

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyasından

Saccheri'nin *Euclides*'i Üzerine Bir Metodolojik-Tarihsel Çalışma (I)

Samet Bağçe

Harmonik Seriden Terimlerin İşaretlerini Değiştirerek Elde Edilen Seriler

Yusuf Ünlü

Bernstein'in Kanıtlaması

Nurettin Ergun

Sayıların Sihirli Dünyasında "Pisagor Teoremi" ile

Bir Gezinti

Dursun Çalışkan

Matematika

Selçuk Alsan

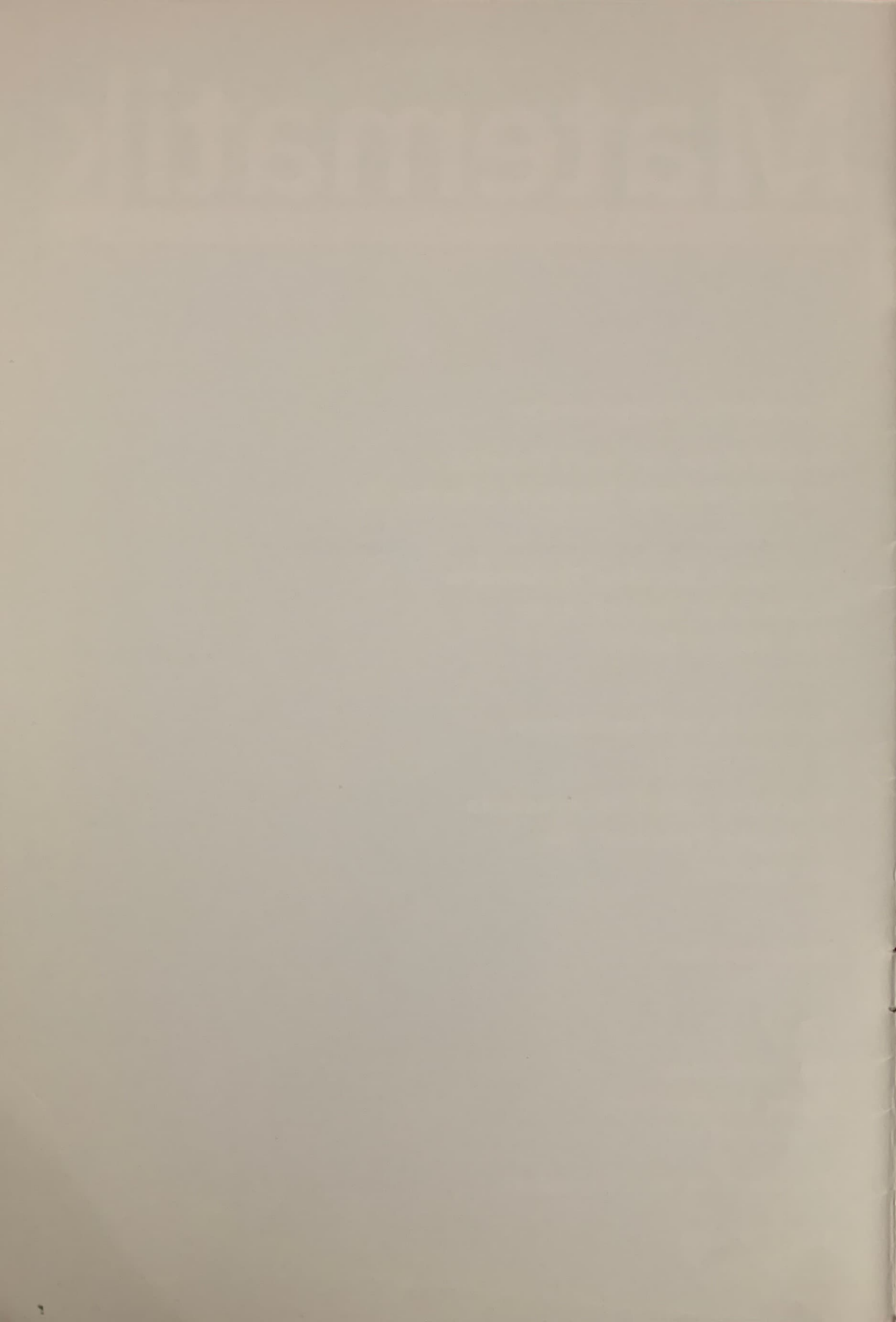
$$z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1$$

Polinomunun İlginç bir özelliği

Sofia Ostrovska

Problemler ve Çözümleri

Cilt 7 Dizini



MATEMATİK DÜNYASINDAN

1998 yılında, Antalya'da, yayın hayatına yeniden başlayan dergimiz, 7.cildinin bu son sayısının yayımıyla yeni yaşamında 1.yılıni doldurmuş bulunmaktadır. Matematik Dünyası'na gösterdiğiniz ilgi ve destekten dolayı siz sayın okurlarımıza ve derginin yeniden yayınlanmasına olanak sağlayan Türk Matematik Derneği yöneticilerine şükranlarımızı sunuyoruz.

Türk Matematik Derneği, Matematik Dünyası dergisinin 1999 yılında da Antalya'dan yayımlanmasını uygun buldu. Dergimizin, 1999 yılında ve bunu izleyen "ikibinli yıllarda" güçlenerek daha başarılı bir biçimde yayın hayatını sürdürmesini diliyoruz. Bunun için hepimiz çalışmalıyız, çalışacağız.

1998 yılı içinde dergimizin elinize çoğunlukla geç ulaştığını biliyoruz. Bu gecikmenin nedenleri arasında, Yayın Kurulumuzun yoğun eğitim etkinlikleri ve ayrıca derginin Antalya'da hazırlanıp İstanbul'da basılması, sonra yeniden Antalya'ya getirilerek oradan dağıtılmasını sayabiliriz. 1999 yılı içinde derginin elinize zamanında ulaşması için çaba gösterilecektir.

1999 yılı için en iyi dileklerle Antalya'dan selam ve sevgiler...

MATEMATİK DÜNYASI

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Ünal Ufuktepe, Güvenç Arslan
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (1999) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 2.500.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.000.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@pascal.sci.akdeniz.edu.tr

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından	1
Saccheri 'nin <i>Euclides</i> 'i Üzerine Bir Metodolojik-Tarihsel Çalışma (I) Samet Bağçe	2
Harmonik Seriden Terimlerin İşaretlerini Değiştirerek Elde Edilen Seriler Yusuf Ünlü	8
Bernstein 'in Kanıtlaması Nurettin Ergun	14
Sayıların Sihirli Dünyasında "Pisagor Teoremi" ile Bir Gezinti Dursun Çalışkan	18
Matematika Selçuk Alsan	22
$z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1$ Polinomunun İlginç Bir Özelliği Sofia Ostrovska	23
Problemler ve Çözümleri	27
Cilt 7 Dizini	32

SACCHERİ 'NİN EUCLIDES 'İ ÜZERİNE BİR METODOLOJİK-TARİHSEL ÇALIŞMA (I)¹

Samet Bağçe

ODTÜ, Felsefe Bölümü, 07531-ANKARA

I. GİRİŞ

Euclidçi-olmayan geometrilerin keşfi, 19.yüzyıl matematik düşüncesinde meydana gelen en önemli gelişmelerden biridir. Bu keşfin pek çok önemli problemin doğmasına yol açan uzun ve oldukça karmaşık bir tarihi vardır. Bu sorulara yanıt vermek için çeşitli bakış açılarından bu keşfin tarihine ilişkin değişik açıklamalar ve yorumlar ileri sürülmüştür.

Bunların arasında, kendinden sonra gelen Coolidge², Boyer³ ve Klein⁴ gibi yazarların yürüttüğü araştırmaların ve tartışmaların çerçevesini belirleyen yorum, Bonola 'nın⁵ gibi görünmektedir. Adı geçen yazarların tarihsel yorumlarında bir takım anlaşmazlık noktaları bulunmasına karşın, uğraştıkları konuya yaklaşımlarında bir ortaklık söz konusudur⁶. Sahip oldukları ortak tavır, G. Saccheri 'den (1733) E. Beltrami 'ye (1868) kadar gerçekleştirilen geometri çalışmalarını tek bir soruya yanıt vermek için yürütülmüş girişimler olarak görmeleridir. Bu soru da, Euklid 'in diğer tüm postulatları ve aksiyomları çerçevesinde, paralellik postulatının zorunlu olarak doğru olup olmadığı sorusudur. Gray 'in de yerinde gözlemiyle ifade ettiği gibi, "standart yorum, çoğu kez, paralellik postulatının Euklidçi geometriden mantıksal olarak bağımsız (logical independence) olup olmadığı sorusuna yapılan göndermelerle sona ermektedir (Bonola, Chap.V, Sec.94, Appendix V; Coolidge, pp.84-88; Kline, Chap.38, Sec.4 ve Chap.42)".⁷

Böylece problem, geometrinin temellerine (foundation) dair bir problem olarak algılanmıştır. Euklidçi-olmayan geometrilerin keşfinin bir sonucu olarak, probleme negatif bir çözüm sağlanmış oldu. "Standart yorum" a göre, Saccheri 'den Beltrami 'ye kadar gerçekleştirilen geometri çalışmaları, geometrinin temellerine dair çalışmalar olarak görülmelidir ve geometri tarihini en iyi biçimde anlamanın yolu da onu, bu tip çalışmaların çizgisel (linear) bir birikimi olarak görmekten geçmektedir.

Standart yorum, bu geometri çalışmalarının bazı yönlerinin iyi bir değerlendirmesini vermektedir. Bonola 'nın Euklidçi-olmayan geometrilerin keşfinin tarihini *öncüler* ve *kurucular* olarak, niteliksel bakımdan farklı iki döneme ayırması buna örnektir.⁸ Bu ayrımı geçerli kılacak herhangi bir neden ileri sürmemesine karşın, Bonola, dikkatimizi sadece tarihsel bir olguya çekmek ister gibidir. *Öncüler*, Euklidçi geometriyi savunmaya çalışırken, Euklidçi-olmayan geometrilerin bazı çok önemli teoremlerini, elbette farkında olmadan, keşfetmişlerdi. Oysa, *kurucuların* amacı bilinçli olarak bütünüyle yeni bir geometri inşa etmektir. Demek ki, yaptığı bu ayrımla Bonola, bu iki geometricilerin yöntemlerindeki, kullandıkları tekniklerdeki ve yaklaşımlarındaki farklılığa değil; sonuçlar arasındaki, yani bu iki geometrinin ileri sürdüğü teoremler arasındaki farklılığa dikkat çekmek amacını taşımaktaydı. Yalnızca temelci (foundational) çalışmalarla ve aksiyomatik sorunlarla ilgilenen biri olmasından dolayı, bu amaç, Bonola 'nın özgün ilgi alanıyla da oldukça uyumludur.

Gene de, bu ayrımın üzerinde yeterince durulmamıştır ve böylece onun heuristik (yol-açıcı) değeri doğru olarak anlaşılamamıştır. *Öncüler*, çalışmalarını eski geometrinin ideolojisine bağlı kalarak; *kurucular* ise, tersine, yeni bir geometriyi yeni düşüncelerle, yöntemlerle ve yaklaşımlarla kurmuşlardır. Fakat *öncüler*, eski geometrik düşüncelerin ve yöntemlerin bazı yeni uygulamalarını ortaya koyarak, yeni bir geometrinin yaratılmasına giden yolu açmışlardır. Demek ki, bu geometricilerin çalışmaları arasındaki temel farklılık, onların *yaklaşımlarında* (approaches) aranmalıdır. Euklidçi-olmayan geometrilerin keşfinde can alıcı rolü oynayan da işte bu farklılıklardır. Standart yorum, bu ayrımla dikkatimizi belirli ölçülerde, matematiksel yöntemlerdeki farklılığa çekmektedir: 18.yüzyılda Saccheri ve J. H. Lambert (1728-1777) paralellik problemini çözme uğraşlarında klasik geometriyi kullanmışlardır. 19.yüzyılın ilk dönemlerinde ise J. Bolyai (1802-1860) ve N. I. Lobachevsky (1793-1856) analizi kullandılar; aynı yüzyılın ortalarında da B. Riemann (1826-1866) ve E. Beltrami (1835-1900)

diferansiyel tekniklere yöneldiler. Aynı zamanda, 19.yüzyılın ilk dönemlerinde pek çok matematikçi de daha önceden kabul edilemez olan şeylerin aslında doğru olabileceğini de düşünmeye başlamıştı: Euklidçi geometriden farklı bir geometri, mantıksal ve fiziksel olarak mümkün olabilirdi, yani yeni geometrinin formal yapısı fiziksel evrenimize ilişkin ampirik bulguları ifade edebilme imkanına sahip olabilirdi.

Tüm bunlara karşın, yalnızca bir aksiyomatik sistemin temellerine dair çalışmalara ve aksiyomatik sorunlara vurgu yapan standart yorum, geometri tarihinin pek çok önemli yönünü değinmeden bırakmıştır. Örneğin, belirli geometrik yöntemlerin neden daha önceden değil de, o dönemde öyle kullanıldıklarına ya da gene belirli geometrik yöntemlerin daha sonraki geometrik yöntemlerin gelişmesine ve kullanılmasına nasıl katkıda bulunduğu ilişkin konularda herhangi bir açıklama ileri sürmemiştir. Dahası, standart yorum, problemlerin doğasındaki değişimlerle ve eğer ortaya çıkmışlarsa, bu değişimlere nelerin yol açtığıyla da ilgilenmemiştir. Bu da aslında, standart yorumu üretenlerin, geometrik sonuçların elde edilme biçimlerine önem vermemelerinden kaynaklanmaktadır. Öyleyse, bu yorum, benim geometrik gelişmenin heuristiği diyeceğim şeyin farkına varmada yetersiz kalmaktadır. “Heuristik” derken kastettiğim şeyler şunlardır:

- (i) Geometricilerin problem çözümlerinde kullandıkları yöntemler;
- (ii) Geometrik dilin, problemlerin ve teorilerin karakterizasyonları;
- (iii) Geometricilerin kendi niyetleri.

Özel olarak bakıldığında, Saccheri 'nin *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733)⁹ adlı çalışmasının standart yoruma göre yapılan açıklaması buna istisna teşkil etmez. Bu açıklamaya göre, Saccheri 'nin çalışması paralellik postulatının ateşli bir savunusudur ve böyle olduğu için de, geometrinin temellerine dair bir çalışmadır. Euklidçi-olmayan geometrilerden biri, Bolyai-Lobachevsky geometrisi, Saccheri 'nin dar-açı hipotezi üzerine yaptığı çalışmaların neticesinde keşfedilmiştir.¹⁰

“Saccheri 'nin çalışması, amacına ulaşmamış bile olsa, hala büyük bir önem taşımaktadır. Bu çalışmada, en kararlı çaba beşinci postulat için harcanmıştır. Saccheri 'nin *Dar Açı Hipotezinin* (Hypothesis of the Acute Angle) sonuçları arasında bir gelişki bulamamış olması olgusu, ister istemez tutarlı bir mantıksal geometrik sistemin bu postulat üzerinde yapılandırılıp yapılandırılmayacağı sorusunu ve Euklidçi postulatın ispatının olanaksız olduğu fikrini gündeme getirmiştir”.¹¹

Geometrik sonuçların elde edilme biçimlerine önem vermemesinden dolayı, standart yorum, Saccheri 'nin paralellik problemi üzerine olan çalışmasının da pek çok önemli yönüne değinmemiştir. Bu makalede, bu önemli yönleri sergilemek için, Saccheri 'nin çalışmasını şu üç sorunun ışığında değerlendireceğim:

- (i) Dolaylı ispatlama yöntemi olan *reductio ad absurdum* Saccheri 'nin onu kullandığı biçimde niçin daha önceden kullanılmamıştır?
- (ii) Paralellik probleminin doğasında herhangi bir değişim olmuş mudur, eğer olmuşsa bunlara neler yol açmıştır?
- (iii) Saccheri 'nin çalışması, kendinden sonraki geometrik çalışmalardaki egemen olan yaklaşımlara ve yöntemlere yol açmış mıdır?

