

Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

Matematik Dünyasından...

Dirichlet'nin Bir Teoremi Hakkında

Nurettin Ergun

Genel Matematik'te (Calculus)

Öğrenci Hataları

Behiye Ubuz

Paradokslar...

Ahmet Dervişoğlu - Reşat Satılmış

Rolle Teoreminin

Bir genelleşmesi Üzerine

Uygur Sümbül

Problem Çözme Stratejileri

Albert Erkip

Bir ÖSS Sorusu Üzerine Notlar

Fikri Gökdağ

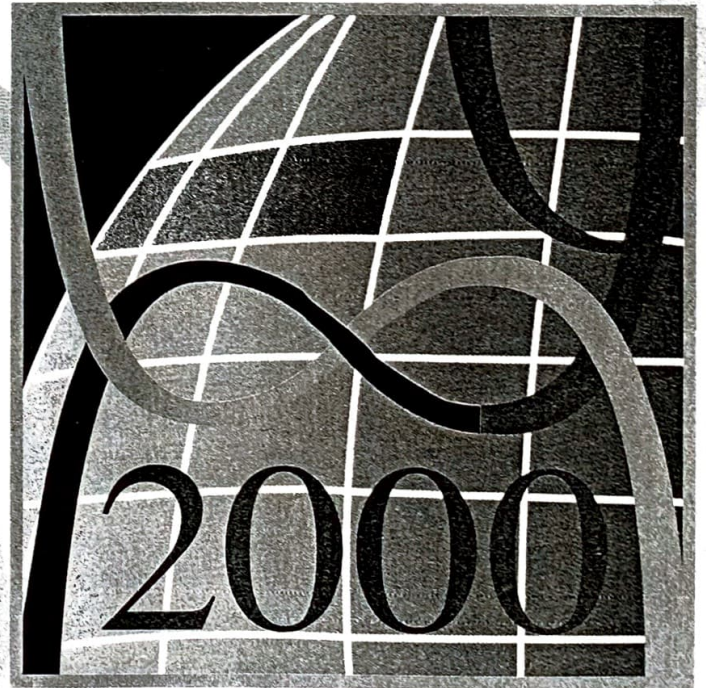
Geometri ve Trigonometrinin

Cebirde Bazı Uygulamaları (1)

Diba Yılmaz - Ali Cevahir

Problemler ve Çözümleri

Cilt 8 Dizini



DÜNYA MATEMATİK YILI

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Matematik Dünyası'nın sizlere Antalya'dan seslenmeye başlamasının ikinci yılını doldururken, bir yüzyılı, daha doğrusu, bir binyılı geride bırakıyor ve yeni binyıla, 2000 yılına giriyoruz. Yeni binyılın ilk yılında da sizlere Antalya'dan seslenecek olan dergimizin, 10ⁿ yıllarca yaşayacağına, belki de önümüzdeki dönemlerde yurdumuzun değişik köşelerinden daha geniş ve büyük okuyucu kitlelerine sesini duyurmayı sürdüreceğine inanıyor, bunu diliyoruz.

Elinizde tuttuğunuz bu sayıda özellikle öğrenci projelerinden oluşturulan yazılar oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Ahmet Dervişoğlu-Reşat Satılmış ikilisinin, Uygur Sümbül'ün ve Diba Yılmaz-Ali Cevahir ikilisinin yazılarını beğeniyle okuyacağınızı umuyoruz. Önümüzdeki yılda da bu yöndeki tutumumuzu sürdürmeyi düşünüyoruz.

Bu sayımızda, ayrıca, Dr. Fikri Gökdal'ın "*Bir ÖSS Sorusu Üzerine Notlar*" başlıklı yazısını okuyacaksınız. Önümüzdeki yıl çıkacak olan sayılarımızda, bu tür yazılara daha çok yer vermek istiyoruz.

Tüm okurlarımızın yeni yılını kutlar, 2000 yılının sağlık+mutluluk+başarılar getirmesini dileriz.

Yeni binyılın birinci sayısında buluşmak dileğiyle...

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyasından...	1
Dirichlet'nin Bir Teoremi Hakkında Nurettin Ergun	2
Genel Matematik'te (Calculus) Öğrenci Hataları Behiye Ubuz	9
Paradokslar... Ahmet Dervişoğlu-Reşat Satılmış	12
Rolle Teoreminin Bir Genelleşmesi Üzerine Uygur Sümbül	13
Problem Çözme Stratejileri Albert Erkip	15
Bir ÖSS Sorusu Üzerine Notlar Fikri Gökdal	20
Geometri ve Trigonometrinin Cebirde Bazı Uygulamaları (1) Diba Yılmaz-Ali Cevahir	24
Problemler ve Çözümleri	28
Cilt 8 Dizini	32

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Fikri Gökdal, Ünal Ufuktepe
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2000) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 3.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@pascal.sci.akdeniz.edu.tr

DİRİCHLET 'NİN BİR TEOREMİ HAKKINDA

Nurettin Ergun

İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

Bu yazı bir anlamda bu dergide daha önce yayınlanan **Üç Analiz Problemi** başlıklı yazıdaki üçüncü problemin ayrıntılı çözümüyle ilgilenecektir. Buna karşın ondan bağımsız kendi içinde yeterli bir bütünlüğe sahiptir ve söz konusu yazı okunmadan, kavrama isteğiyle okunduğunda yeterince ilginç ve yararlıdır. Yine de kaynaklarda belirtilen [1] ve [2] yazılarının kavranarak okunması kolaylaştırıcıdır.

Şimdi öncelikle "Üç Analiz Problemi" başlıklı yazıda da kısaca değindiğimiz gibi, gerçel sayıların şu yalın ve temel özelliğini gözleyelim. x ve y gerçel sayıları farklı ve sözgelimi $x < y$ olsun. $0 < \epsilon < y - x$ gerçekleyen her pozitif ϵ sayısının uygun bir tamsayı katı x ile y arasında yer alır; gerçekten

$$\frac{x}{\epsilon} < k = \left\lfloor \frac{x}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \leq \frac{x}{\epsilon} + 1 < \frac{y}{\epsilon}$$

olduğundan, bu k tamsayısı için $x < k\epsilon < y$ bulunur. Oysa, gerçel sayıların Arşimet özelliği nedeniyle $1 < n(y - x)$ gerçekleşecek biçimde bir n doğal sayısı var ve dolayısıyla, $0 < \frac{1}{n} < y - x$ geçerli olduğundan uygun bir $k' \in \mathbb{Z}$ sayesinde $r = \frac{k'}{n}$ rasyonel sayısı için $x < r < y$ gerçekleştiğini gözleriz. Demek ki, her farklı gerçel sayı çifti arasında en az bir tane (ve sonuçta sonsuz tane, aşağıya bakınız) rasyonel sayı vardır. Oysa, herhangi iki tamsayı arasında en az bir irrasyonel sayı bulunduğu (gerçekten k_1 ve k_2 tamsayıları için $k_1 < k_2$ geçerli ise, $k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ irrasyonel sayısı bu iki tamsayı arasında yer alır), sonuçta herhangi farklı iki rasyonel sayı arasında (Dikkat: $r_1 = \frac{k_1}{n_1}$ rasyonel sayısının $r_2 = \frac{k_2}{n_2}$ rasyonel sayısından küçük olması için gerek ve yeter koşul $k_1 n_2 < k_2 n_1$ gerçekleşmesidir, çünkü paydalar pozitif tamsayıdır.) ve dolayısıyla, farklı herhangi iki gerçel sayı arasında en az bir tane (ve sonuçta sonsuz tane) irrasyonel sayı bulunur (nasıl?). Gerçel sayıların, tüm farklı gerçel sayı çiftinin arasında en az bir eleman bulunduran özel bir altkümesine $\mathbb{R}$ 'nin yoğun altkümüsi denir. Demek ki, $x < y$ ise, (x, y) açık aralığında yoğun kümenin en az bir elemanı (ve aslında sonsuz elemanı) vardır. O halde, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'nin yoğun altküme örnekleridir. Dikkat edilirse, herhangi bir p asal sayısı için, rasyonel sayıların özel

$$A_p = \left\{ k + \frac{m}{p^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m < p^n \right\}$$

altkümüsi de $\mathbb{R}$ 'nin bir başka yoğun küme örneğidir, çünkü özellikle $0 < x < y < 1$ ise uygun bir n doğal sayısı sayesinde $0 < \frac{1}{p^n} < \frac{1}{n} < y - x$ gerçekleştiğini gözlemek yeterlidir; öyle değil mi, sevgili okurlar? Daha önemlisi, p ve q gibi farklı iki asal sayı için A_p ve A_q kümelerinin ayrık olduğunu gözlemektir; gerçekten

$$k_1 + \frac{m_1}{p^{n_1}} = k_2 + \frac{m_2}{q^{n_2}} \text{ ise, } k_1 = k_2$$

bulunur, çünkü $k_1 \neq k_2$ ve örneğin bu tamsayılar için $k_1 < k_2$ geçerli olsa

$$1 \leq k_2 - k_1 = \left| \frac{m_1}{p^{n_1}} - \frac{m_2}{q^{n_2}} \right| < 1$$

çelişkisi doğardı, neden? Demek ki, yukardaki eşitlik bir an için geçerli olsa, $\frac{m_1}{p^{n_1}} = \frac{m_2}{q^{n_2}}$ gibi kesirkes olanaksız bir sonuçla yüzleşiriz, çünkü bu iki rasyonel sayının her birisinin ortak asal çarpanlarının kısaltılması işlemi sonunda pay ve paydalarının aralarında asal hale indirgenmiş oldukları varsayılabilir. Önce $m_1 q^{n_2} = m_2 p^{n_1}$ eşitliği ve sonra da zorunlu olarak q asal sayısının m_2 'nin bir böleni olmak zorunda kaldığını, bunun ise q ve m_2 'nin aralarında asallığı nedeniyle olanaksız olduğunu gözleriz. Demek ki, p ve q asal sayıları farklı ise, gerçekten $A_p \cap A_q = \emptyset$ olur ve sonuçta $\mathbb{R}$ 'nin ikişerli ayrık olan sonsuz tane yoğun altkümelerinin varlığını gözlemiş oluruz. Şimdi de $\mathbb{R}$ 'nin yoğun bir A altkümelerinin, farklı iki gerçel sayı arasında, aslında sonsuz sayıda elemanın bulunduğunu gözleyelim

dilerseniz. Gerçekten, $x < y$ ise ve A kümesinin x ile y arasında yalnızca sonlu tane, örneğin m tane elemanı bulunsaydı ve bunlar sözgelimi $a_1, a_2, \dots, a_m$ olsaydı ve yine sözgelimi, büyüklük sırasına göre bunlar için

$$x < a_1 < a_2 < \dots < a_m < y$$

geçerli olsaydı, x ile a_1 gerçel sayıları arasında yoğun A kümesinden hiç eleman bulunmazdı, bu olanaksızdır. O halde, eğer A altkümeleri $\mathbb{R}$ 'de yoğun ise, her x gerçel sayısına, A kümesinin elemanlarından oluşturulan ve tüm terimleri ikiye ikiye farklı olan en az bir yakınsak dizi yakınsar. Şaşırmayın lütfen; bunu gözlemek de güç değildir. Önce $a_1 \in A \cap (x - 1, x + 1)$ gibi bir eleman seçeriz; ikinci adımda, boş olmayan her açık aralıkta A 'nın sonsuz tane elemanının var olduğunu söyleyen yukardaki gözlemimiz nedeniyle $a_2 \neq a_1$ ve $a_2 \in A \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ gerçekleyen bir elemanını seçeriz; $n+1$ -inci adıma gelindiğinde ve önceki adımlardan ikiye ikiye farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları belirlendiğinde, aynı nedenden ötürü

$$a_{n+1} \in A \cap (x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}) \text{ ve } a_{n+1} \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

gerçekleyen bir elemanını seçeriz. Tümevarımla tanımlanan ve tüm terimleri ikiye ikiye farklı olan (çünkü $n \neq m$ ve örneğin, $n < m$ ise, $a_m \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{m-1}\}$ nedeniyle $a_m \neq a_n$ geçerlidir) bu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |x - a_n| < \frac{1}{n}$$

sağladığından, sonuçta $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - a_n| = 0$ ve dolayısıyla, aynı şey demek olan $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bulunur.

Yoğun altkümelerin ilginç bir başka özelliği, sürekli bir fonksiyon altındaki görüntülerinin, görüntü kümesinde yoğun olmasıdır. Örneğin bu nedenle

$$A = \{0, \mp \sin 1, \mp \sin 2, \mp \sin 3, \dots\}$$

kümesinin $[-1, 1]$ aralığında yoğun olduğunu, başka bir deyişle bu aralıktaki herhangi iki farklı gerçel sayı arasında, uygun bir n ya da m doğal sayısı yardımıyla $\sin n$ ya da $-\sin m$ gibi bir değer yer aldığını aşağıda göreceğiz. Okuyucunun, yalnızca tamsayıların değil, genel olarak gerçel sayıların sinüs değerlerinin nasıl tanımlandığı konusunda bilgi sahibi olduğunu ummak istiyorum, bilmem yanılıyor muyum? Yalnızca açılar değil, gerçel sayıların sinüslerinin tanımını da öğrenmek belirli düzeyde olgunlaşmayı gerektirir. İndisi n fakat derecesi $2n - 1$ olan, rasyonel katsayılı

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomlarının, herhangi bir x gerçel sayısı için var olan $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$ limit değerine sinüs x denilir ve bu değer kısaca $\sin x$ ile yazılır. İyi ama, her $x \in \mathbb{R}$ için bu limitin varlığını güvence altına alan bilgileri bilmedikçe, bu tanımlı yalnızca duymuş olmanın bir önemi olabilir mi? Kuşkusuz hayır! Peki bir pozitif x gerçel sayısı için, birim çember denilen çemberin $P_1 = (1, 0)$ noktasından başlayarak, çember boyunca, saatin işleyişinin ters yönünde tastamam x uzunluğundaki yay kadar dolandığınızda, ulaştığımız P_x çember noktasını $(0, 0)$ noktasına birleştiren doğrunun O_x eksenini ile yaptığı $\hat{P}_1 \hat{M} P_x$ açısına θ_x dersek (bu açıya, radyan değeri x gerçel sayısı olan merkez açı denir) ve şimdi $\sin x = \sin \theta_x$ diye tanımlarsak, bu tanımlı anlayabilir miyiz? "Bu tanımlı da sevmedim, ben daha yayların uzunluğunu belirlemeyi bilmiyorum ki, hem neden birim çember boyunca saatin işleyişinin ters yönünde ilerleniyor? Peki, ya x gerçel sayısı negatif olsaydı?" biçimindeki sorgulayan karşı çıkışlarınızı duyar gibiyim. Evet, bunları ve örneğin, yukardaki tanımların eşdeğer olup olmadığını (eşdeğerdirler!) sağlıklı bir biçimde öğrenmek için üniversite öğrencisi olmanız gerekiyor, sevgili okurlar; insanların ancak büyüdüklerinde memelilerin nasıl dünyaya geldiğini öğrenebilmelerine, benzetebiliriz bunu, şaka yapmıyorum. Evet, şimdi yoğun bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki

görüntüsü konusuna dönelim derseniz. Sürekli bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonumuz var olsun ve $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun olsun. $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ kümesinin $f(\mathbb{R})$ görüntü kümesinde yoğun olduğunu göstereceğiz, yani iki farklı $f(x)$ ve $f(y)$ sayıları arasında uygun bir $a \in A$ sayesinde $f(a)$ gerçel sayısının yer aldığını kanıtlayacağız. Gerçekten $f(x) < f(y)$ ise, ünlü Ortalama Değer Teoremi nedeniyle biliyoruz ki, $f(x)$ ile $f(y)$ arasındaki tüm gerçel sayılar f fonksiyonunun en az bir kez eriştiği değerlerdir; yani, herhangi bir $f(x) < c < f(y)$ için $c = f(x')$ gerçekleşecek biçimde en az bir x' gerçel sayısı vardır. O halde, var olan ve $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ gerçekleyen x_0 gerçel sayısında f fonksiyonu sürekli olduğundan, $0 < \epsilon_0 < f(y) - f(x)$ gerçekleyen bir pozitif ϵ_0 sayısına karşılık var olan uygun bir $0 < \delta_0$ sayesinde tanımlanan x_0 'ın civarı (komşuluğu)

$$\forall \xi \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \text{ için } f(\xi) \in (f(x_0) - \frac{\epsilon_0}{3}, f(x_0) + \frac{\epsilon_0}{3}),$$

ya da başka bir yazıyla, $|\xi - x_0| < \delta_0$ ise, $|f(\xi) - f(x_0)| < \frac{\epsilon_0}{3}$ gerçekleyecektir. A kümesi yoğun olduğundan en az bir $a_0 \in A \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ elemanı var olur ve sonuçta $f(a_0) \in f(A)$ gerçel sayısı

$$f(x) < f(x_0) - \frac{\epsilon_0}{3} < f(a_0) < f(x_0) + \frac{\epsilon_0}{3} < f(y)$$

gerçekler yani $f(x)$ ile $f(y)$ arasında yer alır. Evet, artık asıl konuya girebiliriz sanırım. Usta Alman matematikçi Dirichlet 1820 'lerde şu önemli gerçeği gözlemişti:

Dirichlet Teoremi: q sabit bir irrasyonel sayı olsun. $A = \{kq + m : k, m \in \mathbb{Z}\}$ kümesi gerçel sayılarda yoğundur.

