

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyasından

Ptolemy (Batlamyus) Teoremi
Fikri Gökdal

Fizikte Zeta-Fonksiyonu (II)
M. Gündüz İkedâ

Prof. Dr. Mehmet Sapancı'nın Anısına...

Büyük Türk Matematikçisi: Hüseyin Tefvîk Paşa (1832-1901)
Fikri Akdeniz

Dans Eden Sayılar
Hüseyin Kayadibi

Oyunla Eğitim ve Birkâc Oyun
Ali Nesin

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı
Halil İbrahim Karakaş

Problemler ve Çözümleri

Ege Üniversitesi Fen Fakültesi öğretim üyelerinden
Prof. Dr. Mehmet Sapancı'nın
ölümü nedeniyle tüm yakınlarına başsağlığı diliyoruz...

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Oldukça sıcak bir yaz döneminden sonra Akdeniz'in güzel kenti Antalya'dan 7.cilt, 4.sayımızla yeniden karşınızdayız. Bu sayımızda M. Gündüz İkedâ hocamızın yazısının ikinci bölümünü ve diğer yazıları ilginç bulacağınızı umuyoruz. 3. sayımızın baskı kalitesi ile ilgili olarak okuyucularımızdan olumlu mesajlar aldık. Bu kaliteyi sağlamakta Antalya Yılmaz Koleji müdürü Kamil Sarıçiçek ile matematik öğretmeni Reşat Satılmış'ın önemli katkıları olmuştur; kendilerine teşekkürü borç biliyoruz.

Derginiz baskıya verilirken Ege Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Mehmet Sapancı'nın aramızdan ayrıldığına ilişkin acı haberi aldık. Prof. Sapancı'nın çok değerli anısı önünde saygıyla eğilir; acılı ailesine, çalışma arkadaşlarına ve matematik dünyasına başsağlığı dileriz.

Beşinci sayımızda daha iyi koşullarda ve daha mutlu haberlerle buluşmak dileğiyle...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından	1
Ptolemy (Batlamyus) Teoremi Fikri Gökdağ	2
Fizikte Zeta-Fonksiyonu (II) M. Gündüz İkedâ	6
Prof. Dr. Mehmet Sapancı'nın Anısına...	9
Büyük Türk Matematikçisi: Hüseyin Tevfik Paşa (1832-1901) M. Fikri Akdeniz	10
Dans Eden Sayılar Hüseyin Kayadibi	12
Oyunla Eğitim ve Birkaç Oyun Ali Nesin	16
39. Uluslararası Matematik Olimpiyadı Halil İbrahim Karakaş	23
Problemler ve Çözümleri	29

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Ünal Ufuktepe, Güvenç Arslan
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1998) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 2.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 1.750.000 TL. (Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 111.91.79 no'lu Prof. Dr. Timur Karaçay hesabına ya da İş Bankası Antalya Şubesi 6200.30000.2192647 no'lu Prof. Dr. Timur Karaçay hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@ufuk.lab.akdeniz.edu.tr

PTOLEMY (Batlamyus) TEOREMİ

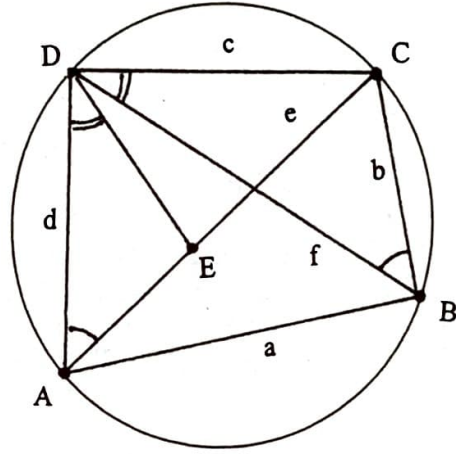
Fikri Gökdal

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

$AC = e$, $BD = f$ ile gösterilmek üzere $ABCD$ bir kirişler dörtgeni ise,

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

olduğunu ispatlayacağız.



Şekil.1

Claudius Ptolemy (M. S. 150 civarında), Mısır'da yaşamış bir astronom ve matematikçidir. "Great Collection" adlı eserinde; astronomi ile ilgili, ustalıkla hazırlanmış orijinal hesap tabloları, Mezopotamyalı astronomlardan yaşadığı zamana ulaşmış bilgiler, trigonometri, çeşitli açıların gördüğü kirişlerin ölçüleriyle ilgili tablolar, küresel trigonometri ile ilgili başlangıç sayılabilecek bilgiler ve geometri teoremleri yer alır. (Bu eser, Tabit Bin Kurra (826-901) tarafından "Almagest" adı altında Arapça'ya çevrilmiştir, çeviride Ptolemy adı, Batlamyus olarak geçer). Eserin bir kısmında, köşeleri bir çemberin noktaları olan bir dış bükey (konveks) dörtgenin, yani bir "kirişler dörtgeni" 'nin kenar ve köşegen uzunlukları arasında çok sade bir bağıntının bulunduğu iddia ve ispat edilmektedir. İddia ve ispat, Ptolemy'ye aittir.

DC yayını gören çevre açıları olduklarından, $\hat{DAC} = \hat{DBC}$ 'dir. $\hat{ADB} > \hat{BDC}$ kabul edilerek; AC üzerinde, $\hat{ADE} = \hat{BDC}$ sağlanacak biçimde alınan E noktası için (Şekil. 1) (A.A) benzerlik teoremi gereğince,

$$\triangle ADE \sim \triangle BDC$$

olur ve buradan,

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

ya da

$$\frac{AE}{b} = \frac{d}{f} \quad (1)$$

elde edilir.

Ptolemy'nin verdiği ispatın dışında, zaman içinde bu teoremin değişik ispatları yapılmıştır. Bu yazıda teoremin dört farklı ispatını sunacağız. Özden uzaklaşmamak kaydıyla, bazı durumlarda ifadelerin uzatılması için kenar uzunluğu, köşegen uzunluğu yerine, sadece kenar, köşegen diyebilecek, $|AB|$ yerine AB , $m(\hat{A})$ yerine $\hat{A} = \alpha$, ... yazabileceğiz.

Teorem (Ptolemy). Bir kirişler dörtgeninde; karşılıklı kenarların çarpımlarının toplamı, köşegenlerin çarpımına eşittir.

İspat. Kenar ve köşegenleri sırasıyla $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ ve

DA yayını gören çevre açıları olduklarından $\hat{DCA} = \hat{DBA}$ ve E noktasının seçilişinden dolayı da, $\hat{ADB} = \hat{EDC}$ 'dir. (A.A) benzerlik teoremi gereğince,

$$\triangle ADB \sim \triangle EDC$$

olur ve buradan da,

$$\frac{AB}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

ya da

$$\frac{a}{EC} = \frac{f}{c}$$

elde edilir. (1) ve (2) 'den,

$$\begin{aligned} bd + ac &= f \cdot AE + f \cdot EC \\ &= f(AE + EC); \end{aligned}$$

A, E, C doğrusal noktalar olduğundan $AE + EC = AC$ ve dolayısıyla,

$$b \cdot d + a \cdot c = f \cdot e$$

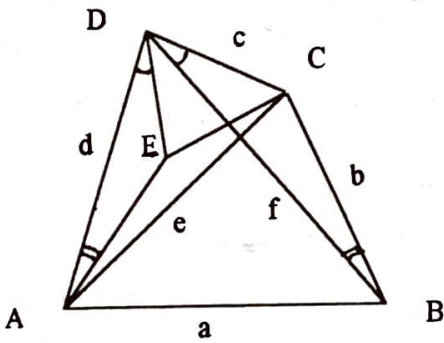
ya da

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

elde edilir.

(Karşıt) Teorem. Bir dış bükey (konveks) dörtgende; karşılıklı kenarların çarpımlarının toplamı, köşegenlerin çarpımına eşit ise, bu dörtgen bir kirişler dörtgenidir.

İspat.



Şekil.2

$ABCD$ dörtgeninde, $ac + bd = ef$ 'dir. Bu bağıntıyı sağlayan bir dörtgenin kirişler dörtgeni olmadığını kabul edelim. Bu durumda, $\hat{ADE} = \hat{BDC}$ ve $\hat{DAE} = \hat{DBC}$

eşitliklerini sağlanacak biçimde alınan E noktası için, (Şekil 2.) $(A.A)$ benzerlik teoremi gereğince, $\triangle DAE \sim \triangle DBC$ olur ve buradan,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BC} = \frac{DE}{DC}; \quad \frac{d}{f} = \frac{AE}{b} \quad (3)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$ ve $\hat{ADB} = \hat{EDC}$ olduğundan (K. A. K) benzerlik teoremi gereğince, $\triangle ADB \sim \triangle EDC$ 'dir. Buradan da

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{EC}; \quad \frac{f}{c} = \frac{a}{EC} \quad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4) 'ten

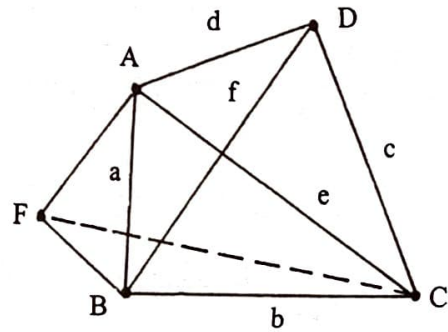
$$a \cdot c + b \cdot d = (AE + EC) \cdot f$$

ve "verilen" 'den dolayı da

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

'dir. Dolayısıyla, $AE + EC = AC$ olur, yani E noktası, AC üzerindedir. Bu nedenle, $\hat{DAC} = \hat{DBC}$ olur. DC doğru parçasını gören eş açılarının köşeleri oldukları için de A, B noktaları D ve C 'den geçen bir çember yayı üzerinde bulunur. Öyleyse, $ac + bd = ef$ bağıntısını sağlayan bir dış bükey dörtgen, kirişler dörtgenidir.

II. İspat.



Şekil.3

Dış bükey bir $ABCD$ dörtgeni alınıp, $\triangle ABF \sim \triangle ADC$ olacak biçimde $\triangle ABF$ üçgeni

çizildiğinde (Şekil.3)

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{BF}{DC}$$

ya da

$$\frac{AF}{e} = \frac{a}{d} = \frac{BF}{c}$$

olur. Buradan,

$$AF = \frac{a \cdot e}{d} \text{ ve } BF = \frac{a \cdot c}{d} \quad (\text{II.1})$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\hat{FAC} = \hat{BAD}$ ve $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AD}$ olduğundan (K. A. K) benzerlik teoremi gereğince $\triangle FAC \sim \triangle BAD$ olur, buradan da

$$\frac{FC}{BD} = \frac{AC}{AD} \text{ ve dolayısıyla } FC = \frac{e \cdot f}{d} \quad (\text{II. 2})$$

elde edilir. Böylece, $\triangle FBC$ üçgeninde,

$$BF = \frac{a \cdot c}{d}, BC = \frac{b \cdot d}{d}, FC = \frac{e \cdot f}{d}, \quad (\text{II. 3})$$

yani kenarların $a \cdot c, b \cdot d, e \cdot f$ ile orantılı olduğu anlaşılır. Üçgen eşitsizliğinden, $\triangle FBC$ üçgeninde

$$FC < FB + BC$$

'dir. (II. 3) 'teki değerler yerlerine yazıldığında,

$$e \cdot f < a \cdot c + b \cdot d$$

elde edilir. $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$ olması için F, B, C noktalarının doğrusal ($FB + BC = FC$) olması gerekir ve yeter. Bu noktalar doğrusal ise,

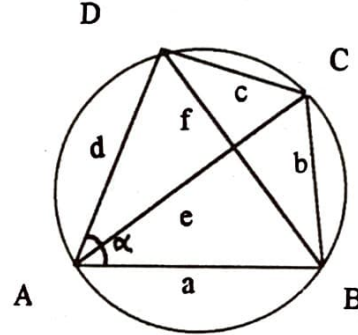
$$\hat{FBA} + \hat{ABC} = 180^\circ = \hat{ADC} + \hat{ABC}$$

olur ki bu, $ABCD$ dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olmasını ve

$$\hat{FBA} + \hat{ABC} = \hat{ADC} + \hat{ABC} = 180^\circ,$$

yani, $ABCD$ bir kirişler dörtgeni ise, F, B, C doğrusal noktalar olur ki bu da $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$ olmasını gerektirir. (Bu ispatta teoremin kendisini ve karıştını görüyoruz.)

III. İspat.



Şekil.4

a, b, c, d kenar uzunlukları, e ve f de köşegen uzunlukları olmak üzere bir kirişler dörtgeninde $\hat{DAB} = \alpha$ ise, kosinüs teoreminden, (Şekil.4)

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \quad (\text{III. 1})$$

ve

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha \quad (\text{III. 2})$$

elde edilir. (III.1) ve (III. 2) sırasıyla bc ve ad ile çarpılıp taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} (ad + bc)f^2 &= (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad \\ &= (ab + cd)(ac + bd) \end{aligned}$$

ve buradan

$$f^2 = \frac{ab+cd}{ad+bc} \cdot (ac + bd), \quad (\text{III.3})$$

benzer biçimde de,

$$e^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd} \cdot (ac + bd) \quad (\text{III.4})$$

bulunur. (III.3) ve (III.4) eşitlikleri taraf tarafa çarpıldığında,

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d \quad (\text{III.5})$$

ve (III.4) ile (III.3) eşitlikleri taraf tarafa bölündüğünde,

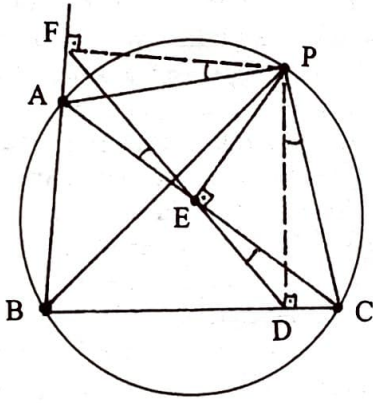
$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \quad (\text{III.6})$$

elde edilir.

Bir başka ispat, Simson doğrusundan yararlanarak yapılmıştır:

("ABC bir üçgen; P bu üçgenin çevrel çemberi üzerinde bir nokta olmak üzere P noktasından sırasıyla BC, CA ve AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları D, E ve F ise, bu üç nokta doğrusaldır." iddiasındaki D, E, F noktalarının üzerinde bulundukları doğruya Simson doğrusu denir. Bu iddianın bir ispatı:

BDPF, BCPA, DCPE ve AEPF dörtgenlerinin her biri bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla,



Şekil.5

$\hat{F}PD = 180^\circ - \hat{B} = \hat{A}PC$ 'dir. Buradan $\hat{A}PF = \hat{D}PC$ elde edilir. $\hat{D}EC = \hat{D}PC = \hat{A}PF = \hat{A}EF$ eşitlikleri D, E, F 'nin doğrusal noktalar olduğunu gösterir.)

IV. İspat. Şekil.5 'teki ABC üçgeninin kenarları a, b, c ve çemberin yarıçapı R olmak üzere. şekilden

$$FE = AP \cdot \sin A = AP \cdot \frac{a}{2R} \quad (IV.1)$$

$$ED = CP \cdot \sin C = CP \cdot \frac{c}{2R} \quad (IV.2)$$

$$DF = BP \cdot \sin B = BP \cdot \frac{b}{2R} \quad (IV.3)$$

bulunur. D, E, F noktaları doğrusal olduğundan, $FD = FE + ED$ 'dir.

(IV.1), (IV.2), (IV.3) ve bu eşitlikten

$$a \cdot AP + c \cdot CP = b \cdot BP$$

elde edilir. Bu eşitlikteki a, CP, AP, c ve AC, BP; ABCP kirişler dörtgeninin kenar ve köşegen uzunluklarıdır.