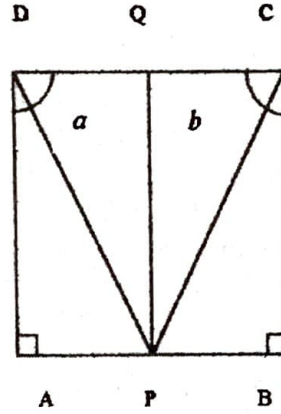
Buradaki amacım, yukarıdaki sorulara cevap vererek, Saccheri 'nin çalışmasını yeni bir heuristik getiren bir çalışma olarak göstermektir. Bu iddianın desteklenmesi, geometri tarihini, artık tabii devamlılığın ve ilerlemenin olmadığı, geometri teorilerinin sonuçlarının çizgisel bir toplamı olarak değil de, tersine devamlılığın ve ilerlemenin örnek bir modeli olarak görmemizi sağlayacaktır. Bununla bağlantılı olarak, geometri tarihini en iyi biçimde anlamının yolunun geometri teorilerinin heuristiklerini incelemekten geçtiğini ileri sürmekteyim.

Yukarıdaki sorulara yanıt vermeye başlamadan önce, heuristik yaklaşımın değerini göstermek için, Saccheri 'nin paralellik postulatı üzerine yazdığı *Euclides* 'in ana hatlarını özetlemek yararlı olacaktır.

II. EUCLİDES 'İN ANA HATLARI

Saccheri 'ye göre, Euklid 'in "Elements" 'inde bir tanesi paralellik postulatı olmak üzere üç tane "kara leke" vardır.¹² Euclides 'te Saccheri, "paralellik postulatının doğruluğundan hiç kimsenin şüphesi olmadığı" inancından dolayı, Euclid 'in **Elements** 'ini bu "kara lekeden" temizlemeyi amaç edinir.¹³ Bunu gerçekleştirmek için de ilk olarak, ispatları beşinci postulata bağlı olmayan, Euklid 'in **Elements** 'inin ilk 28 önermesini varsayar. Sonra da beşinci postulatın dolaylı bir ispat yöntemiyle, yani ispatlanacak olan önermenin yalınış olduğu varsayılarak ve bundan çelişme çıkararak önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşma yöntemi olan *reductio ad absurdum* 'la haklılığını göstermeye girişir. Saccheri, postulatın doğru olduğunu göstermek istemekteydi, ama postulatı kendinden önce gelen geometricilerin yapmış olduğu gibi problemleri kanıtlara dayanılarak ispatlanan bir teorem olduğunu göstermek niyetinde değildi.

Başka bir deyişle, paralel çizgilerin var-olduklarının ve tekliklerinin yadsınmasının, Euklid 'in diğer postulatlarıyla ve aksiyomlarıyla bağdaşmaz olduğunu göstermek istemekteydi. Beşinci postulatın yanlış olduğu iddiasını geometrik olarak uygun bir biçime koymak amacıyla, bugün *Saccheri dörtgeni* olarak bilinen, A 'da ve B 'de dik açıya sahip ve $AD = BC$ olan belirli bir düzlem figürünü kullanır.



Şekil I

Euklid 'in ilk dört postulatı temelinde, Saccheri, $\angle ADC = \angle BCD$ olduğunu ispatlar, çünkü eğer P ve Q noktaları, sırasıyla AB ve CD parçalarının orta noktalarına karşılık geldiği farz edilirse, ADP ve BCP dik üçgenleri eşittir.¹⁴ Böylece $\angle ADP = \angle BCP$ ve $PD = PC$ olur. O halde, DPQ üçgeninin kenarları, karşılıklı olarak, CPQ üçgeninin kenarlarına eşittir. Sonuç olarak da, bu iki üçgen eşittir.¹⁵ Böylece, $\angle ADC = \angle ADP + \angle PDC = \angle BCP + \angle PCD = \angle BCD$ olur. C ve D 'deki eşit açılara b ve a dersek, şu üç olasılık tüketici (exhaustive) ve dışlayıcı (exclusive) olarak söz konusudur:¹⁶

- (i) $a + b = \pi$, yani bu açılar dik açılardır, ya da
- (ii) $a + b > \pi$, yani bu açılar geniş açılardır, ya da
- (iii) $a + b < \pi$, yani bu açılar dar açılardır.

Saccheri bu olasılıklara, sırasıyla, dik açı, geniş açı ve dar açı hipotezleri adını verir [(i) HRA, (ii) HOA, ve (iii) HAA olarak kısaltılmıştır].

Saccheri, ilk olarak her hipotezin verili bir dörtgende geçerli olduğunu, fakat zorunlu olarak diğerlerinde geçerli olmayabileceğini varsayar. Yani henüz bu aşamada, geniş açılı bir dörtgeni düzlemin bir bölgesinde, dar açılı bir dörtgeni de başka bir bölgesinde düşünmekte serbestiz. Saccheri, V-VII önermelerde, eğer bu üç hipotezden biri, Saccheri dörtgenlerinden biri için doğru olursa, o hipotezin böylesi bütün dörtgenler için doğru olacağını ispatlar. Bu teoremler uzayın, her hipotez için homojen olduğunu göstermektedir, yani, uzay geometrik olarak her yerde aynıdır.

Saccheri, daha sonra, üçgenlere dair ve üç kısımdan oluşan şu sonucu ispatlar:

"Herhangi bir dik açılı üçgende, geri kalan dar açılar bir arada alındıklarında, dik açı hipotezine göre, tek bir dik açiya eşittirler; geniş açı hipotezine göre, bir dil açıdan büyüktürler; dar açı hipotezine göre ise bir dik açıdan küçüktürler".¹⁷

Daha sonra Saccheri, XI. önermede aksiyomlarının HRA ile birlikte, Euklidçi geometrinin postulatlarıyla eşdeğer olduğunu ispatlar. XII. önermede ise, HOA söz konusu olduğunda, herhangi iki doğrunun sonlu bir uzaklıkta daima birbirlerini keseceklerini gösterir.¹⁸ Böylelikle, bu önermede, Saccheri 'nin aksiyomlarının HAO ile birlikte, eliptik geometrinin aksiyomlarıyla denk olduğunu ortaya koyar. Daha sonra, XXV. ve XXXII. önermelerde, HAA söz konusu olduğunda, l doğrusu dışındaki A noktasından geçen ve l 'ye asimptotik olan iki doğru çizginin olduğunu kanıtlar. Böylece, Saccheri bu önermeler ve aksiyomlarının HAA ile birlikte, hiperbolik geometrinin aksiyomlarıyla eşdeğer olduğunu gösterir.

Yukarıda görüldüğü gibi, Saccheri 'nin dörtgeni aracılığıyla üç klasik geometri, yani, Euklidçi, hiperbolik ve eliptik geometriler tanımlanabilir olmasına karşın, Saccheri yalnızca Euklidçi geometrinin doğru olduğu iddiasını temellendirmeye yönelmiştir. Bu amaca ulaşmak için de öncelikle, HOA 'yı elemeye girişmiştir ve XIV. önermede "kendi kendini çürüttüğünden dolayı geniş açı hipotezinin, kesinlikle yanlış olduğu" sonucuna ulaşmıştır.¹⁹

Saccheri, XIV. önermede ifade edilen sonucu, XI. XIII. önermelere dayanarak elde etmiştir. Buna karşın, HOA 'yı eleyişi problematik olarak değerlendirilebilir, çünkü bunu yaparken HOA için geçerli olmayan ve ispatı doğrunun sonsuz uzunluğuna dayanan Euklid 'in *Elements* 'inin 16. önermesine dayanmıştır.²⁰ HOA 'daki doğru çizgilerin ise, sonsuz uzunluğa sahip olarak varsayılacağı açıktır. Bu varsayım bir dörtgendeki iki geniş açının olasılığını ortadan kaldırır ve bu anlamda da HRA 'yı ispatlar.²¹ Fakat bu varsayım, bu açılardan dar açı olma olasılıklarını engellemektedir.

Öte taraftan ise Saccheri 'nin kafa karıştırıcı şöyle bir ifadesi de söz konusudur:

"Euklid 'in Birinci Kitabındaki önermelerinden, sadece 27.yi ve 28.yi değil, 16.yı ve 17.yi bile, her bakımdan kısıtlanmış bir üçgenin söz konusu olduğu yerler dışında, asla kullanmayacağım".²²

Saccheri 'nin bu ifadesi, I. 16-17 ve I. 27-28 önerme çiftleri arasında ayırım yaparak I. 16 'yı niçin kullandığını açıklamaktadır. Dou 'nun doğru olarak gözlemleyip ifade ettiği gibi, birinci çiftteki önermeler kısıtlanmış üçgenler sınıfı için geçerliken; paralel doğruların varlığını temellendiren ikinci çifttekiler içinse geçerli değildir.

DİPNOTLAR

¹ Bu makale, Zaragoza 'da yapılan *XIXth International Congress of History of Science* 'da sunulmuştur. Materyalin Türkçe'ye çevirisi için yaptığı çalışmalardan dolayı Şevket Severge 'ye ve ayrıca Ahmet İnam 'a katkılarından dolayı teşekkür ederim.

² J.L.Coolidge: *A History of Geometrical Method*, Oxford: Clarendon Press, 1940/1947.

³ C.B. Boyer: *A History of Mathematics*, New York: Wiley, 1968.

⁴ M.J.Klein: *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, London: Oxford University Press, 1972.

⁵ R. Bonola: *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development*, New York: Dover, 1912/1955.

⁶ J. Gray, konuya çok benzer yaklaşımlarda bulunduklarından dolayı, bu sunumları "standart açıklama" adı altında sınıflandırmıştır; bkz. "Non-Euclidean Geometry: A Re-Interpretation", *Historia Mathematica*, 6, 1979, 236-258, sf.237.

⁷ J. Gray: *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, Second Edition, Oxford: Clarendon Press, 1989, sf. 169.

⁸ Karş. Bonola, not 5 'deki aynı eser, sf. xii.

⁹ G. Saccheri: **Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabil-iuntur Prima ipsa universae Geometriae Principia** (Milan, 1733), İngilizceye çev. Geoge B. Halsted: **Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus**, Chicago and London: Open Court, 1920. Bu kitap, bu makalede **Euclides** olarak anılmıştır. Saccheri 'nin hayatına ve çalışmalarına ilişkin kısa notlar: 1667 'de San Remo 'da doğan Girolamo Saccheri, bir Cizvit geometricidir, Milano 'da öğrenim gördü, Turin 'de felsefe ve apologetik öğreten Saccheri daha sonra üniversitede matematik öğretmenliği yaptığı Pavia 'ya taşındı, 1733 yılında Pavia 'da öldü. Çalışmaları: **Ouaesita Geometria, Logica Demonstrativa, Nea-Statica, De Natura Gravium, Euclides ab Omni Naevo Vindicatus**.

¹⁰ Saccheri 'nin dörtgeni, a ve b açılarının toplamının dik, dar ya da geniş olmasına göre ya Euklidesçi, ya hiperbolik, ya da eliptik olan bir tek gerçek elementer düzlem geometrisi tanımlar [bkz. şekil 1]. Saccheri 'nin aksiyomlarının yalnızca hiperbolik değil, eliptik geometriye de götürülebileceği kolayca görülebilir. [karş. A. Dou; "Logical and Historical Remarks on Saccheri's Geometry", *Notre Dame J. Formal Logic*, XI, 1970, 385-415, bkz. sf. 387].

¹¹ Bonola, not 5 'deki aynı eser, sf. 43-44.

¹² Saccheri, not 9 'daki aynı eser, sf. 5-7.

¹³ Saccheri, not 9 'daki aynı eser, sf. 5.

¹⁴ T.L. Heath: **The Thirteen Books of Euclid's Elements**, New York: Dover, 1956, bkz. Book I, önerme 4, sf. 247-250. Bu kitap, bu makalede **Elements** olarak anılmıştır.

¹⁵ Bkz. Heath, not 14 'deki aynı eser, Book I, önermeler 4 ve 8, sf. 261 ve 284. Dahası bu önermeler paralellik postulatına başvurulmadan ispatlanmıştır.

¹⁶ Euklidçi geometriye göre, her üçgen, büyüklüğü ve uzaydaki konumu ne olursa olsun toplamı 180° 'ye eşit olan açılara sahiptir. Bunun zıttıysa, uzayda bir yerlerde herhangi büyüklükte bir üçgenin açılarının toplamının ya 180° 'den az ya da 180° 'den çok olduğudur. Saccheri, güçlü bir alternatif olan *tüm* üçgenlerin ya dar ya da geniş olduğunun doğru olduğu fikriyle başlamıştır.

¹⁷ Saccheri, not 9 'daki aynı eser, önerme IX, sf. 41-43.

¹⁸ Saccheri bu önermede, iki doğrunun, toplamı π 'den küçük açılar yapan transversalle birleştiklerini varsayıyor görünmektedir. Buna karşın Dou 'nun kendi makalesinde belirttiği gibi [not 10 'daki aynı eser, sf. 407] eğer HOA altında iki doğru, toplamı π 'ye eşit açılar yapan transversalle birleşiyorlarsa, bu durumda problem bir öncekine indirgenir be böylece iki doğru her iki yönde de birleşir.

¹⁹ Saccheri, not 9 'daki aynı eser, sf. 59-61.

²⁰ Doğruların sonsuz uzunlukta oldukları varsayımı, I.17, I.21 ve I.26-28 önermelerinin ispatlarında da kullanılmıştır. Bunların sonuncusunda, Euklid ilk olarak beşinci postulatı kullanır. I.16 önermesi "herhangi bir üçgende, eğer kenarlardan biri uzatılırsa, dış açı hem iç hem de zıt açıdan büyük olur" der [Heath, not 14 'deki aynı eser, sf. 279-281]. Ve diğer beş önerme, I.17, I.21 ve I.26-28, I.16 'ya dayanır. Ek olarak, Saccheri, önerme I.16 'yı ilk olarak kendi kitabındaki III.önermenin ispatında kullanmıştır.

²¹ Saccheri 'nin III. 'den XIII. 'ye kadar olan önermelerin ispatlarında doğruların sonsuz uzatılabilirliği varsayımını kullanmış olmasından dolayı, bu önermelere verdiği ispatların geçerliliği sorgulanmıştır. Örneğin, P. Staeckel: **Die Theorie der Parallellinen von Euklid bis auf Gauss** Leipzig, 1895; (bkz. sf. 52 ve sf. 62) adlı çalışmasında değerlendirme yaparken, HOA 'daki ispatın yetersiz olduğunu belirtmiştir [karş. Dou, not 10 'daki aynı eser, sf. 388 ve C. Segre: "Congettture intorno all'influenza di Girilamo Saccheri Sulla formazione della geometria non-euclidea", *Atti. Acc. Scienza di Torino*, XXXVIII, 1903, 535-547, sf. 535].

Buna karşın, eğer Euklid 'in 2.postulatu doğruların uzatılabilirliğini garanti altına alan bir şey olarak yorumlanırsa, o zaman Saccheri, HOA 'yı eleyişinde haklı olur. Ek bilgi, için bkz. Dou, not 10 'daki aynı eser, sf. 387-388 ve L. Sklar: **Space, Time, and Space-Time**, Berkeley, LA, London: California University Press, 1977, sf. 17-18. Dahası Dou, "kenarlarıyla bütün olarak sınırlanmamış bir üçgene uygulanmadıkları sürece, Saccheri 'nin 27. ve 28. ve hatta I.16 ve I.17 önermeleri olmadan iş yapılabileceğini" ileri sürmüştür [bkz. "The 'Corollarium II' to the proposition XXIII of Saccheri's Euclides", *Publicacions Matemàtiques*, 36, 1992, 533-540: sf. 534].

²² Bkz. Saccheri, not 9 'daki aynı eser, *Preface*.

* * *



MATEMATİĞİN GİZLİ DÜNYASI İngiliz eğlence matematiğinin tanınmış ismi matematikçi David Wells 'in 470 sayfalık matematik şöleni, 1997, Sarmal Yayınevi, İstanbul. (Çeviren: Doç. Dr. Selçuk Alsan)

Büyük matematikçilerin çoğu, lise matematiği gerektiren, düşündürücü ve de çok zarif eğlence matematiğine de zaman ayırmışlardır. Bu kitabın özelliği, içindeki üç-dört yüz problemin çoğunun matematik tarihinin ünlü isimlerince hazırlanmış oluşudur. İçindeki bölümler: Üçgenlerin Gizli Dünyası, Sayılar ve Modeller, Bir Bilim Olarak Matematik, Matematik Oyunları, Yeni Matematik Oyunları Yaratmak, Sezgi ve Hayal Gücü, Benzerlik ve Analoji, Kesinlik, Kanıt ve Aydınlatma, Bilimde Matematik: Yaklaşık Modeller, Matematikten Zevk Almak, Minyatür Bir Dünya ve Uzun Bir Yolculuk, Bir Matematik Serüveni.