Şimdi öncelikle amacımız bu teoremin daha genel bir biçimini kanıtlamak olacaktır. q sabit bir irrasyonel sayı olsun. q ve x gerçel sayı çifti rasyonel sayılar cismi üzerinde lineer bağımsız olsun, yani $r_1q + r_2x = 0$ gerçekleyen biricik r_1 ve r_2 rasyonel sayıları $r_1 = r_2 = 0$ olsun, ya da bir başka eşdeğer yazıyla x gerçel, sayısı q 'nın tüm rasyonel katlarından farklı olsun. Başka bir deyişle,

$$x \notin q\mathbb{Q} = \{qr : r \in \mathbb{Q}\}$$

gerçekleşsin. Herhangi bir r rasyonel sayısı ile q irrasyonel sayısı bu nitelikte bir çifttir, kolayca gözlemleyebiliyoruz; değil mi sevgili okurlar? Şimdi ana teoremimizi görelim:

Ana Teorem: q sabit bir irrasyonel sayı ve q ile x gerçel sayıları rasyonel sayılar cismi üzerinde lineer bağımsız ise,

$$A_{q,x} = \{kq + mx : k, m \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi gerçel sayılarda yoğundur.

Dikkat edilecek olursa, $A_{q,x}$ ve $A_{-q,x}$ kümeleri eşit oldukları için (neden?) burada sözü geçen q irrasyonel sayısını pozitif varsayabiliriz. Şimdi her bir n doğal sayısı için

$$k_n = \left[\frac{nx}{q} \right] \in \mathbb{Z}$$

tamsayısı sayesinde $k_nq < nx < (k_n + 1)q$ gerçekleştiği; $\delta_n = nx - k_nq$ sayılarının pozitif ve ikişer ikişer farklı oldukları, yani $n \neq m$ için $\delta_n \neq \delta_m$ gerçekleştiği, hep, q ve x 'in rasyonel sayılar üzerinde lineer bağımsız olduklarını söyleyen temel hipotezin kolay gözlenebilen sonuçlarıdır. Üstelik, tüm δ_n sayıları $(0, q)$ aralığındadır ve ayrıca, t herhangi bir tamsayı ve herhangi n ve m doğal sayıları için

$$t(\delta_n - \delta_m) = t(k_m - k_n)q + t(n - m)x \in A_{q,x}$$

gerçeklenir. Gerçel sayıların ünlü Bolzano-Weierstrass özelliği (bak. [1]) nedeniyle $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $[0, q]$ kapalı aralığındaki bir gerçel sayıya yakınsayan bir $\{\delta_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve bu alt dizi her yakınsak gerçel sayı dizisi gibi bir Cauchy dizisidir, yani her $0 < \epsilon$ için

$$k, i \geq k_\epsilon \text{ ise } |\delta_{m_k} - \delta_{m_i}| < \epsilon$$

gerçeklenecek biçimde bir k_ϵ doğal sayısı vardır. Şimdi farklı iki x ve y gerçel sayıları için, örneğin, $x < y$ gerçekleşiyorsa, $0 < \epsilon < y - x$ gerçekleyen herhangi bir pozitif ϵ sayısı sayesinde, bu ϵ sayısına karşılık var olan k_ϵ doğal sayısından büyük olan k ve i farklı doğal sayıları için $m_k \neq m_i$ nedeniyle $\delta_{m_k} \neq \delta_{m_i}$ ve sözgelimi $\delta_{m_k} < \delta_{m_i}$ gerçekleşeceğinden, yazının başında gözlenen temel özellik nedeniyle, uygun bir t_0 tamsayısı sayesinde

$$x < t_0(\delta_{m_i} - \delta_{m_k}) \quad (\in A_{q,x}) < y$$

bulunur, çünkü $\delta_{m_i} - \delta_{m_k} = |\delta_{m_i} - \delta_{m_k}| < \epsilon < y - x$ geçerli olmaktadır. Demek ki, $A_{q,x}$ kümesi, gerçekten, $\mathbb{R}$ kümesinde yoğundur.

Dikkat, özel olarak x yerine 1 rasyonel sayısı alınırsa, Dirichlet Teoremi, ana teoremden kolayca elde edilmektedir, gözleyebiliyoruz değil mi?

Uygulamalar

Yukardaki teoremlerin ve sonuçların ardından şunları hemen gözleyebiliriz. $B = \{2k\pi + m : k, m \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde ve onun sürekli sinüs fonksiyonu altındaki görüntü kümesi olan

$$\sin B = \{\sin m : m \in \mathbb{Z}\} = \{0, \mp \sin 1, \mp \sin 2, \dots\}$$

ise $[-1, 1]$ aralığında yoğundurlar. 2π irrasyonel sayısının rasyonel bir katı olmayan herhangi bir x gerçel sayısı için

$$A_{2\pi,x} = \{2k\pi + mx : k, m \in \mathbb{Z}\}$$

$$B_x = \{\sin mx : m \in \mathbb{Z}\} = \{0, \mp \sin x, \mp \sin 2x, \dots\}$$

kümeleri ise, ana teoremin bir sonucu olarak, sırasıyla $\mathbb{R}$ ile $[-1, 1]$ 'de yoğundurlar. Başka bir deyimle, x gerçel sayısı 2π 'nin (ve dolayısıyla, π 'nin) bir irrasyonel katı olduğunda (Dikkat: Her x gerçel sayısı $x = \pi \frac{x}{\pi}$ nedeniyle, π 'nin bir katıdır, öyle değil mi?), yukardaki sayılabilir sonsuz elemanlı B_x kümesinin elemanlarının belirlediği ve elemanları ikiye ikiye farklı olan tüm yakınsak dizilerin limit noktaları kümesi $[-1, 1]$ aralığıdır. Bu nedenle bu nitelikteki bir x gerçel sayısı için $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak olamaz, aksi halde B_x kümesinin elemanları yardımıyla belirlenen ve tüm terimleri ikiye ikiye farklı olan tüm yakınsak dizilerin limit noktaları kümesinin en fazla iki elemanı olurdu (neden?). Bu olanaksızdır, çünkü söz konusu limit noktaları kümesi olan $[-1, 1]$ aralığında sayılamaz sonsuz sayıda gerçel sayı vardır. Demek ki, x gerçel sayısı π 'nin bir tam katı olmadıkça $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi iraksar (bak. [2] yazısı).

Şimdi de bir başka ilginç karşı örnek olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \quad (1)$$

koşulunu gerçeklemesine karşın, $[0, 1]$ aralığındaki yoğun bir kümeye ait tüm x gerçel sayıları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq g(x) \quad (2)$$

olacak biçimde $[0, 1]$ aralığında tanımlı gerçel değerli ve sürekli $f_n = f_n(x)$ fonksiyonları ile aynı aralıkta tanımlı ve sürekli bir $g = g(x)$ fonksiyonunun var olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sin 2^n \pi \left(x - \frac{k}{2^n}\right) \chi_{I_{k,n}}(x) \quad (x \in [0, 1])$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında süreklidirler ve istenen tüm koşulları gerçeklerler; burada her $0 \leq k \leq 2^n - 1$ tamsayısı için $I_{k,n}$ aralığı

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \subset [0, 1]$$

biçiminde tanımlanmıştır ve dikkat edilecek olursa, k ve i birinci indisleri farklı ve örneğin, $k < i$ ise, $\frac{k+1}{2^n} \leq \frac{i}{2^n}$ gerçekleştiği için kolayca görüleceği gibi $I_{k,n}$ ve $I_{i,n}$ aralıkları ayrıktır ve ayrıca $\chi_{I_{k,n}}$ karakteristik fonksiyonu, yine bilindiği gibi, $[0, 1]$ aralığında $I_{k,n}$ alt aralığına ait gerçel sayılarda 1, olmayanlarda 0 değeri almaktadır. Dolayısıyla, bu karakteristik fonksiyon apaçıktır ki, $\frac{k}{2^n}$ ve $\frac{k+1}{2^n}$ uç noktalarında süreksizdir. Oysa, tanımlarında bu karakteristik fonksiyonları kullanan f_n fonksiyonları $[0, 1]$ aralığındaki tüm noktalarda süreklidir. Gerçekten, öncelikle,

$$\forall x \in I_{k,n} \text{ için } f_n(x) = \frac{\pi}{2} \sin 2^n \pi (x - \frac{k}{2^n}) \quad (3)$$

gözlemeliyiz. Ayrıca, yazımda yalınlık amacıyla, kısaca $r_{k,n} = \frac{k}{2^n}$ yazarsak

$$0 = f_n(r_{k,n}) = f_n(r_{k+1,n}) = \lim_{x \rightarrow r_{k,n}} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow r_{k+1,n}} f_n(x)$$

gerçeklendiğini gözleyebiliriz. Örneğin, x gerçel sayıları $r_{k,n}$ rasyonel sayısına sağdan, yani $I_{k,n}$ aralığı içinden yaklaşırlarken, (3) gözlemi nedeniyle, sinüs fonksiyonu sürekli olduğu için

$$\lim_{x \rightarrow r_{k,n}^+} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow r_{k,n}^+} \sin 2^n \pi (x - r_{k,n}) = \frac{\pi}{2} 0 = 0$$

ve x gerçel sayıları $r_{k,n}$ sayısına soldan, yani bu kez $I_{k-1,n}$ aralığı içinde kalarak yaklaşırlarken $f_n(x) = \sin 2^n \pi (x - \frac{k-1}{2^n})$ gerçekleştiğinden, apaçıktır ki, aranan sol limit değeri $\sin 2^n \pi \frac{1}{2^n} = \sin \pi = 0$ olacaktır. Demek ki, gerçekten, f_n fonksiyonunun $r_{k,n}$ noktasındaki limit değeri var ve $0 = f_n(r_{k,n})$ değerine eşittir. f_n fonksiyonu apaçıktır ki, $I_{k,n}$ aralığının tüm öteki noktalarında zaten süreklidir (bak. (3) tanımı). Üstelik $A_{k,n}$ ile yazacağımız aşağıdaki Riemann tümlev (integral) değeri için

$$A_{k,n} = \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} \sin 2^n \pi (x - \frac{k}{2^n}) dx = \int_0^{1/2^n} \sin 2^n \pi u du = \frac{2}{2^n \pi}$$

bulunacağından, kolayca,

$$\int_0^1 f_n(x) dx - \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f_n(x) dx - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} A_{k,n} = 1$$

elde edilir. O halde, $[0, 1]$ aralığında sürekli olan her $x \in [0, 1]$ için $g(x) = 1$ sabit fonksiyonu için

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 = \int_0^1 g(x) dx$$

gerçekleneceğinden, apaçıktır ki, yukarıda yazılı olan (1) koşulu gerçekleşir. Oysa, $r = \frac{k}{2^n}$ biçimindeki özel ve sabit tutulmuş rasyonel sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(r) = 0 \neq g(r)$ gerçekleşir, çünkü

$$r = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{2^2 k}{2^{n+2}} = \dots$$

nedeniyle, kolayca

$$r \in I_{k,n} \cap I_{2k,n+1} \cap I_{4k,n+2} \cap I_{8k,n+3} \cap \dots$$

ve dolayısıyla, kolayca

$$0 = f_n(r) = f_{n+1}(r) = f_{n+2}(r) = f_{n+3}(r) = \dots$$

elde edilir. Oysa, $\frac{k}{2^n}$ biçimindeki özel rasyonel sayıların kümesi, daha önce gözlemlendiği gibi, $[0, 1]$ aralığında yoğundur. O halde, (2) koşulu da gerçekleşmiş olur. Peki, bu özel rasyonel sayılardan farklı bir $x \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ var mıdır; varsa değeri nedir? $g(x)$ midir? Ne dersiniz?

Bu yazıda son olarak dışbükey (konveks) fonksiyonlara ilişkin ve özellikle matematik olimpiyat kamp-
larına katılmış okurların çok seveceği türden bir soruyla ilgilenelim. Çözüm yine $[0, 1]$ aralığında
yoğun bir kümenin nitelikleriyle yakından ilgilidir. Tanım aralığına ait her x, y çifti için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (0 < \alpha < 1)$$

koşulunu gerçekleyen gerçel değerli ve gerçel değişkenli bir f fonksiyonuna **dışbükey fonksiyon** denir. Apaçiktır ki, $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için bu koşul kolayca gerçekleşecektir. İkinci türevi negatif olmayan her gerçel değerli fonksiyon (sözelimi, $f(x) = e^x$ ve $g(x) = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) fonksiyonları) bu nitelikte-
dir. Bu tür fonksiyonların grafiği, grafiğe her noktada çizilen teğetlerin oluşturduğu teğetler zarfının
hep üstünde kalırlar. Bu dergide bu tür fonksiyonlar üstüne çeşitli ilginç yazılar yayınlanmıştır.
İlgileneceğimiz son soru şu olacaktır:

Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı, gerçel değerli ve sürekli bir f fonksiyonunun dışbükey olabilmesi için
gerek ve yeter koşul, bu aralığa ait her x, y çifti için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \quad (4)$$

koşulunun gerçekleşmesidir, gösteriniz.