ABCD kirişler dörtgeninde, $a = c$ ve $b = d$ ise, bu durumda $e = f$ olacağından

$$e^2 = a^2 + b^2 \text{ (Pisagor bağıntısı)}$$

elde edilir.

Ptolemy teoreminin sadeliğine uygun, ilgilenip zevk almanız dileğiyle üç tane problem sunuyoruz:

(1) ABCD bir kare; F, G ve E sırasıyla AB, AC ve AD doğru parçalarının bir iç noktası olmak üzere (EAF) çemberi G noktasından geçiyorsa,

$$AF + AE = \sqrt{2} \cdot AG$$

olduğunu ispatlayınız.

(2) ABC bir eşkenar üçgen ve D noktası bu üçgenin çevrel çemberinin BC (küçük) yayının bir iç noktası ise,

$$DA = DB + DC$$

olduğunu ispatlayınız.

(3) İkinci soruda verilenler aynı kalmak üzere AD doğrusu BC kenarını E noktasında kesiyorsa,

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{DB} + \frac{1}{DC}$$

olduğunu ispatlayınız.

Bu yazı çeşitli geometri ve matematik tarihi kitapları kaynak alınarak hazırlanmıştır.

FİZİKTE ZETA-FONKSİYONU (II)

M. Gündüz İkedâ

TÜBİTAK Feza Gürsey Enstitüsü, PK 6, Çengelköy, 81220-İSTANBUL

Cahit Bey ve Feza Bey'in anısına...

3. Aritmetik Fizik

Ben fizikçi değilim, fakat bu evrende yaşayan biri olarak, evrenin sırrıyla doğal olarak (amatörce) ilgileniyorum. Bugünlerde duyduğum şeyler arasında şu haber de vardı: Son yıllarda Temel Parçacık Teorisinde büyük değişikliklerin meydana geldiği, örneğin parçacık kavramının yerine sicim (= "string") kavramının yer almış olduğu, dolayısıyla teorik fizikçilerin bu yeni kavramla şimdiye kadar bilinen sonuçların yeniden elde edilmesi, ve yeni sonuçların çıkarılması için çabaladığı v.s. gibi. (Not: Sicim Teorisi için "Conformal Invariance and String Theory" (Academic Press, 1989) kitabından I. Ya. Aref'eva'nın "String Field Theory" adlı makalesine bakınız.) Fakat benim esas olarak anlatmak istediğim şey, Sicim Teorisinden ziyade sessizce gelişen başka bir fikir akımıdır. Konuya bir hikaye ile başlayalım. 1986 yılında Berkeley 'de düzenlenen "International Congress of Mathematicians" 'da G. Faltings 'in konuşmasını dinledikten sonra, E. Witten hemen en yakın kitapçılara koşup, Sayılar Teorisi ile ilgili ne var ne yok bütün kitapları almıştır. (Not olarak hatırlatayım: G. Faltings, Mordell konjektürünü çözdüğü için Fields Madalyasını almış bir matematikçi, ve E. Witten ise Pür Matematiğin Topolojik Kuantum Teorisine, bilhassa Sicim Teorisine, uygulanmasında yaptığı büyük katkılardan dolayı 1990 'da Fields Madalyasını alan yegane fizikçidir.) Meğer Faltings yaptığı konuşmada, Sicim Teorisinde, çok önemli bir yer işgal eden Polyakov ölçümünün hesaplanmasında Sayılar Teorisinden faydalanabileceğini anlatmış. Bu hikayeden de anlaşılacağı gibi, son yıllarda Sayılar Teorisi ile Kuantum Teorisi arasındaki yakınlaşmadan sık sık bahsedilmektedir. Bir zamanki (ve hala devam etmekte olan) Operatör Teorisi ve Harmonik Analiz, özellikle lokal kompakt grupların Temsil Teorisi, ile Kuantum Teorisi arasındaki etkileşimler (Not: Bu husus için, "A. J. Coleman: Groups and Physics, AMS Notices 44, No. 1 (1997)" yazısına bakınız), ve son yıllarda görülen düşük boyutlu topoloji ile kuantum teorisi arasındaki etkileşimlerden sonra (Not: Bu husus için Türk. J. Math.(1995) dergisinde çıkan M. Atiyah 'ın makalesine bakınız), bugün Sayılar Teorisi ile Kuantum Teorisi arasındaki sıkı etkileşimler söz konusudur. Acaba bunun temelinde yatan şey nedir diye merak ettiin, ve yukarıda bahsettiğim "Conformal Invariance ..." kitabını karıştırdım. Aşağıda, bu kitap içinde bulunan Aref'eva'nın "String Field Theory" ve Yu. I. Manin 'nin "Reflections on Arithmetic Physics" adlı makalelerden anladığımı, şimdiye kadar yazdığım şeylerin akışı içinde kısaca sunmaya çalışacağım. Not olarak, Yu. I. Manin 'nin bilhassa Sayılar Teorisinde çok tanınmış bir matematikçi olduğuna işaret edeyim.

Kuantum Teorisindeki "Belirsizlik Prensibine" göre Planck ölçeğinden (2×10^{-35} metre) daha küçük çapta olan Planck-altı bölgesinde (= "sub-Planckian domain") ölçüm işleminin direkt olarak yapılamayacağı söylenmektedir. Dolayısıyla Planck-altı Fiziğinin yapılabilmesi için Kuantum Teorisinden başka yeni bir teorinin kurulmasına ihtiyaç olacaktır. Bu ihtiyaca karşı I. V. Volovich (Theor. Math. Phys. 71 (1987)) şöyle bir fikir ortaya atmıştır: Şimdiye kadar kullanılan yöntemin hepsi, $\mathbb{R}$ üzerindeki geometri (yani Q 'nun $|\cdot|_\infty$ valuasyonuna göre tarif edilen metriğe dayanan geometri) ile yapılmış idi, ve bu geometrinin en belirgin özelliği de "archimedean" oluşudur, şu halde yukarıdaki çıkmazdan kurtulabilmemiz için archimedean geometriden vazgeçip, $|\cdot|_p$ p -adik valuasyonuna dayanan Q_p üzerindeki geometriyi kullanarak yeni fiziksel bir teoriyi kurmamız gerekir ve p -adik fiziğin ilk adımı olarak, Sicim Teorisinde önemli bir yer alan Veneziano genişliğini (= "Veneziano amplitude")

ele alarak, bunun p -adik analojisinin ($p \rightarrow \infty$) limiti olarak ifade edildiğini göstermiştir. Ancak Volovich 'in fikrinin, ne meta-fiziksel olarak, ne de matematiksel olarak tatmin edici olduğunu söylemek güçtür. Buna karşın Manin 'nin fikri, her ne kadar tam oturmuş bir şekilde olmasa da, hem meta-fiziksel, hem de matematiksel bakımdan daha ikna edicidir. Manin 'nin fikrine geçmeden önce, daha önce bu yazı içinde söyleyeceğim şeyleri tekrarlayalım:

(a) Fiziksel ölçümlerde esas olarak rasyonel sayıları kullanmaktadır. Zira bu ölçüm esnasında, sabit birim ile ölçülen miktar arasındaki x gibi orantının yaklaşık bir değeri sözkonusudur. Artan hassasiyet ile tekrarlanan ölçümlerde, x değerine ($|\cdot|_\infty$ anlamında) yaklaşan rasyonel sayılardan oluşan bir dizi elde edilmektedir. Zaten bu durum, rasyonel sayılardan oluşan Cauchy dizilerinden hareketle reel sayıları kuran Cantor Yönteminin temelidir. (Not: Bazı fizikçi arkadaşlarımız söyleyebilirler: "Biz ölçümlerde $a < x < b$ şeklindeki bir aralık belirtiyoruz". Fakat a ve b uç noktalarının rasyonel değerli olması gerektiğini, ve a veya b 'nin x 'in yaklaşık değeri olarak bakılabileceğini düşünürsek, bu sözün, yukarıda söylendiği ile aynı kapıya çıkacağı anlaşılır.)

(b) Q cisminin $|\cdot|_\infty$ 'ye göre metriğinden başka, her p asal sayısına tekabül eden, $|\cdot|_p$ valuasyonuna göre p -adik metrik de vardır.

(c) $|\cdot|_\infty$ 'ye göre Q 'nun kapanışı R , $|\cdot|_p$ 'ye göre ise Q_p dir.

Bu gözlemlere dayanarak, Manin 'nin ortaya attığı meta-fiziksel önermeleri, biraz basitleştirerek, şöyle ifade edebiliriz:

(I) Bilemediğimiz bir nedenle biz insanlar, $|\cdot|_\infty$ valuasyonuna göre metriği kullanmaya şartlanmışız. (Not: Onun içindir ki, biz her fiziksel olayı, Q 'nun $|\cdot|_\infty$ 'ye göre kapanışı olan, R içinde düşünüp, incelemekteyiz.) Halbuki Q üzerinde p -adik metrik gibi başka metrikler de vardır, ve bunların gözönüne alınmaması haksızlıktır, "demokrasi" ilkesine aykırıdır. (Manin aynen böyle söylüyor!)).

(II) Evrenimiz, bilhassa Planck-altı bölgesi, adeldir, yani Planck-altı bölgesinin modeli olarak A_Q adeller halkasının alınması gerekir. (Not : Manin 'ne göre Planck-altı bölgesi çok yüzlüdür, onun her bir yüzü, Q 'nun bir valuasyonuna tekabül etmekte olup, bu yüz Q 'nun, sözkonusu olan valuasyonuna göre, kapanışındır. Şu halde Planck-altı bölgesinin R yüzünden başka p -adik yüzü de vardır. (I) önermesi gereğince, biz ancak R -yüzünü tasavvur edebiliriz, fakat p -adik yüzünü hayal bile edemeyiz. Ancak A_Q adeller halkasını bir model olarak seçerek, Planck-altı bölgesini analiz etme olanağını bulabiliriz.)

(III) Planck-altı bölgesinin yüzleri arasındaki bağıntılar tamamlayıcıdır (= "complementary"). (Not: Bir bağıntı yardımıyla Planck-altı bölgesinin bir yüzündeki durum, diğer yüzlerinkinden belirlenebilir. Örnekler aşağıdadır.)

Şimdi okurlarımız soracaktır: "Peki bu önermelerin faydası nedir?" veya "Bunu Planck-altı fiziğine uygulayabilir miyiz?". Bu sorulara kesin cevap vermek için herhalde zaman daha çok erken. Ancak bundan sonraki gelişmeler bu sorulara pozitif veya negatif cevaplar verebilir. Fakat en azından aşağıdakileri söylemek mümkündür. Bunun için bir örnekle başlayalım:

Herhangi bir a gibi sıfırdan farklı bir rasyonel sayı için, daha önce (*) işaretiyle gösterdiğimiz bir bağıntı vardı:

$$(*) \prod_p |a|_p = 1 \quad (p, \infty \text{ ve bütün asal sayılar üzerinde değişir.})$$

Bu bağıntı, (III) önermesinde bahsedilen "tamamlayıcı" bağıntıların tipik bir örneğidir. Gerçekten, bütün p asal sayıları için $|a|_p$ değerini bilirsek, $|a|_\infty$ değerini de bilebiliriz. Bu örneği fazla basit bulanlar için Manin 'nin verdiği başka bir örnek vereyim:

$SL_2(A_Q)/SL_2(Q)$ kompakt grubunun μ Haar ölçümünü

$$\int_{SL_2(A_Q)/SL_2(Q)} d\mu = 1$$

şartıyla normalize ettiğimizde, ve soldaki integrali her yüz üzerindeki integrallerin yardımıyla direkt hesapladığımızda

$$1 = \pi^2/6 \text{ (R-yüzünden)} \times \prod_p (1 - p^{-2}) \text{ (her } p\text{-adik yüzden)}$$

eşitliğini elde ediyoruz ki, bu da

$$\pi^2/6 = \prod_p (1 - p^{-2})^{-1} \quad (= \zeta(2)) \quad (**)$$

sonucunu verir (Euler formülü). (**) eşitliği, R-yüzündeki $\pi^2/6$ ile p -adik yüzündeki $1 - p^{-2}$ gibi aritmetik ifadeleri arasında bir bağ kurmaktadır. Not olarak, π sayısını içeren sayısal ifadelerin genelde fiziksel karakter taşıdığına da işaret edelim.

Yukarıdaki az sayıda örneklerden hemen genelleştirmeye gitmemiz doğaldır ki çok tehlikelidir. Fakat bu örnekler, R-yüzündeki (bilinmeyen veya direkt ölçme olanağına sahip olmayan) fiziksel bir miktarın, p -adik yüzünde kolay hesaplanabileceği miktarlar tarafından ifade edilebileceği olasılığını göstermektedir. Daha doğrusu, direkt ölçülme imkanı olmayan Planck-altı bölgesinin (R-yüzünde bulunan) fiziksel bir miktarın, p -adik yüzündeki hesaplanabilen miktarlardan elde edilmesinin olanaksız olmayacağını, böylece, Manin 'nin fikrini kabul etmek suretiyle, Planck-altı Fiziğinin yapılabilme olasılığını hissettirmektedir.

Not: Yukarıda, basit olsun diye, A_Q adeller halkasını Planck-altı bölgesinin modeli olarak seçmiş bulunuyorum. Gerektiğinde, Q cisminde daha büyük bir cebrik sayı-cismi de seçilebileceğine işaret edeyim.

Manin 'nin ortaya attığı fikri kabaca "fiziksel olayları A_Q (veya gerektiğinde F gibi daha uygun cebrik sayı-cismi ile A_F) adeller halkasının aritmetiği içinde düşünmek" diyebiliriz. Bu da "aritmetik fizik" adının çıkışının sebebidir.

Böylece şimdiye kadar hiç bir zaman teorik fiziğin iş arkadaşı olarak kabullenmemiş olan sayılar teorisi, son günlerde en büyük yardımcısı gözü ile bakılmaya başlanmıştır.

Doğaldır ki Manin 'nin prensibinin bütün fizik topluluğunca kabullenmesi için daha biraz zamana ihtiyaç olacağı açıktır. Ancak bunun, 21. yüzyılın fizikte, özellikle Planck-altı fiziğinde, kesin bir yön vereceğinden eminim.

Daha önce Tate 'in tezinden bahsederken, K gibi bir cebrik sayı cismine ait A_K adeller halkasından harmonik analiz yolu ile Hecke L -fonksiyonlarının sistematik bir şekilde elde edilebileceğini söylemiştim. Özel olarak, A_Q adeller halkasından ise Riemann zeta-fonksiyonu ve Dirichlet L -fonksiyonları çıkınaktadır. Böyle olunca bir gün, Sicim Teorisi veya Planck-altı Fiziği ile ilgili olarak, Riemann zeta-fonksiyonu ve Dirichlet L -fonksiyonları kullanılmaya başlanmış olsa da, hiç şaşırılmamız gerekir. Bu durum, yazımın en başında belirttiğim Feza Bey' in "Biz fizikte zeta-fonksiyonu..." sözü ile birlikte, kendisinin ne kadar ileri görüşlü olduğunu göstermektedir.

