38 matematikçinin tam listesini (bu ödül 1940, 1944 ve 1948 yıllarında savaş nedeniyle verilmemiştir ve 1970 yılından bu yana ise dörder kişiye verilmektedir) öğrenmek isteyenler için, Toronto Üniversitesinin uluslararası bilgi ağında açtığı sayfaya girmek yeterlidir, adresi:

<http://www.math.toronto.edu/fields.html>

Matematikte bulunacak ne kaldı tanrı aşkına diye soranlara yönelim şimdi de dilerseniz. Evet, matematikte çözüm bekleyen pek çok yeni ve eski soru vardır. Sözgelimi asal sayıların dağılımı probleminin yüzlerce yıllık evrimi sonunda ortaya çıkan en çetin ceviz (ve henüz çözüme kavuşturulamamış) sorulardan birisi ve kuşkusuz birincisi, Riemann 'ın 1860 'larda ortaya attığı *Riemann öngörüsü (tahmini)* 'dür. Riemann 'a göre ünlü zeta fonksiyonunun karmaşık sayılar düzlemindeki (trivial

olmayan) sıfırlarının tümü $x = 1/2$ dikey doğrusu üzerindedir. Bu yüzyılın matematiğinin en önde gelen ustalarından David Hilbert, 1901 ve 1905 kongrelerinde, matematiğin ulaştığı konumun geniş bir panoramasını veren o unutulmaz konuşmalarının sonunda, matematiğin özellikle 18 ve 19 uncu yüzyıllardaki gelişiminin gelip düğümlendiği pek çok soru arasında özenle belirlediği 23 olağandışı soruyu ortaya koymuştur. Büyük Alman usta, bu soruların çözümünün, gündemdeki tüm öteki "ikincil derecedeki" soruların çözülmesinden daha önemli olduğunu, matematiğin tüm alanlarındaki açınım ve gelişiminin bu soruların çözülmesine bağlı olduğunu öngördü.

Bu sorulara günümüzde **Hilbert problemleri** denilmektedir; bunların günümüze değin yalnızca 9 tanesi sonuçlandırılabilmiştir. Burada eklemeliyiz: Bazı matematik mantık sorularının (ki en ünlüsü, Hilbert problemlerinden birisi olan Cantor öngörüsü ya da ünlü adıyla kontinum varsayımıdır) çözülebilirliğinin, uğraşılan aksiyomatik modele bağlı olduğu anlaşılmıştır; sözelimi Cantor öngörüsünün **yanlış olduğu** tutarlı bir aksiyomatik modelin var olduğunu 1963 yılında kanıtlayan Amerikalı matematikçi Stanford Üniversitesi öğretim üyesi Paul Cohen, bu başarısı nedeniyle 1966 yılında Fields ödülünü kazanmıştır. Cohen 'in zorlama (forcing) adını verdiği yöntemin matematik mantıkdaki önemi, Schoenberg'in dizisel on iki ton ilkesinin 20. yüzyıl müziğindeki önemine benzer: 1963 'den sonra matematik mantık artık asla eskisi gibi olmayacaktır ve olmamıştır da. Matematik mantık denilince bu alanın unutulmuş ve anıtsal ustası Çek Kurt Gödel'i anmamak olur mu hiç? Belki de tüm matematik tarihinin en şaşırtıcı sonucudur onunkisi; çok kaba bir biçimde söyleyecek olursak matematiğin sanıldığı kadar **yetkin ve eksiksiz olamayacağını** söyler bu sonuç (1931, "Gödel's Incompleteness Theorem", ya da "içinde aritmetik önermeler yapılan her aksiyomatik modelde, doğruluğu ya da yanlışlığı (bu model içinde) kanıtlanamayan en az bir önerme vardır"). Gödel, 1930 'ların sonunda Princeton'dayken, şizofreninin onu henüz yürek paralayıcı bir yenilgiye uğratmadığı dönemlerinde, Cantor öngörüsünün **doğruluğunun** kanıtlanabildiği ve bugün onun adıyla anılan bir aksiyomatik kümeler teorisi modelini inşa etmişti. Bu koca ustanın anısı önünde saygıyla eğiliyoruz.

Evet, Hilbert problemlerinden henüz sonuçlandırılmamış olanlar için (örneğin yukarıda söz ettiğimiz Riemann öngörüsü bunlardan birisidir) yoğun uğraş günümüzde sürmektedir. Bunlar sonuçlandırıldığında onlardan türeyen başka sorularla uğraşılacaktır, kuşkunuz olmasın.