Yanlış anlaşılmasın, f sıradan bir gerçel değerli fonksiyon değil, sürekli bir fonksiyondur. Apaçiktır ki,
dışbükey bir f fonksiyonu, yukarıdaki dışbükeylik koşulunda $\alpha = \frac{1}{2}$ alınır (4) koşulunu gerçekleyecek-
tir. Tersine, (4) koşulunu gerçekleyen sürekli f fonksiyonu neden dışbükeydir? Bir kez daha $[0, 1]$
aralığında yoğun olan

$$A = \left\{ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^n}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesinden yararlanacağız. Paydalarında 2^n bulunan, $\frac{k}{2^n}$ ($k = 0, 1, \dots, 2^n$) biçimindeki özel $2^n + 1$
tane rasyonel sayıya n -inci diadik kesirler, A kümesinin elemanlarına ise yalnızca **diadik kesirler**
denir. Şimdi, ilk aşamada, (4) koşulunu gerçekleyen f fonksiyonunun, n -inci diadik kesirler için

$$f\left(\frac{k}{2^n}a + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)b\right) \leq \frac{k}{2^n}f(a) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(b) \quad (5)$$

gerçeklediğini n doğal sayısı üzerinden tümevarım kullanarak göstermek istiyoruz. Bu iddia (4)
nedeniyle, apaçiktır ki, $n = 1$ için geçerlidir. Bu iddia n -inci diadik kesirler için geçerli olsun. f
fonksiyonunun herhangi bir $(n + 1)$ -inci diadik kesir yardımıyla tanımlanan gerçel sayıdaki değeri,

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}a + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)b\right),$$

eğer k çift ve $k = 2m$ ise kolaylıkla, n -inci adım varsayımı kullanılarak

$$\begin{aligned} &= f\left(\frac{m}{2^n}a + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)b\right) \leq \frac{m}{2^n}f(a) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)f(b) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}f(a) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(b) \end{aligned}$$

gerçekler; yok eğer $k = 2m + 1$ biçiminde tek bir tamsayı ise, bu kez yukardaki değer için, (4)
kullanılarak önce

$$\begin{aligned} &= f\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{m}{2^n}a + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)b\right) + \left(\frac{m+1}{2^n}a + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right)b\right)\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{m}{2^n}a + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)b\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{m+1}{2^n}a + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right)b\right) \end{aligned}$$

ve sonra n -inci adım varsayımı kullanılarak

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^n}f(a) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)f(b)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m+1}{2^n}f(a) + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right)f(b)\right) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}f(a) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(b) \end{aligned}$$

geçerli olur. Demek ki, (5) eşitsizlikleri tüm n -inci diadik kesirleri için geçerlidir. O halde, şunu kanıtlamış bulunuyoruz: Herhangi bir α diadik kesri için

$$f(\alpha a + (1 - \alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)$$

olur. Bu kanıtlamada kullanılan akıl yürütmelerin tümünü, herhangi $x, y \in [a, b]$ çifti için yinelersek, bu kez herhangi bir α diadik kesri için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (5')$$

elde edilir. Şimdi herhangi bir (diadik kesir olması gerekmeyen) $\alpha \in (0, 1)$ alınsın. A kümesi $[0, 1]$ aralığında yoğun olduğu için (bu gerçek yukarda gözlenmişti, anımsıyoruz, değil mi?) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ gerçekleyen, tüm terimleri diadik kesirler olan yakınsak bir $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi var olduğundan, f sürekli olduğu için, $x, y \in [a, b]$ ne olursa olsun,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n x + (1 - \alpha_n)y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(y)) \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

dışbükeylik koşulu geçerli olur. Son eşitsizliğin, (5') koşulunun dışında, geçerli olması için gerekçesini sanıyorum biliyorsunuz. Evet, yoğun kümelerle yeterince ilgilendik. İyi çalışmalar sevgili okurlar.

KAYNAKLAR

- [1] N. Ergun; Gerçel sayılarda dokuz temel eşdeğerlik, Matematik Dünyası, Aralık 1994, 6-10.
- [2] Y. Avcı-K. Alınacak-N. Ergun; Üç analiz problemi, Matematik Dünyası, Eylül 1999, 2-12.

EĞLENCELİ MATEMATİK SORUSUNUN ÇÖZÜMÜ...

Matematik Dünyası'nın 7.cildinin 3.sayısının 24.sayfasında aşağıdaki eğlenceli matematik sorusunu sormuştuk:

Farklı harfler farklı rakamları ve aynı harfler aynı rakamları göstermek üzere,

$$\frac{fut}{bol} = 0, golgolgol \dots$$

eşitliğini gerçekleyen rakamları bulunuz.

Okuyucularımızdan *Ali Cevahir* (Antalya) bize bir yanıt gönderdi:

$$\frac{476}{918} = 0,518518518 \dots$$

GENEL MATEMATİK'TE (CALCULUS) ÖĞRENCİ HATALARI

Behiye Ubuz

Orta Doğu Teknik Üniversitesi,

Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, 06531-ANKARA

Giriş

Okullarda matematik öğrenmede/öğretmede pek çok güçlüklerin olduğu bilinmektedir. Söz konusu güçlüklerin nedenlerinden biri de hatalarla ilgilidir. Hatalar, basit olarak, öğrencilerin başarısızlıkları olarak değil, öğrencilerin yetersiz veya yanlış kavramsal anlamalarının belirtileri olarak düşünülmelidir. Diğer bir deyişle, hatalar, yanlış inanışlar sonucu ortaya çıkan davranışlar veya işlemlerdir. Bu nedenle matematik öğretmeni olarak bizler, öğrencilerimizin konuları kavramaları ve anlamaları ile ilgilenmek durumundayız. Yanlış kavrama veya anlama, eğer düzeltilmezse, öğrencinin bütün okul hayatı boyunca yapacağı hataların nedeni olabilir. Bunların çoğu sarsıntı doğuran deneyimlere, hayal kırıklığına ve matematiğe karşı olumlu bir tutum geliştirmemelerine neden olabilir. Bu incelemede öğrencilerin üniversite birinci sınıfta okudukları Genel Matematik (calculus) 'te yaptıkları hatalar ve yanlışlar açıklanacak, bu konuda öneriler sunulacaktır.

Genel Matematik, ileri düzeyde matematiğin başlangıcı, ve ileri konuların anlaşılmasında temel oluşturmaktadır. Son yirmi yıl, öğrencilerin Genel Matematiği kavramsal olarak anlamaları ile ilgili yayınlarda artışa tanık olmuştur (Monaghan, 1986; Orton, 1980; Selden, Mason and Selden, 1989; Tall, 1986; Ubuz, 1996). Bunun başlıca nedenleri, (i) ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim, (ii) kavramsal anlamadaki yetersizlik ve (iii) ileri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmektir. Ezbere öğrenme, formüllerin ve kuralların hesaplama sorularını çözmek için hatırlanmasına bağlıdır. Kavramsal anlama veya kavram oluşumu ise, kavramaların gelişimi ve onların matematiğin temel ilkeleri ile ilişkileri çerçevesinde toplanmaktadır.

Genel Matematik'te çeşitli hatalara ve bunların kaynaklarına geçmeden önce, "anlama" ve "kavramsal yanlış" 'nın ne olduğunun bilinmesi gerekir. Bir şeyi "anlamak" demek, onun uygun şema veya taslak içinde özümlemesidir. "Kavramsal yanlış" ise, bir kişinin bir konuyu veya problemi kendisine mantıklı gelecek şekilde kavraması, fakat bu alandaki uzman bir kişinin kavramsal anlaması ile çelişki içinde olmasıdır.

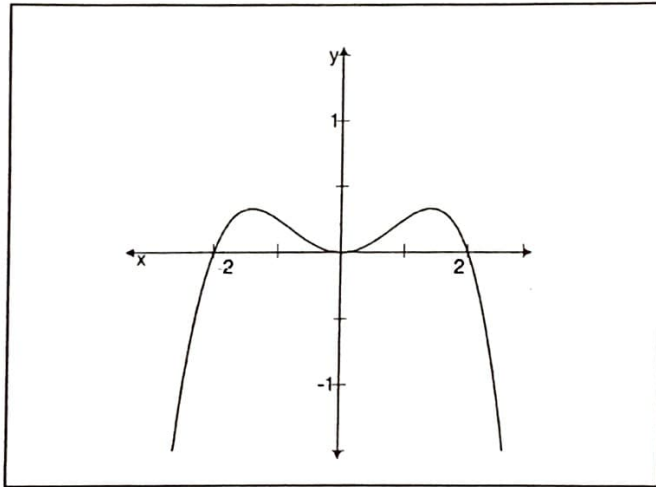
Genel Matematik' te Öğrenci Hatalarının Sınıflandırılması

Ubuz (1996) tarafından İngiltere'de Genel Matematik dersini alan birinci sınıf mühendislik öğrencileri üzerinde yapılan çalışma, ortaya çıkan hataların aşağıda verilen nedenlerden dolayı doğabileceklerini ortaya koymuştur:

1. *Şekillerin, kavramların yerine konulması:* Bu tür kargaşa daha çok kavramlar açıklanırken çizilen şekillerin anlamının özümlememesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, türevin geometrik anlamını anlatırken çizilen şekil veya resimden, teğetin eğimi yerine teğetin denkleminin türev olarak algılanması gibi. Öğrencilere "Türev'in anlamı nedir?" diye sorulduğunda, öğrencilerden şöyle bir cevap alınmıştır: "Geometrik olarak bir fonksiyonun türevi o noktadaki teğettir". Oysa doğru yanıt olarak, "türev bir fonksiyonun her noktadaki eğimini gösteren eğim fonksiyonudur", denmesi beklenir.
2. *Tanımların içeriklerinin anlaşılabilmesi:* Bu tür bir kargaşa, verilen tanımın bir bütün olarak anlaşılabilmesinden kaynaklanmaktadır. Genel Matematik kitaplarında verilen şu tanım, "eğer bir nokta diğer bir sabit noktaya yavaş yavaş yaklaşırsa, bu iki nokta arasındaki sekant doğrusunun eğimi küçük miktarlarda değişir ve esasen sabit sınır değerine yaklaşır", bazı öğrenciler tarafından "sekant doğrusunun eğimi küçük değere yaklaşıyor" olarak algılanıyor. Örneğin, öğrencilere "Türev'in anlamı nedir?" ve " $\frac{\delta y}{\delta x}$ 'in anlamı nedir" gibi sorular sorulduğunda, sırasıyla, şu cevaplar

alınmıştır: “Türev küçük bir değişikliktir” ve “ $\frac{\delta y}{\delta x}$ eğimde küçük değişikliktir”. Oysa, $\frac{\delta y}{\delta x}$, “ $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{x+h-x} = \frac{y \text{ 'deki küçük değişme}}{x \text{ 'deki küçük değişme}}$ ” veya “bir sekant doğrusunun eğimi” olarak anlaşılmalıdır.

3. *Aynı kapsam ve çerçevede sıklıkla oluşan ilgili sembollerin ayırt edilememesi:* Bu tür kargaşa özellikle bir kavramı açıklarken kullanılan birbiriyle ilgili sembollerin ayırt edilememesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, $\frac{\delta y}{\delta x}$ ile $\frac{dy}{dx}$ ve $\sum f(x)\delta x$ ile $\lim \sum f(x)\delta x$ karıştırılmaktadır. Bu semboller ikişer ikişer sırayla ‘türev’ ve ‘integral’ kavramlarının tanımında birlikte kullanılmaktadır.
4. *Grafiksel bilgilerin sembolik gösterimlerde kullanım zorlukları:* Aşağıda (5) ‘te açıklandığı üzere, öğrenciler bazı durumlarda bilinmeyi bulmaya çalışıyorlar, fakat bunu yaparken grafiksel ve sembolik gösterimler arasında bağlantı kuramamaktadır. Örneğin, aşağıda grafiği verilen, fakat denklemi bilinmeyen $(y = \left(\frac{-x^4}{12}\right) + \left(\frac{x^2}{3}\right))$ verilmiyor) bir grafiğe bakarak türevin grafiğinin çizilmesi istendiğinde öğrenci ilk önce fonksiyonun denklemini bulmaya çalışıyor.



Bu süreçte, öğrenci fonksiyon denklemini $y = \left(\frac{-x^4}{12}\right) + \left(\frac{x^2}{3}\right)$ yerine, çoğu kez $y = x^4$ olarak düşünüyor. Oysa, verilen grafik bu düşünülen fonksiyon denkleminde farklı özellikler göstermektedir. Verilen grafik eğimi sıfır olan üç tane nokta gösterirken, $y = x^4$ denklemi eğimi sıfır olan yalnızca bir nokta göstermektedir.

5. *Bilinmeyi bilme eğilimi:* Bu tür yaklaşım daha çok yorum gerektiren etkinliklerde ortaya çıkmaktadır. Çünkü, kişiler işlemsel etkinlikleri yorumsal etkinliklere göre daha kolay bulmakta; işlemsel etkinliklere okullarda daha fazla ağırlık verilmektedir. Örneğin, yukarıda (4) ‘te belirtildiği gibi, bazı öğrenciler fonksiyon denklemi verilmeyen bir grafikte türevin grafiğini çizerken, verilen grafiği yorumlama yerine bilinmeyen denklemi bulmaya çalışıyorlar.
6. *Dar veya sınırlı görüş açısı:* Bu tür sınırlı görüş açısı, öğrencilerin daha çok belirli uygulama örnekleri üzerinde çalışmaları ve farklı uygulama örnekleri üzerinde çalışmamalarından kaynaklanmaktadır. Böylece öğrenciler belirli uygulama örnekleri içinde bulunan özellikleri pekiştirebilmekte ve gerektiğinde hatırlayıp kullanabilmektedir. Örneğin, bazı öğrencilerin dönüm noktasıyla ilgili sahip olduğu kavramsal imge, bir eğri üzerinde bulunan ve x-eksenini kesen noktadan başka noktayı içermemektedir. Halbuki, dönüm noktası fonksiyonun grafiği üzerinde bulunan başka herhangi bir nokta da olabilir.

7. *Özel bir durumun uygun olmayan bir şekilde genelleştirilmesi:* Bu tür kargaşa daha çok bir kavram açıklanırken belirtilen özel bir durumun, kavram bilgisinin bütünü olarak algılanmasından kaynaklanmaktadır. Burada aynı zamanda, yukarıda (3)'te belirtilen durum da söz konusudur. Örneğin, bir fonksiyonun bir noktadaki türevi ile türev fonksiyonunun aynı olarak algılanması gibi. Oysa, bir fonksiyonun bir noktadaki türevi ve türev fonksiyonu birbirinden farklıdır.
8. *Bir sözcüğün bir başka sözcük ile uygun olmayan bağlantısı:* Bu tür kargaşa sözcüklerin yüzeysel benzerliklerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, "azalan" ve "eksi" gibi. Bir fonksiyon eksi değer alıyorsa azalan olarak düşünülüyor. Benzer biçimde, "artan" ve "artı" için de aynı durum söz konusudur.

Sonuç ve Öneriler

Bu ve diğer çalışmalar göstermiştir ki:

1. Öğrenciler, Genel Matematik yöntemlerini, tamamen zayıf kavram imgeleri üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğreniyor. Kavramların gelişimi sürecinde çıkarımların yapılmasına engel olan en önemli konuların başında fonksiyon ve limit kavramları gelmektedir.
2. Gözde canlandırma nadir olarak yapılmakta ve eğer yapılırsa da, görsel/grafiksel ve çözümsel/cebirsal gösterimler arasında bilişsel bağlantı büyük bir problem yaratmaktadır.

Yukarıdaki bulgu ve yorumların karşılaştırılmasını sağlamak amacıyla ülkemizde yapılan çalışmalara rastlanmadığından, temsil edileceği daha geniş örneklem veya konu üzerinde yürütülen benzer çalışmaların yapılmasına ihtiyaç vardır. Bu tür çalışmalar ile matematik konularını öğrenmede kültürler arasında ne gibi farklar olduğu ortaya çıkacaktır. Bu konular ile ilgili yapılmakta olan araştırmalar sürmekte olup elde edilen bulgular daha sonra rapor edilecektir.