4. 21. Yüzyıla Girerken

Yukarıda Cahit Bey ile ilgili bazı olayları sunarak, kendisinin zamanın en aktüel konuları (kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann Hipotezi, sayı-cisimleri için Riemann-Roch Teoremi gibi) ile çok yakından ilgilendiğini, böylece 20. yüzyıl matematiğinin gidişi hakkında çok sağlam bir görüşe sahip olduğunu anlattım. Aynı zamanda aritmetik fiziğin bugünlerde güncel bir konu olduğundan

bahsederek, Feza Bey 'in fiziğin geleceği hakkında ne kadar isabetli fikirlere sahip olduğunu belirtti. Bu iki çok kıymetli bilim adamımızı kaybettiğimiz bugün, doldurulması güç büyük boşluğu hissetmekteyiz. Özellikle 21.yüzyıla iki yıl kala, 20.yüzyılın sonunda fizik ve matematiğin radikal bir şekilde değiştiği, ve gelecek yüzyılda ne yönde gelişeceği düşünüldüğünde, Cahit Bey ve Feza Bey 'in yokluğu kendisini daha çok hissettirmektedir. Ancak biz bu üzüntüyü yenip, hızla değişen ve gelişen bilim dünyasında Türk Biliminin varlığını kanıtlamak için, daha çok gayret sarfetmeliyiz ve bunu yaparken, **Cahit Bey ve Feza Bey gibi ileri görüşlü olmalıyız. Bunu başarmamız, kendilerinin anısına yapabileceğimiz en büyük hizmet olacaktır.**

PROF. DR. MEHMET SAPANCI 'NIN ANISINA...



Evli ve iki çocuk babası olan Prof. Dr. Mehmet Sapancı 1946 yılında Manisa Alaşehir 'de doğdu. İlk ve ortaokulu burada tamamladı. 1964 yılında İzmir Atatürk Lisesinden mezun oldu. 1968 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Astronomi Bölümünden mezun olduktan sonra aynı yıl asistan olarak bu bölümde göreve başladı. 1970 yılında Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Lothet Koschmieder danışmanlığında "Jacobien Elliptik Fonksiyonlarının Toplam Teoremi Üzerine" adlı yüksek lisans tezini tamamladı. 1971 yılında, Milli Eğitim Bakanlığının açmış olduğu yurtdışı burs sınavlarını kazanarak İngiltere 'ye gönderildi. Bir yıl dil hazırlığından sonra Warwick Üniversitesi Matematik Bölümünde Prof. Dr. Roger Carter ile master çalışmalarına başladı ve 1975 yılında master tezini tamamladı. Aynı yıl Newcastle Upon Tyne Üniversitesi Matematik Bölümünde Dr. John S. Rose danışmanlığında doktora çalışmalarına başladı. Kasım 1977 'de Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünün Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında açılan asistanlık sınavını kazanarak yine bu bölümde göreve başladı. Nisan 1980 'de Ege Üniversitesinden "Fen Doktoru" ünvanını aldı. 15 Ekim 1989 yılında üniversite doçentliğine ve 1996 yılında da profesörlüğe yükseltildi. Prof. Dr. Mehmet Sapancı 'nın Cebir ve Sayılar Teorisi alanında yurtiçi ve yurtdışında yayınlanmış pek çok çalışması bulunmaktadır.

Tüm yakınlarının başı sağolsun...

BÜYÜK TÜRK MATEMATİKÇİSİ: HÜSEYİN TEVFİK PAŞA (1832-1901)

Fikri Akdeniz

Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü,
01330-ADANA

19. yüzyılda Osmanlılarda batılılaşma sürecinde görülen bilimsel çalışmalar, Avrupa'da yazılan kitaplardan çeviriler yapmaktan ileri gidememiştir. Böyle bir ortamda Hüseyin Tefik Paşa matematiğin en yeni alanlarından kuaterniyonlar cebiri üzerinde araştırmalar yaparak "Linear Algebra" adlı İngilizce bir araştırma kitabı yazmıştır. Kitabın ilk baskısı 1882 'de (69 sayfa) ikinci baskısı 1892 'de genişletilmiş ve düzeltilmiş olarak (188 sayfa) İstanbul 'da basılmıştır. Bu nedenle H. T. Paşa bütün Osmanlı tarihinde temel bilimler alanında orijinal çalışma yapan ve yayınlayan ilk bilim insanımızdır. Vidinli H. T. Paşa olarak bilinen Paşa'nın bilimsel kimliğini tanıtmayı amaçladığımız bu yazımızda önce konuyu incelemeye neden olan gelişmeleri sunmak istiyorum.

1993 yılı Aralık ayında Çukurova Üniversitesinde konferanslar vermek üzere konuğumuz olan McGill Üniversitesi (Kanada) öğretim üyesi Prof. Dr. George P. H. Styan ile Üniversitemiz kütüphanesini gezerken Prof. Dr. Kazım Çeçen tarafından yayına hazırlanmış İstanbul Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Tarihi Araştırma Merkezi yayını olan "Hüseyin Tefik Paşa ve Linear Algebra" adlı 1988 baskılı kitap dikkatimizi çekti. Kitabın bir fotokopisini McGill Üniversitesi kütüphanesine koyulmak üzere Profesör Styan yanında götürmüştü. 1995 yılı Temmuz ayında McGill Üniversitesinde düzenlenen "İstatistik İçin Matris Metodları" konulu uluslararası bir bilimsel toplantıya davetli olarak katılmıştım. Toplantının bir oturumunda Prof. Styan H. T. Paşa tarafından İngilizce yazılmış ve 1882 yılında İstanbul'da basılmış "Linear Algebra" adlı kitabın dünya'da basılmış ilk eser olabileceğine ilişkin bir duyuru da bulunmuştu. Toplantı salonunda konunun uzmanları niteliğindeki 70 bilim insanı içinden aykırı bir görüş çıkmadı. Prof. Styan bu konuda daha geniş bilgiye sahip olabilmek için Uluslararası Lineer Cebir Derneğinin yılda dört kez yayınlanan ve editörü olduğu IMAGE adlı bültenin 1995 yazındaki

15. sayısında Paşanın fotoğrafını (İstanbul Üniversitesi Kütüphane Müdürlüğünden temin ettiğim) basarak aynı türde bir soru sormuştu. (Ek 1, IMAGE, sayı: 15 , sayfa: 24 (1995))

Profesör Styan 'a ulaştırılan bilgiler bu kitabın H. T. Paşa tarafından Harvard Koleji kütüphane müdürü Justin Winsor 'a 5 Şubat 1885 tarihli mektupla birlikte gönderildiğini ve ciltlenmiş bir kopyasının Harvard Üniversitesi Kütüphanesinde bulunduğunu göstermektedir (IMAGE, sayı: 16, sayfa: 29 (1996)). H. T. Paşa mektubunda kitabını Harvard Koleji Matematik Bölümü öğretim üyesi Profesör J. M. Peirce 'in arzusu üzerine hediye ettiğini belirtmiştir.

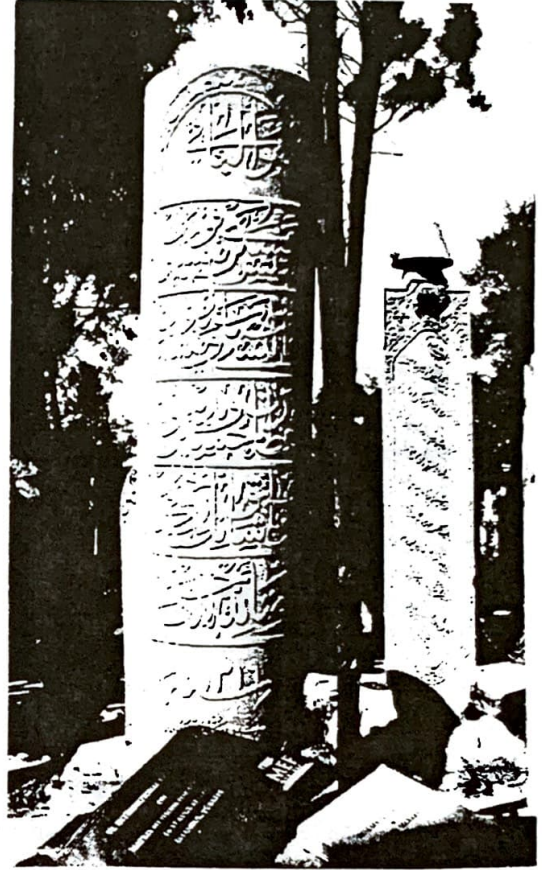
Ayrıca Benjamin Peirce (1809-1880) tarafından yazılan "Linear Associative Algebra" adlı bir kitabın 1870 yılında Washington City 'de basıldığını, bu kitabın "American Journal of Mathematics" adlı derginin 4. sayısında 97-229 sayfaları arasında 1881 'deki yayın esas alınarak 1882 'de yeniden basıldığı görülmektedir.

Görüldüğü gibi H. T. Paşa Osmanlı devletinin olumsuzluklarla dolu bir döneminde 1882 'de basılan "Linear Algebra" kitabıyla dünyada ilkler arasında yer alan önder araştırmacı olma ünvanına sahiptir.

16-17 Ağustos 1997 tarihlerinde İstanbul'da düzenlediğimiz 6. Uluslararası "İstatistik İçin Matris Metodları" bilimsel toplantısına 16 ayrı ülkeden katılan 50 bilim insanı içinde yer alan Prof. Styan (McGill Üniv., Kanada), Prof. Puntanen (Tampere Üniv., Finlandiya), Prof. Werner (Bonn Üniv., Almanya) ve ben istek üzerine 19 Ağustos 1997 günü H. T. Paşanın Eyüp'teki mezarını ziyaret ettik. (Ek 2, IMAGE, sayı: 19, sayfa: 15 (1997)). Osmanlı dönemi matematikçilerinden Salih Zeki Bey 'in anılarına dayanarak bilgi sahibi olduğumuz H. T. Paşa ülkemizde bilim tarihi içinde önemli bir konumda ve unutulmayanlar arasında yer alması gereken bir matematikçidir. Dileğim H. T. Paşanın Eyüp mezarlığında Ferhad Paşa türbesinden Feridun Bey türbesine giden Beybaba sokağının sağ yanında yola çok yakın bir yerdeki mezar taşının yanına yaşam öyküsünün yazıldığı ayırdedici bir yazının asılmasıyla sonraki kuşaklara arzulanan bilgilerin aktarılmasıdır.

KAYNAKÇA

- [1] Çeçen, K (1988). Hüseyin Tevfik Paşa ve "Linear Algebra" İstanbul Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Tarihi Araştırma Merkezi Yayın No.5, İstanbul.
- [2] Saraç, C. (1992) "Salih Zeki Bey 'e göre Vidinli Tevfik Paşa" Bilim Tarihi, Sayı: 9, 3-10.



DANS EDEN SAYILAR

Hüseyin Kayadibi

Gülhane Askeri Tıp Akademisi, ANKARA

Matematik korkusunun anlamsızlığına dair pek çok yazı vardır. Ama bu yazılarda sadece "korkunayın" denir. Yapılması gereken, korkmanın yanlış olduğunu öğütlemek yerine, matematiğin ne kadar ilginç, zevkli ve oyun-sal olduğunu göstermektir.

Evrendeki herşey gibi sayılar da bir uyum içindedir. Sayılara dikkatle bakan herkes onların arasındaki ortak noktaları kolayca ortaya çıkarabilir.

Sayılar sihirlidir. Birbirleriyle ahenkle dans ederler. İki ikiyi dansa kaldırdığında dört döner ikinin başı. Sıfıra herkes aşiktir, ama kimse onu dansa kaldıramaz. Çünkü; sıfıra çarpılmaları yok olmaları demektir. Bütün işin sırrı bunu görüp anlayabilmektedir. Matematik korkusunun gereksizliğini anlamada yapılacak ilk iş sayıların dansını öğrenebilmektir. Nasıl mı? İşte böyle:

- Bütün rakamları 1 olan sayıların karesi:
En çok 9 basamaklı ve bütün rakamları 1 olan karesi bulunacak sayı, H ;
 H sayısının basamak sayısı ise, K olsun.
Önce 1 'den başlayıp birer birer artırarak K sayısına kadar olan rakamlar yazılır.
Sonuçta,
(a) En ortadaki basamakta bulunan rakam bir tane, diğer basamaklardaki rakamlar ise ikişer tanedir.
(b) En ortadaki rakamdan itibaren birer, ikişer, üçer, ... , sağa ve sola doğru gidildiğinde eşit uzaklıktaki basamaklarda aynı rakamlar vardır. Örneğin,

$$1^2 = 1 \quad 11^2 = \underline{1} \underline{2} \underline{1} \quad 111^2 = \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{2} \underline{1} \\ 1111^2 = \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1}$$

- Bütün rakamları 1 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;

Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E olsun. İlk olarak A sayısının karesi yukarıda anlatılan şekilde bulunur. Sonra ise, E sayısı kadar en ortadaki basamakta bulunan rakam kendi yanına yazılır. Örneğin,

$$11 \times 11 = \underline{1} \underline{2} \underline{1} \\ 111 \times 11 = \underline{1} \underline{2} \underline{2} \underline{1} \\ 1111 \times 11 = \underline{1} \underline{2} \underline{2} \underline{2} \underline{1} \\ 111 \times 111 = \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{2} \underline{1} \\ 1111 \times 111 = \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{3} \underline{2} \underline{1} \\ 11111 \times 111 = \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{3} \underline{3} \underline{2} \underline{1}$$

- Bütün rakamları 2 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;

Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,

A sayısının basamak miktarının 1 eksiği ise N olsun.

(a) Eğer A sayısı 2 basamaklı ise, E sayısı kadar 8 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$22 \times 22 = \underline{4} \underline{8} \underline{4} \\ 222 \times 22 = \underline{4} \underline{8} \underline{8} \underline{4} \\ 2222 \times 22 = \underline{4} \underline{8} \underline{8} \underline{8} \underline{4} \\ 22222 \times 22 = \underline{4} \underline{8} \underline{8} \underline{8} \underline{8} \underline{4}$$

(b) Eğer A sayısı 3 basamaklı ise, E sayısı kadar 3 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
222 \times 222 &= \underline{49284} \\
2222 \times 222 &= \underline{493284} \\
22222 \times 222 &= \underline{4933284} \\
222222 \times 222 &= \underline{49333284}
\end{aligned}$$

(c) Eğer A sayısı 4 basamaklı ise, E sayısı kadar 7 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
2222 \times 2222 &= \underline{4937284} \\
22222 \times 2222 &= \underline{49377284} \\
222222 \times 2222 &= \underline{493777284}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 3 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,

A sayısının basamak miktarı ise N olsun.

E sayısı kadar 9 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
33 \times 33 &= \underline{1089} \\
333 \times 33 &= \underline{10989} \\
3333 \times 33 &= \underline{109989} \\
333 \times 333 &= \underline{110889} \\
3333 \times 333 &= \underline{1109889} \\
33333 \times 333 &= \underline{11099889}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 4 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,

A sayısının basamak miktarı ise N olsun.

(a) Eğer A sayısı 2 basamaklı ise, E sayısı kadar 5 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
44 \times 44 &= \underline{1936} \\
444 \times 44 &= \underline{19536} \\
4444 \times 44 &= \underline{195536}
\end{aligned}$$

(b) Eğer A sayısı 3 basamaklı ise, E sayısı kadar 3 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
444 \times 444 &= \underline{197136} \\
4444 \times 444 &= \underline{1973136} \\
44444 \times 444 &= \underline{19733136}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 5 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,

A sayısının basamak miktarı ise N olsun.

(a) Eğer A sayısı 2 basamaklı ise, E sayısı kadar 5 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
55 \times 55 &= \underline{3025} \\
555 \times 55 &= \underline{30525} \\
5555 \times 55 &= \underline{305525}
\end{aligned}$$

(b) Eğer A sayısı 3 basamaklı ise, E sayısı kadar 3 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
555 \times 555 &= \underline{308025} \\
5555 \times 555 &= \underline{3083025} \\
55555 \times 55 &= \underline{30833025}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 6 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,

A sayısının basamak miktarı ise; N olsun.