Matematik, onunla ilgilenmeyenler için soyut, yararsız (kendi içine kapalı) bir uğraştır, giderek bir oyundur! Böyle düşünenler haklı mıdır yoksa? Sözelimi, çözümünü 350 yıllık çaba ve bilgi birikimini gerektirmiş olan ünlü **Fermat öngörüsü** (ki Princeton Üniversitesinden, 41 yaşındaki İngiliz Andrew Wiles tarafından 1995 yılında çözüldü ve çözümü gerçekleştirdiğinde yaşı 40'ı aşan Wiles ne yazık ki Fields ödülüne ulaşamadı) ya da sayılar teorisinin başka ünlü sorularının çözüme kavuşturulması, örneğin Mordell öngörüsünün doğruluğunun, 1983 'de 29 yaşındaki Alman matematik dahisi Gerd Faltings tarafından kanıtlanması (Faltings bu inanılmaz başarısıyla 1986 yılında Fields ödülünü kazanmıştır), ne gündelik yaşamımızda ne teknolojiye somut herhangi bir değişim ve yeniliğe yol açmazlar ve açıkçası toplumun ilgisini pek uyandırmazlar. Bilim insanları arasında bile, fizik ve mühendislik konularından türememiş matematiksel yöntem ve teorileri küçümsemek ve azımsamak yanlış olanlar vardır. Oysa bu teorilerin **en soyut olan bazılarının yardımıyla**, fizik ve mühendisliğin önemli pek çok sorusu çözülebilmıştır, unutulmasın. Buna karşın dört boyutlu manifoldlar teorisinde fiziksel düşüncelerden yararlanıldı. Karşılıklı etkileşim yadsınabilir mi hiç?

Evet, matematikteki gelişim ve açınım kuşkuya yer vermeyecek biçimde sürüyor kısacası, kim ne derse desin:

Daha çözecek çok şey var!

Son olarak bana bu yazıda kullandığım kimi bilgileri veren genç matematikçi dostum, Aytek Erdil'e teşekkür ederim. Müzik ve matematiğin güzelliklerinden ve sevgiden yoksun kalmayın sevgili okurlar, iyi çalışmalar.

ARİTMETİK-GEOMETRİK ORTALAMALAR EŞİTSİZLİĞİNİN KULLANIMI ÜZERİNE

İhsan Karabulut

Gazi Üniversitesi, İstatistik Bölümü,
Teknikokullar, 06500-ANKARA

Okuyucular bu dergide daha önceki sayılarda da sıkça sözü edilen, kullanımı hayli yaygın olan ve genel olarak aritmetik-geometrik ortalama eşitsizlikleri denilebilecek eşitsizlikleri hatırlayacaklardır. Bu eşitsizlikler hakkında genel bilgi için [3] ve [5] çalışmaları gösterilebilir. Bu eşitsizlikler kuşkusuz çok değişik biçimlerde kullanılır; burada sözünü edeceğim kullanımı ise Arbel [1] 'e ait çalışmadan bir aktarım olacak. Özellikle kimi eşitsizliklerin gösterilmesinde çoğu kez rahatça kullanılacak bu yöntemi [1] 'de bulunan ve bu dergide de çeşitli nedenlerle kullanılmış olan iki eşitsizliğin gösteriminde kullanarak aktaracağım. Daha çok ve ilginç uygulama yine aynı kaynakta bulunabilir. Önce aritmetik-geometrik ortalamalara ait eşitsizlikler zincirinde yer alan ortalamalara ait tanımları hatırlayalım. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, n tane pozitif gerçel sayıdan oluşan bir dizi olmak üzere aritmetik ortalama (A_n) $n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$, geometrik ortalama (G_n) $(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$, harmonik ortalama (H_n) $n(\sum_{i=1}^n x_i^{-1})^{-1}$, kareli ortalama (Q_n) da $(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanır. Aritmetik-geometrik eşitsizlikler zinciri de

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

olarak yazılabilir. Ayrıca bu eşitsizlikler zinciri ortalamaların n . kuvvetlerinin alınması halinde de korunur ve $H_n^n \leq G_n^n \leq A_n^n \leq Q_n^n$ olarak yazılabilir. Bu eşitsizlikler zinciri $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ olması durumunda eşitlik $H_n = G_n = A_n = Q_n$ haline döner. Şimdi ortalamalara ait eşitsizliklerin kullanımını iki uygulama ile gösterelim.

İlk uygulama $n \geq 1$ olan tamsayılar için genel terimi $(1 + \frac{1}{n})^n$ olan dizinin monoton artan ve üstten sınırlı olduğunu yukarıdaki eşitsizliklerin uygun olanlarını kullanarak göstermek olacak.

Bu dizinin üstten sınırlı monoton bir dizi olduğu ve bildiğimiz rasyonel olmayan e sayısına yakınsadığı [2] ya da [6] 'da olduğu gibi değişik yöntemlerle de gösterilebilir. Hatta bu yöntemler dizi hakkında burada aktaracağımız bilgiden daha fazla bilgiyi de verebilir. Yapılacak ilk iş genel teriminin hangi ortalamaya benzetileceğini saptamak olacaktır. Kolayca görülebileceği gibi $(1 + \frac{1}{n})^n$ bütün terimleri aynı $(1 + \frac{1}{n})$ olan terimlerin çarpımıdır ve

$$(1 + \frac{1}{n})^n = G_n^n$$

olarak yazılabilir. 1 sayısını $(n+1)$. terim olarak $(1 + \frac{1}{n})$ sayılarına katarak G_{n+1}^{n+1} bulunursa

$$G_n^n = G_{n+1}^{n+1}$$

olduğu görülür. Öte yandan $(n+1)$. terim olarak 1 sayısının $(1 + \frac{1}{n})$ terimlerine katılması halinde

$$A_{n+1}^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

olduğunun görülmesi ve

$$G_{n+1}^{n+1} < A_{n+1}^{n+1}$$

eşitsizliğin kullanımı bize $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ dizisinin monoton artan olduğunu gösteren

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = x_{n+1}$$

sonucunu verecektir.