GEOMETRİNİN GİZLİ DÜNYASI İngiliz eğlence matematiğinin tanınmış ismi matematikçi David Wells 'in 352 sayfalık geometri şöleni, 1998, Sarmal Yayınevi, İstanbul. (Çeviren: Doç. Dr. Selçuk Alsan)

Alfabetik sırayla geometrinin en büyük ve en ilginç buluşları. Konulara örnekler: Düğümler, 6 Daire Problemi, Altın Oran, Apollonius Problemi, Çokyüzlüler, Spiraller, Bilardo Matematiği, Konikler, Mozaikler, Mandelbrot Fraktalleri, Heron Problemi, Yalancı Küre, Simson Doğrusu, Brocard Noktaları, ... Kitapta Pisagor ' dan Gaston Julia 'ya kadar 100 kadar matematikçinin buluşları bol şekilli ve açıklamalı olarak yer almaktadır.



HARMONİK SERİDEN TERİMLERİN İŞARETLERİNİ DEĞİŞTİREREK ELDE EDİLEN SERİLER

Yusuf Ünlü

Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü, 01330-ADANA

1. Giriş

Hepinizin bildiği gibi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

harmonik serisi ıraksaktır. Bu serinin terimlerinin işaretleri değiştirilerek elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

serisi ise yakınsaktır. Kuşkusuz işaret değiştirme işlemini pek çok değişik şekilde yapabiliriz. Bu yazımızda harmonik seriden işaret değiştirme işlemleri sonucu elde edilen bir takım serilerin yakınsaklığı incelenecektir. En genel olarak değiştirme işlemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Pozitif tamsayılardan oluşan bir $\{k_n\}$ dizisi için

$$\begin{aligned} K_0 &= 0, \\ K_n &= k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (\text{her } n \geq 1 \text{ için}) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{K_1}}_{k_1 \text{ pozitif terim}} - \underbrace{\frac{1}{K_1+1} - \dots - \frac{1}{K_2}}_{k_2 \text{ negatif terim}} + \underbrace{\frac{1}{K_2+1} + \dots + \frac{1}{K_3}}_{k_3 \text{ pozitif terim}} - \dots \quad (1)$$

koyalım. (1) serisi hangi koşullar altında yakınsak olur? Bu yazımızda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1 \text{ ve } n \geq N \text{ için } K_n^2 \geq K_{n-1} K_{n+1}$$

oluyorsa, (1) serisinin yakınsak olduğunu gösterecek ve buna ilişkin örnekler vereceğiz. Bunu kanıtlamak amacıyla bir takım yardımcı teoremlere gerek duyacağız.

Teorem 1.1. $0 \leq x$ için

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{1+x} \right) \quad (2)$$

'dir.

İspat. $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ koyalım.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0$$

bulunur. O halde f azalan değildir. $f(0) = 0$ olduğundan her $x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$ olur. Benzer şekilde

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{1+x} \right) - \ln(1+x)$$

koyalım.

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+x)^2} \right) - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2} \geq 0$$

bulunur. O halde g azalan değildir. $g(0) = 0$ olduğundan her $x \geq 0$ için $g(x) \geq 0$ olur. $\square$

$$\begin{aligned} H_0 &= 0, \\ H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (\text{her } n \geq 1 \text{ için}) \end{aligned}$$

koyalım.

Teorem 1.2. n, m pozitif tamsayılar ve $m < n$ ise,

$$0 \leq \ln \frac{n}{m} - (H_n - H_m) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$$

'dir.

İspat. k bir pozitif bir tamsayı olmak üzere (2) de $x = \frac{1}{k}$ koyarak

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$0 \leq \ln(k+1) - \ln k - (H_{k+1} - H_k) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

bulunur. Bu eşitsizliği $k = m$ den $k = n-1$ 'e kadar toplayarak

$$0 \leq \ln \frac{n}{m} - (H_n - H_m) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$$

bulunur.

2. Temel Sonuçlar

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serisi pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri verilsin. N pozitif bir tamsayı olduğuna göre her $n \geq N$ için $|a_n - b_n| \leq c_n$ oluyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'nin yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin yakınsak olması olduğu kolayca görülür.

$\{k_n\}$ dizisi pozitif tamsayılardan oluşan bir dizi olup $\{K_n\}$ dizisi tamsayılardan oluşan monoton artan bir dizidir. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \infty$ olur. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_n} - \frac{1}{K_{n+1}} \right)$$

serisi pozitif terimli yakınsak bir seridir.

Teorem 2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (H_{K_n} - H_{K_{n-1}})$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n}$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

İspat.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (H_{K_n} - H_{K_{n-1}}) = H_{K_1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (H_{K_{n+1}} - H_{K_n})$$

'dir. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerini $n \geq 1$ için

$$a_n = (-1)^{n-1} (H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) \text{ ve } b_n = (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n}$$

olarak tanımlayalım. Teorem 1.2 'den dolayı $n \geq 1$ için

$$|a_n - b_n| = \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} - (H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_n} - \frac{1}{K_{n+1}} \right)$$

'dir. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin yakınsak olmasıdır. $\square$

Şimdi girişte iddia edilen ana teoremi kanıtlayabiliriz. Önce şuna dikkat edelim: S_{K_n} , (1) serisinin K_n kısmi toplamını göstermek üzere, $1 \leq n$ için

$$\begin{aligned} S_{K_n} &= (H_{K_1} - H_{K_0}) - (H_{K_2} - H_{K_1}) + \cdots + (-1)^{n-1} (H_{K_n} - H_{K_{n-1}}) \\ &= \sum_{n=1}^n (-1)^{n-1} (H_{K_n} - H_{K_{n-1}}) \end{aligned}$$

'dir.

Teorem 2.2. (a) (1) serisi yakınsak ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ 'dir.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ ve N pozitif bir tamsayı olduğuna göre her $n \geq N$ için $K_n^2 \geq K_{n-1}K_{n+1}$ ise, (1) serisi yakınsaktır.

İspat. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerini Teorem 2.1. 'deki gibi tanımlayalım. (1) serisi yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi de yakınsak olacağından $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{K_{n+1}}{K_n} \right) = 0$ 'dır. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ olduğu görülür. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ ve N pozitif bir tamsayı olduğuna göre her $n \geq N$ için $K_n^2 \geq K_{n-1}K_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n}$ serisi alterne seri testi nedeniyle yakınsak olur. Böylece K tamsayısı $n \geq N$ için $K_n \leq K < K_{n+1}$ ise,

$$\begin{aligned} |S_K - S_{K_n}| &= \frac{1}{K_n + 1} + \cdots + \frac{1}{K} = H_K - H_{K_n} \\ &\leq H_{K_{n+1}} - H_{K_n} \leq \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} \end{aligned}$$

olup Teorem 2.1 'den (1) serisinin de yakınsak olduğu görülür. $\square$

3. Uygulamalar

Uygulamalara geçmeden önce bir tanım verelim: P katsayıları gerçel sayılar olan bir polinom olduğuna göre $\deg(P)$ ile P 'nin derecesini ve $ld(P)$ ile P 'nin en büyük dereceli teriminin katsayısını gösterelim.

Teorem 3.1. P katsayıları gerçel sayılar ve derecesi $k \geq 1$ olan herhangi bir polinom ve

$$\Delta_P(x) = P(x)^2 - P(x+1)P(x-1)$$

ise,

$$\deg(\Delta_P) = 2k - 2 \text{ ve } ld(\Delta_P) = k(ld(P))^2$$

'dir.

İspat. Teoremi tümevarım kullanarak kanıtlayalım.

$k=1$: Bu durumda $P = Ax + C$ şeklindedir. O halde

$$\Delta_P(x) = P(x)^2 - (P(x) - A)(P(x) + A) = A^2$$

olur. Böylece teoremin $k = 1$ için doğru olduğu görülür.

$k > 1$: Teorem derecesi $< k$ olan bütün polinomlar için doğru olsun. Derecesi $k > 1$ olan bir P polinomu verilsin. Q derecesi $k-1$ olan bir polinom ve C bir gerçel sayı olmak üzere $P(x) = xQ(x) + C$ şeklindedir. Ayrıca $ld(P) = A$ ise, $ld(Q) = A$ 'dır. $G = Q(x)$, $E = Q(x+1)$, $F = Q(x-1)$ ve

$$L = 2CxG - C(x+1)E - C(x-1)F$$

koyalım. Dikkat edilecek olursa, L derecesi en fazla k olan bir polinomdur.

$$\begin{aligned} \Delta_P(x) &= (xG + C)^2 - ((x+1)E + C)((x-1)F + C) \\ &= x^2G^2 - (x^2 - 1)EF + L \\ &= x^2(G^2 - EF) + EF + L \\ &= x^2\Delta_Q(x) + EF + L. \end{aligned}$$

EF 'nin derecesi $2k - 2$ ve $ld(EF) = A^2$ 'dir. Tümevarım varsayımı gereğince

$$\deg(x^2\Delta_Q) = 2k - 2 \text{ ve } ld(x^2\Delta_Q) = (k-1)A^2$$

'dir. O halde

$$\deg(\Delta_P) = 2k - 2 \text{ ve } ld(\Delta_P) = (k-1)A^2 + A^2 = kA^2$$

olur. $\square$

Teorem 3.2. P ve Q katsayıları gerçel sayılar olan polinomlar, $\deg(P) = k$ ve $\deg(Q) = s$ olsun. $k \geq 1$ ve $s < 2k - 2$ ise, bir pozitif N tamsayısı için $n \geq N$ ise $\Delta_P(n) \geq Q(n)$ 'dir.

İspat. $A = ld(P)$ ve $L(x) = \Delta_P(x) - Q(x)$ ise, $s < 2k - 2$ olduğundan L polinomu derecesi $2k - 2$ olan $L(x) = kA^2x^{2k-2} + \dots$ şeklinde bir polinomdur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = \infty$$

olup, bir pozitif N tamsayısı için $n \geq N$ ise, $\Delta_P(n) \geq Q(n)$ 'dir.

Örnek 1. $k_n = 2^n$ ise, $K_n = 2(2^n - 1)$ 'dir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$$

olup (1) yakınsak değildir.

Örnek 2. P katsayıları tamsayılar ve $\deg(P) = k \geq 2$ olan bir polinom olsun. P 'nin $n \geq 1$ için monoton arttığını ve $0 < P(1)$ olduğunu varsayalım. O zaman $L = P(1)$ olduğuna göre $[L, \infty]$ aralığında tanımlı P 'nin ters fonksiyonu g yine monoton artandır.

$$- \sum_{n=L}^{\infty} \frac{(-1)^{[g(n)]}}{n} \quad (3)$$

serisini ele alalım. $r = [g(n)]$ ise

$$r \leq g(n) < r + 1$$

olup P monoton arttığından

$$P(r) \leq n < P(r + 1)$$

elde edilir. Şimdi

$$k_r = P(r + 1) - P(r) > 0$$

dizisini ele alalım. Bu diziye karşılık gelen (1) serisi ile (3) serisi aynı serilerdir.

$$\begin{aligned} K_n &= k_1 + k_2 + \dots + k_n \\ &= P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + \dots + P(n + 1) - P(n) \\ &= P(n + 1) - P(1) \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.2 'de $Q(x) = -P(1)(P(x) + P(x + 2) - 2P(x + 1)) + P(1)^2$ alınacak olursa, $\deg(Q) \leq k - 1 < 2k - 2$ olup

$$\begin{aligned} K_n^2 - K_{n-1}K_{n+1} &= (P(n + 1) - P(1))^2 - (P(n) - P(1))(P(n + 2) - P(1)) \\ &= \Delta_P(n + 1) + P(1)(P(n) + P(n + 2) - 2P(n + 1)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n + 1) - P(1)}{P(n) - P(1)} = 1$$

'dir. Dolayısıyla (3) serisi yakınsaktır.

Örnek 3. $p \geq 2$ bir pozitif tamsayı ise, Örnek 2 'de, $P(x) = x^p$ alınırsa $g(x) = \sqrt[p]{x}$ olur. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[g(n)]}}{n}$ serisi yakınsaktır.

Örnek 4. Q katsayıları tamsayılar olan bir polinom olsun. Her pozitif n tamsayısı için $Q(n)$ 'nin bir pozitif tamsayı olduğunu varsayalım. $k_n = Q(n)$ alınarak elde edilen (1) serisi yakınsaktır. Çünkü Q polinomu k . dereceden bir polinom ise, derecesi $k + 1 \geq 1$ olan bir P polinomu için

$$P(n) = \sum_{i=1}^n Q(i) = K_n$$

olur. Teorem 3.1. 'den dolayı $K_n^2 - K_{n-1}K_{n+1} = \Delta_P(n) \geq 0$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$$

'dir. Örneğin $Q(x) = x$ ve $k_n = Q(n)$ alınarak elde edilen

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{1 \text{ pozitif terim}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{2 \text{ negatif terim}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}}_{3 \text{ pozitif terim}} - \dots$$

serisi yakınsaktır.

Örnek 5. $n \geq 1$ için

$$k_1 = 4, \quad k_{2n} = 3, \quad k_{2n+1} = 1$$

koyalım. Buradan

$$K_{2n-1} = 4n \quad \text{ve} \quad K_{2n} = 4n + 3$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} &= \ln \frac{K_2}{K_1} - \ln \frac{K_3}{K_2} + \dots + \ln \frac{K_{2m}}{K_{2m-1}} - \ln \frac{K_{2m+1}}{K_{2m}} \\ &= \ln \frac{K_2^2}{K_1 K_3} + \dots + \ln \frac{K_{2m}^2}{K_{2m-1} K_{2m+1}} \\ &= \sum_{n=1}^m \ln \frac{K_{2n}^2}{K_{2n-1} K_{2n+1}} \end{aligned}$$

'dir.

$$\begin{aligned} \frac{K_{2n}^2}{K_{2n-1} K_{2n+1}} &= \frac{(4n+3)^2}{16n(n+1)} = \frac{16n^2 + 24n + 9}{16n(n+1)} \\ &> \frac{16n^2 + 16n + 8n}{16n(n+1)} > 1 + \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

'dir. Teorem 1.1. 'den dolayı $x = \frac{1}{2(k+1)}$ için

$$\sum_{k=1}^m \ln \frac{K_{2k}^2}{K_{2k-1} K_{2k+1}} > \sum_{n=1}^m \ln \left(1 + \frac{1}{2(n+1)} \right) > \sum_{n=1}^m \frac{1}{2n+3}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n}$$

serisi ıraksaktır. O halde (1) serisinin yakınsak olması için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ olması yeterli değildir.

BERNSTEIN 'IN KANITLAMASI

Nurettin Ergun

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü, Vezneciler-İSTANBUL

Tüm tamsayıların kümesi $\mathbb{Z}$ 'de "kaç tane" tamsayı vardır? Sonsuz tane! Doğru (ama yetersiz) yanıt. Neden yetersiz? "Kuşkusuz $\mathbb{Z}$ kümesinde, çift tamsayılar kümesindeki tamsayılardan daha fazla sayıda tamsayı vardır." Doğru mu bu? Hayır, yanlış! Gökyüzündeki yıldızların sayısı, Nasrettin Hoca 'nın çilekeş eşeğinin kıllarının sayısından daha mı fazladır? Gerçi şakacı hoca aynı sayıda olduklarını söylemişti. Peki $\mathbb{Z}$ kümesinin ve çift tamsayılar kümesinin eleman sayıları nedir? Tüm irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ile, düzlemde en az bir bileşeni irrasyonel olan gerçel sayı ikililerinin kümesinden (ki biraz dikkat edilirse bunun $(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) \cup ((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R})$ birleşim kümesi olduğunu gözleyebilirsiniz) hangisinde "daha fazla sayıda" eleman vardır; yoksa "eleman sayıları" aynı mıdır? Düzlemde eğimi bir irrasyonel sayı olan "kaç tane" doğru vardır?