KAYNAKLAR

- Monaghan, J. (1986): *Adolescent's Understanding of Limits and Infinity*. Unpublished Ph.D Thesis, University of Warwick.
- Orton, A. (1980): *A Cross-Sectional Study of the Understanding of Elementary Calculus in Adolescents and Young Adults*. Unpublished Ph.D Thesis, University of Leeds.
- Selden, J., Mason, A. and Selden, A. (1989): "Can average students solve nonroutine problem". *The Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45 - 50.
- Tall, D. (1986): *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Unpublished Ph.D Thesis, University of Warwick
- Ubuz, B. (1996): *Evaluating the Impact of Computers on the Learning and Teaching of Calculus*. Unpublished Ph.D Thesis, University of Nottingham.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Auden, W. H. (1907-1973): "Matematikçilerin pek çoğu ne kadar da mutludur! Kendisi yalnızca eşdeğerleriyle yargılanır, ve burada standart öylesine yüksektir ki hiç bir çalışma arkadaşı ya da rakibi hak etmediği bir saygınlığı kazanamaz."

Bell, Eric Temple (1883-1960): "Öklit, bana varsayımlar olmaksızın kanıtlamanın yapılamayacağını öğretmişti. O halde, herhangi bir tartışmada önce varsayımları araştırınız."

Bohr, Niels Henrik David (1885-1962): "Uzman, çok dar bir alanda yapılabilecek tüm hataları yapmış olan kişi demektir."

PARADOKSLAR...

Ahmet Dervişoğlu-Reşat Satılmış
Yılmaz Koleji, ANTALYA

"Bu sayfada yazılı hiç bir şeyi okumayın." Buna benzer paradokslar ya kendileriyle çelişiyor gibi görünürler; anlamsız ya da şaşırtıcı sonuçlara varırlar ya da kısır döngü biçimindedirler. Paradokslar yüzyıllar boyunca insanları büyülemiş ve hayrete düşürmüştür. Paradokslar; edebiyat, bilim ve matematikten günlük yaşama kadar çok değişik alanlarda rastlanır. Ne tür bir paradoks olursa olsun, ortaya çıkan sorular ve karışıklık hem ilginç hem de eğlendiricidir. Özellikle matematiksel paradokslar yeni buluşlara yol açabilir.

EPİMENİDES PARADOKSU Antik çağdan beri bilinen bir paradoksun ilk ifadesi şöyle yapılmıştır: Bütün Giritliler yalancıdır, EPİMENİDES de Giritlidir. EPİMENİDES "Ben yalan söylüyorum" diyor. EPİMENİDES doğru söylüyor mu?" Hayır, çünkü Giritlidir; o halde yalancıdır; ama "Ben yalan söylüyorum" derken yalan söylüyorsa, o zaman doğru söylüyor. Bu durumda çelişki kaçınılmazdır.

İKİYE BÖLME PARADOKSU: Yolcu, belirlirli bir uzaklığa gidecektir. Önce gideceği yolun yarısını; sonra kalan yolun yarısını; sonra kalanın yarısını, ... yürümek zorundadır. Bu durumda hiç bir zaman gideceği yolun sonuna ulaşamayacaktır...

EUBLİDES PARADOKSU: Yunanlı düşünür EUBLİDES (M.Ö. 4. YY) hiç bir zaman bir kum yığını oluşturmamaya çalışmış. Ona göre, bir kum tanesi, bir kum tepesi ya da yığını değildir. Ve eğer bir tanesinin üstüne başka bir kum tanesi konursa, bunlar da bir yığını oluşturmaz. Eğer başlangıçta kişinin bir kum yığını yoksa, elinde olana bir ekleyerek bir yığın oluşturmaz; bu nedenle hiç bir zaman bir kum yığınına sahip olunamaz.

WALT KELLEY PARADOKSU: "Düşmanla karışlaştık ve o biziz."

OSCAR WILDE PARADOKSU: "Günah işlemenin tek yolu onu kabul etmektir."

DON KİŞOT PARADOKSU: Sanço Panço, Barataria adasının yöneticisidir. Adaya gelen herkes niçin geldiğini belirtmek zorundadır:

Doğruyu söyleyenler, serbest kalacak; yalan söyleyenler ise asılacaklardır. Günün birinde bir yolcu gelir ve "Ben asılmak için geldim" der. Şimdi Sanço ne yapmalıdır?

ANONİM BİR PARADOKS: "Bu açıklamayı yok sayın."

BERNARD RUSSELL 'IN PARADOKSU: Bernard RUSSELL bir gün MOORE 'a şunu sorar: "Söylediğin her şey doğru mudur?" MOORE biraz düşünür ve yanıt verir: "Hayır." Sizce, MOORE yalancı birisi midir?

SÜRPRİZ SINAV PARADOKSU: Pazartesi günü bir profesör sınıfa şöyle söylüyor: "Bu hafta içinde önceden öngörülemez bir günde sürpriz bir sınav yapacağım. Sınav günü bugün olabilir, salı, çarşamba, perşembe ya da cuma günü olabilir. Sınav günü sabahı sınıfa geldiğinizde o gün sınav olacağını bilmeyeceksiniz." Bunu duyunca şuna karar verdim: "Profesör bu hafta sınav yapamaz." Acaba bu sonuca hangi mantıkla vardım?

BERBER PARADOKSU: Bir köyde bir berber kendi tıraş olamayan herkesi tıraş eder. Berberi kim tıraş edecek?

CANTOR PARADOKSU: Kümeler kuramının babası Georg CANTOR (1845-1918) bir kümenin tüm altkümelerinin, başlangıçtaki kümeden daha çok elemana sahip olduğunu göstermiştir. Bu özellik bütün kümelerin kümesi için de geçerli midir?

YALANCININ OYUNU PARADOKSU: Bir adam hapistedir. Hücrenin iki kapısı ve her kapıda birer gardiyan vardır. Kapıların biri özgürlüğe açılır, öbürüyse sahtedir. Gardiyanın biri her zaman doğruyu, diğeryse her zaman yalan söyler. Onları tanımayan mahkumun, özgürlük kapısını öğrenmek için yalnızca bir soru sorma hakkı vardır. Doğru olan yanıtı alabilirse, özgürlüğüne kavuşacaktır. Nasıl bir soru sorması gerekir?

VELASQUEZ ve ESCHER 'in TABLOLARI: Bunlar "otoreferans" paradokslarının resimleridir. Escher 'in elleri kendini çizen elleri çiziyor. Bu resim sonsuz bir dizi şeklinde yorumlanabilir. VELASQUEZ yalnızca aynadaki görüntülerini gördüğü insanların portrelerini çizen ressamı resmediyor; çocuklar tablonun seyircileri olan bize bakıyorlar. O halde, konu, tablonun bizzat kendisidir.

ROLLE TEOREMİNİN BİR GENELLEŞMESİ ÜZERİNE

Uygar Sümbül

Bilkent Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA

Analizde, aşağıda ifade ettiğimiz ve klasik Rolle Teoremine denk olan teorem çok meşhurdur:

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = 0 = f(b)$ ise, $f'(x_0) = 0$ olacak biçimde en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Geometrik olarak, Rolle Teoremi, yukardaki koşulları sağlayan fonksiyonun grafiğinin (a, b) açık aralığındaki en az bir noktada apsis eksenine paralel teğete sahip olacağını söyler.

Şimdi, Rolle teoreminin aşağıdaki bir genelleşmesini verip ispatlayalım:

Teorem 1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve açık (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Ayrıca, $f(a) = 0 = f(b)$ eşitliği sağlansın. Bu takdirde, herhangi bir $P(x)$ sürekli fonksiyonu verildiğinde,

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot P(x_0) \quad (1)$$

sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Sonuçlar:

(1) $P(x) \equiv 0$ alırsak, Rolle Teoremine denk olan yukarıdaki teorem elde edilir.

(2) $P(x) \equiv 1$ alırsak, $f'(x_0) = f(x_0)$ sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

(3) $P(x) = f(x)^{1998}$ alırsak, $f'(x_0) = f(x_0)^{1999}$ sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Teorem 1'in İspatı: $P(x) = Q'(x)$ eşitliğini sağlayan bir $Q(x)$ fonksiyonu alalım. ($Q(x)$ 'e, bilindiği gibi, $P(x)$ 'in ilkel fonksiyonu veya belirsiz integrali denilir.) Şimdi şöyle bir $F(x)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$F(x) = f(x)e^{-Q(x)} \quad (2)$$

$f(a) = 0 = f(b)$ olduğuna göre $F(a) = 0 = F(b)$ 'dir. O halde klasik Rolle Teoremine göre,

$$F'(x_0) = 0 \quad (3)$$

sağlanacak biçimde en az bir $x_0 \in (a, b)$ bulunacaktır. F fonksiyonunun (2) 'deki ifadesini (3) 'de gözönüne alırsak,

$F'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \cdot e^{-Q(x_0)} - f(x_0) \cdot Q'(x_0) \cdot e^{-Q(x_0)} = 0$ olur. $e^{-Q(x_0)} \neq 0$ olduğuna göre yukarıdaki eşitliğin her iki yanını $e^{-Q(x_0)}$ ile bölebiliriz. O halde, $Q'(x_0) = P(x_0)$ olduğuna göre,

$$f'(x_0) - f(x_0) \cdot Q'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot P(x_0)$$

eşitliğini elde ederiz.

Aşağıdaki teorem, Teorem 1 'in koşullarını zayıflatmakla elde edilir:

Teorem 2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) 'de türevlenen ve bir C sabiti için $f(a) = C = f(b)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde herhangi bir $P(x)$ sürekli fonksiyonu için,

$$f'(x_0) = (f(x_0) - C) \cdot P(x_0)$$

sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

İspat: $\varphi(x) = f(x) - C$ diyelim. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ olur. O halde Teorem 1'e göre

$$\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) \cdot P(x_0)$$

sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ vardır. Bu sonuncu eşitlikten ise ($\varphi(x)$ yerine $f(x) - C$ koymakla)

$$f'(x_0) = (f(x_0) - C) \cdot P(x_0)$$

elde edilir.

Teorem 1'in bir sonucunu daha söyleyelim:

Sonuç: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir iki fonksiyon olsunlar. Ayrıca, her $x \in (a, b)$ için $f(x) \neq g(x)$ olsun. Bu takdirde, eğer $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ ise, herhangi sürekli $P(x)$ verildiğinde

$$\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{f(x_0) - g(x_0)} = P(x_0)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ vardır.

İspat: $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ diyelim. f ve g üzerine konulmuş koşullardan $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ olur. O halde Teorem 1'e göre $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) \cdot P(x_0)$ sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ vardır. Buradan da,

$$f'(x_0) - g'(x_0) = (f(x_0) - g(x_0)) \cdot P(x_0) \text{ ve } \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{f(x_0) - g(x_0)} = P(x_0)$$

elde edilir.

Teşekkürler: Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, değerli yardımlarından dolayı, Doç. Dr. İlham Aliyev'e şükranlarımı sunuyorum.

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 500.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun bir rneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, söz konusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3,4	;	Cilt 2	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 3	Sayı: 5	;	Cilt 4	Sayı: 1,3,4,5
Cilt 5	Sayı: 1,5	;	Cilt 6	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4,5	;	Cilt 8	Sayı: 1,2,3,4

PROBLEM ÇÖZME STRATEJİLERİ

Albert Erkip

Sabancı Üniversitesi, İSTANBUL

Problem çözerken bilgilerimizi, deneyimlerimizi ve en başta (çoğu zaman istemeyerek de olsa) aklımızı kullanır, bilgi ve deneyimlerimizin öğrettiği bir takım yöntemler uygularız. Matematik problemleri bu bakımdan diğer problemlerden farklı değil; bilgi olarak matematiksel “doğru” lar, yani teoremler var. Tümevarım gibi matematik yöntemleri ile matematiksel yapılar ve gösterimler bize açık ve kesin bir ifade ortamı sağlıyorlar. Bunun da ötesinde problem çözmenin, pek öğretilemeyen, zaman içinde insanın kendi kendine keşfettiği bir takım stratejileri var. Bu yazıda bu stratejilerden bazılarını özellikle kolay örneklerle sıralamaya çalıştım. Bu sıralama çok da kesin (yani “matematiksel”) değil ama sanırım bir fikir veriyor. Yazıdaki örnekler çeşitli kaynaklardan toplanmış, folklorik denebilecek problemler. Bir ekleme: Örneklerdeki çözümlere hangi yollardan erişildiği, problemi ilk çözenin ne düşünüp de bu yola başvurduğu gibi sorulara burada yanıt aramayın. O ayrı bir konu.

İndirgeme

Problem adım adım irdelenerek çözüme ulaşılır. Kolay bir örnek $3x + 5 = 8$ denkleminin çözümünde görülür, adım adım giderek önce $3x = 8 - 5 = 3$ ve sonra da $x = 3/3 = 1$ bulunur. Ders kitaplarında çoğu bu tür problemlere yer verilirse de aynı düşünce şekli daha karmaşık ve keyifli problemlerde de çok işe yarar.

2 vezir, 3 kavuk

Padişah 2 vezirini çağırıp, onlara biri ak ikisi kara 3 kavuk gösterip kara kavukları vezirlerin başına yerleştirir. İki vezir de kendi başındaki kavuğun rengini bilmez, ancak karşısındakinin başındaki kavuğu görür. Başındaki kavuğun rengini ilk bilen başvezir olacaktır. Ne olur?

Çözüm: Vezirlerin daha akıllı olanı şöyle düşünür: “Eğer benim başımda ak kavuk olsaydı, karşımdaki aptal değil ya, başka ak kavuk kalmadığını anlayıp başındakinin kara olduğunu hemen söylerdi. Hiç bir şey söylemediğine göre benim kavuğum ak olamaz.”

Dikkat ederseniz, akıllı vezir çaktırmadan olmayana ergi yapıyor. “Şöyle olsaydı öyle olurdu; öyle olunca da böyle olacaktı. Ama böyle olmadığını görüyorum (ya da, böyle olamayacağını biliyorum-bunun adına da çelişki deniyor-). O halde şöyle değildir.” Bu şekildeki irdeleme zincirlerini günlük hayatta bile kurarız ama “olmayana ergi” adını kullanınca nedense çoğumuz paniğe kapılır.

İrdeleme zincirlerini aşağıdaki problemdeki gibi iyice uzatmak mümkün:

40 çiftin öyküsü

Bir köyde 40 karı-koca yaşar. Köyün geleneklerine göre, bir erkek eşini aldatınca kendi eşinin dışındaki tüm kadınlar olayı hemen öğrenirler. Öte yandan, eşinin kendisini aldatığının farkına varan kadın, onu ertesi sabah güneş doğarken öldürmek zorundadır. Bir gün köyün papazı, vaazında “Bu köyde karısını aldatan bir koca olduğunu öğrendim” der. Aslında köyün tüm erkekleri eşlerini aldatmaktadır. Ne olur?