Benzer fikirler kullanılarak $y_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ dizisinin de monoton artan olduğunu görebiliriz:

$$y_n = (1 - \frac{1}{n})^n < (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = y_{n+1}$$

Şimdi, yukarıda tanımladığımız (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = x_n \cdot (1 + \frac{1}{n}), (n = 1, 2, \dots)$$

dizisinin monoton azalan olduğunu göstermek yetecektir.

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{y_{n+1}}$$

eşitliği ve (y_n) dizisinin artan olması (z_n) 'nin azalanlığını kanıtlar. Özel halde

$$z_n < z_1 = (1+1)^{1+1} = 4 \Rightarrow z_n < 4, (n = 2, 3, \dots)$$

ve buradan da

$$x_n \cdot (1 + \frac{1}{n}) = z_n < 4 \Rightarrow x_n < 4$$

olduğu çıkar.

İkinci uygulama olarak bir gösterimi [4] ve [2] 'de yer alan Bernoulli eşitsizliğini daha genel olarak [1] 'den alıntılanarak göstereceğiz. Önce Bernoulli eşitsizliğini hatırlatalım: $m, n \geq 0$ olan tamsayılar ve $x > -1$ olmak üzere $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ için

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \leq 1 + \frac{m}{n}x$$

ve $\frac{m}{n} \geq 1$ olduğunda

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \geq 1 + \frac{m}{n}x$$

biçimindeki eşitsizlikler Bernoulli eşitsizlikleri olarak bilinir. Aşağıda yalnızca $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ durumu ele alınacaktır, $\frac{m}{n} \geq 1$ için izlenecek yol aynı olacaktır. Ancak $\frac{m}{n} \geq 1$ durumunda $\frac{n}{m} \leq 1$ olduğu gözönünde tutulacak ve elde edilecek ilk sonuçtan faydalanılacaktır.

Şimdi ilk eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. Her şeyden önce $(1+x) > 0$ olduğunun bilinmesi yukarıdaki eşitsizlikleri kullanmamıza olanak sağlayacaktır. $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ geometrik ortalama benzetilerek

$$((1+x)^m)^{\frac{1}{n}}$$

olarak yazılabilir. Bununla birlikte bu tam bir geometrik ortalama değildir. Geometrik ortalamanın tanımına benzetmek üzere yine 1 sayısının özelliği kullanılarak $(n-m)$ tane daha $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 1$ 'in çarpan olarak yer alması sağlanır. Bu yapırsa

$$G_n^n = ((1+x)^{\frac{m}{n}} 1^{n-m})^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir. Aritmetik ortalama da $n-m$ tane 1 eklendikten sonra doğrudan doğruya aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \leq \frac{m(1+x) + n-m}{n} = 1 + \frac{m}{n}x$$

elde edilir. Böylece Bernoulli eşitsizliği

$$0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$$

için kanıtlanmış oldu.

Aritmetik-geometrik eşitsizliklerin yalınlığı bu 'yöntemin' diğer eşitsizlikleri göstermekte kullanılabilirliğini arttıracaktır.

KAYNAKÇA

- [1] B. Arbel, From 'tricks' to strategies for problem solving, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **21**, 429-438.
- [2] Y. Avcı, K. Alınışık, N. Ergun, Kolay yoldan logaritma, *Matematik Dünyası*, **5-3** 10-12, (1995).
- [3] H. Demir, Bazı ortalamalar, *Matematik Dünyası*, **1-1** 17-21, (1991).
- [4] N. Ergun, Gerçel sayılarda dokuz temel eşdeğerlik, *Matematik Dünyası*, **4-5** 6-10, (1994).
- [5] A. Erkip, Bazı temel eşitsizlikler, *Matematik Dünyası*, **1-4** 20-23, (1991).
- [6] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3. baskı, McGraw-Hill, New York, 1976.

Eğlenceli Matematik

Farklı harfler farklı rakamları ve aynı harfler aynı rakamları belirtmek üzere, aşağıdaki eşitliği gerçekleyen rakamları bulunuz:

$$\frac{fut}{bol} = 0, golgolgol \dots$$

(Baştaki 0 sıfırdır!)