E sayısı kadar 9 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
66 \times 66 &= \underline{4\ 3\ 5\ 6} \\
666 \times 66 &= \underline{4\ 3\ 9\ 5\ 6} \\
6666 \times 66 &= \underline{4\ 3\ 9\ 9\ 5\ 6} \\
666 \times 666 &= \underline{4\ 4\ 3\ 5\ 5\ 6} \\
6666 \times 666 &= \underline{4\ 4\ 3\ 9\ 5\ 5\ 6} \\
66666 \times 666 &= \underline{4\ 4\ 3\ 9\ 9\ 5\ 5\ 6} \\
6666 \times 6666 &= \underline{4\ 4\ 4\ 3\ 5\ 5\ 5\ 6} \\
66666 \times 6666 &= \underline{4\ 4\ 4\ 3\ 9\ 5\ 5\ 5\ 6} \\
666666 \times 6666 &= \underline{4\ 4\ 4\ 3\ 9\ 9\ 5\ 5\ 5\ 6}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 7 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,
 A sayısının basamak miktarı ise N olsun.

(a) Eğer A sayısı 2 basamaklı ise, E sayısı kadar 8 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
77 \times 77 &= \underline{5\ 9\ 2\ 9} \\
777 \times 77 &= \underline{5\ 9\ 8\ 2\ 9} \\
7777 \times 77 &= \underline{5\ 9\ 8\ 8\ 2\ 9}
\end{aligned}$$

(b) Eğer A sayısı 4 basamaklı ise, E sayısı kadar 7 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
7777 \times 7777 &= \underline{6\ 0\ 4\ 8\ 1\ 7\ 2\ 9} \\
77777 \times 7777 &= \underline{6\ 0\ 4\ 8\ 7\ 1\ 7\ 2\ 9} \\
777777 \times 7777 &= \underline{6\ 0\ 4\ 8\ 7\ 7\ 1\ 7\ 2\ 9}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 8 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkının 1 eksiği E ,
 A sayısının basamak miktarı N .

A sayısından 1 basamak fazla ve bütün rakamları 8 olan sayı ise K olsun.

(a) Eğer A sayısı 2 basamaklı ise, E sayısı kadar 2 rakamı A ve K sayılarının çarpımında baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
888 \times 88 &= \underline{7\ 8\ 1\ 4\ 4} \\
8888 \times 88 &= \underline{7\ 8\ 2\ 1\ 4\ 4} \\
88888 \times 88 &= \underline{7\ 8\ 2\ 2\ 1\ 4\ 4}
\end{aligned}$$

(b) Eğer A sayısı 3 basamaklı ise, E sayısı kadar 3 rakamı A ve K sayılarının çarpımında baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
8888 \times 888 &= \underline{7\ 8\ 9\ 2\ 5\ 4\ 4} \\
88888 \times 888 &= \underline{7\ 8\ 9\ 3\ 2\ 5\ 4\ 4} \\
888888 \times 888 &= \underline{7\ 8\ 9\ 3\ 3\ 2\ 5\ 4\ 4}
\end{aligned}$$

(c) Eğer A sayısı 4 basamaklı ise; E sayısı kadar 4 rakamı A ve K sayılarının çarpımında baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
88888 \times 8888 &= \underline{7\ 9\ 0\ 0\ 3\ 6\ 5\ 4\ 4} \\
888888 \times 8888 &= \underline{7\ 9\ 0\ 0\ 4\ 3\ 6\ 5\ 4\ 4}
\end{aligned}$$

- Bütün rakamları 9 olan sayıların çarpımı:

Büyük olan sayı H ;
Küçük olan sayı A .

Bu iki sayının basamak miktarları farkı E ,
 A sayısının basamak miktarı ise N olsun.

E sayısı kadar 9 rakamı A sayısının karesinde baştan N 'inci rakamdan sonra yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned}
99 \times 99 &= \underline{9801} \\
999 \times 99 &= \underline{98901} \\
9999 \times 99 &= \underline{989901} \\
999 \times 999 &= \underline{998001} \\
9999 \times 999 &= \underline{9989001} \\
99999 \times 999 &= \underline{99899001} \\
9999 \times 9999 &= \underline{99980001} \\
99999 \times 9999 &= \\
&\quad \underline{999890001} \\
99999 \times 9999 &= \\
&\quad \underline{9998990001}
\end{aligned}$$

Bütün rakamları 9 olan sayıların çarpımı ve ayrıca karesi "Matematik Dünyası" dergisinin Şubat/1996 sayısında yayınlanan yazımda anlatılan şekilde de bulunabilir.

- Son rakamı 5 olan herhangi bir üç basamaklı sayının karesi:

Bu sayının onlar basamağındaki rakamın 1 fazlası ile çarpımından çıkan sayının birler basamağındaki rakam H ;

Bu çarpımın onlar basamağındaki rakam K ;

Karesi bulunacak üç basamaklı sayının sonundaki 5 rakamı silindiğinde kalan sayının rakamları toplamına, yüzler basamağındaki rakam ile çarpımından çıkan sayı eklenince elde edilen sayı A ;

Karesi bulunacak üç basamaklı sayının yüzler basamağındaki rakamın 1 eksiğinin, onlar basamağındaki rakam ile çarpımı E ;

$$A + K + E = N \text{ olsun.}$$

$$\text{Sonuç} = \underline{N} \underline{H} 25 \text{ 'dir.}$$

Örneğin, 685 için

$$8(8 + 1) = 72 \text{ sonucundaki } \underline{2} \text{ rakamı, } H; \\ 7 \text{ rakamı ise, } K \text{ 'dır.}$$

$$(6 + 8) + (68.6) = 422 = A$$

$$(6 - 1).8 = 40 = E$$

$$N = 422 + 7 + 40 = \underline{469}$$

$$685^2 = \underline{N} \underline{H} 25 = \underline{469} \underline{2} \underline{2} \underline{5}$$

Bu işlem çok daha kısa olarak aşağıdaki gibi de yapılabilirdi. Ancak buradaki amacım; matematiksel bir işlemin birden çok çözüm yolunun olabileceğini gösterip genç beyinlerin dikkatli bir şekilde düşünerek bu yolları ortaya çıkarmaları konusunda adım atmalarını sağlamaktır.

Karesi bulunacak üç basamaklı sayının sonundaki 5 rakamı atıldığında kalan sayı bir fazlası ile çarpılır ve çıkan sayının sonuna 25 yazılır. Örneğin,

$$68(68 + 1) = \underline{4692}; \quad 685^2 = \underline{469225}.$$

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 500,000.- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3,4
Cilt 2	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 3	Sayı: 5
Cilt 4	Sayı: 1,3,4,5
Cilt 5	Sayı: 1,5
Cilt 6	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 7	Sayı: 1,2,3

OYUNLA EĞİTİM VE BİRKAÇ OYUN

Ali Nesin

Bilgi Üniversitesi, Matematik Bölümü,
İSTANBUL

Acaba, diye soruyorum kendi kendime, ilk ve ortaöğretimde, matematik öğrencilere oyun oynatarak öğretilse ne olur? İlkokul 1'den başlayarak öğrenciler sürekli matematiksel oyun oynasalar... En fazla bir ay boyunca, öğretmenlerinin kendilerine sunduğu oyunu küçük gruplar oluşturarak irdelemeye çalışsalar... Sonra bir başka oyun irdelense... O oyunu çocuklar nasıl oynarlarsa kazanırlar? Hangi hamlelerle kazanma olasılıklarını artırırılar? En iyi stratejileri nedir? Birinci oyuncu mu, yoksa ikinci oyuncu mu olmak daha iyidir? Kazanma olasılığı kaçtır? Oyunun beklentisi nedir?

Oyun temelli bir matematik eğitimi daha iyi bir sonuç verir mi? Öğrenciler, belki daha az bilgili olarak liseden mezun olabilirler, ama, bana öyle geliyor ki, bildiklerini gerçekten, özümseyerek bilirler. Ayrıca, matematiği, düşünmeyi, araştırmayı daha çok severler, matematiğin özü olan "kanıtlamayı" daha iyi kavrarlar ve yaşama ve üniversite eğitimine daha iyi hazırlanmış olurlar. Örneğin, yazı-tura ya da zar atarak kesirli sayılar öğretilir.

Üstüne üstlük, konular en fazla bir ay sürecinden ve birbirinden olabildiğince bağımsız olacağından, hiç bir öğrenci bir aydan fazla arkadaşlarından geri kalmayacaktır. Bir oyunu iyi çözümleyebilen (analiz edebilen) bir öğrencinin kendine olan güveni artacaktır. Sürekli başarısızlık böylece önlenecektir.

Matematiği bir piramite benzetebiliriz: Temel yoksa, bir kat yukarı çıkamayız. Tarih dersi pek öyle değildir. Eski Yunan uygarlığı bilinmeden de 1789 Fransız Devrimi pekâlâ anlaşılabilir. On bir yıllık eğitimi boyunca, bir gencin bunalıma girme, bir ara sorunlarını aşamama, dolayısıyla derslerine çalışmama olasılığı yüksektir. Bir ay matematikten geri kalan öğrenci, bu bir aylık gecikme yüzünden bütün yaşamı boyunca matematikten geri kalacaktır, kendine olan güvenini yitirecektir. Bunun önlenmesi gerekmektedir. Birbirinden olabildiğince bağımsız dersler, bence, bu sorunu büyük ölçüde çözer.

Zorunlu olmadıkça sabaha kadar ders çalışan bir öğrenciye az rastlanır. Oysa çocuklar sabaha kadar oyun oynamaya can atarlar. Öğrenciler hem oyun oynasalar, hem de matematiği öğrenseler, böylece matematiği kendi kendilerine keşfedip öğrenseler, güzel olmaz mı?

Bugün matematik derslerinde bir lise öğrencisi ne öğreniyor?

Örneğin x^y sayısını öğreniyor. 2^3 sayısının 8 olduğunu bir ilkokul öğrencisi bile bilir. $2^{1/2}$ biraz daha zordur, ama $\sqrt{2}$ anlamına geldiğini ortaokul öğrencileri bilirler. Peki ya π^π sayısını, hatta 2^π sayısını, bir lise öğrencisi, yaklaşık bile olsa, hesaplayabilir mi? Nedir bu sayı? Bırakın hesaplamayı, anlamını bilir mi? Hatta π 'nin tanımını bile bilmez. Ama bilmediği bu sayılarla işlem yapmasını öğrenir...

Lise öğrencisine matris çarpımları öğretilir. Matrislerin nereden geldiği, neden öyle değil de böyle çarpıldığı öğretilmez. Matrislerin öyle değil de böyle çarpılması, bir matematikçinin kaptırının, direktmesinin bir sonucu mudur? Kutsal bir kitapta mı yazmaktadır, yoksa matris çarpımı, gökten inme bir vahiy midir? Hayır! Matrislerin böyle çarpılması gerekmektedir. Matris çarpımını böyle tanımlamak gerekir. Bu, bir gereksinimdir, başka türlü olamazdı. Ama bu gereksinim lise öğrencisine gösterilemez. Lise öğrencisi bu gereksinimi anlamak için yeterli donanıma, bilgiye sahip değildir. Hatta birçok lise öğretmeni bile bilmez neden matrislerin böyle çarpıldığını. Sonuç: Matrisler konusu öğrenciye ezberletilir.

Hale determinantlar... Lise öğrencisi için determinantlar matematik değil sihirbazlıktır.

Limit, türev ve integral de doğru dürüst öğretilmez. "Öğretilmiyor" bile demiyorum, "öğretilmez" diyorum.

En çok düşünülmesi gereken ders olan matematik, okullarda ezberletilir. Öğrenciler ezberlerler ve matematikten nefret ederler.

Oysa matematik ne güzeldir! Kendi kendine keşfedilince ve anlaşılınca...

Matematik eğitiminde bilgiyi ön plana çıkarmamalıyız. En azından sekiz yıllık ilköğretimde, hatta ortaöğretimin ilk iki yılında. Oyun ağırlıklı bir matematik müfredatında, inanıyorum

ki ezbere yer olmayacaktır. Her öğrenci öğrendiğini bilerek, anlayarak öğrenecek, yani bilgiyi özümseyecektir.

Bütün bu dediklerim iyi hoş da, mümkün mü? Bir öğrencinin sekiz-dokuz yılını dolduracak kadar matematiksel oyun var mı?

Belki bugün yok, ama düşünülürse, üstünde çalışılırsa zamanla bulunabilir. Ayrıca, klasik ya da oyunsal eğitim diye salt iki seçeneğimiz yok. Bunun bir ara yolu da bulunabilir. Haftada üç saat klasik matematik eğitimi, üç saat de oyunla eğitim gibi seçenekler de var. Bu konuda karar vermesi gerekenler daha çok pedagoglar ve eğitimcilerdir.

Bir başka sorun da üniversiteye giriş sınavları... Bilgi ağırlıklı olmayan bir ilk ve ortaöğretimden geçen iki milyona yakın gence, üniversite sınavlarında ne soracaksınız, onları nasıl değerlendireceksiniz? Bu soruya bir yanıtım yok. Her şeyin yanlış olduğu bir ortamda, doğru bir iş yapmanın ne derece zor olduğunu gösteriyor bu ikilem...

Birinci Oyun.

Aşağıdaki oyunu ilkökul birinci sınıf öğrencileri oynayabilirler:

Bir doğal sayıdan başlayarak oyuncular bir önceki oyuncunun söylediği sayıdan sırayla 1 ya da 2 çıkarırlar. Sıfırın altına inmek yasaktır! 0 diyen kaybeder. Örneğin, eğer 13'ten başlanıyorsa, oyuncular sırayla, 11 - 10 - 8 - 7 - 6 - 4 - 3 - 1 - 0 diyebilirler. Bu örnekte, en son sayıyı birinci öğrenci söylediğinden, birinci oyuncu oyunu kaybeder.

Böylece, çocuklar, hiç bir şey öğrenmeseler, çıkarmayı öğrenirler. Bu oyunu, kim nasıl oynarsa kazanır? Yanıtı oldukça kolaydır. Bu oyunda kazanmak için $3n + 1$ biçiminde yazılan sayıları söylemek gerekmektedir. Bir kez $3n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı söyleyebilirsek, bundan sonra hep $3n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı söyleyebiliriz. Şöyle yaparız: Diyelim $3n + 1$ dedik. Öbür oyuncu 1 çıkarırsa 2 çıkarırız, 2 çıkarırsa 1 çıkarırız. Böylece, sıra yeniden bize geldiğinde, daha önce söylediğimiz sayıdan toplam 3 çıkmış olur, yani $3(n - 1) + 1$ sayısını söylemiş oluruz. Böylece n bir azalmış olur. n ler azala azala 0 olduğunda 1 sayısını söylemiş oluruz. Öbür oyuncu zorunlu

olarak 0 diyecek ve oyunu kaybedecektir.

Bu oyunun çözümlemesi şöyle yapılır:

- 0 diyen oyunu kaybedecektir.
- 1 diyen oyunu kazanacaktır, çünkü öbür oyuncu 0 demek zorundadır.
- 2 ya da 3 diyen oyunu kaybeder, çünkü öbür oyuncu 1 deyip oyunu kazanır.
- 4 diyen oyunu kazanır, çünkü öbür oyuncu ya 2 ya da 3 demek zorundadır ve oyunu kaybedecektir.
- 5 ya da 6 diyen oyunu kaybeder, çünkü öbür oyuncu 4 deyip oyunu kazanabilir...

Böyle bir çözümleme (analiz) yukardaki $3n + 1$ stratejisini bulduracaktır.