Çözüm: Problemi önce basitleştirelim; köyde sadece tek bir erkek eşini eşini aldatıyor olsun. Aldatanın eşi papazın vaazını duyunca “Başkası olsaydı bilmem gerekirdi.” diye düşünerek aldatılanın kendi olduğunu hemen anlayacaktır. Şimdi bir adım ilerleyip sadece iki erkeğin aldattığı probleme bakalım. Aldatılan eşlere A ve B diyelim. İlk gün A, B ’nin, B ise A ’nın kocasını öldüreceğini düşünür. Ancak ertesi sabah hiç bir ölüm olmadığını görünce, iki kadın da aldatan koca sayısının birden fazla olduğunu, bu durumda da bilmedikleri erkeğin kendi kocaları olması gerektiğini anlarlar. İrdelemeye devam edelim; sadece üç aldatan kocanın olduğu problemde ilk iki gün herkes bekler, ancak üçüncü günün sabahı beklentileri gerçekleşmeyen eşler kendi kocalarının da aldatıldığını farkına

varırlar. Böyle devam edince 40 erkekli problemin çözümü de bulunur: İlk 40 gün hiç bir şey olmaz, ancak 41-inci sabah güneş doğarken kıyamet kopar, tüm kadınlar kocalarını öldürürler.

Bu son problemde irdeleme zinciri bayağı uzun, köydeki erkek kıyımının 40-ıncı günde mi 41-inci günde mi olduğunu karar vermek için dikkatli bir sayma (ve doğru genelleme) gerekir. İşte burada "matematik" bize yardımcı olur. Tümevarım bu tür uzun irdelemeler için biçilmiş kaftandır.

Tam n erkeğin eşini aldattığı $E(n)$ problemini düşünelim ve " $E(n)$ de ilk n gün hiç bir şey olmaz, $(n+1)$. sabah güneş doğmadan tüm aldatılan kadınlar kocalarını öldürür" önermesine $P(n)$ diyelim. Yukarıda $P(1)$ 'in doğru olduğunu gösterdik (tümevarımın başlama adımı). Şimdi $P(n)$ önermesinin doğru olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı) ve $(n+1)$ aldatan erkek problemine bakalım. Her bir aldatılan kadın (kendi durumlarını bilmediği için) problemi " $E(n)$ " sanıp (tümevarım varsayımından dolayı) bildiği aldatılan kadınların kocalarını $(n+1)$ -inci sabah öldürmelerini bekler. Ancak o sabah bir şey olmadığını görünce kendi durumunun farkına varır (problem $E(n)$ değilse eşini aldatan en az $(n+1)$ erkek vardır, bilmediği erkek de ancak kendi kocası olabilir) ve ertesi $((n+2)$ -nci) sabah kocasını öldürür. Bu son dediğimiz $P(n+1)$ önermesinin kanıtı, yani tümevarım tamamlandı. Bu son kanıtta matematiğin bir başka cilvesini de gördük. Bazı problemleri genellenmiş hali, problemin kendisinden daha kolay olabilir; en azından, genelleme, çözüm için iyi bir yola yönelmemizi sağlar.

Dönüştürme, Şekil Değiştirme

Şekil değiştirme matematikçilerin sık başvurdukları bir oyundur; problemi evirip çevirsiniz, sorulan şeyi değil sorulmayanı, daha doğrusu bulacağınızı kestirdiğiniz şeyi ararsınız. Sonunda bambaşka bir problem çıkar, onu çözersiniz. (Siz ne sorarsanız sorun, matematikçi kendi bildiğini okuyacaktır!) Ama bu son çözdüğünüz ilk sorulanı yanıtlayın.

Önce indirgeme ile çözebileceğimiz kolay bir örneğe bakalım:

Tenis turnuvası (yenilen eleniyor)

100 tenisçinin katıldığı bir turnuvada yenilen elenir. Her turda elenmeyip kalanlar kura ile eşleşir, eşlemede tek kalan olursa bir sonraki tura geçer. Son kalan şampiyon olur. Turnuvada kaç maç yapılmıştır?

Çözüm: Her turda yapılan maç sayısını, elenenleri ve kalanları bir tabloda gösterelim:

Tur	Maç sayısı	Elenen	Kalan
1	50	50	50
2	25	25	25
3	12	12	13
4	6	6	7
5	3	3	4
6	2	2	2
7	1	1	Şampiyon

7 turda toplam 99 maç yapılmıştır.

Tenis turnuvası (iki kez yenilen eleniyor)

100 tenisçinin katıldığı bir turnuvada iki kez yenilen elenir. Her turda elenmeyip kalanlar kura ile eşleşir, eşlemede tek kalan olursa bir sonraki tura geçer. Son kalan şampiyon olur. Turnuvada kaç maç yapılmıştır?

Çözüm: Yukarıdaki gibi bir tablo yapmaya çalışırsak ikinci turdan sonra işler karışır (ilk turda yenilen bir tenisçi ikinci turda yenilmeyebilir), kimin ne zaman eleneceğinin hesabını tutmak oldukça zordur. Kaç maç yapıldığına değil kaç yenilgi alındığına (aslında aynı şey) bakarsak iş kolaylaşır. Turnuva sonunda 99 tenisçi elenecektir; her biri tam iki kez yenileceğinden bu 198 yenilgi eder. Ya

şampiyon hiç yenilmeden turnuvayı kazanır, toplam 198 yenilgi vardır, ya da şampiyon tam bir maç kaybetmiştir, toplam 199 yenilgi alınmıştır. Sonuç olarak turnuva 198 veya 199 maç sürer.

Bu ikinci yöntem "yenilen eleniyor" türü turnuva sorusunu da turları sıralamaya gerek bırakmadan çözer. İşi karıştırmak için tablo yapıp turları saymanın pek kolay işlemediği tersine problemler de üretebiliriz:

"Yenilen elenir" türü bir turnuvada tam 75 maç yapılmıştır. Turnuvaya kaç tenisçi katıldı?

Vagonlara dağılma

3 vagonlu bir trene 20 yolcu biner. Yolcular 3 vagona kaç değişik şekilde dağılabilir?

Problem bu haliyle (pek çok matematik sorusunun ilk ortaya atıldıkları zaman olduğu gibi) pek açık değil, iki farklı yorum (yani iki farklı problem) akla geliyor:

1. *Yolcuların kimliği vardır, yani kimin hangi vagona oturduğu önemlidir.*

Çözüm: Soruya bir "dağılma" problemi yerine "seçme" problemi olarak bakalım. Her yolcu 3 vagonun birini seçecektir. 20 yolcunun yapabileceği toplam seçme sayısı kaçtır? Yanıt $3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^{20} = 3486784401$ olarak bulunur. (3^{20} sayısını elde etmenin başka bir yolu $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ şeklindeki "seçim 20-li" 'lerine bakmaktır. Burada a_j , j -inci yolcunun seçtiği vagon numarası, yani 1, 2 veya 3 sayılarından biri olacaktır. Bu tür tam 3^{20} tane 20-li vardır.)

2. *Yolcuların kimliği yoktur, yani sadece 1., 2. ve 3. vagondaki yolcu sayıları önemlidir.*

Çözüm: Olayı değiştirelim; önce vagonları ayıran duvarları kaldırıp (tren uzun bir tek salon haline gelecektir), 20 yolcu tren boyunca tek sıra oturtalım. Yolcuların kimliği önemli olmadığından kimin hangi sırada oturduğu farketmez. Şimdi vagonları ayıran 2 duvarı (birinci-ikinci vagon arasındaki ile ikinci-üçüncü arasındaki duvar) tek tek bu yolcuların en önüne, arasına veya en arkasına yerleştirelim. Yolcular 3 vagona dağılmış oldular! Demek ki aradığımız dağılım sayısı, "2 duvarı kaç değişik şekilde yerleştirebiliriz?" sorusunun yanıtı ile aynıdır. Bir adım daha gidelim: Yolcuların yerine beyaz tavla pulları, duvarların yerine de da siyah tavla pulları koyalım. Elimizde tek sıra duran 22 pul oldu; bunların ikisi siyah, yirmisi beyaz. Kaç farklı dağılım vardır? Ya da, 22 puldan ikisini (siyah olanları) belirlemek istiyoruz, kaç farklı seçim yapabiliriz? Yanıtın $\binom{22}{2} = 231$, yani 22 'nin 2 'li kombinasyonlarının sayısı olduğu kolayca görülüyor.

Vagonlara dağılma problemi hakkında son bir nokta; problemin iki yorumu daha mümkün, bunların da çözümünü okurlara bırakalım:

3. *Yolcuların kimliği vardır ancak vagonlar numaralı değildir; yani kimin kiminle oturduğu önemlidir ama hangi vagona oturdukları önemli değildir.*

4. *Yolcuların kimliği yoktur ve vagonlar numaralı değildir, yani sadece 20 birbirinin aynı elemanın 3 kümeye kaç farklı şekilde ayrılabilirliğini arıyoruz.*

Simetri

Problemde simetri ararsanız, bulursanız da simetriden çözümünü oluşturursunuz. Şansınız varsa yöntem işler. Tabii ki matematikçiler simetri deyince yalnızca geometrik anlamını düşünmüyorlar, simetri aslında bir tür eşleme. Nesneleri ikiye ikiye gruplayıp bunlara "simetrik" diyorsunuz.

Para oyunu

İki kişi ellerinde 50 bin liralık madeni paraları bir dosya kağıdının üzerine sırayla, birer birer ve öncekilere değmeden yerleştirmeye çalışırlar. Parasını yerleştirecek yer bula-mayan oyunu kaybeder. Ne olur?

Çözüm: Oyunu ilk oynayan kazanır. Kazanmak için parasını köşegenlerin kesim noktasına (daha doğrusu, paranın merkezi kağıdın merkezine denk gelecek şekilde) yerleştirir. Sonraki her hamlede ilk oyuncu parasını, ikincinin son yerleştirdiği paranın merkeze göre tam simetriği olacak şekilde koyar. Oyunun herhangi bir anında ikinci oyuncu parasını koyacak yer bulabiliyorsa, bir sonraki hamlede birinci oyuncu da o yerin simetriğini boş bulacaktır.

Çarpan sayısı tek mi, çift mi?

Pozitif bir k tamsayısının çarpan sayısı tek midir, çift midir?

Çözüm: Çarpan ile, k 'yı tam olarak bölen pozitif tamsayıları kastediyoruz, örneğin 6 'nın çarpanları 1, 2, 3 ve 6 'dır. 6 'nın 4 tane (yani çift sayıda) çarpanı vardır.

a , k 'nın bir çarpanı ise, $\hat{a} = \frac{k}{a}$ da bir çarpanıdır. Burada a ile $\hat{a}$ arasında bir eşleme (simetri) sözkonusudur; her a için verdiğimiz bağıntıyla belirlenen tek bir $\hat{a}$ vardır. Çarpanları ikiye ikiye grupladık, o halde toplam çarpan sayısı çift mi? Burada biraz dikkat etmek gerekebilir; gerçekten çarpanları ikiye ikiye gruplara ayırdık mı? a ile $\hat{a}$ 'nın farklı iki sayı olduğundan emin miyiz? Bu iki sayının aynı olması, ancak $a = \hat{a} = \sqrt{k}$ durumunda, yani (a tamsayı olacağından) k bir tam kare ise mümkündür. Sonunda problemi çözdük: Eğer k bir tam kare ise, çarpan sayısı tektir; k bir tam kare değilse, çarpan sayısı çifttir.

"Çarpan" ile pozitif veya negatif tüm tamsayıları kastediyor olsaydık (yine simetriden) problem daha da basitleşecekti. Bu kez şu simetriyi kullanacaktık: Eğer a bir çarpan ise, $\hat{a} = -a$ sayısı da bir çarpanıdır.

Sayma

Olabilecek durumların sayısını bilmek problemin çözümünde önemli bir adım olabilir. Dikkat eder-seniz aşağıdaki örneklerde bir şey saymamız istenmiyor ama biz saydıklarımızdan bir anlam çıkarıyoruz. Bu tür sayma bir bakıma "çekmece ilkesi" 'ni hatırlatıyor.

Boyalı kağıt oyunu

Kırmızı mürekkep dökülmüş bir kağıda bakan Ali ve Ayşe bir oyun icat ederler. Ali kağıdın kısa kenarından küçük bir uzunluk belirleyecek, Ayşe de kağıdın üzerinde aralarındaki uzaklık belirlenen uzunluğa eşit olan aynı renkte iki nokta arayacaktır. Böyle iki nokta bulursa oyunu Ayşe, bulamazsa da Ali kazanacaktır. Oyunu kim kazanır?

Çözüm: Ayşe kağıda kenarları Ali 'nin belirlediği uzunlukta bir eşkenar üçgen çizer ve oyunu kazanır. Nedenine gelince; kağıt 2 renkli, üçgenin ise (aralarındaki uzaklık belirlenene eşit olan) 3 köşesi var. O halde bu 3 köşeden en az ikisi aynı renk olmalı.

52 sayı

Bana 1 ile 100 arasında 52 tamsayı söyleyin. Bu sayılardan ikisi aynı ya da ikisinin farkı 3 ise ben kazanıyorum; yoksa siz kazanıyorsunuz. Bu iyi bir oyun mu?

Çözüm: Bu oyunu oynamanızı önermem, hep ben kazanırım. Niye kazandığımı açıklayayım (kanıtlayayım!). Önce 1 'den 103 'e kadar tüm tamsayıları altalta yazarak bir liste hazırlıyorum. (103 nereden çıktı dersiniz, birazdan göreceğiz.) Söylediğiniz her x sayısı için listemde x ve $x + 3$ tamsayılarının karşılına birer çarpı atıyorum. (x de $x + 3$ de 1 ile 103 arasında.) Şimdi çarpıları sayalım; 52 sayı söylemişsiniz, her biri için (x ve $x + 3$ 'e) iki çarpı koydum. Toplam 104 çarpı eder. Halbuki listemde 103 yer vardı, yanında en azından iki çarpı olan bir tamsayı olmalı... Bu da söyledikleriniz arasında birbirine eşit ya da aralarındaki fark 3 olan bir çift var demek.

Elmalar

Bu bilmecenin benzerini duymuşsunuzdur. Bir sepet dolusu elma var. Bunları ikiye ikiye dağıtınca 1, üçer üçer dağıtınca 1, beşer beşer dağıtınca 2, yedişer yedişer dağıtınca

2, onbire onbire dağıtınca da 6 elma artıyor. Alışılmış soru, "Sepette kaç elma var?". Biz başka bir soru soracağız: Verdiğimiz problem gerçekçi mi, yani çözümünü var mı?

Çözüm: Sorunun bu yeni hali biraz şaşırtıcı gelebilir, sepetteki elma sayısını bulabiliyorsak tabii ki problem gerçekçidir. (Verdiğimiz problem gerçekçi, sepette 457 veya 2767 veya 5077, ... elma var. 457 çözümünü deneye yanıla buldum; buna $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ 'un katlarını ekleyince diğer çözümler de çıktı.) Ama kendinizi bir problem kurucunun yerine koyun. Bu tür bir problem uyduracaksınız, çözümü olsun istersiniz. Ya da bu tür bir problemi çözmek istiyorsunuz, problem gerçekçi değilse boş yere neden uğraşsınız. (Gerçekçi olma konusunda bir örnek; ikişer ikişer dağıtınca 1, dörder dörder dağıtınca 2 artan bir sepet bulamazsınız. Elma sayısı hem tek hem de çift olur.)

Önce problemden bir an için biraz uzaklaşacağız. Bir x tamsayısının k ile bölünmesinde artanı x_k ile gösterelim ve $K(x) = (x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11})$ beşlisini tanımlayalım. Yani, $K(x)$ beşlisi x 'in sırasıyla 2, 3, 5, 7 ve 11 ile bölündüğünde kalanları gösteriyor. Elma sorusu bu gösterimle $K(x) = (1, 1, 2, 2, 6)$ olan bir x tamsayısı aramak demek.