ÜÇÜNCÜ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI İKİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş - İlham Aliyev
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadının ikinci seçme sınavı 25 Nisan 1998 Cumartesi günü yapıldı. Sınava birinci seçme sınavında başarılı olan 75 öğrenci katıldı. Birincisinde olduğu gibi, ikinci sınav da Lise I-II ve Lise III olmak üzere iki kategoride yapıldı. Her iki kategoride de öğrencilere 5'er soru soruldu ve 3,5 saat süre verildi. Olimpiyadın ikinci seçme sınavında sorulan soruları, kısa çözümleri ile birlikte sunuyoruz.

Lise I-II Soruları:

1. Dört ardışık doğal sayının çarpımının asla bir tamkare (yani başka bir doğal sayının karesi) olamayacağını kanıtlayınız.

2. Yarıçapı 1 cm olan bir çember üzerinde rasgele 100 tane nokta işaretlenmiştir. Çember üzerinde, bütün işaretlenmiş noktalara olan uzaklıkları toplamı 100 cm'den büyük olacak şekilde bir noktanın bulunduğunu gösteriniz.

3. x, y, z negatif olmayan reel sayılar, $x + y + z \leq 3$ ise,

$$\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z} \geq 3$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_1^2 \\ x_4 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

5. Kenar uzunluğu 1 cm olan bir ABC eşkenar üçgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde rasgele bir D noktası alınıyor. D 'nin AC ve

BC üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla, E ve F ; E ve F 'nin AB üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla, E_1 ve F_1 olsun.

$$|E_1F_1| = \frac{3}{4} \text{ cm}$$

olduğunu gösteriniz.

Lise III Soruları:

1. Herhangi üç *tek* doğal sayı verildiğinde öyle bir dördüncü *tek* doğal sayı bulunabilir ki, bu dört sayının kareleri toplamı bir tamkaredir (yani başka bir doğal sayının karesi), kanıtlayınız.

2. Kenar uzunluğu 1 cm olan bir kare içine, alanları toplamı $1997,5 \text{ cm}^2$ olan ve konveks olmaları gerekmeyen 1998 tane çokgen, karenin dışına taşmayacak biçimde rasgele yerleştiriliyor. Karenin en az bir noktasının sözkonusu çokgenlerden hepsi tarafından örtüldüğünü gösteriniz.

3. x, y, z reel sayılar, $x \geq y \geq z > 0$ ise,

$$\frac{x^2 - y^2}{z} + \frac{z^2 - y^2}{x} + \frac{x^2 - z^2}{y} \geq 3x - 4y + z$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir koridorun, boyutları $2 \times 11 \text{ m}$ olan dikdörtgen biçimindeki tabanı, boyutları $1 \times 2 \text{ m}$ olan aynı tür halılarla, halılar birbirini örtmeksizin, kaplanmak isteniyor. Bu iş kaç farklı biçimde yapılabilir?

5. $ABCD$ konveks (dışbükey) dörtgeninin $[BC]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta noktaları, sırasıyla, P ve Q olsun. Eğer $|AP| + |AQ| = d$ ise, $ABCD$ dörtgeninin alanının $\frac{1}{2}d^2$ 'den küçük olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

Lise I-II Çözüm 1.

$$\begin{aligned} a &= k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) \\ &= (k^2 + 3k)^2 + 2 \cdot (k^2 + 3k) + 1 - 1 \\ &= (k^2 + 3k + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[|ED| \cdot |AC| + |FD| \cdot |BC|]$$

$$= \frac{1}{2}[|ED| + |FD|] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

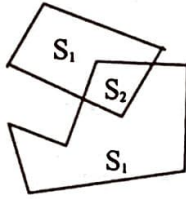
$$\Rightarrow |ED| + |FD| = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\text{ve } |E_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |ED|, |F_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |FD|$$

$$\Rightarrow |E_1D| + |F_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} .$$

Lise III Çözüm 1. x, y, z tek doğal sayılar ise, $x^2 + y^2 + z^2 = 2p + 1 = (p+1)^2 - p^2$ sağlanacak biçimde p vardır. Buradan: $x^2 + y^2 + z^2 + p^2 = (p+1)^2$. p tek sayıdır, çünkü aksi halde eşitlik ($\text{mod } 4$) 'te çelişki verir.

Lise III Çözüm 2.



Çokgenlerin hepsine ait, pozitif alanlı bir bölge bulunduğunu gösterelim. S_k ile karenin öyle noktaları kümesinin alanını gösterelim ki, bu noktalar tam k tane çokgenle örtülmüş olsun. Varsayalım ki, $S_{1998} = 0$ olsun. O halde

$$1997,5 = S_1 + 2.S_2 + 3.S_3 + \dots + 1997.S_{1997}$$

$$\leq 1997.(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{1997})$$

$$\leq 1997.1 = 1997$$

diye çelişki çıkar. [Bu soruya ikinci sınavda tam puan alarak Lise III 'ler arasında birinci olan M. Akif Erişmiş değişik ve güzel bir çözüm vermiştir; bu çözümü özetliyoruz: Çokgenlerden her birinin alanı 1 'den küçük veya 1 'e eşittir. Karenin, i . çokgen tarafından örtülen kısmının alanına