Yukardaki oyunu öğretmen öğrencileriyle herkesin önünde oynamalıdır ve öğretmen hep kazanmalıdır. Bir süre sonra öğrenciler öğretmenin bildiği, kendilerinin bilmediği bir hinoğluluk olduğunu sezinleyeceklerdir. Eğer öğretmen, hamleleri, yani söylenen sayıları tahtaya yazarsa, öğrenciler öğretmenin stratejisini daha kolay anlarlar.

Öğretmen böylece "kazandıran strateji" kavramını öğrencilerin anlamasını sağlar. Sıra bir sonraki oyuna gelmiştir. Bir sonraki oyunda öğrenciler yalnızdır. Birbirleriyle oynarlar. Oyunu kavradıktan sonra "kazandıran strateji" 'yi bulmaya çalışırlar.

İkinci Oyun.

Yeni oyunumuzda, oyuncular, belirlenmiş bir sayıdan 1, 2 ya da 3 çıkarsınlar... Yine son hamleyi yapan, yani 0 diyen oyunu kaybediyor. Bu yeni oyunda, $4n + 1$ biçiminde yazılabilen bir sayıyı söyleyen oyuncu oyunu kazanır. Şöyle kazanır: Öbür oyuncu 1 çıkarırsa 3 çıkarır, 2 çıkarırsa 2 çıkarır, 3 çıkarırsa 1 çıkarır. Böylece toplam 4 çıkmış olur... Dolayısıyla $2n$ hamle sonra $n = 0$ olur, yani 1 söylenir. Öbür oyuncu 0 demek zorunda olduğundan, oyunu kaybeder.

Okulda yukardaki oyunları öğrenen çocuk, aababasıyla ya da büyük kardeşleriyle oynarsa, onları yenip kendine ve aklına güvenir, özgüveni artar! Hatta aile, parmak kadar çocuğun bu kadar zeki olmasına şaşar ve ona övgüler yağdırır.

Öğrenciden buna benzer yeni oyunlar bulması ve bulduğu oyunların en iyi stratejisini saptaması istenebilir.

Üçüncü Oyun.

Bir önceki oyunu biraz daha değiştirelim. O oyunun en iyi stratejisini yasaklayalım! Bir önceki oyunun en iyi stratejisi, öbür oyuncu bir önceki hamlesinde i çıkarmışsa, $4 - i$ çıkarmaktır. Bundan böyle bu strateji yasak olsun! Yani, bundan böyle, bir oyuncu 1 çıkarmışsa, sonraki oyuncu 3 çıkarmasın, 2 çıkarmışsa 2 çıkarmasın, 3 çıkarmışsa 1 çıkarmasın... Yine son hamleyi yapan kaybediyor.

Bu yeni oyunun en iyi stratejisi nedir? Bu yeni oyunun en iyi stratejisi $5n + 1$ biçiminde yazılabilen sayılar söylemektir. Diyelim, $5n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı söyledik. Eğer öbür oyuncu 2 çıkarırsa 3 çıkarırız, 3 çıkarırsa 2 çıkarırız. Böylece toplam 5 çıkmış olur ve $5(n - 1) + 1$ sayısına ulaşırız. Peki ya öbür oyuncu 1 çıkarmışsa, yani $5n$ demişse? Ne yazık ki, 4 çıkaramayacağımızdan $5(n - 1) + 1$ sayısını söyleyemeyiz... Ne yapalım? Biz de 1 çıkaralım, yani $5n - 1$ diyelim. Öbür oyuncu 3 çıkaramayacağından (yasak!!!) $5n - 4$, yani $5(n - 1) + 1$ diyemez. Demek ki öbür oyuncu ya 1 ya 2 çıkaracaktır. 1 çıkarırsa 2 çıkaralım, 2 çıkarırsa 1 çıkaralım. Böylece $5(n - 1) + 1$ sayısına ondan önce biz varırız.

Dördüncü Oyun.

Yukardaki oyunları biraz değiştirerek ilginç oyunlar bulabiliriz. Örneğin, her oyuncu 2 ya da 3 çıkarsın. 1 çıkarmak yasak! Ve en son hamleyi yapan oyuncu oyunu kaybetsin! Bu oyunda 0 ya da 1 diyen oyuncu oyunu kaybeder, çünkü 0 ya da 1 den sonra sayı çıkarılamaz, yani 0 ya da 1 diyen en son hamleyi yapmış olur. 2 diyen kazanır, çünkü bir sonraki oyuncu, 1 çıkaramadığından, zorunlu olarak 0 diyecektir. Bu oyunu kim ve nasıl oynayarak kazanır?

Negatif Oyunlar.

Bir oyunda kaybedenin kazandığı oyuna, o oyunun **negatifi** denir! Örneğin, yukardaki oyunlarda, son hamleyi yapan oyuncu oyunu kaybediyordu. Son hamleyi yapan oyuncunun kazanacağı, yani 0 diyenin kazanacağı oyunları da ele alabiliriz. Bunlar da ilginç oyunlardır.

Sonlu Oyunlar.

Yukardaki oyunlar sonlu oyunlardı. Yani, oyunun uzunluğu (oyunun biteceği maksimum hamle sayısı) sınırlıydı ve oyunun her aşamasında her oyuncunun sonlu sayıda hamlesi vardı. Örneğin, 25 ten başlanan bir oyun en fazla 25 hamle sürebilir. Ayrıca, 1, 2 ya da 3 çıkarılan bir oyunda, her oyuncunun oyunun her aşamasında en fazla 3 hamlesi vardır. Demek ki yukardaki oyunlar sonlu oyunlardır.

Sonsuz Bir Oyun.

Aşağıdaki oyun sonsuzdur: Birinci oyuncu bir doğal sayı seçer, ikinci oyuncu bir sonraki hamleyi kimin yapacağını belirler. Bir sonraki oyuncu, ki bu oyuncu birinci ya da ikinci oyuncu olabilir, sayıdan 1 ya da 2 çıkarır. Sıra öbür oyuncuya geçer, o da 1 ya da 2 çıkarır. En son 0 demek zorunda olan oyunu kaybeder.

Bu oyunu ikinci oyuncu kazanır. Eğer birinci oyuncunun seçtiği sayı $3n + 1$ biçimindeyse, ikinci oyuncu birinci oyuncunun bir hamle daha yapmasını söyler. Eğer, birinci oyuncunun seçtiği sayı $3n + 1$ biçiminde yazılmıyorsa, ikinci oyuncu bir sonraki hamleyi kendisinin yapacağını söyler ve bir sonraki hamlesinde 1 ya da 2 çıkararak sayıyı $3n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı haline sokar.

Bu oyun hep biter, ama hamle sayısı sınırlı olmadığından sonlu bir oyun değildir. Örneğin, birinci oyuncu 25 derse, oyun en fazla 25 hamle sürer, 100 derse oyun 100 hamle sürebilir. Yani, oyunun uzunluğu sınırlı değildir.

Bir Başka Sonsuz Oyun.

Yuvarlak bir masanın üstüne iki oyuncu sırayla birbirine değmeyecek biçimde tavla pulları yerleştirsinler. Tavla pulunu masanın üstüne koyacak yer bulamayan oyuncu oyunu kaybetsin.

Bu oyunda oyunu bitiren maksimum hamle sayısı sonludur. Masanın ve tavla pullarının büyüklüğüne göre değişir bu sayı, ama sonludur. Ancak, her an her oyuncunun yapabileceği hamle sayısı sonsuzdur, çünkü tavla pulunu masanın üstüne sonsuz biçimde yerleştirebiliriz. Dolayısıyla bu oyun da sonsuzdur.

Bu oyunu birinci oyuncu kazanır. Pulunu masanın tam ortasına koyar. Sonraki hamlelerde,

pulunu, öbür oyuncunun pulunu koyduğu yerin merkeze göre tam simetrisini oynar. Böylece oyun simetrik bir biçimde gelişir ve ikinci oyuncu pulunu koyabildiği sürece, birinci oyuncu da pulunu koyabilir. Dolayısıyla, birinci oyuncu, bu stratejiyle oynarsa, oyunu kaybetmez, demek ki kazanır.

Bu oyunu yuvarlak bir masayla değil de üçgen bir masayla oynarsak, aynı stratejiyi kullanamayız. Çünkü, yukardaki stratejiyle kimi zaman üçgenin dışına çıkmak zorunda kalabiliriz.

Açık Oyunlar.

Her bilginin iki oyuncuya da açık olduğu oyunlara **açık oyunlar** (İngilizcesi, "complete information game" 'dir.) denir. Örneğin kâğıt oyunlarının bir çoğu açık oyun değildir, bir oyuncunun kâğıtlarını öbür oyuncu göremez. Yani bir oyuncunun bildiğini bir başka oyuncu bilmeyebilir.

Satranç, dama, go (çin daması), Othello, üç taş oyunları açık oyunlardır.

Tavla da bir oyuncunun bildiğini öbür oyuncu da bilir. Ama her ikisinin de bilmediği vardır: Bir sonraki zar. Bu yüzden tavla açık bir oyun değildir. Hatta tavlânın iki kişilik bir oyun olmadığı da söylenebilir. Zar, kazanma ya da kaybetme olanağı olmayan, ama hamle yapan üçüncü bir oyuncu olarak nitelenebilir.

İki Kişiden Birinin Kazandığı Oyunlar.

Satranç, dama, go, Othello, üç taş gibi oyunlarda iki oyuncu berabere kalabilirler. Ama ilk paragraflarda sözünü ettiğimiz (1 ya da 2 çıkar gibi) oyunlarda, iki oyuncudan biri mutlaka kazanır, beraberlik yoktur.

Eğer, satranç, dama, go, Othello, üç taş gibi oyunlarda, beraberlik halinde ikinci oyuncunun kazandığını varsayarsak, bu oyunlar, beraberliğin olmadığı, iki oyuncudan birinin mutlaka kazandığı oyunlara dönüşür. Böylece bu oyunların hepsi, beraberliğin olmadığı, açık, iki kişilik ve sonlu oyunlar olurlar. Bu tür oyunlar hakkında bir teorem biliyorum:

Bir Teorem. *Beraberliğin olmadığı, açık, iki kişilik ve sonlu oyunlarda, iki oyuncudan birinin her zaman kazanacağı bir strateji vardır.*

Bu teoremi kanıtlayalım. Kanıtımızı oyunun uzunluğu üzerinden tümevarımla yapacağız. Bir

oyunun sürebileceği en yüksek hamle sayısına o oyunun **uzunluğu** diyelim. Örneğin, üç taş oyununun uzunluğu 9 'dur. Üç taşın daha önce bittiği de olur, ama 9 hamleden fazla sürmez ve 9 hamle süren üç taş oyunları vardır.

Beraberliğin olmadığı, açık, iki kişilik ve sonlu oyunlara **güzel oyun** diyelim. Her güzel oyunda, iki oyuncudan birinin kazanan stratejisi olduğunu kanıtlayacağım!

Her güzel oyun, her hamleden sonra, uzunluğu en az 1 eksilen bir başka oyuna dönüşür; ayrıca bu yeni oyun da güzeldir. Bu iki gözlem, bize oyunun uzunluğu üzerine tümevarım yapmamızı sağlar.

Birinci oyuncunun kazandığı oyunlara (yani birinci oyuncuyu kazandıran stratejinin olduğu oyunlara) *A* oyunları, ikinci oyuncunun kazandığı oyunlara da *B* oyunları diyelim.

Teoremimiz, her güzel oyunun ya *A* ya da *B* oyunu olduğunu söylüyor.

Uzunluğu n olan güzel bir oyun ele alalım. Bu oyuna *G* diyelim. *G* oyununun *A* ya da *B* oyunu olup olmadığını bilmiyoruz, kanıtlayacağız. Ama tümevarım varsayımına göre, uzunluğu n 'den küçük olan güzel oyunlar mutlaka ya *A* ya da *B* oyunlarıdır.

Diyelim, birinci oyuncuyuz ve 50 çeşit hamle yapabiliriz. Oyun, 50 değişik oyuna dönüşebilir. Bu oyunlara $G_1, G_2, \dots, G_{50}$ adlarını verelim. Bu yeni oyunların uzunlukları daha kısa olduğundan, her biri, tümevarım varsayımına göre, ya *A* oyunudur ya da *B* oyunu. Eğer hepsi birden *A* oyunuyorsa, hamlemiz ne olursa olsun öbür oyuncuya hep bir *A* oyunu sunarız. Bu yeni oyunda öbür oyuncu birinci oyuncu olduğundan oyunu kazanacaktır. Eğer oyunlardan biri bir *B* oyunuyorsa, oyunu o *B* oyununa dönüştürecek hamleyi yapalım. Böylece öbür oyuncuya ikinci oyuncunun kazanacağı bir oyun sunarız. Öbür oyuncu bu oyunda birinci oyuncu olduğundan oyunu kaybedecektir.

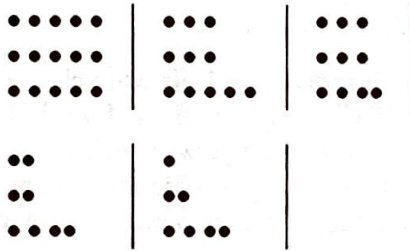
Dilediğimizi kanıtladık...

Her ne kadar, güzel oyunları iki oyuncudan birinin kazanacağını biliyorsak da, kazanan stratejiyi bulmak her zaman kolay olmayabilir. Örneğin, satrancın böyle bir stratejisi bilinmemektedir, satranç çok uzun bir oyundur ve bilgisayarlar bile bu kadar uzun oyunla başa

çıkamazlar. Öte yandan üç taş görece kısa bir oyundur (9 uzunlukta). Bilgisayara bile gerek kalmadan, elle hesaplayarak, en iyi strateji bulunabilir. Yanlış anımsamıyorsa, üç taş oyununda ikinci oyuncu her zaman berabere kalabilir.

Kimin Kazandığı Bilinen Ama Nasıl Kazandığı Bilinmeyen Bir Oyun.

Oyunumuz iki kişi arasında ve $n \times m$ boyutlu bir dikdörtgenin içindeki tamnoktalarda oynanıyor. Örneğin, 5×3 boyutlu bir oyun, aşağıdaki şeklin en solundan başlar. Oyuncular sırayla bir nokta seçerler ve seçtikleri noktayla o noktanın kuzeyiyle doğusu arasında kalan noktalar silinir. Örneğin, 5×3 boyutlu oyunda, birinci oyuncu (4,2) noktasını seçerse, oyun bir sonraki duruma dönüşür. Sonraki hamleler: (5,1), (3,2) ve (2,3).



Oyun böyle sürer. Oyunda hiç nokta bırakmayan oyuncu oyunu kaybeder.

Elbet (1,1) noktasını seçen oyuncu oyunu kaybeder. Bu yüzden, kamikaze yapmak istemeyen bir oyuncu (1,1) noktasını zorunlu olmadıkça seçmez.

1×1 'lik oyunu birinci oyuncu kaybeder. Çünkü ilk hamlesini yapar yapmaz oyunda hiç nokta kalmaz. Eğer $n > 1$ ise, $n \times m$ 'lik oyunları birinci oyuncu kazanır. Bu oyunları kazanmak için birinci oyuncu nasıl oynamalıdır? Birinci oyuncu, kazanmak için (2,2) noktasını seçer. Bu ilk hamlesinden sonra, birinci oyuncu ikinci oyuncunun hamlelerinin simetrisini (bakışını) oynar. İkinci oyuncu (3,1) noktasını seçerse, birinci oyuncu (1,3) hamlesini seçer. Birinci oyuncu bu stratejisini sürdürürse oyunu kaybedemez, yani kazanır.