Şimdi iki şeye bakalım. Birincisi: *Bu türden kaç tane farklı beşli vardır?* x_k , k ile bölününce kalan olduğundan 0, 1, ..., $k - 1$ değerlerinden birini alabilir. Demek ki x_2 için olası 2, x_3 için olası 3, x_5 için olası 5, x_7 için olası 7 ve x_{11} için de olası 11 değer olduğundan beşliler için olabilecek $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ farklı değer vardır. Yukarıdaki "52 sayı" probleminde olduğu gibi, bu beşlileri altalta sıralayıp bir liste yapalım ve $x = 1, 2, \dots, 2309, 2310$ sayıları için $K(x)$ beşlilerini bu listede işaretleyelim. Listedeki beşli sayısı ile işaret sayısı aynı olduğundan iki durumdan biri gerçekleşmelidir. Ya listedeki tüm beşliler işaretlenmiştir; bu ise özel olarak (1, 1, 2, 2, 6) beşlisinin işaretlendiğini, yani aradığımız x sayısının var olduğunu söyler. Ya da listedeki bazı beşliler işaretlenmemiştir. Bu durumda listedeki bir beşli en az iki kere işaretlenmiş olacaktır. Matematik dilinde bu, $1 \leq y < z \leq 2310$ şeklinde iki y ve z tamsayısının 2, 3, 5, 7 ve 11 ile bölündüklerinde aynı artanı vermeleri, yani $z - y$ tamsayısının 2, 3, 5, 7 ve 11 ile ve dolayısıyla 2310 ile tam bölünmesi demektir. Bu son söylediğimiz ise $1 \leq z - y \leq 2309$ eşitsizliğinden dolayı gerçekleşemez. Toparlarsak, $y \neq z$ için $K(y) \neq K(z)$ olduğunu, dolayısıyla da listedeki tüm beşlilerin işaretlenmiş olacaklarını gösterdik.

Elma problemi aslında sayılar teorisinde "Çin Kalan Teoremi" adlı önemli bir teoremin özel halidir; bu teorem $a_1, a_2, \dots, a_n$ tamsayıları ile aralarında asal $p_1, p_2, \dots, p_n$ sayıları verildiğinde, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x \equiv a_i \pmod{p_i}$ koşulunu sağlayan bir x tamsayısının bulunabileceğini söyler. Yukarıda bu teoremin kanıtını elma sorusuna uyarladık.

YAZARLARA...

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

Konu sunuşları; Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar; Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı; Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler; Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar; Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler; Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

BİR ÖSS SORUSU ÜZERİNE NOTLAR

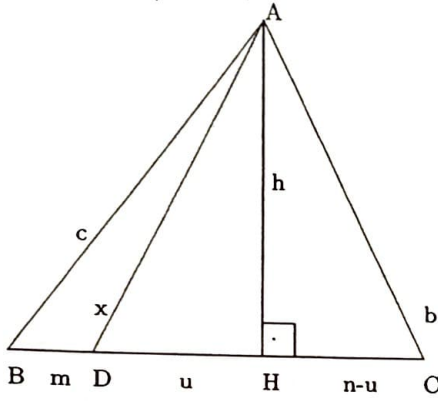
Flkri Gökdağ

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

İddia: Bir ABC üçgeni ve $[BC]$ 'nin D ile gösterilen bir iç noktası verildiğinde, A noktasının B, D, C noktalarına uzaklığı, sırayla c, x, b ile; B noktasının D, C noktalarına uzaklığı, sırasıyla m, a ile ve D noktasının C noktasına uzaklığı da n ile gösterilmek üzere a, b, c, m, n, x arasında,

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

bağıntısı vardır. (Bu bağıntı, Stewart bağıntısı olarak bilinir.)



İspat. A noktasından BC doğrusuna indirilen dikmenin ayağı H ile gösterildiğinde; ABH, ADH ve AHC dik üçgenleri oluşur. $c > b$ ve $|DH| = u$ kabul edilip Pisagor Teoremi uygulandığında;

$$c^2 = (m+u)^2 + h^2 \quad (1)$$

$$x^2 = u^2 + h^2 \quad (2)$$

$$b^2 = (n-u)^2 + h^2 \quad (3)$$

elde edilir. (1) ve (2) 'den,

$$\begin{aligned} c^2 - x^2 &= (m+u)^2 + u^2 \\ &= (m+u-u)(m+u+u) \\ &= m(m+2u) \end{aligned}$$

ve buradan,

$$x^2 = c^2 - m^2 - 2mu \quad (4)$$

(2) ve (3) 'ten,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= (n-u)^2 - u^2 \\ &= (n-u+u)(n-u-u) \\ &= n(n-2u) \end{aligned}$$

ve buradan da,

$$x^2 = b^2 - n^2 + 2nu \quad (5)$$

(4) ve (5) 'ten,

$$\begin{aligned} nx^2 + mx^2 &= n(c^2 - m^2 - 2mu) \\ &\quad + m(b^2 - n^2 + 2nu) \end{aligned}$$

$$(m+n)x^2 = nc^2 - nm^2 - 2nmu + mb^2 - mn^2 + 2mnu$$

$$(m+n)x^2 = mb^2 + nc^2 - mn(m+n)$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

bulunur. Bu bağıntı,

(i) $b = c$ iken,

$$ax^2 = mb^2 + nb^2 - mna$$

$$ax^2 = ab^2 - mna$$

$$x^2 = b^2 - mn \quad (6)$$

biçimini,

(ii) $b = x$ iken,

$$ax^2 = mx^2 + nc^2 - mna$$

$$(a-m)x^2 = nc^2 - mna$$

$$nx^2 = nc^2 - mna$$

$$x^2 = c^2 - ma \quad (6)$$

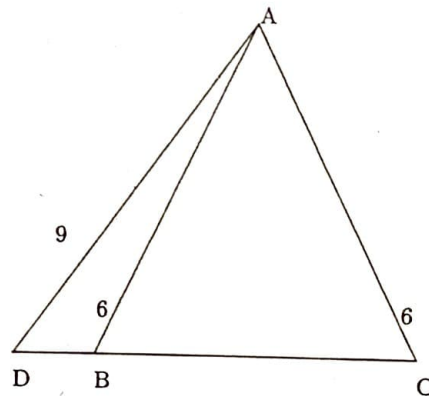
biçimini alır.

(7) bağıntısı, ÖSS'99 sınavında sunulmuş olan:

"ADC bir üçgen,

$|AD| = 9 \text{ cm}$, $|AB| = |AC| = 6 \text{ cm}$.

Şekil 1



Yukardaki verilere göre, $|DB||DC|$ çarpımının sayısal değeri kaçtır?" sorusunun çözümünde kullanılabilir.

(7) bağıntısındaki x , c ve ma 'nın bu sorudaki karşılıkları sırasıyla 6, 9 ve $|DB| \cdot |DC|$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 - ma \\ 6^2 &= 9^2 - |DB| \cdot |DC| \end{aligned}$$

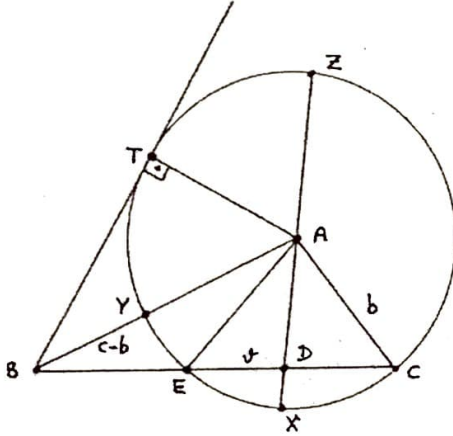
ve buradan,

$$|DB| \cdot |DC| = 45$$

bulunur.

Adlandırmalar aynı kalmak üzere (*) bağıntısı

Şekil 2



çemberden yararlanılarak elde edilebilir: Merkezi A, yarıçapı b olan çember ile $[BC]$ 'nin kesişim noktası E ile, B noktasından çembere çizilen teğetlerden birinin çembere değdiği nokta T ile gösterildiğinde, B noktasının bu çembere göre kuvveti,

$$|BT|^2 = |BE| \cdot |BC|$$

ve BTA dik üçgeninde Pisagor Teoreminden dolayı

$$|BT|^2 = c^2 - b^2$$

'dir. O halde,

$$|BE| \cdot |BC| = c^2 - b^2 \quad (8)$$

'dir. Diğer taraftan AD doğrusunun çemberle kesişim noktaları X ve Z ile gösterilmek üzere,

$$|DE| \cdot |DC| = |DX| \cdot |DZ| = (b-x)(b+x)$$

$$|DE| \cdot |DC| = (b^2 - x^2) \quad (9)$$

bulunur $|BE| = |BD| - |DE| = m - v$, $|BC| = a$ yazılarak (8) 'den,

$$a(m - v) = c^2 - b^2$$

ve (9) 'dan

$$v(a - m) = b^2 - x^2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} a(m - v) &= c^2 - b^2 \\ m - v &= \frac{c^2 - b^2}{a} \\ v &= m - \frac{c^2 - b^2}{a} \\ v &= \frac{ma - c^2 + b^2}{a} \end{aligned}$$

'dır. v 'nin bu değeri $v(a - m) = b^2 - x^2$ eşitliğinde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \left(\frac{ma - c^2 + b^2}{a}\right)(a - m) &= b^2 - x^2 \Rightarrow \\ (ma - c^2 + b^2)(a - m) &= ab^2 - ax^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$ma(a - m) - c^2(a - m) + b^2(a - m) = ab^2 - ax^2$$

olur. $m + n = a$ olduğundan bu ifade,

$$man - c^2n + b^2n = ab^2 - ax^2$$

biçimini alır. Buradan,

$$\begin{aligned} ax^2 &= ab^2 - nb^2 + nc^2 - mna \\ &= (a - n)b^2 + nc^2 - mna \end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

elde edilir. Bağıntının elde edilmesinde uygulanan bu metot az önce sözü edilen ÖSS sorusunun çözümünde kullanılabilir:

Şekil 2 'deki D ve E noktaları çakıştığında B noktasının çembere göre kuvveti,

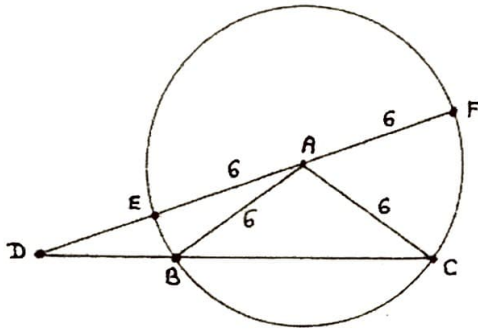
$$|BD| \cdot |BC| = c^2 - b^2$$

olacağından, söz konusu sorunun çözümü $c = 9$ ve $b = 6$ için

$$|BD| \cdot |BC| = 9^2 - 6^2 = 45$$

olarak elde edilir.

Şekil 3



Bu yaklaşım, basit bir çözümün elde edilmesini sağlar: A merkezli ve 6 yarıçaplı çemberin AD doğrusu ile kesişim noktaları E ve F ile gösterilmek üzere, D noktasının bu çembere göre kuvveti yazılarak (Şekil 3),

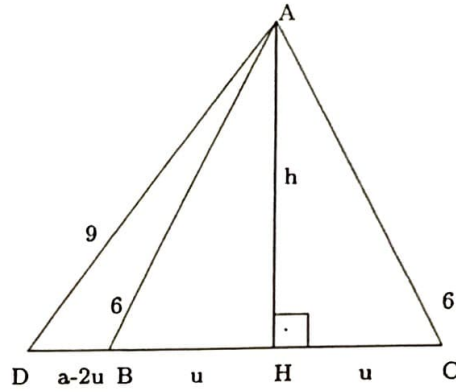
$$\begin{aligned} |DB| \cdot |DC| &= |DE| \cdot |DF| \\ &= (9 - 6)(9 + 6) = 3 \cdot 15 = 45 \end{aligned}$$

bulunur.

Bir ikiz kenar üçgende, tepeden tabana indirilen dikmenin ayağı (olan nokta) tabanın orta noktasıdır. Sözü edilen soru bu bilgi kullanılarak da çözülebilir:

ABC ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC| = 6$ olduğundan, A 'dan BC kenarına indirilen dikmenin ayağı olan H noktası $[BC]$ 'nin orta noktasıdır.

Şekil 4



$|AH| = h$ ve $|BH| = |HC| = u$ kabul edilip ADH ve ABH üçgenlerine Pisagor Teoremi uygulandığında,

$$(a - u)^2 + h^2 = 81, \quad u^2 + h^2 = 36$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarma ile,

$$[(a - u)^2 + h^2] - [u^2 + h^2] = 81 - 36$$

$$(a - u)^2 - u^2 = 45$$

$$(a - u - u)(a - u + u) = 45$$

$$(a - 2u)a = 45 \Rightarrow |DB| \cdot |DC| = 45$$

elde edilir.

Yine, söz konusu sorunun çözümü, $\hat{BAC}$ açısının ölçüsüne göre basitleştirilebilir:

1. $\hat{BAC} = 60^\circ$ alınabilir. Bu durumda ABC üçgeni eşkenar üçgen ve bu üçgenin herhangi bir yüksekliği $3\sqrt{3}$ olacağından $|DB| = m$ kabul edilerek;

$$81 = (3 + m)^2 + (3\sqrt{3})^2$$

$$36 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$45 = (3 + m)^2 - 3^2 = m(m + 6) = |DB| \cdot |DC|$$

elde edilir.

2. $\hat{BAC} = 0^\circ$ alınabilir. Bu durumda $B \equiv C = H$ olur ve ADH dik üçgeninden $|DB| \cdot |DC| = |DH|^2 = 9^2 - 6^2 = 45$ bulunur.

3. $\hat{BAC} = 90^\circ$ ve $|DB| = m$ alınarak,

$$(m + 3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 81$$

$$(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36$$

'dan, taraf tarafa çıkarma ile,

$$m(m + 6\sqrt{2}) = 45$$

bulunur.

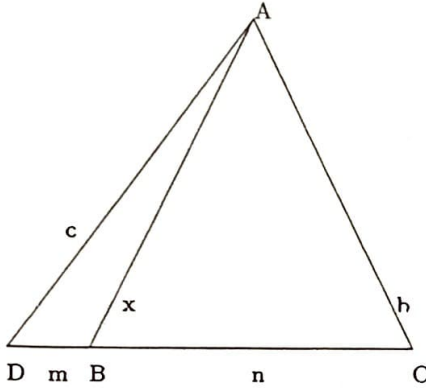
(*) bağıntısı ve dolayısıyla söz konusu problemin çözümü vektörlerin iç çarpımından yararlanılarak elde edilebilir.

Başlangıç noktaları aynı olan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektör arasındaki açı $(\vec{a}, \vec{b})$ ile gösterilmek üzere, bu iki vektörün (öklidiyen) iç çarpımı,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||a|| ||b|| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

ile tanımlanır. ($||\vec{x}||$: $\vec{x}$ vektörünün uzunluğunu gösterir.)