s_i , örtülmeyen kısmının alanına da x_i diyelim. $x_i + s_i = 1$, $x_i \geq 0$. Eğer bu x_i alanlı bölgeler kareyi tamamen kapatmıyorsa, kapatılmayan bölgedeki her nokta tüm çokgenler tarafından örtülmüş olur. Verilenlerden

$$1997,5 = \sum_{i=1}^{1998} s_i = \sum_{i=1}^{1998} (1 - x_i) = 1998 - \sum_{i=1}^{1998} x_i$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{1998} x_i = 0,5 < 1$$

olduğu görülür. Böylece, x_i alanlı bölgelerin (bu bölgeler kesişmeseler dahi) kapatmadığı noktalar, hatta pozitif alanlı bir kısım bulunduğu görülür. Bu noktalar tüm çokgenler tarafından örtülür.]

Lise III Çözüm 3.

$$x + y \geq 2z, z + y \leq 2x, x + z \geq y \Rightarrow$$

$$\frac{x+y}{z} \geq 2, \frac{z+y}{x} \leq 2, \frac{x+z}{y} \geq 1 .$$

Bu eşitsizlikler, sırasıyla,

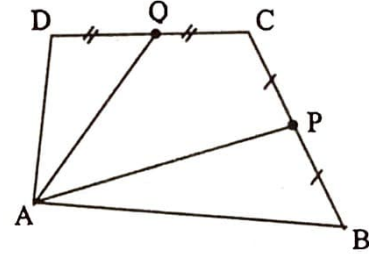
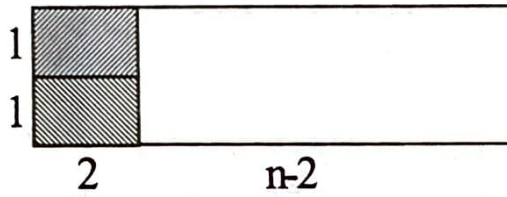
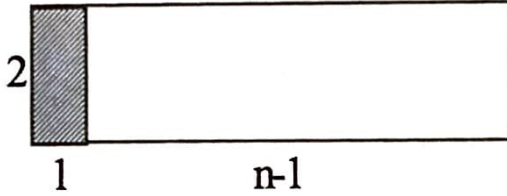
$$x - y \geq 0, z - y \leq 0, x - z \geq 0$$

ile çarpılarak toplanırsa problemde verilen eşitsizlik elde edilir.

Lise III Çözüm 4. Boyutları $2 \times n$ olan koridorun tam x_n biçimde kaplandığını varsayalım. $n = 1$ için $x_1 = 1$ ve $n = 2$ için $x_2 = 2$ olduğu açıktır. $n \geq 3$ olsun. $2 \times n$ boyutlu koridorun herhangi bir örtüsünü düşünelim. O halde koridorun sol kısmı için

aşağıdaki şekillerden birisi geçerli olacaktır.

Lise III Çözüm 5.



$A(ABCD) = 2.A(APCQ)$ 'dur. $|AQ| = x$ dersek, $|AP| = d - x$ olur ve

$$A(ABCD) = 2.A(APCQ) < 2.2.A(\triangle APQ)$$

$$< 4 \cdot \frac{1}{2} x \cdot (d - x) < 2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$$

çıkar.

Birinci durumda $x_n = x_{n-1}$ ve ikinci durumda $x_n = x_{n-2}$ olur. Böylece,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad (n = 3, 4, \dots)$$

indirgeme formülü elde edilir. Buradan

$$x_3 = 1 + 2 = 3, x_4 = x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5,$$

$$x_5 = 8, \dots, x_{11} = x_{10} + x_9 = 89 + 55 = 144$$

elde edilir.

Not:

$$x_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \sqrt{5}} [(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}]$$

'dir.

**Bir sonraki sayfada verilen
Yarışma Problemlerine çözümlerinizi
gönderirken lütfen şu noktalara
dikkat ediniz:**

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
 2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
 3. Çözümleri, **Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA** adresine 31 Temmuz 1998 tarihine kadar gönderiniz.
-

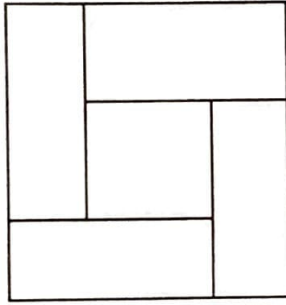
PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.161. m ve n doğal sayılar olmak üzere $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ 'dir. $\frac{m}{n} < \sqrt{2} (1 - \frac{1}{4n^2})$ olduğunu gösteriniz.

A.162. Bir kare, şekilde görüldüğü gibi, beş dikdörtgene bölünmüştür. Karenin kenarları ile ortak kenarları olan dört dikdörtgenin alanları birbirine eşitse, tam ortadaki dikdörtgenin bir kare olduğunu gösteriniz.