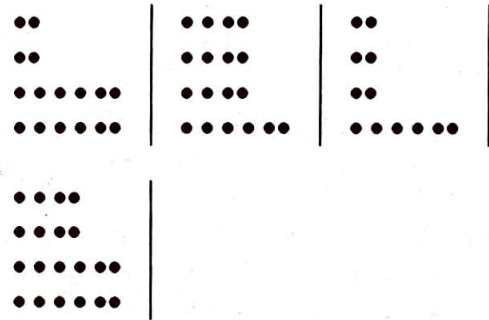
1×1 'lik oyun dışında, her $n \times m$ 'lik oyunu birinci oyuncu kazanır. Dikkat edilirse, birinci oyuncunun nasıl oynayıp da kazanacağını bildiğimi söylemedim. Birinci oyuncunun nasıl oynayıp da kazanacağını ben de bilmiyorum.

Ancak birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi olduğunu biliyorum. Stratejiyi bilmiyorum, ama stratejinin varlığını biliyorum...

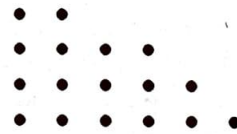
Herhangi bir $n \times m$ 'lik oyunu ele alalım. Örneğin, $n = 6$, $m = 4$ olabilir. Yani aşağıdaki oyunu ele almış olabiliriz:



Birinci oyuncuya Ahmet, ikinci oyuncuya Birol diyelim. Ahmet 'in yapabileceği bütün hamleleri ve bu hamlelerden sonra oyunun dönüşeceği bütün oyunları ele alalım. Bu oyunlara X-oyunları diyelim. Örneğin, $n = 6$, $m = 4$ ise,



oyunları X-oyunlarıdır. Öte yandan, aşağıdaki oyun bir X-oyunu değildir:



Ahmet 'in $n \times m$ 'lik oyunda nm tane değişik hamlesi olduğundan, nm tane X-oyunu vardır. Ahmet, Birol 'a bu X-oyunlarından birini bırakacaktır. Ve Birol önüne konan bu X-oyunun birinci oyuncusu olacaktır. Ahmet ise, bu X-oyunun ikinci oyuncusu olacaktır.

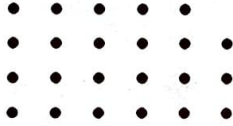
Eğer X-oyunlarından birini ikinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$ 'lik oyunu bu X-oyununa dönüştürerek $n \times m$ 'lik oyunu kazanır. Çünkü Ahmet, bu X-oyunun ikinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Öte yandan, eğer X-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$ 'lik oyunu

kaybeder. Çünkü Ahmet ne oynarsa oynasın, Birol 'a bir X-oyunu sunacaktır, ve Birol bu X-oyunun birinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Şimdi, yukardaki $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet 'in iyi oynayarak kazanabileceğini kanıtlayabilirim. Bir an için bunun doğru olmadığını varsayalım. Yani, bir an için, Ahmet 'in bu oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybedeceğini varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. Daha açıkçası, Ahmet 'in bu oyunu kazandığını kanıtlayacağız! Yani, Ahmet 'in $n \times m$ 'lik oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybettiğini varsayıp, bu oyunu kazanacağını kanıtlayacağız! Böylece Ahmet 'in oyunu kazanacak biçimde oynayabileceği kanıtlanmış olacak.

Varsayımımıza göre $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet kaybediyor. Demek ki X-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanır. Şimdi, Ahmet en üst ve en sağdaki noktayı seçsin. Yani dikdörtgenden en köşedeki noktayı silsin. Örneğin $n = 6, m = 4$ ise, Birol 'a soldaki X-oyunu kalır. Şimdi sıra Birol 'da. Bu X-oyununda Birol ne oynarsa oynasın, Ahmet 'e gene bir X-oyunu bırakmak zorundadır! Öyle değil mi?



Yukardaki şekle biraz bakınca, Birol 'un her hamlesinin oyunu gene bir başka X-oyununa dönüştürdüğü anlaşılır. Demek ki Ahmet 'in önüne bir X-oyunu gelecektir ve Ahmet, önüne gelen bu yeni X-oyunun birinci oyuncusu olacaktır dolayısıyla kazanacaktır! İstedığımızı kanıtladık...

Kanıtımızı şöyle özetleyebiliriz:

- (1) Varsayım: $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet ne oynarsa oynasın kaybediyor.
- (2) Demek ki bütün X-oyunlarını birinci oyuncu kazanıyor.
- (3) Ahmet, ilk hamlesinde (n, m) noktasını seçsin.
- (4) Birol, önüne gelen bu oyunu bir X-oyununa dönüştürmek zorundadır.

(5) Şimdi Ahmet bu X-oyunun birinci oyuncusu olacaktır ve (2) 'ye göre kazanacaktır.

(6) Demek ki Ahmet, $n \times m$ 'lik oyunu kazanır. Varsayımımızla çeliştik.

(7) Demek ki varsayım yanlıştır ve $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet kazanır.

Çözümleyemediğim Bir Oyun.

Özlem Beyarslan ile aşağıdaki oyunu keşfettik: İki oyuncunun önünde n tane nesne var. Her iki oyuncu da nesneleri, kendi zevkine göre, 1 'den n 'ye kadar puanlıyor. Bu nesneler, yiyecek, sanat yapıtları, müstakbel eş gibi öznel beğeni gerektiren şeyler olabilirler. Sözgelimi, bir oyuncunun 6 puan verdiği nesneye öbür oyuncu 4 puan verebilir, yani oyuncuların nesneleri değerlendirmesi birbirinden değişik olabilir, ki zaten ancak o zaman oyun ilginç oluyor.

Her iki oyuncu da birbirlerinin (ve kendilerinin de elbet) puanlamasını biliyor.

İki oyuncu teker teker nesneleri oyundan atıyorlar. En son kalan nesnenin puanları oyuncuların puanlarını belirliyor. Amaç, en çok puanı almak.

Örneğin, diyelim 3 nesnemiz var. Bu nesnelere A, B ve C adlarını verelim. Oyuncuların bu nesneleri değerlendirmesi de şöyle olsun:

	Birinci Oyuncu	İkinci Oyuncu
A	1	1
B	2	3
C	3	2

Her iki oyuncu da A 'yı pek sevmiyor olacak ki, en düşük puanı A 'ya vermişler. Birinci oyuncu C 'yi sevmiş en çok, ikinci oyuncu da B 'yi...

Sıra birinci oyuncuda. Eğer birinci oyuncu A 'yı oyundan atarsa, geriye B ve C kalır ve, ikinci oyuncu C 'yi oyundan atarak, oyunun B ile bitmesini sağlar. Bu durumda, birinci oyuncu 2, ikinci oyuncu 3 puan kazanmıştır. İkinci oyuncu için daha iyi bir sonuç olamazdı. Ama ya birinci oyuncu için???... Birinci oyuncu ilk hamlesini başka türlü yapsaydı 2 yerine 3 puan alabilir miydi?

Eğer birinci oyuncu, ilk hamlesinde B 'yi silerse, sonuç onun için daha iyi olur. O zaman geriye A ve C kalır. İkinci oyuncu bu iki nesneden

lesini başka türlü yapsaydı 2 yerine 3 puan alabilir miydi?

Eğer birinci oyuncu, ilk hamlesinde B 'yi silerse, sonuç onun için daha iyi olur. O zaman geriye A ve C kalır. İkinci oyuncu bu iki nesneden C 'yi tercih eder, dolayısıyla A 'yı siler ve geriye C kalır. Bu durumda, birinci oyuncu 3, ikinci oyuncu 2 puan kazanmıştır.

Demek ki, bu oyunda birinci oyuncu, en çok puanı almak için, ilk hamlesinde B 'yi oyundan atmalıdır. Beklenmedik bir hamle... Çünkü birinci oyuncu en sevmediğini değil, ortalama sevdiğini oyundan atıyor...

Oyunun amacı öbürünü yenmek değil, en çok puanı toplamak. Yani, birinci oyuncu $2 - 1$ yenmek yerine $4 - 3$ yenilmeyi tercih eder, çünkü, sorun yenmek ya da yenilmek olmadığından, 2 puan yerine 3 puan almak birinci oyuncunun işine gelir.

Eğer, her iki oyuncu da aynı nesneye en yüksek puan olan n 'yi vermişse, o zaman oyun elbette $n - n$ sonuçlanması beklenir: Hiç bir oyuncu puanı $n - n$ olan nesneyi silmez.

Bu oyun sonludur ve saklı bilgisi yoktur. (Oyuncular birbirlerinin puanlamasını biliyorlar.) Bu tür oyunlarda her zaman her iki oyuncunun da birer "en iyi stratejisi" vardır. Örneğin, yukardaki örnekte, birinci oyuncunun en iyi stratejisi B 'yi silmektir.

Bu tür her oyunun bir en iyi stratejisi var da, genel bir en iyi stratejisi var mı yok mu bilmiyorum. Yani, her n için ve her türlü sıralama için işleyen bir en iyi strateji var mı? Ya da, oyuncular en iyi stratejiyle oynadıklarında, oyunun hangi sonuçla biteceğini söyleyen bir formül???

Bilmiyoruz!

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

39. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Halil İbrahim Karakaş

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

39. Uluslararası Matematik Olimpiyadı 10-21 Temmuz 1998 tarihlerinde Tayvan'ın başkenti Taipei'de yapıldı. 76 ülkeden 419 yarışmacının katıldığı olimpiyatta ülkemizi Kazım Büyükboduk, M. Bumin Yenmez, Duru Türkoğlu, Onur Doğan, Serdar Pehlivanoglu ve Melih Onuş'tan oluşan ulusal takımımız temsil etti. Takım lideri olarak, aynı zamanda Uluslararası Olimpiyat Komitesi Danışma Kurulu (IMO - Advisory Board) üyesi olan Semih Koray, lider yardımcısı olarak bu satırların yazarı Halil İbrahim Karakaş ve gözlemci olarak Aytek Erdil görev yaptılar. Ulusal Takımımız, bu satırların yazarı ile 12 Temmuz 1998 Pazar günü İstanbul'dan hareket ederek Dubai - Singapur üzerinden 13 Temmuz 1998 Pazartesi akşamı Taipei'ye ulaştı. Hava alanında bizi rehberimiz, National Normal Taiwan University - Türkoloji bölümü öğrencisi olan ve kendisine ikinci ad olarak "Yasemin" adını seçen H. Y. Chou karşıladı. Takım liderimiz Semih Koray ve gözlemcimiz Aytek Erdil üç gün önce Tayvan'a ulaşmışlardı. Ancak, olimpiyat kurallarına göre onları sınav bitimine kadar göremeyecektik.

Sınavlar, yazılı olarak birincisi 15 Temmuz 1998 Çarşamba günü, ikincisi 16 Temmuz 1998 Perşembe günü olmak üzere her biri 4,5 saat süren 3'er soruluk iki oturumda yapıldı. Takımımız, 2 gümüş ve 4 bronz madalya kazandı ve ülke sıralamasında 17. sırayı aldı. Bu, takımımızın olimpiyatlarda bu yıla kadar aldığı en başarılı sonuç olmuştur. Gelecek yıllarda daha başarılı sonuçlar alınmasını umuyor ve diliyoruz.

38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı ile ilgili olarak "Matematik Dünyası" 'nın 7. cilt, 2. sayısındaki yazımızda ayrıntıların ve anıların anlatımını takım mensuplarına bırakmıştım. Onlar bu görevi yerine getirmediler. 39. Olimpiyadın ayrıntılarını ve anılarını anlatmayı yine takım mensuplarına bırakıyorum (takım mensuplarından birinin "ben yazarım" dediğini de belirtmek istiyorum) ve olimpiyatta sorulan 6 soruyu ve çözümlerini veriyorum. Burada verilen çözümlerden farklı çözümler bulunabileceğini belirtmeye gerek yoktur.

Sevgili okurlarımız! Soruları okuduktan sonra, çözümlere bakmadan önce, her soruyu kendiniz çözmeye çalışınız. Bunun için mümkün olduğunca çok zaman ayırınız. Kolay gelsin ...

İşte 39. Uluslararası Matematik Olimpiyadında sorulan sorular ...

BİRİNCİ GÜN SINAV SORULARI

Soru 1. $ABCD$ konveks dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine dik olup, AB ve DC kenarları paralel değildir. AB ve DC 'nin orta dikmelerinin kesiştiği P noktasının $ABCD$ 'nin iç bölgesinde yer aldığı bilinmektedir. $ABCD$ 'nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olması olduğunu gösteriniz.

Soru 2. Bir yarışmada, $b \geq 3$ bir tek sayı olmak üzere, a yarışmacı ve b hakem bulunmaktadır. Her hakem her yarışmacıyı ya "başarılı" ya da "başarısız" olarak değerlendiriyor. k aşağıdaki özelliğe sahip bir sayı olsun: Herhangi iki hakemin en çok k yarışmacı hakkındaki değerlendirmeleri çakışmaktadır.

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 3. Her pozitif n tamsayısı için, $d(n)$ ile n 'nin (1 ve n dahil olmak üzere) bölenlerinin sayısını gösterelim.

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

olmasını sağlayacak biçimde bir n sayısının bulunduğu tüm pozitif k tamsayılarını bulunuz.

İKİNCİ GÜN SINAV SORULARI

Soru 4. ab^2+b+7 'nin a^2b+a+b 'yi bölmesini sağlayan tüm (a, b) pozitif tamsayı çiftlerini bulunuz.

Soru 5. I ile, ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezini gösterelim. ABC 'nin iç çemberinin BC , CA ve AB kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla K , L ve M olsun. B 'den geçen ve MK 'ya paralel olan doğru LM ve LK doğrularını sırasıyla R ve S noktalarında kesiyor. $\angle RIS$ 'nin bir dar açı olduğunu gösteriniz.

Soru 6. N pozitif tamsayılar kümesini göstereyin. N 'den N 'ye giden ve N 'ye ait her s, t için

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

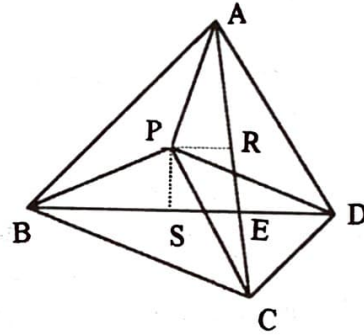
koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını ele alalım. $f(1998)$ 'in alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Soru 1 'in Çözümü. AC ve BD 'nin kesim noktası E olsun. Simetriden, P noktasının $\triangle ABE$ üçgeni içinde olduğunu kabul edebiliriz (Şekilden izleyiniz).

P 'den AC ve BD 'ye inilen dikmelerin ayakları sırasıyla R ve S olsun. Köşeleri X, Y, Z olan üçgenin alanını $[XYZ]$ ile gösterelim. $|PA| = |PB|$ ve $|PD| = |PC|$ olduğunu kullanmadan dahi $[ABP]$ ve $[CDP]$ 'yi aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} 2[ABP] &= 2[ABE] - 2[PAE] - 2[PBE] \\ &= (|AR| + |PS|)(|BS| + |PR|) - (|AR| + |PS|)|PR| - (|BS| + |PR|)|PS| \\ &= |AR||BS| - |PR||PS|, \\ 2[CDP] &= 2[CDE] + 2[PCE] + 2[PDE] \\ &= (|CR| - |PS|)(|DS| - |PR|) + (|CR| - |PS|)|PR| + (|DS| - |PR|)|PS| \\ &= |CR||DS| - |PR||PS|. \end{aligned}$$



Buradan,

$$2([ABP] - [CDP]) = |AR||BS| - |CR||DS| \quad (*)$$

elde edilir. Şimdi, $|PA| = |PB|$ ve $|PC| = |PD|$ olduğunu gözönüne alalım. Eğer $ABCD$ bir kirişler dörtgeni ise, iç teğet çemberin merkezi P olmalıdır. Dolayısıyla, R ve S , sırasıyla, AC ve BD 'nin orta noktalarıdır. Böylece, $|AR| = |CR|$ ve $|BS| = |DS|$ olup (*) 'dan $[ABP] = [CDP]$ olduğu görülür. Karşıt olarak, eğer $[ABP] = [CDP]$ ise, yine (*) 'dan $|AR||BS| = |CR||DS|$ olur. Eğer $|PA| \neq |PC|$ olsaydı, simetriden $|PA| > |PC|$ varsayılabilir ve buradan $|AR| > |CR|$ elde edilebilirdi; ayrıca bu durumda $|PB| > |PD|$ olacağından $|BS| > |DS|$ elde edilebilirdi. Bunun sonucu olarak $|AR||BS| > |CR||DS|$ eşitsizliği ortaya çıkardı ki, bu bir çelişkidir. O halde, $|PA| = |PC|$ 'dir ve A, B, C, D noktaları P

noktasından eşit uzaklıkta, yani, $ABCD$ bir kirisler dörtgenidir.