Şekil 5



Şekil 5 'ten,

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AD} + \vec{DB} \\ (\vec{AB})^2 &= (\vec{AD} + \vec{DB})^2 \\ (\vec{AB})^2 &= \vec{AD}^2 + 2\vec{AD} \cdot \vec{DB} + \vec{DB}^2\end{aligned}$$

ve yine aynı şekilden,

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CB} \\ (\vec{AB})^2 &= (\vec{AC} + \vec{CB})^2 \\ (\vec{AB})^2 &= \vec{AC}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB} + \vec{CB}^2\end{aligned}$$

bulunur. Karşılıkları yazılarak,

$$x^2 = c^2 - 2cm \cos B + m^2$$

$$x^2 = b^2 - 2bn \cos C + n^2 ;$$

buradan birinci eşitlik n , ikinci eşitlik m ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak,

$$nx^2 + mx^2 = nc^2 - 2cmn \cos B + nm^2 + mb^2$$

$$-2bmn \cos C + mn^2,$$

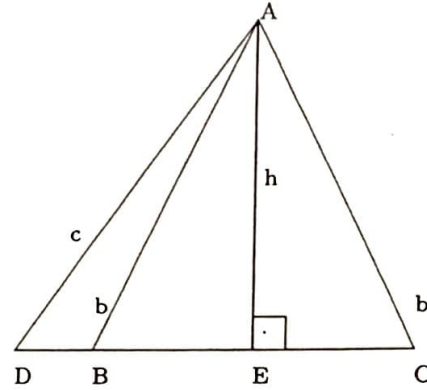
$$(n + m)x^2 = nc^2 + mb^2 - 2mn(c \cos B + b \cos C) + nm(m + n),$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - 2mna + nma$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

bulunur.

Şekil 6



Şekil 6 'da $|AB| = |AC|$,

$$\begin{aligned}\vec{DB} \cdot \vec{DC} &= (\vec{DE} - \vec{BE}) \cdot (\vec{DE} + \vec{EC}) \\ &= (\vec{DE})^2 - (\vec{BE})^2,\end{aligned}$$

$|\vec{DE}| = c \cos B$ ve $|\vec{BE}| = b \cos C$ 'dir:

$$\begin{aligned}(\vec{DE})^2 - (\vec{BE})^2 &= c^2(1 - \sin^2 B) - b^2(1 - \sin^2 C) \\ &= c^2 - b^2 \sin^2 C - c^2 \sin^2 B = c^2 - b^2.\end{aligned}$$

Değerler, yerlerine yazıldığında sorunun cevabı,

$$\begin{aligned}\vec{DB} \cdot \vec{DC} &= ||\vec{DB}|| \cdot ||\vec{DC}|| \cos 0 \\ &= c^2 - b^2 = 9^2 - 6^2 = 45\end{aligned}$$

bulunur.

-o-

GEOMETRİ VE TRİGONOMETRİNİN CEBİRDE BAZI UYGULAMALARI (I)

Diba Yılmaz-Ali Cevahir
Akdeniz Koleji Fen Lisesi, ANTALYA

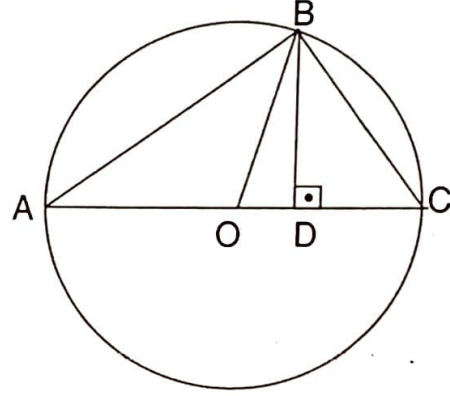
Giriş

"Koordinatlar metodu" adı ile bilinen metodun geometride bir devrim yarattığı ve bunun sonucu olarak "Analitik Geometri" denilen bir matematik dalının nasıl geliştiği iyi bilinmektedir. Analiz ve cebir yöntemlerinin geometride nasıl uygulanabileceğinin somut kanıtı olan analitik geometri, klasik geometrinin pek çok sorusuna daha kısa ve açık çözümler bulmaktadır. Doğal olarak şöyle bir soru ortaya konulabilir: "Acaba, sırf geometrik yöntemler kullanarak cebir ve analizin bazı problemlerini çözmek mümkün müdür? Yani, analiz geometride kullanıldığı gibi, geometri de analizde (ve cebirde) kullanılabilir mi?"

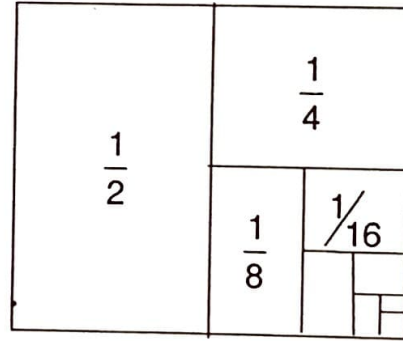
Önce bu soruya "evet" cevabını veren iki klasik örnek gösterelim.

Birinci örnek, "Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Eşitsizliği" adı ile bilinen $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ eşitsizliğidir.

Fazla ayrıntıya gerek görmeden ,
şekilden $|AD|=a$, $|DC|=b$ olmak üzere,
 $|OB| = \frac{a+b}{2}$ ve $|BD| = \sqrt{ab}$ olduğu ve
 $|BD| \leq |OB|$ sağlandığı kolayca görülebilir.



İkinci klasik örnek, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$
eşitliğinin geometrik ispatıdır. Birim karenin
alanı, onun yarısının, sonra yarısının, ...
alanları toplamına eşittir. (Şekile bakınız.)



Bu çalışmada biz, cebir ve analizin bazı problemlerini geometri ve trigonometrinin yöntemlerini uygulayarak çözenin mümkün olduğunu göstermek istedik. Bunu da vurgulayalım ki, bazı cebir problemlerini direkt cebirsel yöntemlerle çözmeye kalkışmak işi oldukça zorlaştırabilir. Oysa geometrik (trigonometrik) yöntem kullanılarak söz konusu problem çok daha kısa bir yolla çözülebilir. Buna örnek olarak, aşağıdaki iki problemi gösterebiliriz. (Çözümler daha sonra verilecektir.)

Problem 1. $[0,1]$ aralığında alınan her x, y, z ve t için

$$x(1-t) + y(1-x) + z(1-y) + t(1-z) \leq 2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2. 13 tane reel sayı verildiğinde, bunlardan a ve b gibi öyle iki tanesi bulunabilir ki,

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3} \text{ eşitsizliği sağlanır, ispatlayınız.}$$

1. Geometrik Yöntemlerin Bazı Cebir Problemlerine Uygulanması

İlk uygulamamızı tamsayılarda çözülen denklemlere (diyofant denklemlere) yapalım:

$p^2 + r^2 = 2q^2$ denklemini tamsayılar kümesinde çözelim. Diyofant denklemleri ile uğraşanlar "direkt" çözüm yolu aramanın ne kadar zor olduğunu iyi bilirler.

Bu problemin çok güzel bir geometrik çözüm yolu vardır. Önce denklemin her iki yanını q^2 ile bölerek

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{r}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{biçimine ve buradan da} \quad \frac{p}{q} = x, \frac{r}{q} = y$$

diyerek $x^2 + y^2 = 2$ biçimine indirgiyoruz. Böylece, $x^2 + y^2 = 2$ denklemini rasyonel sayılar kümesinde çözmeliyiz. Şimdi, bu denklemi çözmek, $x^2 + y^2 = 2$ çemberi üzerindeki tüm rasyonel koordinatlı (x, y) noktalarını bulmak demek oluyor. Bu tür noktalardan birini alalım. Örneğin, $(-1, -1)$ noktasını. Eğer bu noktadan ve çember üzerindeki başka bir "rasyonel" (x, y) noktasından doğru geçirirsek, bu doğrunun eğimi $t = \frac{y+1}{x+1}$ bir rasyonel sayı olur. Bunun tersi de doğrudur: $(-1, -1)$ noktasından geçen ve eğimi $t \neq -1$ - bir rasyonel sayı olan her bir doğru bu çemberi başka bir (x, y) - "rasyonel noktası"nda kesecektir. Buna inanmak için $(-1, -1)$ den geçen ve eğimi $t \neq -1$ olan doğrunun $y = t(x+1) - 1$ denklemini çember denkleminde gözönüne alalım:

$$x^2 + (t \cdot (x+1) - 1)^2 = 2, \quad (1+t^2)x^2 - 2t(1-t)x + (t^2 - 2t - 1) = 0.$$

Bu x 'e göre bir ikinci dereceden denklemdir. Onun köklerinden birisi (-1) 'dir. Vieta Teoremini kullanarak ikinci kökü buluyoruz:

$$x = \frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1}, \quad y = t(x+1) - 1 \quad \text{'den ise } y \text{ 'yi buluyoruz.} \quad y = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}.$$

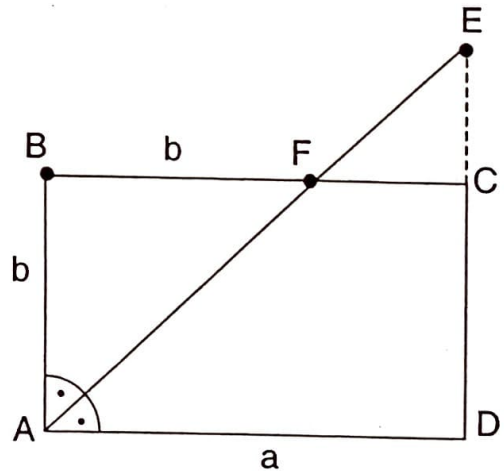
Böylece, her rasyonel $t \neq -1$ sayısı için $x^2 + y^2 = 2$ çemberi üzerinde bir (x, y) "rasyonel noktası" bulduk.

Burada $t = \frac{m}{n}$ koyarsak ve $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{q}$ olduğunu da gözönüne alırsak, ilk önce verilen $p^2 + r^2 = 2q^2$ denkleminin tam sayılarda çözümlerini buluruz:

$$p = -m^2 + 2mn + n^2, \quad q = m^2 + n^2, \quad r = m^2 + 2mn - n^2$$

İkinci uygulamamız, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ eşitsizliğinin bir başka, çok ilginç (ve basit) ispatına aittir. $a \geq b > 0$ olsun. Kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgen alalım.

A açısının açıortayını çizelim ve bu açıortayla DC doğrusunun kesişimine E diyelim. $|BF|=b$ ve $|DE|=a$ olduğu açıktır. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi, ABCD dikdörtgeninin alanı, ABF ve AED üçgenlerinin alanlarının toplamından büyük olamaz:

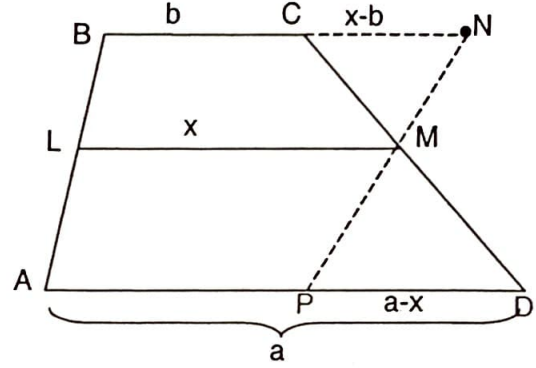


$$a \cdot b \leq \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

a yerine $\sqrt{x}$, b yerine $\sqrt{y}$ yazarsak, buradan $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ elde edilir.

Şimdi de geometrik yöntemler kullanarak 2 sayının aritmetik ortalamasının onların karesel ortalamasından büyük olamayacağını, yani $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ eşitsizliğini kanıtlayalım. $a=b$ için eşitlik olduğundan $a > b$ olduğunu varsayabiliriz.

Taban uzunlukları a ve b olan ABCD yamuğunu çizelim. LM // AD doğrusunu, ABCD 'nin alanı yarıya bölünecek biçimde çizelim. $|LM|=x$ diyelim ve x 'i bulalım. M noktasından NP // BA geçirelim. LBCM yamuğunun yüksekliğine h_1 ve ALMD 'nin yüksekliğine h_2 dersek, alanların eşitliğinden:



$$h_1 \cdot \frac{b+x}{2} = h_2 \cdot \frac{a+x}{2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{a+x}{b+x} \text{ olur.}$$

CNM ve PMD üçgenlerinin benzerliğinden ise, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x-b}{a-x}$ olur. Bu ikisinden,

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{x-b}{a-x} \Rightarrow a^2 - x^2 = x^2 - b^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ olur.}$$

Öte yandan $b < a$ olduğu için alanların eşitliğinden, LM doğrusunun BC ye değil, AD ye daha yakın olduğunu söyleyebiliriz. Yani, LM parçası AD parçası ile yamuğun orta tabanı arasında bulunmalıdır:

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq a.$$

Çok ilginç özellikleri ile matematikçileri yüz yıllardır hayrete salan Fibonacci dizilerinin bir çok özelliği geometrik olarak yorumlanabilir. Klasik Fibonacci dizisi şöyle tanımlanıyor:

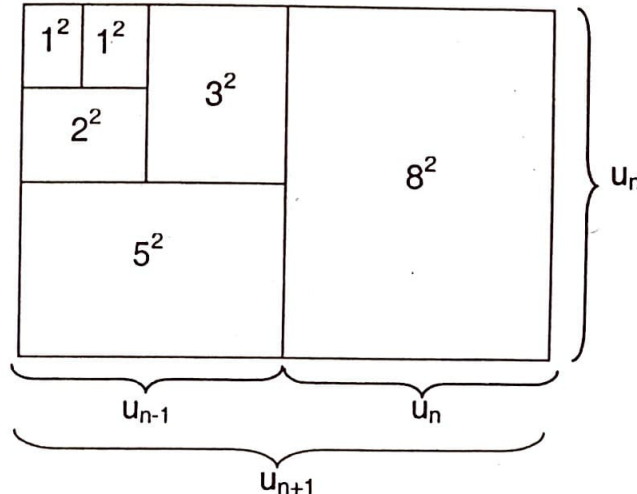
$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 = u_2 + u_1, \quad u_4 = u_3 + u_2, \dots, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \dots$$

(Dizinin baştan ilk terimleri 1,1,2,3,5,8,13,..., tür.)

Fibonacci dizisinin iyi bilinen özelliklerinden birisi de şöyledir: Her $n \geq 1$ için,

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$$

Bunun cebirsel ispatının yanı sıra, basit geometrik ispatı da vardır:



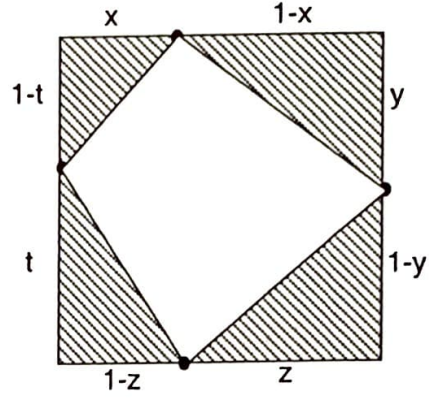
Şekilden de anlaşılacağı üzere karelerin alanları toplamı dikdörtgenin alanına eşittir, yani ,

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1} \text{ 'dir.}$$

Bu bölümü girişte verdiğimiz birinci eşitsizliğin geometrik ispatı ile bitirelim . 1×1 karesi alalım ve kenarlarını $x, 1-x, y, 1-y, z, 1-z, t, 1-t$ uzunlukta parçalara bölelim. Taralı üçgenlerin alanları toplamı karenin alanından büyük olamayacağından,

$$\frac{1}{2}x(1-t) + \frac{1}{2}y(1-x) + \frac{1}{2}z(1-y) + \frac{1}{2}t(1-z) \leq 1$$

ve buradan, $x(1-t) + y(1-x) + z(1-y) + t(1-z) \leq 2$ olur.