Bunları ve benzeri soruları yanıtlamak için, matematik, her zaman yaptığı gibi, kesin ve mutlak biçimde tanımlanmış kavramlara gereksinim duyar. Unutulmasın, koca usta Bertrand Russell 'ın dediği gibi, matematik insanoğlunun geliştirdiği biricik kesin ve mutlak dildir. Sözünü ettiğimiz konuda, matematik, ordinal ve kardinal sayıları ve onlar üzerinde şaşırtıcı özellikleri olan aritmetik işlemleri ve sıralamayı tanımlama başarısını göstermiştir. Kimilerine göre bu, tüm matematik tarihinin en göz kamaştırıcı, en inanılmaz başarılarının önde gelenlerindendir. Biz bu yazıda, Paul Halmos 'un deyimiyle daha "naif" bir yaklaşım içinde olacağız, zorunlu olarak! Ordinal ve kardinal sayıları popüler bir matematik dergisinde ayrıntılı ele almak kolay değildir. Ve biz, bu yazıda, Georg Cantor 'un 1870 'lerin ortasında yaptığı şu temel tanımlamalarla yetinmeğe çalışacağız: Aralarında bire-bir ve örten bir fonksiyon tanımlı iki kümeye eş kuvvette (kabaca söylersek, "aynı sayıda elemana sahipler") denir. Kolayca görülebileceği gibi $k \leftrightarrow 2k$ bire-bir ve örten eşleşmesi sayesinde

$\mathbb{Z}$ ile tüm çift tamsayıların kümesi olan $\mathbb{Z}_0 = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ 'nin eş kuvvette oldukları görülecektir. Peki siz, $\mathbb{Z}$ ile tüm tek sayıların kümesinin eş kuvvette olduklarını gösterebilir misiniz? Çok kolay!

"Aman tanrım, $\mathbb{Z}$ ile tüm pozitif tamsayıların kümesi $\mathbb{N}$ 'nin eş kuvvette olduklarını görüyorum" dediğinizi duyar gibiyim, evet, doğru gözlediniz.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots\}$$

kümesinden $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ kümesine

$$f(n) = 2n + 1, f(-n) = 2n, f(0) = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun bire-bir ve örten olduğunu görmek kolaydır. Peki $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ kümesiyle $\mathbb{N}$ arasında çeşitli bire-bir ve örten fonksiyonlar tanımlamaya ne dersiniz? Peki ya, tüm pozitif tamsayı sıralı ikililerinin kümesi olan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}$ kümesi arasında bire-bir ve örten fonksiyonlar tanımlamaya ne dersiniz? Evet, şaşırmayın bu kümeler eş kuvvettedir.

$$f(n, m) = n + \frac{1}{2}(n + m - 2)(n + m - 1),$$

$$g(n, m) = 2^{m-1}(2n - 1)$$

biçiminde tanımlanan

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

ve

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

fonksiyonlarının ikisi de bu niteliktedir; g ile uğraşmak, görece olarak biraz daha kolaydır. Birincisine Cantor küşegen sayına fonksiyonu denir (bak. Matematik Dünyası, Haziran-Ağustos 1991, 2-6). Cantor bu kavramlarla uğraşırken şu inanılmaz önermeyi kanıtlamağa çalışmıştı:

Ana Önerme: Eğer X kümesinden Y kümesine (örten olması gerekmeyen) bire-bir bir fonksiyon tanımlıysa ve tersine Y kümesinden X kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlıysa, bu iki küme eş kuvvettedir.

Onca çabasına karşın, Cantor bu ilginç ve zorlu önermenin sağlıklı bir kanıtlanmasını veremedi. Bu teoreme, günümüzde, onu ilk kanıtlayan Bernstein 'ın adını da katarak, Cantor-Bernstein

Teoremi adı verilir. Bu yazımızda öncelikle bu güzelim kanıtlamayı size aktarmak istiyoruz. Örneğin yukarıdaki g fonksiyonunun (en azından) bire-bir olduğunu gösterebilen ve kavrama çabası ile okuyan her ilgili okuyucunun bu yazıdan yararlanacağını sanıyoruz. Demek ki küme işlemlerini ve fonksiyon kavramını biliyoruz, öyle değil mi sevgili okurlar! Şimdi öncelikle şu önemli uyarıyla işe başlayalım: Herhangi bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun, her zaman, $A, B \subseteq X$ altkümeleri ne olursa olsun, $f(A - B) = f(A) - f(B)$ eşitliğini gerçeklemesi **gerekmez**. Bakınız aşağıdaki karşıt örnek yeterince uyarıcıdır: Sinüs fonksiyonu, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ biçiminde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ fonksiyonu, örneğin $A = \mathbb{Q}$ ve $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ küme çifti için $f(A - B) \neq f(A) - f(B)$ gerçekler. Dikkat edilirse $r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı ne olursa olsun

$$\begin{aligned} f(r) = \sin r &= \sin(r + 2\pi) \\ &= f(r + 2\pi) \in f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = f(B) \end{aligned}$$

gerçeklenir, çünkü $r + 2\pi$ bir irrasyonel sayıdır, çünkü π bir irrasyonel sayıdır, anımsadık değil mi? O halde

$$f(A) = f(\mathbb{Q}) = \cup(\{f(r)\} : r \in \mathbb{Q}) \subseteq f(B)$$

olduğundan $f(A) - f(B)$ fark kümesi boştur, oysa bu örnekte A ve B ayrık olduklarından $A - B = A$ ve sonuçta $f(A - B) = f(A)$ olur ki bu küme boş değildir ve üstelik "sonsuz elemanlıdır", çünkü r_1 ve r_2 rasyonel sayıları farklı ise, $f(r_1) = \sin r_1$ ve $f(r_2) = \sin r_2$ gerçel sayıları **farklıdır**, neden? Şimdi ise, eğer $f : X \rightarrow Y$ **bire-bir bir fonksiyon ise**, A ve $B \subseteq X$ altkümeleri ne olursa olsun $f(A - B) = f(A) - f(B)$ eşitliğinin gerçekleştiğini gösterelim. Kolayca gözleneceği gibi ayrık kümelerin bire-bir bir fonksiyon altındaki görüntüleri ayrıktır, neden? O halde $f(A - B)$ ile $f(B)$ görüntü kümeleri, f bire-bir ise, ayrıktır ve sonuçta

$$f(A - B) \subseteq f(A) - f(B)$$

kapsaması geçerli olur. Dikkat: Ters sıradaki kapsama her zaman her fonksiyon için zaten geçerlidir, neden? O halde **bire-bir bir fonksiyon altında** bir fark kümesinin görüntüsü, gerçekten, görüntü kümelerinin farkına eşit olmaktadır.

Şimdi Bernstein'ın kanıtlamasını iki aşamada inceleyelim:

Birinci Aşama: "Eğer $X_1 \subseteq Y \subseteq X$ ise, üstelik X_1 ile X kümeleri eş kuvvette ise, Y kümesi ile X kümesi eş kuvvettedir" önermesini kanıtlayalım. Başlıyoruz. Hipotez gereği $f : X \rightarrow X_1$ gibi bire-bir bir f fonksiyonu tanımlıdır. Kanıtlamanın ardından bu fonksiyon üzerine biraz konuşacağız. Şimdi $X_0 = X, Y_0 = Y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$X_n = f(X_{n-1}), Y_n = f(Y_{n-1})$$

tanımlayalım. Tümevarım kullanarak, kolaylıkla

$$X_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq X_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gösterebiliriz. Hipotez gereği

$$X_1 \subseteq Y = Y_0 \subseteq X = X_0$$

olduğundan, $n = 1$ için geçerli olan bu kapsamalar eğer n doğal sayısı için geçerliyse, f altındaki görüntüleri

$$X_{n+1} = f(X_n) \subseteq f(Y_{n-1}) = Y_n \subseteq f(X_{n-1}) = X_n$$

gerçekleyecektir ve iddia $n + 1$ doğal sayısı için de geçerli olacaktır. Üstelik $X_n - Y_n$ fark kümeleri ikiye ayrılmıştır, çünkü $n \neq m$ ise,

$$(X_n - Y_n) \cap (X_m - Y_m) = \emptyset$$

geçerlidir; gerçekten, örneğin $n < m$ ise, $n + 1 \leq m$ olur ve $X_m \subseteq X_{n+1}$ nedeniyle bu kesişim kümesi, kolayca görüleceği gibi,

$$X_m - Y_n \subseteq X_{n+1} - Y_n = \emptyset$$

tarafından kapsanır. Neden? Yani boş olur. Şimdi de

$$X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n) = Y - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) \quad (1)$$

gözleyelim. Gerçekten sol yan

$$= X - [(X_0 - Y_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n - Y_n)]$$

$$= (X - (X_0 - Y_0)) \cap (X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n - Y_n))$$

olup, $X_0 = X$ ve

$$X - (X_0 - Y_0) = X - (X - Y) = Y$$

geçerli olacağından, bu son küme, gerekli indis değişikliği ile

$$\begin{aligned} Y \cap (X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1})) \\ = (Y \cap X) - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $Y \subseteq X$ nedeniyle geçerli olan $Y \cap X = Y$ eşitliği bize sonuçta (1) eşitliğini verir. Üstelik $Y_1 = Y_{2-1} \subseteq X_{2-1} = X_1 \subseteq Y$ ve $n \geq 2$ için tümevarımla $Y_n \subseteq X_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y$ nedeniyle tüm Y_n (ve $X_n (n \geq 1)$) altkümelerinin Y tarafından kapsandığı bellidir. O halde

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} X_{n+1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n \subseteq Y$$

nedeniyle

$$Y \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) = Y \quad (2)$$

geçerli olur. $B \subseteq A$ ise, $A \cup B = A$ olduğunu anımsadık, değil mi? Şimdi artık X ve Y kümeleri arasında, bire-bir ve örten olduğunu göstereceğimiz $g : X \rightarrow Y$;

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n) \\ x & ; x \in X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n) \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Dikkat edilirse, eğer $x \in X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)$ ise, (1) nedeniyle $g(x) = x \in Y$ dir, yok eğer $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)$ ise, $g(x) = f(x)$ elemanı yine

$$\begin{aligned} f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)\right) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} f(X_n - Y_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} (f(X_n) - f(Y_n)) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) \subseteq Y \end{aligned}$$

kümesinin elemanı olur. (*) eşitliğini yazarken f fonksiyonunun bire-bir olduğunu anımsadık. Demek ki g fonksiyonu her bir $x \in X$ elemanına Y kümesinde bir eleman eşleştirmektedir. Peki g fonksiyonu örten midir? Evet! Çünkü

$$g(X) = g\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n) \cup \left(X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)\right)\right]$$

$$\begin{aligned} &= g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)\right) \cup g\left(X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)\right) \\ &= f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)\right) \cup \left(X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)\right) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) \cup \left(Y - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1})\right) \\ &= Y \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) = Y \end{aligned}$$

bulunur; burada en son aşamaya geçerken $A \cup (B - A) = A \cup B$ özdeşliği ve son adımda ise (2) kullanıldı. Demek ki $g(X) = Y$ olmaktadır yani Y kümesindeki her bir eleman X kümesindeki uygun bir elemanın görüntüsüdür, bu ise g 'nin örten olması demektir.

Şimdi de $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) için $g(x_1) \neq g(x_2)$ gerçeklendiğini, kısacası g 'nin bire-bir olduğunu gözleyelim. Çeşitli durumları irdelemeliyiz. Eğer

$$x_1 \in E_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n),$$

$$x_2 \in E_2 = X - E_1 = X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)$$

ise, uygun bir $0 \leq n_0$ sayesinde $x_1 \in X_{n_0} - Y_{n_0}$ ve sonuçta, yine f in bire-bir oluşundan yararlanarak,

$g(x_1) = f(x_1) \in f(X_{n_0} - Y_{n_0}) = f(X_{n_0}) - f(Y_{n_0}) = X_{n_0+1} - Y_{n_0+1} \subseteq E_1$ ve $g(x_2) = x_2 \in E_2$ bulunur; E_1 ve E_2 ayrık olduklarından $g(x_1)$, $g(x_2)$ elemanları zorunlu olarak farklıdır. Eğer $x_1, x_2 \in E_2$ ise, bu kez $g(x_1) = x_1$ ve $g(x_2) = x_2$ elemanlarının farklı oldukları apaçıktır. Peki ya $x_1, x_2 \in E_1$ için neden $g(x_1) \neq g(x_2)$ olur, kolayca gözlemliyorsunuz değil mi? Evet tüm durumları irdeledik, demek ki g gerçekten bire-bir ve örten dir. Birinci önermenin kanıtlaması bitmiştir ama bu kez de son ve sonuç alıcı aşamaya geldik:

Sonuç Aşaması : Eğer $h : X \rightarrow Y$ ve $h' : Y \rightarrow X$ bire-bir fonksiyonları tanımlıysa, X ve Y kümeleri eş kuvvettendir. Evet, gerçekten $h(X) \subseteq Y$ olduğundan sonuçta $X_1 = h'(h(X))$ alınır (ya da daha yerinde bir deyimle, birinci aşamadaki X_1 kümesi olarak bu kez $h'(h(X))$ alınır) $X_1 \subseteq h'(Y) \subseteq X$ kapsamaları geçerli

olur ve üstelik h bire-bir olduğundan, $x \leftrightarrow h(x)$ eşlemesi sayesinde $h(X)$ ile X kümeleri eş kuvvette olurlar, ve dolayısıyla benzer gerekçeyle h' bire-bir olduğundan $X_1 = h'(h(X))$ kümesi, $h(X)$ kümesiyle ve dolayısıyla X kümesiyle eş kuvvettedir; çünkü bileşkeleri tanımlanabilen iki tane bire-bir ve örten fonksiyonun bileşkesi de bire-bir ve örtendir. Sonuçta birinci önerme nedeniyle $h'(Y)$ ile X eş kuvvette olurlar, oysa Y kümesi $h'(Y)$ ile eş kuvvettedir; dolayısıyla Y ile X kümeleri eş kuvvette olurlar. Sonuç aşamasının (yani ana önermenin, başka bir deyimle Cantor-Bernstein Teoreminin) kanıtlaması bitmiştir.

Uyarı ve Uygulama: Şimdi bu önemli teoremin küçük ama önemli bir uygulamasını görelim. Ama önce bir sözümüzü yerine getirelim. Birinci aşamada, tüm bu aşamanın kanıtlanması sırasında kullandığımız $f : X \rightarrow X_1$ fonksiyonu üzerine, kanıtlamanın ardından konuşacağız demistik. Dikkatli okurun gözünden kaçmamıştır: Bu fonksiyonun örtenlik özelliğinden hiç yararlanmadık, zaten f fonksiyonunun örten olduğu vurgulanmamıştı. Dikkat edilirse birinci aşamanın kanıtlanması sırasında f 'in bire-bir oluşu yeterli olmuştur. Dolayısıyla aslında birinci aşamada kanıtlanan şu olmuştur: "Eğer X kümesinden bir X_1 altkümüne tanımlı bir bire-bir fonksiyon varsa X kümesi X_1 ile (ve aslında X_1 altkümelerini kapsayan tüm altkümeleriyle) eş kuvvette olur." Peki bu yeni önerme, sonuç aşamasının kanıtlanabilmesi için yeterli bir bilgi midir? Dikkatli okurlar hemen yanıtlayacaklardır: Evet! Neden dersiniz? Sözü artık fazla uzatmadan önemli uygulamamıza geçelim. Şunu kanıtlayacağız: N kümesiyle, onun tüm sonlu elemanlı altkümelerinin kümesi $\mathcal{A}(N)$ eş kuvvettedir. Öncelikle N ile, onun iki elemanlı altkümelerinin kümesi olan

$$\mathcal{P}_2(N) = \{\{n, m\} : n, m \in N, n \neq m\}$$

'nin eş kuvvette olduklarını gösterelim. $\{n, m\}$ kümesine, birinci bileşeni, bu farklı doğal sayıların en küçüğü, ikinci bileşeni ise en büyüğü olan sıralı ikiliye gönderen eşleştirme (örneğin $\{1, 3\} \rightarrow (1, 3)$ gerçekleyen eşleştirme) apaçıktır ki bire-birdir. O halde $\mathcal{P}_2(N)$ kümesinden $N \times N$ kümesine (ve dolayısıyla N kümesine) tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. Öte yandan $n \rightarrow \{n, n+1\}$ eşleştirmesi de N kümesinden $\mathcal{P}_2(N)$ kümesine tanımlanmış bir bire-bir fonksiyon-

dur. O halde Cantor-Bernstein Teoremi nedeniyle N ile $\mathcal{P}_2(N)$ eş kuvvettedir. Peki N kümesinin tüm 3 elemanlı altkümelerinin kümesi $\mathcal{P}_3(N)$ ile N neden eş kuvvettedir? Gerçekten, her n doğal sayısına $\{n, n+1, n+2\}$ üç elemanlı kümesini eşleştiren fonksiyon N 'den $\mathcal{P}_3(N)$ kümesine tanımlanmış bir bire-bir fonksiyondur; öte yandan $\{n_1, n_2, n_3\}$ üç farklı doğal sayının oluşturduğu kümesine $(2^{n_1-1}(2n_2-1), n_3)$ sıralı ikilisini eşleştiren fonksiyon göstermektedir ki $\mathcal{P}_3(N)$ 'den $N \times N$ kümesine ve dolayısıyla N kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. O halde yine Cantor-Bernstein Teoremi yardımıyla N ile $\mathcal{P}_3(N)$ kümelerinin eş kuvvette olduğu anlaşılır. Genel olarak $\mathcal{P}_n(N)$,

$$N^n = N \times N \times \dots \times N \quad (n \text{ tane çarpım})$$

ve N kümelerinin eş kuvvette olduklarını, okuyucu, sanırız Cantor-Bernstein Teoremi yardımıyla gösterebilecektir. Dikkat edilirse $\mathcal{P}_n(N)$ ile $\mathcal{P}_m(N)$ kümeleri, $n \neq m$ ise ayrık tırlar. Bu önemli ayrıntı sayesinde, herhangi bir

$$A \in \mathcal{A}(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(N)$$

"elemanı" tek türlü belirli bir $\mathcal{P}_n(N)$ kümesine ait olabileceğinden, $\varphi(A) = (n, h_n(A))$ şeklinde tanımlanan

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow N \times N$$

fonksiyonu kolayca gözlemlenebileceği gibi bire-birdir; burada her $n \in N$ için h_n bire-bir fonksiyonu $\mathcal{P}_n(N)$ 'den N kümesine tanımlıdır, böyle bir fonksiyonun varlığı az önce vurgulanmıştı. O halde $\mathcal{A}$ kümesinden N kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlıdır. $n \rightarrow \{n\}$ eşleştirmesi ise, apaçıktır ki, N 'den $\mathcal{A}$ kümesi "içine" bire-birdir. O halde, yine, Cantor-Bernstein Teoreminin bir sonucu olarak N ile $\mathcal{A}$ eş kuvvette olurlar. Evet bitti.