Soru 2 'nin Çözümü. Tam $\binom{b}{2}$ hakem ikilisi bulunduğundan ve her bir ikili en çok k yarışmacı için aynı değerlendirmeyi yapacağından, çakışan değerlendirmelerin sayısı en çok $k\binom{b}{2}$ 'dir. Her $i = 1, 2, \dots, a$ için i - inci yarışmacıyı "başarılı" bulan hakemlerin sayısı x_i , "başarısız" bulan hakemlerin sayısı da y_i olsun. Böylece, her $i = 1, 2, \dots, a$ için $x_i + y_i = b$ 'dir. Bu gösterimle, i - inci yarışmacı için değerlendirmeleri çakışan hakem ikililerinin sayısı

$$\begin{aligned} \binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} &= \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - (x_i + y_i) \right] \\ &= \frac{1}{4}[(b-1)^2 - 1] \end{aligned}$$

olur. b sayısı tek olduğundan yukarıdaki eşitsizlik,

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \geq \frac{1}{4}(b-1)^2$$

olarak ifade edilebilir. Buradan,

$$k\binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^a \left[\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \right] \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

olduğu görülür.

Soru 3 'ün Çözümü. n bir pozitif tamsayı, n 'nin asal çarpanlarına ayrılışı

$$n = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_r^{\alpha_r-1}, \quad \alpha_i \geq 1$$

olsun. Bu durumda,

$$d(n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$$

$$d(n^2) = (2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1) \dots (2\alpha_r - 1)$$

olacağından, eğer

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1) \dots (2\alpha_r - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = k$$

tamsayısı ise, k 'nın bir tek sayı olması gerekir. Şimdi, bütün pozitif tek tamsayıların bu özelliğe sahip olduğunu (tümevarımla) göreceğiz. $k = 1$ için durum açıktır. Tümevarımı kolaylaştırmak için şöyle bir tanım yapacağız: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ pozitif tek tamsayılar olmak üzere

$$\frac{(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1) \dots (2\alpha_r - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$$

biçiminde yazılabilen bir rasyonel sayıya "iyi sayı" diyelim. Böylece, amacımız tüm pozitif tek tamsayıların "iyi sayı" olduğunu göstermektir. Önce iki iyi sayının çarpımının yine bir iyi sayı olduğuna dikkat edelim. Şimdi, $k > 1$ olmak üzere k dan küçük tüm pozitif tek tamsayıların iyi sayı olduğunu kabul edelim (tümevarım hipotezi). $t \geq 1$ ve s tek olmak üzere

$$k = 2^t s - 1$$

olsun. Burada, $s < k$ olduğundan, s bir iyi sayıdır. Eğer $k = \frac{k}{s}$ 'nin de bir iyi sayı olduğunu gösterebilirsek, $\frac{k}{s}$'s bir iyi sayı olur ve iddiamız kanıtlanmış olur. α_1 sayısını daha sonra belirlemek üzere

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 - 1$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2 - 1 = 2^2\alpha_1 - 2 - 1$$

:

$$\alpha_t = 2\alpha_{t-1} - 1 = 2^{t-1}\alpha_1 - 2^{t-2} - \dots - 1$$

$$= 2^{t-1}\alpha_1 - 2^{t-1} + 1$$

alalım ve

$$u = \frac{(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1) \dots (2\alpha_t - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t}$$

$$= \frac{2\alpha_t - 1}{\alpha_1} = \frac{2^t \alpha_1 - 2^t + 1}{\alpha_1}$$

kesirini düşünelim. Eğer $\alpha_1 = (2^t - 1)s$ seçilirse,

$$u = \frac{2^t(2^t - 1)s - (2^t - 1)}{(2^t - 1)s} = \frac{2^t s - 1}{s} = \frac{k}{s}$$

olduğu görülür. O halde $\frac{k}{s}$ bir iyi sayıdır ve istenilen kanıtlanmıştır.

Soru 4 'ün Çözümü. Eğer $ab^2 + b + 7$ sayısı $a^2b + a + b$ sayısını bölüyorsa

$$b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$$

sayısını da böler. Ayrıca, $a \geq 1$ olduğundan $b^2 - 7a < ab^2 + b + 7$ 'dir. Bu nedenle, $b^2 - 7a \leq 0$ olmalıdır. Eğer $b^2 - 7a = 0$ ise, bu durumda $b, 7$ 'nin bir katı olmalıdır ve dolayısıyla

$$(a, b) = (7t^2, 7t), \quad t \geq 1$$

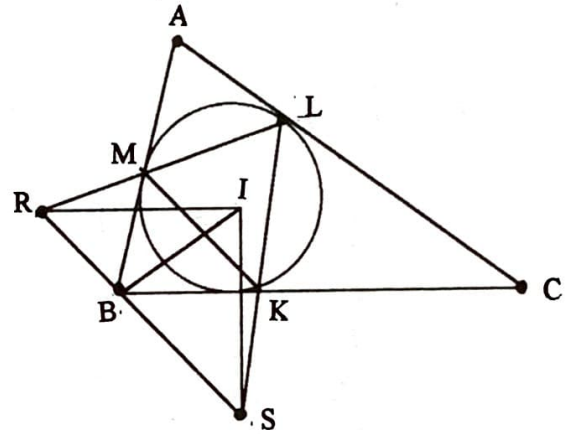
olur. $b^2 - 7a < 0$ durumunu ele alalım. Bu durumda, $7a - b^2$ pozitif tamsayısı $ab^2 + b + 7$ sayısının bir katı olur. $7a - b^2 < 7a$ olduğundan, bu durum ancak $b = 1$ veya $b = 2$ için mümkün olabilir (çünkü, aksi halde $ab^2 + b + 7 > 9a$ olur). $b = 1$ için $7a - 1$ sayısının $a + 8$ ile bölünmesi istenmektedir. $7a - 1 = 7(a + 8) - 57$ ifadesinden $a + 8$ in 57 'yi bölmesi gerekir, $57 = 1.57 = 3.19$ olduğundan a 'nın alabileceği değerler $a = 11$ ve $a = 49$ 'dur. Buradan $(11, 1)$ ve $(49, 1)$ çözümleri elde edilir. $b = 2$ için ise $7a - 4$

sayısının $4a + 9$ ile bölünmesi istenmektedir. $4(7a - 4) = 7(4a + 9) - 79$ ifadesinden $4a + 9$ 'un 79 'u bölmesi gerekir, ancak 79 'un $4a + 9$ biçiminde bir böleni yoktur. O halde, $b = 2$ durumunda hiç çözüm yoktur ve problemdeki koşulu sağlayan ikililerin kümesi

$$\{(7t^2, t) : t \geq 1\} \cup \{(11, 1), (49, 1)\}$$

'den ibarettir.

Soru 5 'in Çözümü.



I , iç çemberin merkezi ve $RS \parallel MK$ olduğundan, $BI \perp MK$ ve $BI \perp RS$ 'dir. Bu nedenle, $\hat{RIS}$ açısının dar açı olduğunu göstermek için

$$|BI|^2 > |BR||BS| \quad (*)$$

olduğunu göstermek yeter. Çünkü, $\hat{RIS}$ açısının dar açı olmaması durumunda, I noktası, $[RS]$ 'yi çap kabul eden çemberin içinde veya üzerinde kalır ki bu durumda

$$|BI|^2 \leq |BR||BS|$$

olacağı açıktır. $(*)$ eşitsizliğini kanıtlamak için,

$$m(\hat{BMR}) = m(\hat{LMA}) = 90^\circ - \frac{m(\hat{A})}{2},$$

$$m(\hat{MBR}) = 90^\circ - \frac{m(\hat{B})}{2},$$

ve böylece

$$m(\hat{MRB}) = 90^\circ - \frac{m(\hat{C})}{2}$$

olduğunu gözlemleyelim ve $\triangle M\hat{B}R$ üçgeninde Sinüs Teoremini uygulayıp

$$|BR| = \frac{\cos(A/2)}{\cos(C/2)} |BM|$$

elde edelim. Benzer şekilde, $\triangle K\hat{B}S$ üçgeninden

$$|BS| = \frac{\cos(C/2)}{\cos(A/2)} |BK| = \frac{\cos(C/2)}{\cos(A/2)} |BM|$$

elde ederiz. Böylece

$$|BR||BS| = |BM|^2$$

olur. $\triangle B\hat{K}I$ üçgeni dik üçgen olduğundan hipotenüs olan $|BI|$, dik kenar olan $|BM|$ 'den büyüktür. Sonuç olarak

$$|BI|^2 > |BM|^2 = |BR||BS|.$$

Soru 6 'nın Çözümü. Sözkonusu olan fonksiyonların kümesini K ile gösterelim. Bu fonksiyonlardan herhangi biri f ve $f(1) = c$ olsun. Verilen koşulda $t = 1$ ve $s = 1$ alınarak her $s \in \mathbb{N}$ için

$$f(f(s)) = c^2 s$$

ve her $t \in \mathbb{N}$ için

$$f(ct^2) = (f(t))^2$$

olduğu görülür. Bunlar ve verilen koşul kullanılarak,

$$[f(t)f(s)]^2 = [f(s)]^2 f(ct^2)$$

$$= f(s^2 f(f(ct^2))) = f(s^2 c^2 ct^2)$$

$$= f(c(cst)^2) = [f(cst)]^2$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, her $s, t \in \mathbb{N}$ için $f(cst) = f(s)f(t)$ ve özel olarak, $f(cs) = cf(s)$ elde edilir. Sonuç olarak her $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$cf(st) = f(s)f(t) \quad (1)$$

'dir. Şimdi, her $t \in \mathbb{N}$ için $f(t)$ 'nin c 'ye tam bölündüğünü göstereceğiz. Verilen bir p asal sayısı için p 'nin c 'yi ve $f(t)$ 'yi bölen en büyük kuvvetleri, sırasıyla, p^α ve p^β olsun. Tümevarım ve (1) kullanılarak, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$[f(t)]^k = c^{k-1} f(t^k)$$

olduğu kolayca görülebilir. p 'nin $[f(t)]^k$ 'yı bölen en büyük kuvveti $p^{k\beta}$, c^{k-1} 'i bölen en büyük kuvveti ise $p^{(k-1)\alpha}$ 'dır. Dolayısıyla, her $k \in \mathbb{N}$ için, $k\beta \geq (k-1)\alpha$ 'dır. Buradan, $\beta \geq \alpha$ olduğu görülür. Bu sonuç her p asal sayısı için doğru olduğundan c sayısı $f(t)$ 'yi tam böler. Bu nedenle, her $t \in \mathbb{N}$ için

$$g(t) = f(t)/c$$

alınırsa $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye yeni bir fonksiyon elde edilir. f için yukarıda elde edilen eşitlikler g cinsinden ifade edilirse, her $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$g(c) = c, g(st) = g(s)g(t), g(g(s)) = s \quad (2)$$

eşitlikleri elde edilir. Gerçekten $g(c) = f(c)/c = cf(1)/c = c$ açık olup, $g(st) = g(s)g(t)$ eşitliği (1) 'e denktir ve $g(g(s)) = s$ eşitliği,

$$cg(g(s)) = g(c) g(g(s))$$

$$= g(cg(s)) = g(f(s))$$

$$= \frac{f(f(s))}{c} = \frac{c^2 s}{c} = cs$$

işlemleri ile görülebilir. (2) kullanılarak her $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$g(t^2g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s[g(t)]^2$$

olduğu, yani $g \in K$ olduğu görülür. Ayrıca, g 'nin aldığı değerler f 'nin karşılık gelen değerlerinden büyük olamaz. Dolayısıyla, K 'nin tüm f elemanları için $f(1998)$ 'in en küçük değerini bulmak yerine $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye (2) koşullarını sağlayan g fonksiyonları için $g(1998)$ 'in en küçük değerini bulmak yeterlidir. Bu aşamada en önemli adım, bu tür her g fonksiyonunun her asal sayıyı yine bir asal sayıya dönüştürdüğünü göstermek olacaktır. Gerçekten, p bir asal sayı olsun ve $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$g(p) = ab$$

olduğunu varsayalım. (2) 'den

$$p = g(g(p)) = g(ab) = g(a)g(b)$$

ve buradan ya $g(a) = 1$ ya da $g(b) = 1$ olması

gerekir. $g(a) = 1$ ise, $g(g(a)) = a = 1$ ve sonuç olarak $g(p)$ asaldır.

İstenilen en küçük değeri bulmak için, $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye, (2) 'yi sağlayan bir g fonksiyonu alalım. $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$g(s) = g(t) \Rightarrow s = g(g(s)) = g(g(t)) = t$$

olacağından g bire-birdir ve farklı asalları farklı asallara dönüştürür. Dolayısıyla, $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)[g(3)]^3g(37)$ 'nin en küçük değeri, $(g(2), g(3), g(37)) = (3, 2, 5)$ olunca elde edilir. Demek ki, istenilen en küçük değer $3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ 'den küçük olamaz, $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye $g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(37) = 5$, $g(5) = 37$; $\{2, 3, 5, 37\}$ kümesi dışındaki her asal için $g(p) = p$ ve asal çarpanlarına ayrılışı $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $g(n) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \dots g(p_r)^{\alpha_r}$ ile tanımlanan g fonksiyonu (2) 'yi sağlar ve $g(1998) = 120$ 'dir. O halde, istenilen en küçük değer 120 'dir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.166. Rakamları içinde hiç sıfır bulunmayan ve kendi rakamları toplamına bölünen 100 basamaklı bir sayı bulunuz.

A.167. Asal olduğu bilinen $2^{11213} - 1$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılımında kaç rakam bulunduğunu belirleyiniz. (İpucu: $\log_{10} 2 = 0,30103\dots$)

A.168. Aşağıdaki denklemin tüm gerçel çözümlerini bulunuz:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2-2x} = 1$$

A.169. Düzlem üzerinde rasgele 1998 tane nokta işaretlenmiştir. Bu noktaların tam 1001 tanesini içinde bulunduran bir dairenin varlığını kanıtlayınız.

A.170. Düzlem üzerinde rasgele 1998 tane nokta işaretlenmiştir. Düzlem üzerinde, bu noktaların tam 1001 tanesini "sağında" bulunduran bir doğrunun varolduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.166. Herhangi bir $2k$ ($k \in N$) çift sayısı verilsin. Bu takdirde her m doğal sayısı için, m ile aralarında asal olan ve farkları $2k$ 'ya eşit olan sonsuz çoklukta doğal sayı ikililerinin bulunduğunu gösteriniz.