A.163. 6 tane ikinci derece denklem veriliyor:

$$x^2 + p_k x + q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

p_k 'ların hepsinin farklı sayılar olduğu, her denklemin iki farklı kökü bulunduğu ve farklı köklerin toplam sayısının 4 olduğu biliniyorsa, bu 4 kökün toplamı neye eşittir?

A.164. Dar açılı bir üçgenin her kenarının orta noktasından diğer iki kenara dikler çizilmiştir. Bu diklerin sınırladığı altıgenin alanının, üçgenin alanının yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

A.165. Yazı tahtasına $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{12}$ sayıları yazılmıştır.

a) Bu yazılışta virgüller yerine + veya - işaretleri konarak sıfır elde etmek mümkün müdür?

b) Eğer mümkün değilse, sayıların (ve virgüllerin) en az kaç tanesi silindikten sonra geriye kalan virgüller yerine + veya - işaretleri konarak sıfır elde etmek mümkündür?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.161. $q > 5$ olmak üzere p ve q asal sayıları $q | (2^p + 3^q)$ koşulunu sağlarsa $q > p$ olacağını gösteriniz (*Kazım Büyükboduk-İzmir*).

Y.162. Bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ; çevrel çemberinin yarıçapı R ise,

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq \sqrt{3}R$$

olduğunu gösteriniz. (*Mehmet Bumin Yenmez-İzmir*)

Y.163. Merkezi $(0, 1)$ noktasında olan bir çember $y = x^2$ parabolünü 4 ayrı noktada kesiyor: A, B, C, D.

a) $\text{Alan}(ABCD) < \sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz.

b) $ABCD$ 'nin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Y.164. $p, q \in \mathbb{N}$, $q < 100$ olmak üzere, sayı ekseninde $\frac{p}{q}$ noktaları işaretlenmiştir. Uzunluğu $3 \cdot 10^{-3}$ olan bir α parçası, koordinat başlangıcından 1 noktasına doğru kaydırılıyor. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}]$ parçasının ikişer ikişer birbirinden ayrık öyle dört tane alt aralığı vardır ki, α parçası bu aralıklardan herhangi biri içinde bulunduğunda, daha önce işaretlenmiş olan $\frac{p}{q}$ noktalarından hiç birine değmeyecektir; kanıtlayınız.

Y.165. $a_1, a_2, a_3, \dots$ sınırsız, kesin artan pozitif sayı dizisi olsun.

a) Her $k \geq k_0$ için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

b) Her $k \geq k_1$ için

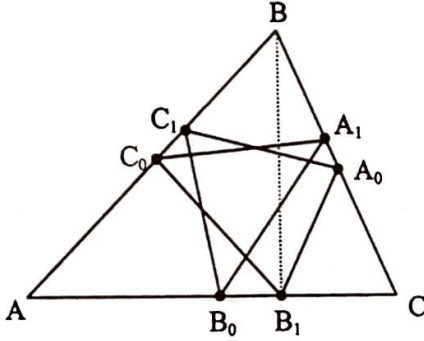
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1998$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_1 \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A.151. Bir ABC üçgeninin kenarortayları AA_0 , BB_0 , CC_0 ve yükseklikleri de AA_1 , BB_1 , CC_1 'dir. Bu durumda, $A_0B_1C_0A_1B_0C_1A_0$ -kapalı çokgeninin (poligonunun) çevre uzunluğunun ABC üçgeninin çevresinin uzunluğuna eşit olduğunu ispat ediniz.

Çözüm



$|A_0C_1| = |A_0B|$ ve $|A_0B_1| = |A_0C|$ olduğunu göstermek yeter. Çünkü bu eşitliklerden

$$|A_0C_1| + |A_0B_1| = |A_0B| + |A_0C| = |BC|$$

olduğu çıkar. Benzer şekilde, $|AB| = |C_0A_1| + |C_0B_1|$ ve $|AC| = |B_0C_1| + |B_0A_1|$ eşitlikleri de gözönüne alınarak

$$|AB| + |BC| + |CA| = |C_0A_1| + |C_0B_1| + |A_0C_1| + |A_0B_1| + |B_0A_1| + |B_0C_1|$$

elde edilebilir.

Böylece, $|A_0C_1| = |A_0B|$ ve $|A_0B_1| = |A_0C|$ olduğunu gösterirsek işimiz biter.

BB_1C dik üçgenine bakalım. $|BA_0| = |A_0C|$ olduğundan $|B_1A_0| = |A_0C|$ olur. Benzer şekilde, CBC_1 dik üçgeninde $|C_1A_0| = |A_0B|$ 'dir.

A.152.

$$\frac{2499}{10000} < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en küçük n doğal sayısı nedir?