Bir X kümesinin bir Y kümesinden "daha az elemanlı" olması ve benzeri kavramlar için, Cantor köşegen sayma fonksiyonunun ayrıntılı ele alınışı için, elinizde tuttuğunuz derginin 1991 yılı Haziran-Ağustos sayısına bakınız sevgili okurlar. Umarım yazının başında sorulan tüm soruları artık yanıtlayabilirsiniz. İyi çalışmalar!

SAYILARIN SİHİRLİ DÜNYASINDA "PİSAGOR TEOREMİ" İLE BİR GEZİNTİ

Dursun Çalışkan
Matematik Öğretmeni

İnsanoğlu önce doğal, sonra tam, daha sonra rasyonel sayıları tanıdı. Pisagor; "Dik Üçgende Pisagor Teoremi" olarak bilinen, "Bir dik üçgenin dik kenar uzunluklarının karesinin toplamı hipotenüsünün uzunluğunun karesine eşittir" teoremini iddia edip ispatladığında irrasyonel sayıların varlığı henüz bilinmiyordu. Bundan dolayı, irrasyonel sayıların varlığı bilinene kadar pek çok matematikçi kenar uzunlukları pozitif tamsayı olan dik üçgenler üzerinde çalıştı. Bu yazıda biz x , y ve z pozitif tamsayıları bir dik üçgenin kenar uzunlukları ise, (x, y, z) üçlüsüne "Pisagor üçlüsü" diyeceğiz ve Pisagor üçlülerini inceleyeceğiz.

Milattan önce yaklaşık 1700 yıllarına ait bir Babil tabletinde bazı Pisagor üçlülerinin listesi bulundu, bunların bazıları büyük sayılar da içeriyordu. Fakat sonsuz sayıda Pisagor üçlüsünü veren bir metot gösteren ilk kişi Pisagor'dur. Modern matematik dili ile Pisagor'un bu metodunu şu şekilde ifade edebiliriz: " $n \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $x = n$, $y = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ve $z = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlüsü bir Pisagor üçlüsüdür."

x	y	z
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61

(Tablo 1)

Burada dikkat edilecek olursa $z = y + 1$ 'dir. Pisagor bu metotla bir taraftan sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü olduğunu gösterirken, diğer taraftan hipotenüsü bir dik kenarından 1 fazla olan sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü olduğunu göstermiştir (bak. Tablo 1). " $z = y + 1$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülere bu metotla elde edilebilir mi?" sorusunun cevabını araştırmayı okuyucuya bırakıyoruz.

Aslında Pisagor üçlülerinin sonsuz sayıda olduğunu daha basit şekilde görmek olaklı, şöyle ki: $(3, 4, 5)$ bir Pisagor üçlüsüdür. Bütün $k \geq 1$ tamsayıları için $(3k, 4k, 5k)$ bir Pisagor üçlüsüdür. Bu şekilde her Pisagor üçlüsünden sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü türetilir.

Plato (M. Ö. 430-349), $z = y + 2$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y, z) Pisagor üçlüsünün var olduğunu gösteren bir metot buldu. (Burada ve bundan sonra z hipotenüsün uzunluğu olarak alınacaktır.) Modern matematik dili ile bu şöyle ifade edilebilir: " $n \neq 0$ bir doğal sayı olmak üzere $x = 4n$, $y = 4n^2 - 1$ ve $z = 4n^2 + 1$ olacak şekilde tanımlanan (x, y, z) üçlüsü, $z = y + 2$ şartını sağlayan bir Pisagor üçlüsüdür" (bak. Tablo 2).

Acaba Plato'nun verdiği bu metotla $z = y + 2$ koşulunu sağlayan bütün (x, y, z) Pisagor üçlülere elde edilebilir mi? Cevap: Hayır. Örneğin, $x = 6$, $y = 8$ ve $z = 10$ iken (x, y, z) , $z = y + 2$ koşulunu sağlayan bir Pisagor üçlüsüdür. Her n pozitif tamsayısı için $4n^2 + 1 \neq 10$ olduğundan bu üçlü yukarıda belirtilen metot ile elde edilemez. Şimdi biz $z = y + 2$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülerini veren bir metot araştıralım.

x , y ve z $z = y + 2$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere (x, y, z) bir Pisagor üçlüsü olsun. $z^2 = y^2 + x^2$ ve $z = y + 2$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow z^2 - y^2 &= x^2 \\ \Rightarrow (z - y)(z + y) &= x^2 \\ \Rightarrow 2(2y + 2) &= x^2 \\ \Rightarrow 4(y + 1) &= x^2. \end{aligned}$$

Burada x bir çift sayı olmalıdır. $n \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere; $x = 2n$ yazarsak; $y + 1 = n^2 \Rightarrow y = n^2 - 1$ ve $z = n^2 + 1$ elde edilir. Öyle ise; $n \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere; $x = 2n$, $y = n^2 - 1$ ve $z = n^2 + 1$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlülere $z = y + 2$ şartını sağlayan bütün Pisagor üçlüleridir (bak. Tablo 3).

x	y	z
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
20	99	101

(Tablo 2)

x	y	z
4	3	5
6	8	10
8	15	17
10	24	26
12	35	37

(Tablo 3)

Benzer şekilde $z = y + 3$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülerinin; $n > 1$ bir pozitif tek sayı olmak üzere, $z = \frac{3}{2}(n^2 + 1)$, $y = \frac{3}{2}(n^2 - 1)$ ve $x = 3n$ şeklinde tanımlanan bir metotla elde edilebileceği gösterilebilir (bak. Tablo 4).

x	y	z
9	12	15
15	36	39
21	72	75
27	120	123
33	180	183

(Tablo 4)

Şimdi k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $z = y + k$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y, z) Pisagor üçlüsünün var olduğunu gösterelim.

$n > 1$ bir tek sayı olmak üzere $z = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, $y = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ve $x = n$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlülerinin $z = y + 1$ koşulunu sağlayan Pisagor üçlülere olduğunu biliyoruz. Yani önerme $k = 1$ için doğrudur. Burada tanımlanan üçlünün her bileşenini k ile çarptığımızda elde edilen üçlünün de bir Pisagor üçlüsü olduğu açıktır. O halde, $n > 1$ bir tek sayı olmak üzere, bütün pozitif k tamsayıları için $x = k.n$, $y = \frac{k}{2}(n^2 - 1)$ ve $z = \frac{k}{2}(n^2 + 1)$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlüsü $z = y + k$ şartını sağlayan bir Pisagor üçlüsüdür. Öyleyse, bütün pozitif k tamsayıları için $z = y + k$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y, z) Pisagor üçlüsüdür vardır.

Burada insanın aklına şu soru geliyor: Bütün k pozitif tamsayıları için $n > 1$ bir tek sayı olmak üzere, $x = kn$, $y = \frac{k}{2}(n^2 - 1)$ ve $z = \frac{k}{2}(n^2 + 1)$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlülere $z = y + k$ şeklindeki bütün Pisagor üçlülere midir? Cevabın hayır olduğunu belirterek sebebini araştırmayı okuyucuya bırakıyoruz. Fakat bazı k değerleri için (hangi k değerleri?) cevap evet 'tir. (Tablo 1 ve Tablo 4 'ü karşılaştırınız.)

Buraya kadar Pisagor üçlülerinin sayısının sonsuz olduğunu iliklerimize kadar hissettik, hatta özel Pisagor üçlülere uğraştık ve üstelik yukarıdaki metotla k ve n 'nin değişen değerleri için hemen hemen Pisagor üçlülerinin bütünü veren bir formüle ulaştık. Şimdi ise Öklit' in "Elementler" 'inde bile bulunan (kitap VII, IX ve X) daha genel ve daha kullanışlı bir teoremden bahsedeceğiz.

Teoremi ifade etmeden önce, x , y ve z ikiyeşli aralarında asal tamsayılar olacak şekilde (x, y, z) Pisagor üçlüsüne temel Pisagor üçlüsü diyeceğimizi ifade edelim.

Teorem. (x, y, z) 'nin bir temel Pisagor üçlüsü olması için gerek ve yeter koşul $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ ve $z = m^2 + n^2$ olacak şekilde, aralarında asal m ve n pozitif tamsayıları olmasıdır.

İspat. (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsü olsun. x , y ve z 'nin her üçünün de tek sayı olmayacağı açıktır. İkiyeşli aralarında asal olduklarından herhangi ikisi çift olamaz. z 'nin çift olması durumunda $x^2 + y^2 = z^2$ ifadesinde sağ taraf 4 ile bölünürken sol taraf 4 ile bölündüğünde 2 kalanını vereceğinden z her durumda tek olmalıdır. Genelliği bozmadan diğer tek bileşenin y olduğunu kabul edelim.

Önce

$$((y, z) = 1 \text{ ise, } (\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}) = 1 \text{ 'dir} \quad (i)$$

önermesini ispatlayalım. $((y, z) = 1$ demek şu anlamagelir: y ve z sayılarının obab'i, 1 'dir, diğer bir deyişle y ve z aralarında asaldır.)

$$(y, z) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ öyle ki, } a.y + b.z = 1$$

$$\Rightarrow (b-a)\frac{z-y}{2} + (b+a)\frac{z+y}{2} = 1.$$

$b-a$ ve $b+a \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$$(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}) = 1$$

'dir.

x çift sayı olduğundan $x = 2k$ yazabiliriz. Öyle ise,

$$z^2 - y^2 = 4k^2 \Rightarrow (z-y)(z+y) = 4k^2$$

$$\Rightarrow \frac{z-y}{2} \cdot \frac{z+y}{2} = k^2 \quad (ii)$$

(i) ve (ii) 'ye göre $\frac{z-y}{2}$ ve $\frac{z+y}{2}$ 'nin her ikisi de tamkaredir. Yani $\frac{z+y}{2} = m^2$ ve $\frac{z-y}{2} = n^2$ olacak şekilde n ve m pozitif tamsayıları vardır. (i) 'ye göre $(n, m) = 1$ 'dir. O halde, $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ ve $z = m^2 + n^2$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tamsayıları vardır.

Şimdi de $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ ve $z = m^2 + n^2$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tamsayılarının var olduğunu kabul edelim. $2mn$, $m^2 - n^2$ ve $m^2 + n^2$ sayılarının ikişerli aralarında asal oldukları açıktır.

$$(m^2 + n^2)^2 = (n^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

olduğundan $x^2 + y^2 = z^2$ 'dir.

O halde, (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsüdür.

Bu teoremden şu sonuçları çıkarabiliriz: x bir çift sayı olmak üzere (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsü ise,

(i) $\frac{z-y}{2}$ ve $\frac{z+y}{2}$ 'nin her ikisi de tamkaredir.

(ii) $z + x$ bir tamkaredir.

Şimdi bu teoremin uygulamalarını örneklerle göstereyim:

Örnek 1. Bir bileşeni 1997 olan bütün Pisagor üçlülerini bulunuz.

Çözüm. $y = 1997$ ya da $z = 1997$ 'dir. $y = 1997$ ise, $z^2 - x^2 = 1997^2 \Rightarrow (z - x)(z + x) = 3988009$.

1997 bir asal sayı olduğundan,

$z - x = 1$ ve $z + x = 3988009 \Rightarrow z = 1994005$ ve $x = 1994004$ olur.

$z = 1997$ ise, 1997 bir asal sayı olduğundan (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsüdür. Öyle ise, $x + z$ bir tamkaredir. $1 \leq x < z = 1997$ ve x bir çift sayı olduğundan, $1999 \leq x + z \leq 3993$ ve $x + z$ bir tek sayıdır. O halde $x + z$; $45^2, 47^2, 49^2, 51^2, 53^2, 55^2, 57^2, 59^2, 61^2$ ve 63^2 sayılarından biri olabilir. Bu sayıları denediğimizde $x + z = 3969 (= 63^2)$, yani $x = 1972$ bulunur. Bu durumda $y = 315$ olur.

Aranan üçlüler; $(1972, 315, 1997)$ ve $(1994004, 1997, 1994005)$ 'dir.

Örnek 2. $2k^2 + 2k + 1$ bir tamkare olacak şekilde, 4 tane pozitif k tamsayısı bulunuz.

Çözüm. İfadeyi düzenlersek $k^2 + (k + 1)^2$ elde edilir. İlk iki bileşeninin farkı 1 olan Pisagor

üçlülerinin sorunun koşulunu sağlar. Bu üçlüler temel Pisagor üçlüsüdür (Niçin?). Öyle ise $\exists m, n \in \mathbb{Z}^+$, $(m, n) = 1$, $x = 2mn$ ve $y = m^2 - n^2$ 'dir. Burada $|x - y| = 1$ olduğundan biz $m^2 - n^2 - 2mn = \mp 1$ denkleminin 4 tane pozitif tamsayı çözümünü bulmalıyız. Bu denklemi $(m - n)^2 = \mp 1 + 2n^2$ şeklinde ifade edebiliriz. n 'ye değer verdiğimizde $n = 1, 2, 5$ ve 12 için denklemin sağlandığı görülür.

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ ise, } m = 2 \text{ ve } k = 3 \\ n = 2 \text{ ise, } m = 5 \text{ ve } k = 20 \\ n = 5 \text{ ise, } m = 12 \text{ ve } k = 119 \\ n = 12 \text{ ise, } m = 29 \text{ ve } k = 696 \end{aligned}$$

bulunur. Öyle ise k ; 3, 20, 119, 696 değerlerinden birini aldığı anda $2k^2 + 2k + 1$ bir tamkaredir.

Örnek 3. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ | x^2 + y^2 = z^2, z \leq 100 \text{ ve } (x, y) = 1\}$ kümesi veriliyor. A kümesi kaç elemanlıdır?

Çözüm. A kümesinin tanımına göre, (x, y, z) üçlülerinin temel Pisagor üçlüleridir. $B = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ | m > n, m^2 + n^2 \leq 100 \text{ ve } (m, n) = 1\}$ kümesini tanımlayalım. A 'nın eleman sayısı B 'nin eleman sayısının iki katıdır (Niçin?). B 'nin eleman sayısını bulalım.