Y.167.

$$\left| \frac{1}{2} \cdot \sin ax + \frac{1}{3} \cdot \sin bx + \frac{1}{6} \cdot \sin cx \right| \geq \sqrt{1998} \cdot |\sin x|$$

eşitsizliği her $x \in (0, 10^{-10})$ için sağlanırsa, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1998$ olacağını kanıtlayınız.

Y.168. $ABCD$ dörtyüzlüsünün çevrel küresinin merkezi O ; BC , CA , AB kenarlarının orta noktaları L , M , N ve $AB + BC = AD + CD$, $BC + CA = BD + AD$, $CA + AB = CD + BD$ 'dir. $\hat{LOM} = \hat{MON} = \hat{NOL}$ olduğunu ispat ediniz.

Y.169. Uzayda 1998 tane nokta rasgele işaretlenmiştir. Bu noktaların tam 1001 tanesini içinde bulunduran bir yuvarın varlığını kanıtlayınız.

Y.170. Uzayda 1998 tane nokta rasgele işaretlenmiştir. Bu noktalardan tam 1001 tanesini bir tarafında bulunduran bir düzlemin varlığını kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.156. (Soru dergide eksik basılmış, doğrusu:) $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$ olmak üzere kenar uzunlukları a , b , c olan üçgenler içinde en büyük alana sahip olan üçgenin alanı kaç olabilir?

Çözüm. İki kenar uzunluğu $0 \leq a \leq 1$, $1 \leq b \leq 2$ eşitsizliklerini sağlayan üçgenler içinde en büyük alana sahip olanı dik kenarları 1 ve 2 olan dik üçgendir. Bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu $c = \sqrt{5}$ olup $2 \leq c \leq 3$ koşulunu sağlıyor. Böylece problemdeki sorunun yanıtı 1 'dir.

A.157. 11111 'den 99999 'a kadar tüm beş basamaklı sayılar, her kart üzerinde birer sayı olmak üzere yazılmış ve bu kartlar rasgele (gelişigüzel) biçimde yanyana dizilmiştir. Bu şekilde elde edilen 444445 basamaklı sayının 3 'ün bir kuvveti olamayacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Problemden gösterilen şekilde oluşturulan her sayının 11111 ile bölüneceğini (ve dolayısıyla, 3 'ün bir kuvveti olamayacağını) gösterelim.

$10^5 = 9.11111 + 1$ olmasından dolayı, sözkonusu 444445 basamaklı sayının 11111 'e bölünmesinden elde edilen kalan, kartlar üzerinde yazılmış tüm 5 basamaklı sayıların toplamının 11111 'e bölünmesinden elde edilen kalana eşit olacaktır. Kartlar üzerinde yazılmış tüm sayılar toplamının (ki bu sayı $\frac{11111+99999}{2}(10^5 - 1)$ 'e eşittir) 11111 'e bölündüğünü kanıtlamayı sizlere bırakıyoruz.

A.158. $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında α ve β sayıları için

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Problemin koşulundan

$$\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta (\cos \alpha - \sin \beta)$$

olduğu görülür. $\sin \alpha > \cos \beta$ ve $\cos \alpha > \sin \beta$ olamaz. Çünkü aksi halde $1 > 1$ çelişkisi elde edilir ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden). Benzer şekilde, $\sin \alpha < \cos \beta$ ve $\cos \alpha < \sin \beta$ eşitsizlikleri de sağlanamaz. α ve β 'nın $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bulunduklarını da gözönüne alırsak yalnız bir seçenek kalır: $\sin \alpha = \cos \beta$ ve $\cos \alpha = \sin \beta$.

A.159. $2^{\sqrt[3]{1998}} + 2^{\sqrt[4]{1998}} > 2^{\sqrt[5]{1998}+1}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm. Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğini ardarda uygularsak

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt[3]{1998}} + 2^{\sqrt[4]{1998}} &\geq 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[3]{1998} + \sqrt[4]{1998}}{2}} \\ &\geq 2 \cdot 2^{(1998^{\frac{1}{3}} + 1998^{\frac{1}{4}})} = 2 \cdot 2^{\sqrt[5]{1998}} = 2^{\sqrt[5]{1998}+1} \end{aligned}$$

olur.

A.160. Tüm köşegen ve kenar uzunlukları rasyonel sayılar olan konveks $ABCD$ dörtgeni veriliyor. Köşegenlerin kesişim noktası O olmak üzere, AO doğru parçasının uzunluğunun bir rasyonel sayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $\hat{ABC} = \alpha$, $\hat{ABD} = \alpha_1$, $\hat{DBC} = \alpha_2$ olsun. AOB ve BOC üçgenlerine "Sinüs Teoremi" 'ni uygularsak

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BC}{OC} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

elde ederiz. AB ve BC , problemin varsayımına göre, rasyonel olduklarından, problemin iddiasını kanıtlamak için $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2$ oranının rasyonel olduğunu göstermek yeter. "Kosinüs Teoremi" 'ni ve kenar uzunlukları ile köşegenlerin rasyonel olmasını kullanarak $\cos \alpha$, $\cos \alpha_1$ ve $\cos \alpha_2$ sayılarının rasyonelliğini gösterebiliriz (örneğin, $\cos \alpha = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$ vs.). Öte yandan, $\cos \alpha = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$ formülünden $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2$ sayısının ve $(\sin \alpha_2)^2 = 1 - (\cos \alpha_2)^2$ formülünden de $(\sin \alpha_2)^2$ sayısının rasyonel olması çıkar. İki rasyonel sayının oranı da rasyonel olacağından

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{(\sin \alpha_2)^2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

sayısı da rasyonel olacaktır.

Y.156. n herhangi bir doğal sayı olmak üzere,

$$n, n+1, n+2, \dots, n+37, n+38$$

dizisinde, rakamları toplamı 11 ile bölünen bir sayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen sayıların ilk 20 'si içinde son rakamı sıfır olan ikisi vardır. Bu iki sayıdan en az birinde sıfırdan bir önceki rakam 9 'dan küçüktür. Bu sayıya K ve K 'nin rakamları toplamına S diyelim. Bu takdirde

$$K, K+1, K+2, \dots, K+9, K+19$$

sayıları verilen 39 sayının içinde bulunacaktır ve rakamları toplamı, sırası ile,

$$S, S+1, S+2, \dots, S+9, S+10$$

olacaktır. Sonuncu 11 tane ardışık sayının en az birinin 11 'e bölündüğü açıktır.

(Çözenler: Celalettin Orhan, Alper Çay.)

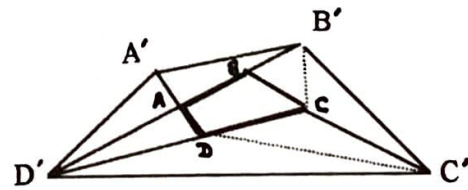
Y.157. Konveks $ABCD$ dörtgeninin AB , BC , CD ve DA kenarlarının uzantıları üzerinde

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DA}$$

sağlanacak biçimde B' , C' , D' , A' noktaları alınmıştır. $A'B'C'D'$ dörtgeninin alanının $ABCD$ dörtgeninin alanının 5 katı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.



Şekilden,

$$A(\triangle ABC) = A(\triangle CBB') = A(\triangle CB'C').$$

Buradan, $A(\triangle BB'C') = 2A(\triangle ABC)$ olduğu çıkar. Benzer şekilde,

$$A(\overset{\Delta}{CC'D'}) = 2A(\overset{\Delta}{BCD}) ; A(\overset{\Delta}{DD'A'}) = 2A(\overset{\Delta}{CDA}) ; A(\overset{\Delta}{AA'B'}) = 2A(\overset{\Delta}{DAB})$$

olur. Elde edilen dört eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$A(\overset{\Delta}{BB'C'}) + A(\overset{\Delta}{CC'D'}) + A(\overset{\Delta}{DD'A'}) + A(\overset{\Delta}{AA'B'}) = 2[A(\overset{\Delta}{ABC}) + A(\overset{\Delta}{BCD}) + A(\overset{\Delta}{CDA}) + A(\overset{\Delta}{DAB})] = 4A(\overset{\Delta}{ABCD}) \equiv 4S$$

Böylece, $A(\overset{\Delta}{A'B'C'D'}) = 4S + S = 5S$.

(Çözenler: Barış Buran, Selami Güngör, Ümit Arıkan, Özkan Koral, Cihan Altay, Cemal Özboğa, Temel Taşkın, Celalettin Orhan, Serkan Albayrak, Çetin Kesikçi, Murat Aygen, Hasan Karabıyık.)

Y.158. $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$ sayısının tam kısmının 1998 ile bölünmesinden kalan nedir?

Çözüm. Önce her n doğal sayısı ve $-1 < \beta < 0$ olan her β için

$$\frac{(n+1)^{\beta+1} - n^{\beta+1}}{\beta+1} < n^{\beta} < \frac{n^{\beta+1} - (n-1)^{\beta+1}}{\beta+1} \quad (*)$$

eşitsizliklerinin sağlanacağını gösterelim.

$0 < \beta + 1 < 1$ olduğundan, Bernoulli eşitsizliği kullanılarak

$$(1 + \frac{1}{n})^{\beta+1} < 1 + \frac{\beta+1}{n},$$

$$(1 - \frac{1}{n})^{\beta+1} < 1 - \frac{\beta+1}{n}$$

olduğu görülür ve bunlar $n^{\beta+1}$ ile çarpılarak

$$(n+1)^{\beta+1} < n^{\beta+1} + (\beta+1)n^{\beta},$$

$$(n-1)^{\beta+1} < n^{\beta+1} - (\beta+1)n^{\beta}$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten (*) eşitsizliği çıkar.

Şimdi (*) eşitsizliğinde $\beta = -\frac{1}{3}$ ve sıra ile $n = 4, 5, \dots, 1000000$ konularak taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1000001^{2/3} - 4^{2/3}}{2/3} < \alpha < \frac{1000000^{2/3} - 3^{2/3}}{2/3}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan,

$$\frac{3}{2}1000001^{2/3} > \frac{3}{2}1000000^{2/3} = \frac{3}{2}10000 = 15000$$

ve

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} < 4 ; \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} > \frac{3}{2}\sqrt[3]{8} = 3$$

eşitliklerinden

$$15000 - 4 < \alpha < 15000 - 3$$

eşitsizliği ve dolayısıyla $[\alpha] = 14996$ olduğu görülür. 14996'yı 1998 ile bölerek kalanı bulmayı okuyucularımıza bırakıyoruz.

(Çözenler: Cemal Özboğa, Celalettin Orhan, Ahmet Bozkurt.)

Y.159. Alfa burcunun 1001 gezegenden ibaret bir gezegenler sisteminin her gezegeninde bir astronom, kendi gezegenine en yakın olan gezegeni gözlemlemektedir. (Gezegenler birbirinden farklı uzaklıktadır.) Astronomların hiç birinin gözlemediği bir gezegenin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. Genel halde, $2n + 1$ tane gezegen olduğu durumu ele alalım ve problemin hipotezini tümevarımla ispatlayalım.

$n = 1$ için iddianın doğru olduğunu görmek zor değildir. $n = k$ için iddianın doğruluğunu varsayarak $n = k + 1$ için ispatlayalım. Bunun için $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ gezegen içinde birbirine en yakın olan iki gezegeni ele alalım. Bu gezegenlerdeki astronomlar biri diğerinin gezegenini gözleyecektir. Bundan dolayı bu iki gezegeni gözardı edebiliriz. Geriye kalan $2k + 1$ tane gezegen içinde bir tanesinin hiç kimse tarafından gözlenmediği ise tümevarım varsayımıdır.

Y.160. Alanı S ve çevre uzunluğu P olan konveks dörtgenin içine, yarıçapı $\frac{S}{P}$ olan bir daireyi (dışarıya taşmaksızın) yerleştirmek mümkündür; kanıtlayınız.

Çözüm. Problemi, alanı S ve çevre uzunluğu P olan herhangi konveks n -gen için çözelim.

Çokgenin kenar uzunlukları $a_1, a_2, \dots, a_n$ olsun. Şarta göre, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = P$ dir. Alanı S ve taban uzunluğu P olan dikdörtgen düşünelim. Onun yüksekliği $\frac{S}{P}$ olacaktır. Şimdi, bu dikdörtgeni, taban uzunlukları $a_1, a_2, \dots, a_n$ olan n tane dikdörtgene parçalayalım. Elde edeceğimiz her bir küçük dikdörtgeni, taban çokgenin uygun kenarı ile çakışmak üzere çokgenin içine yerleştirelim. Bu

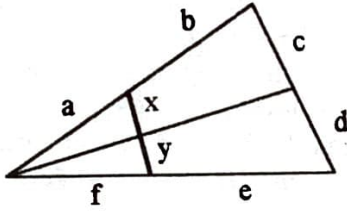
dikdörtgenlerin bazıları birbiriyle kesişecektir ve hatta bazılarının bir kısmı çokgenin dışına taşacaktır. Dikdörtgenlerin alan toplamları çokgenin alanına eşit olduğundan, çokgen üzerinde

hiç bir dikdörtgen tarafından örtülmeyen noktalar bulunacaktır. İşte, bu noktaların her biri problemin iddiasını sağlayan $\frac{S}{P}$ yarıçaplı dairenin merkezi olarak alınabilir.

OKURLARIMIZDAN PROBLEMLER

Okurlarımızdan gelen iki ilginç problemi sizlerle paylaşmak istiyoruz. Sanırsanız bunları çözmeye değer bulacaksınız.

(A) Emre Bozdurgut - Kadıköy/İSTANBUL

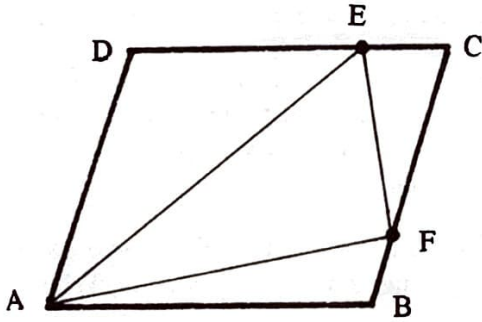


Yukarıda görülen şekil için

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{d} \cdot \frac{f+e}{a+b} \cdot \frac{a}{f}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(B) Hasan Kartal - Zeytinburnu/İSTANBUL



Bu $ABCD$ paralelkenarında $[DC]$ kenarı üzerinde bir E noktası ve $[BC]$ kenarı üzerinde bir F noktası alalım. Bu durumda

$$\frac{\text{Alan}(\triangle AEF)}{\text{Alan}(ABCD)} = \frac{1}{2} - \frac{|DE| \cdot |BF|}{|DC| \cdot |BC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.



ANTALYA

YILMAZ KOLEJİ

"... Zirveye uzanan çizgi"

İlk Mezunlarımızla:

98 ÖSS'de %100'lük Başarı...
98 ÖYS'de %83'lük Başarı...

Çağlar TOPTAŞ

98 ÖYS TM Puanında Antalya 4.lüğü ve Türkiye 75.liği

Kemal KESEROĞLU

TÜBİTAK ve Enerji Bakanlığının Ortaklaşa Düzenlediği
Ulusal Enerji Proje Yarışmasında, Türkiye Üçüncülüğü...

Berkan ACAR

TÜBİTAK Ulusal Biyoloji Olimpiyatlarında Akdeniz Bölge
Üçüncülüğü...

Ve;

Kanser Projemizin Uludağ Üniversitesinin Düzenlediği
Uluslararası Onkoloji Kongresine daveti...

Cumhuriyet'imizin 75. yılında;

Okulumuzdan birkaç bilimsel çalışma...

Ve daha nicelerine...

Cumhuriyet'imize;
'Çam Sakızı, Çoban Armağanı'