Çözüm. Eşitsizliğin sağ yanındaki toplam bir "teleskopik" toplamdır:

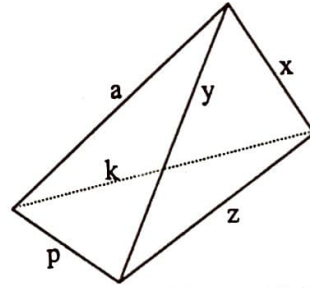
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\frac{2499}{10000} < S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

olması için gerek ve yeter koşul, $4998 < n^2 + 3n$ yani, $n \geq 70$ olmasıdır. Böylece, verilen eşitsizliği sağlayan en küçük n doğal sayısı 70 'tir.

A.153. Bir dörtyüzlünün (tetrahedron) ayrıtlarından, her ayrıt bir kez kullanılarak, iki tane üçgen yapılabileceğini kanıtlayınız.

Çözüm. Dörtyüzlünün en uzun ayrıtına a diyelim.



Diğer ayrıtların uzunluklarını da, şekildeki gibi, x , y , z , k ve p ile gösterelim. $a < x + y$ ve $a < k + p$ eşitsizliklerinden en az biri sağlanmak zorundadır. Aksi halde, $a \geq x + y$ ve $a \geq k + p$ 'den

$$2a \geq x + y + k + p = (x + k) + (y + p)$$

olur. Ancak üçgen eşitsizliğine göre (şekle bakınız), $a < x + k$ ve $a < y + p$ 'dir ve dolayısıyla, $2a \geq (x + k) + (y + p)$ olamaz. Böylece, $a < x + y$ veya $a < k + p$ eşitsizliklerinden en az biri sağlanmalıdır. Birinci eşitsizlik sağlandığında, kenarları a , x , y olan üçgen oluşturmak mümkündür ve bu halde kenarları k , p , z olan ikinci üçgen oluşturulmuş durumdadır. Benzer şeyler ikinci durumda da söylenebilir.

A.154. m bir doğal sayı olmak üzere

$$\int \frac{dx}{x(x+1) \cdots (x+m)}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm. Basit kesirlere ayırma yöntemi uygulanırsa

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x+1} + \cdots + \frac{c_m}{x+m}$$

Bilinen yöntemlerle,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!(m-n)!}, \quad 0 \leq n \leq m$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+m)} &= \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{n!(m-n)!} \int \frac{dx}{x+n} \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \ln(x+n)}{n!(m-n)!} + c \end{aligned}$$

elde edilir.

A.155. (Sorunun yazımında hata olmuştur, doğrusu:)

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{999} \frac{(1+i)^{2k}}{2^k} = \frac{(1+i)^2}{2} \\ &+ \frac{(1+i)^4}{2^2} + \frac{(1+i)^6}{2^3} + \cdots + \frac{(1+i)^{1998}}{2^{999}} \end{aligned}$$

karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

Çözüm. $(1+i)^2 = 2i$ olduğundan her $k = 1, \dots, 999$ için

$$(1+i)^{2k} = 2^k \cdot i^k$$

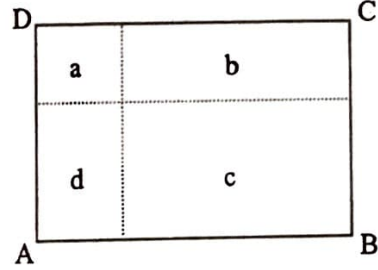
ve böylece

$$z = \sum_{k=1}^{999} i^k = i \cdot \frac{1 - i^{999}}{1 - i} = -1;$$

z 'nin argümenti π 'dir.

Y.151. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin içinde rasgele bir P noktası alınıyor. P noktasından dikdörtgenin kenarlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen 4 küçük dikdörtgene ayrılıyor. A ve C 'yi köşe kabul eden küçük dörtgenlerden en az birinin alanının $ABCD$ 'nin alanının $\frac{1}{4}$ ünden daha büyük olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. Küçük dikdörtgenlerin alanlarını a, b, c ve d ile gösterelim (şekilden izleyiniz). $a.c = b.d$ olduğu açıktır.



$ABCD$ 'nin alanına S dersek, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$S = a + b + c + d \geq 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bd} = 4\sqrt{ac}$$

ve böylece

$$ac \leq \frac{s^2}{16}$$

olur. Buradan ise a ve c sayılarından en az birinin $\frac{s}{4}$ 'ten daha büyük olamayacağı görülür.

(Çözenler: Zayta Matematik Grubu (Ankara Fen Lisesi), M. Bumin Yenmez, Alper Çay, Seçil Çakallı, Samanyolu Matematik Grubu, Alp Şimşek, Süleyman Demirel)

Y.152. Tüm terimleri $[0, 1]$ aralığında bulunan öyle bir ıraksak $\{a_n\}$ reel sayı dizisi tanımlayınız ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ olsun.