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 \leq 100 &\Rightarrow 2n^2 < 100 \\ &\Rightarrow n^2 < 50 \\ &\Rightarrow n \leq 7 \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 1 + m^2 \leq m^2 + n^2 \leq 100 &\Rightarrow m^2 \leq 99 \\ &\Rightarrow m \leq 9 \text{ 'dur.} \end{aligned}$$

$(n, m) = 1$, $m > n$ ve $m^2 + n^2 \leq 100$ olduğunu gözönünde bulundurduğumuzda,

$n = 1$ iken m , 8 değer $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ alabilir,
 $n = 2$ iken m , 4 değer $(3, 5, 7, 9)$ alabilir,
 $n = 3$ iken m , 4 değer $(4, 5, 7, 8)$ alabilir,
 $n = 4$ iken m , 3 değer $(5, 7, 9)$ alabilir,
 $n = 5$ iken m , 3 değer $(6, 7, 8)$ alabilir,
 $n = 6$ iken m , 1 değer (7) alabilir,
 $n = 7$ iken m hiç bir değer alamaz.

Öyle ise B 'nin eleman sayısı 23 ve A 'nın eleman sayısı 46 'dır.

Örnek 4. (x, y, z) bir Pisagor üçlüsü ise, x, y, z çarpımının 60 ile bölündüğünü ispatlayınız.

Çözüm. Önermenin doğruluğunu temel Pisagor üçlülere için göstermek yeterlidir (Niçin?).

(x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsü olsun. $z = m^2 + n^2$, $y = m^2 - n^2$ ve $x = 2mn$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tamsayıları vardır. z ve y tek sayı olduklarından m ve n sayılarından biri çifttir. Dolayısıyla $2mn$, yani x , 4 ile bölünür. m ve n sayılarından biri 3 ile bölünürse, x ; değilse, m^2 ve n^2 'nin her ikisi de 3 ile bölündüğünde 1 kalanını verdiklerinden y , 3 ile bölünür. m ve n sayılarından biri 5 ile bölünürse, x ; değil ise, 5 ile bölünmeyen bir sayının karesinin 5 ile bölümünden kalan 1 ya da 4 olduğundan, y ya da z , 5 ile bölünür. Öyle ise her durumda $x.y.z$ çarpımı $4.3.5 = 60$ ile bölünür.

Örnek 5. x , y ve z pozitif reel sayılar olmak üzere, $x + y + z = 1$ 'dir.

$$\frac{(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2}{xy + xz + yz} \geq 16$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. x, y ve z pozitif olduğundan,

$$2x(y+z) \leq \left(\frac{2x+y+z}{2}\right)^2,$$

$$2y(x+z) \leq \left(\frac{2y+x+z}{2}\right)^2,$$

$$2z(x+y) \leq \left(\frac{2z+x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$4(xy + xz + yz) \leq \frac{1}{4}[(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2]$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2}{xy + xz + yz} \geq 16$$

bulunur.

Sorular :

1. $x^2 - 2y^2 = -1$ olacak şekilde 5 tane pozitif (x, y) tamsayı ikilisi bulunuz.
2. $x + y + z = 854$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülerini bulunuz.
3. Hipotenüsünün uzunluğu 1999 ve bütün kenarlarının uzunluğu tamsayı olan bir dik üçgen olup olmadığını araştırınız.

* * *



DÜŞÜNME KULESİ Doç. Dr. Selçuk Alsan 'ın beyin takımı için zekâ ve mantık problemleri. 1996 'da Sarmal Yayınevinde 2. baskı. 300 sayfa, 434 sorulu-yanıtlı problem: Asılan Adam Paradoksu, Matematikte Sonsuz, Fibonacci Sayıları, Steiner En Kısa Yol Problemi, Dâhiler Satrancı, Satranç Tahtasında Matematik,... M. Gardner, H. Dudeney, S. Lloyd, P. Berloquin 'den 'Kvant' dergisinden,... çeşitli kafa patlatıcı problemler.

MATEMATİKA

Selçuk Alsan

TÜBİTAK, Kavaklıdere, 06100-ANKARA

Sonunda cenneti buldum dostlarım,
Onsuz sayfalar boş, kalemler yarım,
Şimdi ak kağıda kara formül yazarım,
Bu cennet Matematika.

Akil sıratını aşabildinse eğer,
Orada sonsuza dek kalmana değer,
Orada zümrüttür tümdengelimler,
Hayaller altın olur aka aka.

Dünyaya neden geldim, biliyorum artık,
Sonsuz bilinmeyenli bir denklem varlık,
Canlılar sonlu, madde karanlık,
Kendini yaratan tek enerji zekâ.

Ölümün değil hayatın türeğinde varım,
Tanrılara varmaktan yücedir tümevarım,
Hurili köşk istemem, çokgenlerde yaşarım,
Parası bol değil parabol şu sonsuz patika.

Hamilton! Dördeylemlerle dönüyor başım,
Abel! Entegrallerinde bir "invariant" 'tı yaşım,
Galile! Yörüngelerde günberisi yanıışım,
Usa yabancı yaşam en büyük kaotika.

Aldatmayan bir tek sen varsın bizi,
Ne zaman büyük hiçlik burksa kalbimizi,
Bir avunç ufukta her sonsuz dizi.

Batan gemimizde en son filika,
İnsanlığın onuru Matematika.

3/9/1998

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 500.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3,4
Cilt 2	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 3	Sayı: 5
Cilt 4	Sayı: 1,3,4,5
Cilt 5	Sayı: 1,5
Cilt 6	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- * Konu sunuşları.
- * Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- * Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- * Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- * Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- * Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- * Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

$z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1$ POLİNOMUNUN İLGİNÇ BİR ÖZELLİĞİ

Sofia Ostrovska

Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 35100-İZMİR

Bu yazımızda, başlıkta geçen ve “siklotomik polinom” diye adlandırılan polinomlar hakkında ilginç bir teoremin ispatını vereceğiz. Oldukça basit ve güzel olan bu teorem aynı zamanda az bilinmektedir. Çünkü olasılık teorisinin çok özel bir dalında bulunur ([1]). Bu dala “rasgele değişkenlerin ve vektörlerin parçalanması” denir.

Problemin içeriği şöyledir: $P_n(z) = 1 + z + \dots + z^n$, bir *siklotomik* polinom olsun. Hangi n 'ler için, $P_n(z)$ polinomu, $Q(z)$ ve $R(Z)$ sabitten farklı, katsayıları negatif olmayan polinomlar olmak üzere, $P_n(z) = Q(z)R(z)$ şeklinde gösterilebilir?

Fransız matematikçi *Mark Krasner* ve Rus matematikçi *Dmitriy Raikov*, 1937 yılında birbirlerinden habersiz, bu problemin çözümünü bulmuşlardır. Gerek ve yeter koşul $(n+1)$ sayısının bir bileşik sayı olmasıdır (yani, asal sayı olmamasıdır).

Bu yazıda **Krasner-Raikov Teoreminin** tam kanıtını vereceğiz.

Önce siklotomik polinomların bazı özelliklerini inceleyelim:

Özellik 1.

$$P_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Kanıt. $P_n(z)(1 - z)$ çarpımını hesaplarsak, $(1 + z + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$ elde edilir.

Özellik 2. $P_n(z)$ siklotomik polinomunun kökleri

$$\zeta_1 = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}, \zeta_2 = e^{i\frac{4\pi}{n+1}}, \dots, \zeta_n = e^{i\frac{2\pi n}{n+1}} \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $1 - z^{n+1}$ polinomunun köklerinin 1 'in $(n+1)$. dereceden tüm kökleri olduğu iyi bilinmektedir. Demek ki, $z^{n+1} - 1 = (z - 1)(z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_n)$ 'dir. Özellik 1 'den $P_n(z) = (z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_n)$ elde edilir. Böylece $P_n(z)$ polinomunun tüm kökleri $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ 'dir.

Bundan dolayı, $P_n(z)$ siklotomik polinomunun tüm kökleri, 1 'in 1 'den farklı $(n+1)$. dereceden kökleri olur.

Özellik 3. Eğer ζ , $P_n(z)$ siklotomik polinomunun kökü ise, $\frac{1}{\zeta}$ de $P_n(z)$ 'nin kökü olur.

Kanıt. Eğer $P_n(\zeta) = 0$ ise, $P_n(\frac{1}{\zeta}) = 1 + \frac{1}{\zeta} + \dots + \frac{1}{\zeta^n} = \frac{P_n(\zeta)}{\zeta^n} = 0$ eşitliğini kolayca görürüz.

Son özellik bütün *simetrik polinomlar* için geçerlidir.

Tanım. $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ($a_n \neq 0$), bir polinom olsun. Eğer her $j = 0, \dots, n$ için $a_{n-j} = a_j$ ise, $f(z)$ 'ye *simetrik* bir polinom denir.

Örneğin, $f(z) = 1 + 5z + z^2$, $f(z) = 4 + 3z + 3z^2 + 4z^3$ ve $f(z) = 1 + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}z^2 + \dots + \binom{n}{n-1}z^{n-1} + z^n$ simetrik polinomlardır.

Simetrik polinomlara ait bazı önermelere bakalım:

Önerme 1. $f(z)$ simetrik bir polinom olsun. Eğer ζ bu polinomun kökü ise, $\frac{1}{\zeta}$ de $f(z)$ 'nin kökü olur.

Kanıt. Eğer $f(z)$ simetrik bir polinom ise, $f(\frac{1}{z}) = \frac{f(z)}{z^n}$ olur. Buradan $f(\zeta) = 0$ ise, $f(\frac{1}{\zeta}) = 0$ olduğu kolayca elde edilir.

Önerme 2. Simetrik polinomların çarpımı da simetrik polinomdur.

Kanıt.

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{l-1}z^{l-1} + a_lz^l \quad (a_l \neq 0),$$

$$g(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m \quad (b_m \neq 0),$$

simetrik polinomlar olsun, yani $a_j = a_{l-j}$ ($j = 0, 1, \dots, l$) $b_k = b_{m-k}$ ($k = 0, 1, \dots, m$).

$l \leq m$ olduğunu kabul edelim.

$$f(z)g(z) = (a_0 + a_1z + \dots + a_{l-1}z^{l-1} + a_lz^l)(b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m)$$

çarpımına bakalım ve z^i , z^{l+m-i} 'nin katsayılarını bulalım.

Önce $0 \leq i \leq l$ olsun. z^i 'nin katsayısı $a_ib_0 + \dots + a_0b_i$ 'dir ve z^{l+m-i} 'nin katsayısı $a_{l-i}b_m + \dots + a_lb_{m-i} = a_ib_0 + \dots + a_0b_i$ 'dir. Buna göre $0 \leq i \leq l$ için z^i ve z^{l+m-i} 'nin katsayıları eşittir.

Aynı şekilde $l+1 \leq i \leq m$ için önermeyi kanıtlayabiliriz.

Önerme 3. $f(z)$ bir polinom ve $f(1) \neq 0$ olsun. $f(z)$ polinomunun her ζ karmaşık kökü için $\frac{1}{\zeta}$ da $f(z)$ 'nin aynı katlı kökü olsun. Bu durumda $f(z)$ simetrik bir polinomdur.

Kanıt. Verilen şartlar altında $f(z)$ polinomu

$$f(z) = (z+1)^{r_0}(z-\zeta_1)^{r_1}(z-\frac{1}{\zeta_1})^{r_1} \dots (z-\zeta_k)^{r_k}(z-\frac{1}{\zeta_k})^{r_k}$$

şeklinde yazılabilir, burada $r_0 \geq 0, r_1, \dots, r_k > 0$ tamsayıları köklerin katlarıdır. Böylece $f(z) = (z+1)^{r_0}p_1^{r_1}(z) \dots p_k^{r_k}(z)$, burada

$$p_j(z) = (z-\zeta_j)\left(z-\frac{1}{\zeta_j}\right) = z^2 - \left(\zeta_j + \frac{1}{\zeta_j}\right)z + 1 \quad (j = 1, \dots, k)$$

'dır. $(z+1)$ ve tüm $p_j(z)$ ($j = 1, \dots, k$) 'lerin simetrik polinomlar oldukları kolayca görülür. Önerme 2 'ye göre $f(z)$, simetrik polinomların çarpımı olarak, kendisi de simetriktir.

Şimdi siklotomik polinomunun çarpanlarının bulunması problemine dönelim ve aşağıdaki temel teoremi inceleyelim:

Teorem 1 (Krasner-Raikov Teoremi). Bir $P_n(z) = 1 + z + \dots + z^n$ siklotomik polinomunun,

$$Q(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_l z^l,$$

$$R(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_m z^m$$

ve $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $a_l b_m \neq 0$ olmak üzere $P_n(z) = Q(z)R(z)$ şeklinde gösterilebileceğini varsayalım.

O zaman a_i , b_j katsayılarının her biri ya 0 ya da 1'e eşittir.

Kanıt. ζ , $P_n(z)$ polinomunun bir kökü olsun. O halde ζ , $Q(z)$ veya $R(z)$ polinomunun köküdür. Örneğin, $Q(\zeta) = 0$ dır. O zaman $Q(\bar{\zeta}) = 0$ olur çünkü $Q(z)$ polinomunun tüm katsayıları gerçeldir. Siklotomik polinomların 2.özelliklerinden, ζ 'nın, 1 'in 1 'den farklı kökü olduğunu biliyoruz. Böylece $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ 'dır ve Önerme 3, $Q(z)$ 'nin simetrik bir polinom olduğunu gösteriyor. Aynı şekilde $R(z)$ 'nin de simetrik bir polinom olduğunu gösterebiliriz. Buradan $a_l = b_m = 1$ elde edilir. $Q(z)$ ve $R(z)$ polinomlarının derecelerinin eşit olmayacağına dikkat edelim. Gerçekten, eğer $l = m$ ise, z^l 'nin katsayısı $b_l + a_1 b_{l-1} + \dots + a_l = 2 + \dots \geq 2$ olur, fakat bu mümkün değildir. Genelliği bozmadan $l < m$ olduğunu kabul edebiliriz. $P_n(z)$ ve $Q(z)R(z)$ 'deki z^j teriminin katsayılarını karşılaştıralım:

$$1 = a_j + a_{j-1}b_1 + \dots + a_1 b_{j-1} + b_j, \quad 1 \leq j \leq l-1, \quad (0.1)$$

$$1 = 1 + a_{l-1}b_1 + \dots + a_1 b_{l-1} + b_l, \quad (0.2)$$

$$1 = b_j + a_1 b_{j-1} + \dots + a_{l-1} b_{j-l+1} + b_{j-l}, \quad l+1 \leq j \leq m-1 \quad (0.3)$$

elde edilir.

Formül (0.2) 'ye göre $a_{l-1}b_1 + \dots + a_1 b_{l-1} + b_l = 0$ 'dır. Öte yandan, tüm terimler negatif olmadığından $a_{l-1}b_1 = a_{l-2}b_2 = \dots = a_1 b_{l-1} = b_l = 0$ veya

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_{l-1} b_{l-1} = b_l = 0 \quad \text{'dır.} \quad (0.4)$$

(Burada $a_i = a_{l-i}$ eşitliklerini kullanıyoruz.)

Formül (0.1) 'de $j = 1$ alalım. Formül (0.4) 'ü kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir: $a_1 + b_1 = 1$, $a_1 b_1 = 0$. Böylece a_1 ve b_1 'in biri 0 diğeri 1 'dir.

Kanıtı tümevarımla devam edeceğiz.

$j = 1$ için önermenin doğruluğunu kanıtladık.

$j \leq k < l-1$ için doğru olsun. Yani $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_k$ ya 0 ya da 1 'e eşittir. Formül (0.1) 'e göre $a_{k+1} + b_{k+1}$ bir tamsayıdır ve $0 \leq a_{k+1} + b_{k+1} \leq 1$ 'dir. Formül (0.4) 'ten ise $a_{k+1} \cdot b_{k+1} = 0$ 'dır. Sonuçta, a_{k+1} ve b_{k+1} ya 0 ya da 1 'e eşittir. Böylece tümevarım tamamlanır.

$a_1, \dots, a_{l-1}$, $b_1, \dots, b_{l-1}$ katsayılarının ya 0 ya da 1 'e eşit oldukları kanıtlandı.

$a_l = 1$, $b_l = 0$ olduğu için $b_{l+1}, \dots, b_{m-1}$ katsayılarına bakmamız gerekmektedir.

$j = l+1$ için Formül (0.3) 'e göre

$$1 = b_{l+1} + a_1 b_l + \dots + a_{l-1} b_2 + b_1,$$

dolayısıyla b_{l+1} bir tamsayıdır ve $0 \leq b_{l+1} \leq 1$. Onun için b_{l+1} ya 0 ya da 1 'dir. Tekrar tümevarım kullanarak b_j 'nin ($1 \leq j \leq m$), ya 0 ya da 1 'e eşit olduğu elde edilir.

Teorem 2. $P_n(z)$ siklotomik polinomunun, sabitten farklı, katsayıları negatif olmayan polinomların çarpımı olması için gerek ve yeter koşul ($n+1$) 'in asal sayı olmamasıdır.

Kanıt. (1) ($n+1$) 'in asal sayı olmadığını kabul edelim. O zaman $n+1 = lm$ olur ($l, m \neq 1$ pozitif tamsayılardır). Şimdi

$$P_n(z) = \frac{1 - z^{lm}}{1 - z^l} \frac{1 - z^l}{1 - z}$$

yazılabilir. $Q(z) = \frac{1 - z^{lm}}{1 - z^l} = 1 + z^l + z^{2l} + \dots + z^{l(m-1)}$ ve $R(z) = \frac{1 - z^l}{1 - z} = 1 + z + \dots + z^{l-1}$ teoremin koşullarını sağlayan polinomlardır.

(2) $n+1$ bir asal sayı olsun.

$P_n(z) = \tilde{Q}(z)\tilde{R}(z)$, $\tilde{Q}(z)$ ve $\tilde{R}(z)$, sabitten farklı, katsayıları negatif olmayan polinomlar olsun. O zaman $\tilde{Q}(0)\tilde{R}(0) = P_n(0) = 1$ ve

$$P_n(z) = \frac{\tilde{Q}(z)\tilde{R}(z)}{\tilde{Q}(0)\tilde{R}(0)} \quad (0.5)$$

yazabiliriz.

$$Q(z) = \frac{\tilde{Q}(z)}{\tilde{Q}(0)}, \quad R(z) = \frac{\tilde{R}(z)}{\tilde{R}(0)}$$

alalım.

Bu polinomlar sabitten farklı polinomlar olup

$$Q(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_l z^l,$$

$$R(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_m z^m$$

şeklinde. Burada $a_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, l$), $b_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, m$) $a_l b_m \neq 0$ 'dır. Ayrıca formül (5) 'e göre $P_n(z) = Q(z)R(z)$ 'dir. Teorem 1 'i kullanarak a_i ve b_j 'nin ya 0 ya da 1 'e eşit olduğunu görürüz. Onun için $Q(1)$ ve $R(1)$, 1 'den büyük pozitif tamsayılar olur.

$$n+1 = P_n(1) = Q(1)R(1)$$

eşitliğinden çelişki elde ederiz, çünkü $n+1$ bir asal sayıdır.

KAYNAKÇA

- [1] Linnik Ju.V., Ostrovskii I.V., *Decomposition of Random Variables and Vectors*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.171. Aşağıdaki sayılardan hangisi daha büyüktür?

$$(123456789!)^2 \text{ ya da } 123456789^{123456789}$$

A.172. Ardışık 10 tamsayıdan en az biri geri kalan dokuz sayı ile aralarında asaldır; gösteriniz.

A.173. Çarpımları 1'e eşit olan üç tane pozitif sayının toplamı bu sayıların terslerinin toplamından büyük ise, bu takdirde söz konusu sayılardan tam bir tanesinin 1'den büyük olacağını gösteriniz.

A.174. $a \in \mathbb{R}$ sayısı $a^5 - a^3 + a = 2$ denklemini sağlıyorsa, $3 < a^6 < 4$ olduğunu gösteriniz.

A.175. 20×25 dikdörtgeninin içine, kenar uzunluğu 1 olan 120 tane kare atılmıştır. Dikdörtgenin içine, çapı 1 olan ve 120 karenin hiç birini kesmeyen bir daireyi yerleştirmenin mümkün olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.171. $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2665.2666}$ ve $B = \frac{1}{1334.2666} + \frac{1}{1335.2665} + \dots + \frac{1}{2666.1334}$ sayıları veriliyor. $\frac{A}{B}$ 'nin bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

Y.172. $a_1, a_2, \dots, a_n$; n tane farklı pozitif sayı olsun (tam olmaları gerekmez). Bu sayılar yardımıyla elde edilen tüm mümkün toplamlar kümesini düşünelim (sayıların kendisini de söz konusu kümeye dahil ediyoruz). Elde edilen toplamlar içerisinde, en azından, $\frac{n(n+1)}{2}$ tane farklı sayı bulunacağını kanıtlayınız.

Tam $\frac{n(n+1)}{2}$ tane farklı sayının bulunacağı duruma bir örnek gösteriniz.

Y.173. Bir doğru üzerinde 50 parça verilmiştir. Aşağıdaki önermelerden en az birinin doğru olduğunu kanıtlayınız:

(a) Parçalardan en az 8 tanesinin ortak noktası vardır.

(b) Öyle 8 parça vardır ki, herhangi ikisinin orta noktası yoktur.

Y.174. Konveks $ABCDEF$ altıgeni verilmiştir. AD , BE ve CF köşegenlerinin her birinin altıgenin alanını yarıya böldüğü bilinmektedir. Bu köşegenlerin aynı bir noktada kesiştiklerini kanıtlayınız.

Y.175. Düzlemi bir kaç bölgeye bölen n ($n \geq 2$) tane doğru çizilmiş ve bu bölgelerin bazıları boyanmıştır. Boyama işlemi öyle yapılmıştır ki, boyanmış bölgelerin ortak sınırı yoktur (sınırlar doğru parçalarıdır). Boyanmış bölgeler sayısının $\frac{1}{3}(n^2 + n)$ 'den fazla olamayacağını kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.161. m ve n doğal sayılar olmak üzere, $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ 'dir. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4n^2})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$m < \sqrt{2}.n \Rightarrow m^2 < 2n^2 \Rightarrow m^2 + 1 \leq 2n^2$$

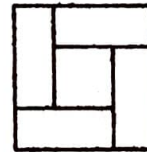
$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n^2} = 2(1 - \frac{1}{2n^2})$$

$$= 2[1 - 2\frac{1}{4n^2} + (\frac{1}{4n^2})^2 - (\frac{1}{4n^2})^2]$$

$$< 2.(1 - \frac{1}{4n^2})^2 \Rightarrow$$

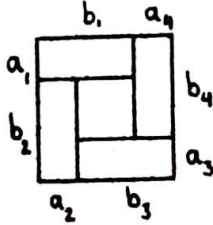
$$\frac{m}{n} < \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4n^2}).$$

A.162. Bir kare, şekilde görüldüğü gibi beş dikdörtgene bölünmüştür. Karenin kenarları ile ortak noktaları olan dört dikdörtgenin alanları birbirine eşitse, tam ortadaki dikdörtgenin bir kare olduğunu gösteriniz.



Çözüm. Dikdörtgenlerin kenar uzunluklarına $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ diyelim (şekile bakınız).

Varsayalım ki, $a_1 > a_2$ 'dir. O halde $a_1 + b_2 = a_2 + b_3$ eşitliğinden $b_3 > b_2$ olur. Alanların eşitliğinden ve $b_3 > b_2$ olmasından $a_3 < a_2$ olması çıkar. Bu şekilde devam edersek, $a_3 > a_4$ ve nihayet $a_4 > a_1$ elde ederiz. Böylece,



$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_1$ çelişmesini elde etmiş oluruz. Demek ki, $a_1 = a_2$ olmalıdır. Benzer şekilde $a_2 = a_3 = a_4$ ve dolayısıyla, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ olduğunu göstermek mümkündür. Problemin iddiası bu eşitliklerin basit sonucudur.

A.163. 6 tane ikinci derece denklem veriliyor: $x^2 + p_k x + q_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, 6$. p_k 'ların hepsinin farklı sayılar olduğu, her denklemin iki ayrı kökü olduğu ve farklı köklerin toplam sayısının 4 olduğu biliniyorsa, bu 4 kökün toplamı neye eşittir?

Çözüm. x_1, x_2, x_3 ve x_4 verilen 6 denklemin farklı kökleri olsun. Bu dört sayıdan oluşturulmuş farklı (x_i, x_j) , $(i < j)$ ikililer sayısı $\binom{4}{2} = 6$ ve denklemler sayısı da 6 olduğundan her (x_i, x_j) , $(i < j)$ ikilisine sadece bir tane p_k sayısı uygun geliyor. O halde Vieta Teoremine göre,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3)$$

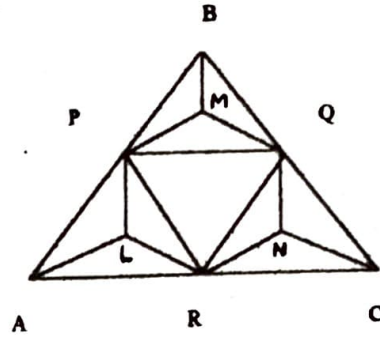
$$+ (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3)$$

$$+ (x_2 + x_4) + (x_3 + x_4)]$$

$$= -\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) .$$

A.164. Dar açılı bir üçgenin her kenarının orta noktasından diğer kenara dikler çizilmiştir. Bu diklerin sınırladığı altıgenin alanının, üçgenin alanının yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.



P, Q, R ; $\triangle ABC$ üçgeninin kenarlarının orta noktaları olsunlar (şekile bakın). $\triangle APR$, $\triangle RQC$ ve $\triangle PBQ$ üçgenleri dar açılı olduklarından onların yüksekliklerinin kesişim noktaları olan L, N, M bu üçgenlerin içinde bulunacaklardır.

$\triangle ABC$ 'nin alanına S ve $PLRNQM$ altıgeninin alanına da $\tilde{S}$ dersek,

$$\tilde{S} = A(\triangle PQR) + A(\triangle PMQ) + A(\triangle QNR) + A(\triangle RLP),$$

$$\triangle APR = \triangle RQC = \triangle PBQ$$

olduğundan,

$$\triangle PMQ = \triangle ALR \text{ ve } \triangle QNR = \triangle PLA$$

'dır. Dolayısıyla,

$$A(\triangle PMQ) + A(\triangle QNR) + A(\triangle RLP)$$

$$= A(\triangle ALR) + A(\triangle PLA) + A(\triangle RLP)$$

$$= A(\triangle APR) = \frac{1}{4} \cdot S .$$

Böylece,

$$\tilde{S} = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{1}{4} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot S \text{ 'dir.}$$

A.165. Yazı tahtasında $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{12}$ sayıları yazılmıştır.

(a) Bu sayıların önünde + veya - işaretleri koymakla sıfır elde etmek mümkün müdür?

(b) Eğer mümkün değilse, sayılardan en az kaç tanesini sildikten sonra geriye kalanların önüne

+ ve - işaretleri koymakla sıfır elde etmek mümkündür?

Çözüm. (a) Mümkün değil. Çünkü karşılarında + ve/veya - işaretlerinden biri yazılmış kesirleri uygun şekilde toplamakla

$$\frac{k}{5.8.9.11} \mp \frac{1}{7}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

elde edilir ki, bunun hiç bir zaman sıfıra eşit olmayacağı açıktır.

(b) Böylece, $\frac{1}{7}$ 'yi silmek lazım olduğu (a) şikkından görülüyor. Benzer fikirler $\frac{1}{11}$ 'in de silinmesi gerektiğini gösterir. Geriye kalan sayıların ($\frac{1}{9}$ 'dan başka) önünde $\mp$ işaretlerinden birini yazarak

$$\frac{l}{3.5.8} \mp \frac{1}{9} = \frac{3l \mp 8.5}{5.8.9}$$

biçiminde bir ifade elde ederiz.

Paydaki birinci toplanan 3 ile bölünüyor, ama diğer toplanan (40) ise bölünmüyor. Dolayısıyla bu ifade sıfıra eşit olamaz. Böylece, $\frac{1}{9}$ 'u da siliyoruz. Geriye kalan sayıların önüne + veya - yazarak

$$\frac{m}{8.3} \mp \frac{1}{5} \mp \frac{1}{10}$$

elde ediyoruz. (Burada birinci toplanan, önlerinde + veya - yazılmış $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$ sayılarının toplamıdır.) Yukarıdaki toplamı şu şekilde yazalım:

$$\frac{5m \mp (\mp 2 \mp 1).12}{8.3.5}$$

Paydaki ikinci toplanan 5 ile bölünmediğinden bu toplam sıfıra eşit olamaz. Böylece, $\frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{10}$ 'dan en az birini ve dolayısıyla, ikisini de silmek gerekecektir. Benzer fikirler kullanılarak $\frac{1}{8}$ 'in de silinmesi gerektiği sonucuna varılır. Geriye kalan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ sayıları karşısında + ve - işaretleri koymakla sıfır elde etmek mümkündür:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0.$$

Y.161 (Sorunun yazımında hata olmuştur: doğrusu:) $q > 5$ olmak üzere p ve q asal sayıları $q|(2^p + 3^p)$ koşulunu sağlarsa, $q > p$ olacağını gösteriniz.

Çözüm. Bir q için $q|(2^p + 3^p)$ sağlanırsa $q|(3^{2p} - 2^{2p})$ de sağlanır. Verilen $q > 5$ için $q|(3^m - 2^m)$ koşulunu sağlayan m doğal sayılarının

kümesi A olsun. Böylece, 6 ile aralarında asal olan her q için $\varphi(q) \in A$ 'dır. Burada $\varphi(q) = q-1$, Euler φ -fonksiyonunun q asalındaki değeridir. Diğer yandan $q > 5$ olduğundan $m = 2$ çözüm değildir; $m = 1$ de çözüm değildir. Dolayısıyla, A 'nın en küçük elemanı n ile gösterilirse, $n \geq 3$ 'tür. Şimdi, $a \in A$ olsun. Bölme algoritması ile

$$a = n.b + k, \quad 0 \leq k < n$$

alırsak;

$$\begin{aligned} 3^q &\equiv 2^q \pmod{q} \Rightarrow 3^{nb} \cdot 3^k \equiv 2^{nb} \cdot 2^k \pmod{q} \\ &\Rightarrow 3^k \equiv 2^k \pmod{q} \\ &\Rightarrow k = 0 \Rightarrow n|a. \end{aligned}$$

Yukarıda, $2p \in A$ ve $q-1 \in A$ olduğunu görmüştük. O halde, $n|2p$ ve $n|(q-1)$. Böylece,

$$\text{OBEB}(q-1, 2p) = n \geq 3$$

$$\Rightarrow \text{OBEB}(q-1, p) > 1 \Rightarrow \text{OBEB}(q-1, p) = p.$$

Sonuç olarak $p|(q-1) \Rightarrow p \leq q-1 \Rightarrow p < q$.

(Çözenler: Kazım Büyükboduk.)

Y.162. Bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ; çevrel çemberinin yarıçapı R ise,

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3\sqrt{3}R$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r , alanı S ve $u = \frac{a+b+c}{2}$ olsun. Bu takdirde, $S = ur = \frac{abc}{4R}$ ve $\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = ur$ (Heron Formülü) olduğu bilinmektedir.

Bunlardan

$$(u-a)(u-b)(u-c) = ur^2 \quad (*)$$

ve

$$abc = 4Rru \quad (**)$$

olduğu görülür. Problemin çözümü için önce aşağıdaki lemmayı kanıtlayacağız:

Lemma.

$$\frac{a^2}{u-a} + \frac{b^2}{u-b} + \frac{c^2}{u-c} = \frac{4u(R-r)}{r}$$

Lemmanın kanıtı. Yukarıdaki (*) ve (**) eşitlikleri kullanılarak

$$u^3 + ur^2 + 4Rru = u^3 + (u-a)(u-b)(u-c) + 4Rru$$

$$= u^3 + u^3 - u^2(a+b+c) + u(ab+ac+bc) - abc + abc \quad \text{böylece}$$

$$= 2u^3 - 2u^3 + u(ab+ac+bc) = u(ab+ac+bc).$$

Buradan,

$$u^2 + r^2 + 4Rr = ab + ac + bc \quad (***)$$

elde edilir. Şimdi,

$$\frac{a^2}{u-a} = \frac{a(u-(u-a))}{u-a} = \frac{au}{u-a} - a$$

ve benzer biçimde,

$$\frac{b^2}{u-b} = \frac{bu}{u-b} - b; \quad \frac{c^2}{u-c} = \frac{cu}{u-c} - c$$

olduğuna dikkat edersek

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{u-a} + \frac{b^2}{u-b} + \frac{c^2}{u-c} \\ &= \frac{au}{u-a} + \frac{bu}{u-b} + \frac{cu}{u-c} - (a+b+c) \\ &= u\left(\frac{a}{u-a} + \frac{b}{u-b} + \frac{c}{u-c} - 2\right). \end{aligned}$$

Son ifadede paydalar eşitlenip (*), (**) ve (***) kullanılarak

$$\frac{a^2}{u-a} + \frac{b^2}{u-b} + \frac{c^2}{u-c} = \frac{4u(R-r)}{r}$$

elde edilir ve lemmanın kanıtı tamamlanmış olur.