Çözüm. Örneğin $a_n = |\sin \sqrt{n}|$, ($n = 1, 2, \dots$) dizisi problemde verilen koşulları sağlar. Gerçekten,

$$\begin{aligned} &||\sin \sqrt{n+1}| - |\sin \sqrt{n}|| \\ &\leq |\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}| \\ &\leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(Çözenler: M. Bumin Yenmez)

Y.153. $0 < a < 1$ olsun. Her x gerçel sayısı için

$$f(x) + f(ax) = x$$

denklemini sağlayan f sürekli fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. $f(x) = x - f(ax)$ eşitliğinde x yerine ax koyarsak, $f(ax) = ax - f(a^2x)$ olur. Sonuncuda yine x yerine ax koyarsak, $f(a^2x) = a^2x - f(a^3x)$ olur ve bu şekilde devam edersek, her $k \in \mathbb{N}$ için $f(a^kx) = a^kx - f(a^{k+1}x)$ elde ederiz. Bunları gözönüne alırsak

$$\begin{aligned} f(x) &= x - f(ax) = x - [ax - f(a^2x)] \\ &= x - ax + f(a^2x) \\ &= x - ax + [a^2x - f(a^3x)] \\ &= x - ax + a^2x - f(a^3x) = \dots \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a^k x + (-1)^{n+1} f(a^{n+1}x) \\ &= \frac{1-(-a)^{n+1}}{1-(-a)} x + (-1)^{n+1} f(a^{n+1}x) \end{aligned}$$

olur. $0 < a < 1$, $f(0) = 0$ ve f fonksiyonunun sürekli olduğunu gözönüne alarak yukarıdaki eşitlikte $n \rightarrow \infty$ olmak üzere limite geçerse

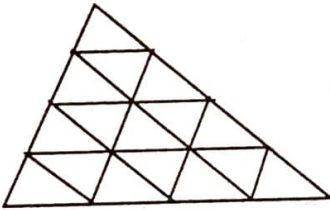
$$f(x) = \frac{1}{1+a} x + 0 = \frac{1}{1+a} x$$

elde ederiz.

(Çözenler: M. Bumin Yenmez, Samanyolu Matematik Grubu, Hasan Karabıyık, Ramazan Çalış)

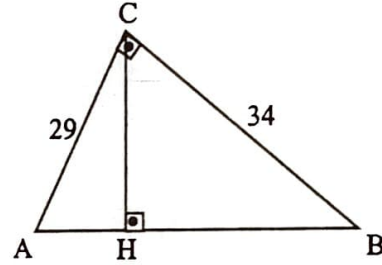
Y.154. Öyle bir üçgen bulunuz ki, tam 1997 tane eşit üçgene bölünebilsin.

Çözüm.



Dik kenarları 29 ve 34 olan dik üçgenin sözkonusu özelliğe sahip olduğunu görelim. İlk önce, her $n \in \mathbb{N}$ için her bir üçgeni, kendisine benzer n^2 tane eşit üçgene bölmenin olanaklı olduğunu görelim. Aşağıdaki şekilde, herhangi bir üçgenin $n = 4$ için $n^2 = 16$ eşit ve verilen "ana üçgene" benzer üçgenlere bölünmesinin bir yolu gösterilmiştir. (Burada kullanılan esas fikir $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ eşitliğidir.) Herhangi n doğal sayısı için de benzer yolla gidilebilir.

Şimdi, dik kenarları 29 ve 34 olan ACB dik üçgenini alalım.



Üçgenin CH yüksekliği bu üçgeni iki benzer üçgene ayırır. ACH üçgenini, herbirinin hipotenüsü 1 olan 29^2 tane eşit (ve dik) üçgene ayıralım. Benzer şekilde, CHB üçgenini, hipotenüsleri 1 olan 34^2 tane eşit (ve dik) üçgene ayıralım. Elde edilen $29^2 + 34^2 = 1997$ tane üçgenin hepsinin birbirine eşit olduğunu görmek zor değildir.

(Çözenler: Murat Aygen)

Y.155. $x^2 + y$ ve $y^2 + x$ her ikisi de tam kare olacak biçimde x ve y pozitif tamsayıları var mıdır?

Çözüm. Hayır. $x > y$ ise $x^2 + y$ bir tamkare olamaz. Çünkü, bu durumda

$$x^2 < x^2 + y < x^2 + x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Benzer şekilde, eğer $x < y$ ise $y^2 + x$ sayısı bir tamkare olamaz.

(Çözenler: M. Bumin Yenmez, Samanyolu Matematik Grubu)



ANTALYA

YILMAZ KOLEJİ

"... Zirveye uzanan çizgi"

KALİTELİ

EĞİTİM

LİGİNDE

ZİRVEYE

OYNAMAK,

ÇITAYI

YÜKSELTMEKLE

MÜMKÜNDÜR.

**'98
ÖSS'de
% 100
başarı**





Antalya

YILMAZ KOLEJİ

"... Zirveye uzanan çizgi"



ADRES

Çakırlar Cad. No: 215 / 07070-5 Konyaaltı / ANTALYA
Tel: (0 242) 227 71 65 (3 Hat) Fax: (0 242) 227 67 62 E-mail: yilmazlisesi@turk.net