Problemdeki eşitsizliği kanıtlamak için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow 8u^3 \geq 27abc$$

$$\Rightarrow 8u^3 \geq 27 \cdot 4 \cdot R \cdot r \cdot u$$

((**)'dan)

$$\Rightarrow 2u^2 \geq 27Rr$$

$$\Rightarrow u^2 \geq \frac{27}{2}Rr$$

$R \geq 2r$ (Euler Eşitsizliği) olduğundan

$$u^2 \geq \frac{27}{2}Rr \geq 27r^2 \Rightarrow u \geq 3\sqrt{3}r$$

ve buradan, $R \geq 2r$ olduğu tekrar kullanılarak

$$2u(R-r) \geq 2 \cdot 3\sqrt{3}r(R-r) \geq 3\sqrt{3}Rr$$

elde edilir. Son olarak, kanıtlanmış olan lemma kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{u-a} + \frac{b^2}{u-b} + \frac{c^2}{u-c} &= \frac{4u(R-r)}{r} \\ &\geq \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}Rr}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c} &\geq 2 \cdot 3\sqrt{3}Rr \\ &> 3\sqrt{3}Rr. \end{aligned}$$

(Çözenler : M. Bumin Yenmez.)

Y.163. Merkezi $(0,1)$ noktasında bulunan bir çember $y = x^2$ parabolünü 4 ayrı noktada kesiyor: A, B, C, D .

(a) $A(ABCD) < \sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $A(ABCD)$ alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm. (a) Simetriden dolayı $ABCD$ ikizkenar yamuk olacaktır. Çemberin yarıçapına R dersek, yamuğun köşelerinin koordinatları

$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = R^2 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayacaktır. Buradan y için

$$y^2 - y + 1 - R^2 = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri $y_1 + y_2 = 1$ eşitliğini sağlıyor (Vieta Teoreminden). Öyleyse, yamuğun orta tabanı $y = \frac{1}{2}$ doğrusu üzerinde bulunacaktır. Orta tabana MN dersek ve $x^2 = y$ eşitliğini gözönüne alırsak,

$$|MN| < 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

olur. Öte yandan, yamuğun yüksekliği $|y_1 - y_2|$ sayısına eşit olup

$$|y_1 - y_2| < y_1 + y_2 = 1$$

eşitsizliğini sağlamaktadır.

Böylece,

$A(ABCD) < \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$ çıkar.

(b) $x_1 = \sqrt{y_1}$ ve $x_2 = \sqrt{y_2}$ diyelim ve belirlilik için $x_1 < x_2$ varsayalım. $x_1^2 + x_2^2 = y_1 + y_2 = 1$ olduğundan $x_1 = \sin \alpha$ ve $x_2 = \cos \alpha$ sağlanacak biçimde $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ vardır. Böylece

$$S = A(ABCD) = |MN| \cdot (y_2 - y_1)$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \cos 2\alpha,$$

$$S^2 = (1 + \sin 2\alpha)(1 - \sin^2 2\alpha)$$

$$= -t^3 - t^2 + t + 1 \equiv f(t), \quad (t = \sin 2\alpha \in (0, 1)).$$

olur. $f'(t) = 0$ denkleminin pozitif kökü $t = 1/3$ olduğundan, $A(ABCD)$ alanının en büyük değeri $\sqrt{f(1/3)}$, $\sqrt{f(0)}$, $\sqrt{f(1)}$ sayılarının en büyüğüne eşit olacaktır. Böylece

$$\max(A(ABCD)) = \sqrt{f(1/3)} = \sqrt{\frac{32}{27}}$$

olur.

(Çözenler : Hasan Karabıyık (b), Janberk Şahin (a), Alper Çay (a), Cemal Özboğa (a).)

Y.164. $p, q \in \mathbb{N}$, $q < 100$ olmak üzere, sayı ekseninde $\frac{p}{q}$ noktaları işaretlenmiştir. Uzunluğu $3 \cdot 10^{-3}$ olan bir α parçası koordinat başlangıcından 1 noktasına doğru kaydırılıyor. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}]$ parçasının ikiye-ikiye birbirinden ayrık öyle dört tane alt aralığı vardır ki, α parçası bu aralıkların içinde bulunduğu işaretlenmiş $\frac{p}{q}$ noktalarından hiç birine değmeyecektir, kanıtlayınız.

Çözüm. $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|q - 3p|}{3q} \geq \frac{1}{3q} > \frac{1}{300} > 3 \cdot 10^{-3}$$

'dür. Dolayısıyla, $\frac{1}{3}$ 'ün sağında ve solunda uzunluğu $3 \cdot 10^{-3}$ 'den büyük olan ve işaretlenmiş $\frac{p}{q}$ noktalarından hiç birini içermeyen birer aralık vardır. $\frac{1}{2}$ noktasının da sağında ve solunda işaretlenmiş noktaları içermeyen ve uzunluğu $3 \cdot 10^{-3}$ 'den büyük olan aralıkların varlığı benzer şekilde gösterilir.

Y.165. $a_1, a_2, a_3, \dots$ sınırsız, kesin artan pozitif sayı dizisi olsun.

(a) Her $k \geq k_0$ için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

(b) Her $k \geq k_1$ için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1998$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_1 \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

Çözüm. (a) Verilen dizi sınırsız olduğundan, $2a_1 < a_m$ ve $2a_m < a_{k_0}$ sağlanacak biçimde bir k_0 vardır. Dizi kesin artan ve pozitif terimli olduğundan her $k \geq k_0$ için şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) + \left(1 - \frac{a_2}{a_3}\right) + \dots + \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) \\ &= \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_m - a_{m-1}}{a_m}\right) \\ &+ \left(\frac{a_{m+1} - a_m}{a_{m+1}} + \frac{a_{m+2} - a_{m+1}}{a_{m+2}} + \dots + \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}}\right) \\ &> \frac{a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_m - a_{m-1}}{a_m} \\ &+ \frac{a_{m+1} - a_m + a_{m+2} - a_{m+1} + \dots + a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}} \\ &= \frac{a_m - a_1}{a_m} + \frac{a_{k+1} - a_m}{a_{k+1}} \\ &= \left(1 - \frac{a_1}{a_m}\right) + \left(1 - \frac{a_m}{a_{k+1}}\right) \\ &= 2 - \left(\frac{a_1}{a_m} + \frac{a_m}{a_{k+1}}\right) > 1. \end{aligned}$$

Buradan (a) şıkkındaki eşitsizlik elde edilir.

(b) (a) şıkkındaki eşitsizliğe göre, yeteri kadar büyük her p için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_p}{a_{p+1}} < p - 1 \text{ 'dir. } (*)$$

Şimdi, (a) şıkkının hükmünü $a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, \dots$ dizisine uygularsak, yeteri kadar büyük $q > p$ sayıları için

$$\frac{a_{p+1}}{a_{p+2}} + \frac{a_{p+2}}{a_{p+3}} + \dots + \frac{a_q}{a_{q+1}} < (q - p) - 1 \quad (**)$$

sağlanacaktır. (*) ve (**) eşitsizliklerini taraf-tarafa toplarsak, yeteri kadar büyük q 'lar için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_q}{a_{q+1}} < q - 2 \quad (***)$$

olur. Şimdi de (a) şıkkının hükmünü $a_{q+1}, a_{q+2}, \dots$ dizisine uygularsak, yeteri kadar büyük r 'ler için

$$\frac{a_{q+1}}{a_{q+2}} + \frac{a_{q+2}}{a_{q+3}} + \dots + \frac{a_r}{a_{r+1}} < (r - q) - 1$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği (***) ile toplarsak,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_r}{a_{r+1}} < r - 3$$

olur. Böylece, bu fikirleri 1997 defa uygularsak istenen sonuca varırız.

C İ L T 7 D İ Z İ N İ

- Ali Nesin, *Oyunla Eğitim ve Birkaç Oyun*, SAYI 4, 16-22.
- Aytek Erdil, *Aşkın Sayılar Üzerine*, SAYI 2, 6-10.
- Doğan Çoker, *Ustaya Saygı: Cahit Arf (1910-∞)*, SAYI 1, 2-10.
- Doğan Çoker, *Hindistan Cevizleri... ve Diyofant Denklemleri*, SAYI 2, 25-28.
- Dursun Çalışkan, *Sayıların Sihirli Dünyasında "Pisagor Teoremi" ile Bir Gezinti*, SAYI 5, 18-21.
- Emre Alkan, *Binom Katsayılarının Bazı Özellikleri*, SAYI 1, 11-15.
- M. Fikri Akdeniz, *Büyük Türk Matematikçisi: Hüseyin Tevfik Paşa (1832-1901)*, SAYI 4, 10-11.
- Fikri Gökdal, *Ptolemy (Batlamyus) Teoremi*, SAYI 4, 2-5.
- M. Gündüz İked, *Fizikte Zeta-Fonksiyonu (I)*, SAYI 3, 9-13.
- M. Gündüz İked, *Fizikte Zeta-Fonksiyonu (II)*, SAYI 4, 6-8.
- Halil İbrahim Karakaş, *38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı*, SAYI 2, 18-24.
- Halil İbrahim Karakaş, *39. Uluslararası Matematik Olimpiyadı*, SAYI 4, 23-28.
- Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev, *Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadı Birinci Seçme Sınavı*, SAYI 2, 2-5.
- Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev, *Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavı*, SAYI 3, 25-28.
- Hüseyin Kayadibi, *Dans Eden Sayılar*, SAYI 4, 12-15.
- İhsan Karabulut, *Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Eşitsizliğinin Kullanımı Üzerine*, SAYI 3, 23-24.
- İlham Aliyev, *Konveks Fonksiyonlar, Jensen Eşitsizliği ve Bazı Uygulamaları*, SAYI 3, 17-20.
- İsmail Hacıoğlu, *Doğruya Noktalar ve Mascheroni Teoremi*, SAYI 3, 14-16.
- Mustafa Kalafat, *ODTÜ Matematik Topluluğu 2.Liselerarası Matematik Yarışması*, SAYI 1, 19-20.
- Nizamettin İskenderov, *Bazı Fonksiyonel Denklemlerin Analiz Yöntemleriyle Çözülmesi*, SAYI 1, 16-18.
- Nurettin Ergun, *Fields Ödülleri ve Matematikteki Gelişmenin Sürekliliği*, SAYI 3, 21-22.
- Nurettin Ergun, *Bernstein 'ın Kanıtlanması*, SAYI 5, 14-17.
- N. Ergun-N. Ural-T. Yegül, *14. Balkan Matematik Olimpiyadı Soru ve Çözümleri*, SAYI 1, 21-23.
- Samet Bağcı, *Saccheri 'nin Euclides 'i Üzerine Bir Metodolojik-Tarihsel Çalışma (I)*, SAYI 5, 2-7.
- Selçuk Alsan, *Matematika*, SAYI 5, 22-22.
- Sofia Ostrovska, $z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1$ Polinomunun İlginç Bir Özelliği, SAYI 5, 23-26.
- Turgay Kaptanoğlu, *Gezegenlerin Hareketi (I)*, SAYI 2, 11-17.
- Turgay Kaptanoğlu, *Gezegenlerin Hareketi (II)*, SAYI 3, 2-8.
- Ünal Ufuktepe, *Perge'li Apollonius*, SAYI 1, 24-26.
- Yusuf Ünlü, *Harmonik Seriden Terimlerin İşaretlerini Değiştirerek Elde Edilen Seriler*, SAYI 5, 8-13.
- Problemler ve Çözümleri, SAYI 1, 27-32.
- Problemler ve Çözümleri, SAYI 2, 29-32.
- Problemler ve Çözümleri, SAYI 3, 29-32.
- Problemler ve Çözümleri, SAYI 4, 29-32.
- Problemler ve Çözümleri, SAYI 5, 27-31.
- Prof. Dr. Mehmet Sapanıcı 'nın Anısına... , SAYI 4, 9-9.
- Cilt 7 Dizini, SAYI 5, 32-32.
-

TEŞEKKÜRLER

Elinizdeki bu sayıyla dergimizin 7. cildinin son sayısına ulaşmış oluyoruz. **Türk Matematik Derneği** 'nin bir yayını olan **Matematik Dünyası** dergisinin yayımını 1998 yılı için yüklenen Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, var olan kısıtlı olanakları içerisinde elinden gelebildiği kadarıyla iyi bir biçimde bu görevini yapmaya çalıştı. Bu görev sırasında, istemeden de olsa, yapmış olduğu yanlışlıklar, eksiklikler, gecikmeler ya da düzensizlikler için siz okurlarımızdan özür dilemek isteriz.

Dergimize yazılarıyla katkıda bulunan tüm yazarlarımız, dizgisinin hazırlanışına emek verenler, derginin iletişim işleriyle ilgilenenler, derginin çıkışını yapanlar, grafiklerini çizenler, reklam bulunması konusunda çalışanlar, derginin yaygınlaşması konusunda uğraşanlar, sürdürüm işleriyle ilgilenenler, basılmış dergilerin sürdürümcülerimize yollanmasına yardımcı olanlar için bu sayfada bir kaç söz söylememiz uygun olacaktır. Yukarda anlattığımız tüm bu katkıları yapan ve ada göre abecesel olarak aşağıda sıralanan bölümümüz araştırma görevlilerine ve çalışanlarına sizlerin önünde en içten teşekkürlerimizi sunarız:

Demet Cezan	Fuat Yeniçerioğlu	Melih Eryiğit
Muhammet Çelik	Mutlu Güloğlu	Nesrin Tutaş
Özlem Yılmazhan	Sevda Sezer	Simten Bayrakçı
Sinem Sezer	Uğur Güray	Zeynep Güvenç

Ayrıca 3. sayımızdan başlayarak baskı kalitemizin yükselmesi yönünde gerçekten önemli katkılarda bulunan Antalya Yılmaz Koleji Müdürü **Kamil Sarıçiçek** ile matematik öğretmeni **Reşat Satılmış** 'a çok özel teşekkür dileklerimizi yolluyoruz.

1999 yılında da **Matematik Dünyası** 'nın çıkartılması görevi yeniden bölümümüze verilmiştir. Önümüzdeki yıl dergimize abone olmayı dileyen okurlarımız, *Ocak/1999* ayından başlayarak postayla ya da bankayla (yeni posta çeki ve banka hesap numaralarını kullanarak), telefonla, faksla ya da yeni değişmiş olan e-posta adresimizi kullanarak internetle bölümümüze başvururlarsa işlerimiz oldukça kolaylaşacaktır.

Önümüzdeki yıl da yanbaşınızda olmamız ve mutlu-sağlıklı-başarılı bir yıl dileklerimizle...

Antalya, Aralık/1998

MATEMATİK DÜNYASI YAZI KURULU
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA



ANTALYA

YILMAZ KOLEJİ

"... Zirveye uzanan çizgi"

İlk Mezunlarımızla:

98 ÖSS'de %100'lük Başarı...
98 ÖYS'de %83'lük Başarı...

Çağlar TOPTAŞ

98 ÖYS TM Puanında Antalya 4.lüğü ve Türkiye 75.liği

Kemal KESEROĞLU

TÜBİTAK ve Enerji Bakanlığının Ortaklaşa Düzenlediği Ulusal Enerji Proje Yarışmasında, Türkiye Üçüncülüğü...

Berkan ACAR

TÜBİTAK Ulusal Biyoloji Olimpiyatlarında Akdeniz Bölge Üçüncülüğü...

Ve;

Kanser Projemizin Uludağ Üniversitesinin Düzenlediği Uluslararası Onkoloji Kongresine daveti...

Cumhuriyet'imizin 75. yılında;
Okulumuzdan birkaç bilimsel çalışma...
Ve daha nicelerine...

Cumhuriyet'imize;
'Çam Sakızı, Çoban Armağanı'