Bunu da belirtelim ki, eşitsizliğin sağında 2 'den daha küçük sayı almak mümkün değildir. Çünkü $x = z = 0$ ve $y = t = 1$ koyarsak, $2=2$ elde edilir. Söz konusu eşitsizliğin bu kadar basit geometrik ispatı olmasına karşın, cebirsel ispatı hiç de kolay değildir.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Cayley, Arthur (1821-1895): "Her şeyde olduğu gibi, bir matematiksel kuramda da güzellik kavranabilir, ancak açıklanamaz."

Churchman, C. W. : "Entellektüel kapasitemizin ölçüsü, daha iyi ve giderek daha da iyi problemlere verdiğimiz yanıtlarla kendimizi daha az ve giderek daha da az mutlu hissetme kapasitemizdir."

Darwin, Charles (1809-1882): "Her bir keşif, biçimsel olarak, matematikselidir; çünkü elimizde başka hiç bir yol gösterici yoktur."

Dehn, Max (1878-1952): "Matematik, tümüyle dogmatik olmayan bir biçimde sunulabilen biricik yapısal araçtır."

De Morgan, Augustus (1806-1871): (Yaşı sorulduğunda) " x^2 yılında x yaşında idim."

Descartes, René (1596-1650): "Çözdüğüm her problem, daha sonra diğer problemlerin çözümüne yardımcı olan bir kurala dönüştü."

Descartes, René (1596-1650): "İyi bir belleğe sahip olmak yeterli değildir. Burada önemli olan şey onu iyi kullanmaktır."

Descartes, René (1596-1650): "Benim için her şey matematiğe dönüşür."

Doyle, Arthur Conan (1859-1930): "Olanaksız elediğinizde geriye kalan şey, olabilir olmasa bile, gerçek olmalıdır."

Einstein, Albert (1879-1955): "Her şey olabildiğince basit olmalıdır, ama daha da basit değil."

Einstein, Albert (1879-1955): "Matematikçilerin görecelik kuramını istilasından sonra kendim bile onu tanıyamaz duruma geldim."

Einstein, Albert (1879-1955): "Sağduyu 18 yaşına gelene kadar elde edilen önyargıların toplamıdır."

Einstein, Albert (1879-1955): "Gerçekten büyük ve esin dolu her şey, özgürlük içinde çalışan kişilerce yaratılır."

Erdős, Paul: "Bir matematikçi, kahveyi teoreme dönüştüren kişidir."

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Aralık 1999 tarihine kadar gönderiniz.

ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.196. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, 2^n ve 5^n sayılarının onluk sayı sisteminde yazılışlarındaki ilk rakamlarının aynı olduğu bilinmektedir. Bu rakamı bulunuz.

A.197. $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, \dots,$$

$$|a_n| = |a_{n-1} + 1|, \dots,$$

Bu durumda, $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq -n$ olduğunu gösteriniz.

A.198. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ olduğu halde iraksak olan bir sınırlı dizi var mıdır?

A.199. $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olup her $x, y > 1$ için $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ eşitliğini sağlamaktadır. f fonksiyonunu bulunuz.

A.200. ABC bir eşkenar üçgen ve P , bu eşkenar üçgenin düzleminde bulunan herhangi bir nokta ise, $|PA| + |PC| \geq |PB|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.196. m ve n 'nin $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ eşitliğini sağlayan değerlerini bulunuz.

Y.197. Katsayıları tamsayılar olan bir $P(x)$ polinomu, belli bir n tamsayısı için $P(-n) < P(n) < n$ eşitsizliklerini sağlıyor. $P(-n) < -n$ olacağını

kanıtlayınız.

Y.198. Her biri üçüncü dereceden ve reel katsayılı $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarının her $x \in \mathbb{R}$ için

$$P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$$

eşitsizliklerini sağladığını varsayalım. Bununla beraber, $P(x_0) = R(x_0)$ sağlanacak biçimde bir x_0 sayısının varlığını kabul edelim. Bu takdirde, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$Q(x) = \alpha(P(x)) + (1 - \alpha)R(x)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\alpha \in [0, 1]$ sabitinin varlığını kanıtlayınız.

Y.199. Her reel $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları için

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geq 0$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y.200. Bir E düzlemi ile bu düzlemin içinde bir A noktası ve dışında bir B noktası veriliyor. E düzlemi içinde öyle bir C noktası bulunuz ki,

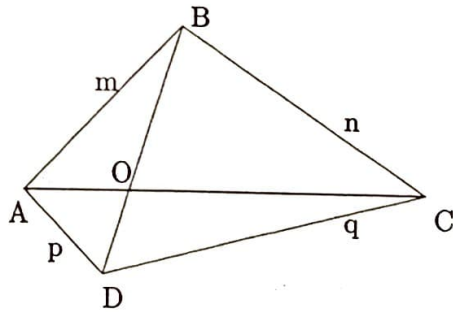
$$\frac{|AB| + |AC|}{|BC|}$$

maksimum olsun.

ÇÖZÜMLER

A.186. Bir konveks dörtgenin köşeleri, bu dörtgeni, alanları tamsayılar olan dört tane üçgene bölmüştür. Söz konusu dört sayının çarpımının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm.



Üçgenlerin alanlarına m, n, p ve q diyelim (şekile bakınız). AOB ve COB üçgenlerinden, $\frac{m}{n} = \frac{|AO|}{|OC|}$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $\frac{p}{q} = \frac{|AO|}{|OC|}$.

Böylece,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow mq = pn \Rightarrow m.n.p.q = (np)^2$$

oluyor ki, bu da $mnpq$ çarpımının bir tam kare olduğunu gösteriyor.

A.187. $x^{24} - x^{19} + x^{14} - x^3 + 1 > 0$ eşitsizliğinin her $x \in \mathbb{R}$ için sağlandığını kanıtlayınız.

Çözüm. (1) $x \leq 0$ olduğunda $(-x^{19}) \geq 0$, $(-x^3) \geq 0$ olur ve eşitsizlik sağlanır.

(2) $0 < x < 1$ olsun. Eşitsizliğin sol tarafını yeniden düzenlersek,

$$x^{24} + x^{14}(1 - x^5) + (1 - x^3) > 0$$

olur.

(3) $x \geq 1$ olsun. Eşitsizliğin sol tarafını uygun şekilde düzenlersek,

$$x^{19}(x^5 - 1) + x^3(x^{11} - 1) + 1 > 0$$

olur.

A.188. Bir sınıftaki öğrencilerden a_1 tanesi ders yılı içindeki sınavlardan en az bir tane 2 almıştır. Öğrencilerden a_2 tanesi en az iki tane 2, ..., a_k tanesi en az k tane 2 almıştır ve k 'dan fazla sayıda 2 alan öğrenci yoktur. Sınıftaki öğrencilerin aldığı 2'lerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Venn şeması çizilerek düşünülürse, sınıfın toplam 2 sayısının

$$(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots + (k-1)(a_{k-1} - a_k) + k.a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

olduğu görülebilir.

A.189. Fibonacci dizisi denilen dizi şöyle tanımlanıyor: $a_1 = a_2 = 1$ ve her $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. Bu dizinin a_{1000} ve a_{770} terimlerinin en büyük ortak bölenini bulunuz.

Çözüm. $a_0 = 0$ diyelim ve önce Fibonacci dizisinin bazı önemli özelliklerini kanıtlayalım.

(a) Her $k \geq 0, l \geq 1$ için

$$a_{k+l} = a_k a_{l-1} + a_{k+1} a_l$$

eşitliği sağlanır.

Bu, k 'ya göre tümevarım uygulanarak ispatlanabilir. $k = 0$ için eşitlik açıktır. $k = 1$ için ise $a_{l+1} = a_{l-1} + a_l$ eşitliği elde edilir ki, bu da doğru eşitliktir.

Şimdi, yukarıdaki eşitliğin bir k ve $k - 1$ için sağlandığını varsayalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} a_{k+1+l} &= a_{k+l} + a_{k+l-1} \\ &= a_k a_{l-1} + a_{k+1} a_l + a_{k-1} a_{l-1} + a_k a_l \\ &= a_{l-1}(a_k + a_{k-1}) + a_l(a_{k+1} + a_k) \\ &= a_{l-1} a_{k+1} + a_l a_{k+2} \end{aligned}$$

(b) Her n ve k için a_{kn} , a_k ile bölünür. Bu özellik, (a) şıkkındaki özellik kullanılarak, ispatlanabilir.

(c) Fibonacci dizisinin herhangi iki komşu terimi aralarında asal sayılardır.

Gerçekten, bir a_k ve a_{k+1} 'in ortak böleni $l \neq 1$ olsaydı, $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ eşitliğinden l 'nin a_{k-1} 'i de böldüğünü; $a_{k-2} = a_k - a_{k-1}$ eşitliğinden l 'nin a_{k-2} 'yi de böldüğünü ve benzerlerini söyleyebiliriz. Sonuçta, $l, 1$ 'i de bölmelidir.

Şimdi, problemin çözümüne dönelim. (a) özelliğine göre,

$$a_{1000} = a_{770} a_{229} + a_{771} a_{230}$$

a_{1000} ve a_{770} 'in ortak böleni r ise, yukarıdaki eşitlikten ve (c)'deki özellikten, a_{230} 'un da r 'ye bölüneceğini söyleyebiliriz. Öte yandan,

$$a_{770} = a_{690} a_{79} + a_{691} a_{80}$$

eşitliğine bakarsak, (b) şıkkındaki özelliğe göre, a_{690} sayısı a_{230} 'a bölüneceğinden r 'ye de bölünecektir ve buna göre de a_{80} sayısı da r ile bölünmelidir.

Buradan a_{240} 'ın r 'ye bölüneceğini söyleyebiliriz. Şimdi,

$$a_{240} = a_{230} a_9 + a_{231} a_{10}$$

eşitliğine bakarsak, a_{10} sayısının r 'ye bölüneceğini söyleyebiliriz.

Öte yandan, (b)'ye göre, a_{1000} ve a_{770} , a_{10} ile bölünür. Demek ki, $a_{10} = 55$ sayısı a_{1000} ve a_{770} 'in OBEB'idir.

NOT: İspat etmek mümkündür ki, her $m, n \in \mathbb{N}$ için $(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$ 'dir.

A.190. O, A, B, C, D noktaları uzayda $(\mathbb{R}^3)$ farklı noktalar olmak üzere,

$$\hat{A}\hat{O}B = \hat{B}\hat{O}C = \hat{C}\hat{O}D = \hat{D}\hat{O}A = \gamma \quad (\gamma \text{ dar açı})$$

veriliyor $\hat{A}\hat{O}C + \hat{B}\hat{O}D$ 'nin en küçük ve en büyük değerlerini bulunuz.

Çözüm. O noktası başlangıç olmak üzere OA, OB, OC, OD 'nin birim vektörleri a, b, c, d olsun. Bu durumda iç çarpımdan,

$$a \cdot b = b \cdot c = c \cdot d = d \cdot a = \cos \gamma \quad (1)$$

ve buradan $(a - c)(b - d) = 0$ elde edilir. (1) denklemini $a = c$ veya $b = d$ iken veya $a - c$ vektörü $b - d$ vektörüne dik iken sağlanır. Eğer $a = c$ ise, O, A, C doğrusal ve $\hat{A}\hat{O}C = 0$, $b = d$ ise, O, B, D doğrusal ve $\hat{B}\hat{O}D = 0$ olur. Bu açıların ikisi aynı zamanda sıfır olursa, $\hat{A}\hat{O}C + \hat{B}\hat{O}D$ 'nın minimum değeri elde edilir. $a - c$ ile $b - d$ birbirine dik iken de, birim vektörlerden

$$(a + c)(a - c) = (a + c)(b - d) = 0$$

$$(b + d)(b - d) = (b + d)(a - c) = 0$$

yazılabilir. Bu, $a + c$ ve $b + d$ 'nin $a - c$ ve $b - d$ 'ye dik olması, dolayısıyla da, $a + c$ ile $b + d$ 'nin doğrusal olması demektir. O halde,

$$(a + c)(b + d) = |a + c||b + d|$$

'dir. Bu kullanılarak

$$\begin{aligned} 4 \cos \gamma &= 2 \sqrt{(1 + \cos \hat{A}\hat{O}B)(1 + \cos \hat{B}\hat{O}D)} \\ &= 4 \cos \frac{\hat{A}\hat{O}B}{2} \cos \frac{\hat{B}\hat{O}D}{2}, \end{aligned}$$

maksimum için $\hat{A}\hat{O}B = \hat{B}\hat{O}D$ olması gerekir: $2 \arccos(2 \cos \gamma - 1)$ olur.

Y.186. İkişer ikişer birbirine dik olan Ox, Oy, Oz ışınları bir E düzlemini A, B, C noktalarında kesiyorlar. Oluşan $OABC$ piramidinin tüm ayrıtlarının uzunlukları toplamı m ise, bu piramidin hacminin maksimum değeri nedir?

Çözüm. $OA = a, OB = b, OC = c$ olsun; $AC^2 = a^2 + c^2, BC^2 = b^2 + c^2, AB^2 = a^2 + b^2$ olduğundan

$$m = a + b + c + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

olur. $V = \frac{abc}{6}$ 'nın maksimum değerini bulmak istiyoruz. $A.O. - G.O.$ eşitsizliğinden,

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ ve } b^2 + c^2 \geq 2bc$$

ve bunlar yardımıyla,

$$m \geq 3\sqrt[3]{abc} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ac} + \sqrt{2ab}$$

elde edilir. İkinci yanda son üç terime $A.O. - G.O.$ eşitsizliği uygulanarak,

$$m \geq 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$$

$$m \geq 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$$

ve dolayısıyla, $V_{max} = \frac{(5\sqrt{2}-7)m^3}{162}$ bulunur. (Bu $a = b = c$ iken gerçekleşir.)

(Çözenler: Murat Ak (Antalya), Alper Çay (Kayseri), Mehmet Erhan Ünal (Isparta), Ali Çivril (Isparta)).

Y.187 Bir komisyon 40 kez toplandı. Komisyonun her toplantısında 10 üye hazır bulundu ve ayrıca, komisyon üyelerinden herhangi bir ikili düşünüldüğünde, bu ikili, toplantılarda en fazla 1 kez hazır bulundu. Komisyon üyelerin sayısının 60 'tan fazla olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her toplantıda 10 kişi ve dolayısıyla, $\binom{10}{2} = 45$ ikili bulunmuştur. Her ikili, en fazla bir toplantıda bulunabileceğinden ve toplantı sayısı 40 olduğundan, komisyon üyelerinden oluşturulabilir ikililer sayısı $45 \cdot 40 = 1800$ 'den az olmayacaktır. Oysa, 60 (veya daha az) kişiden oluşturulabilir ikililer sayısı $\binom{60}{2} = \frac{60 \cdot 59}{2}$ sayısından ve dolayısıyla, 1800 'den az olacaktır. $(\frac{60 \cdot 59}{2} < 1800)$ olduğuna dikkat edin.)

(Çözenler: Mehmet Erhan Ünal (Isparta), Murat Ak (Antalya), Mustafa Sabri Kılıç (Ankara)).

Y.188. a ve b aralarında asal doğal sayılar olsun. Eğer $a + b$ ve $a^2 + b^2$ sayılarını 1 'den büyük ortak böleni varsa, bunun 2 olduğunu gösteriniz.

Çözüm. d sayısı $a + b$ ve $a^2 + b^2$ sayılarının bir ortak böleni ise, d sayısı $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ sayısının da ortak bölenidir. Öyleyse, d sayısı,

$$2a^2 = 2a(a + b) - 2ab \text{ ve } 2b^2 = 2b(a + b) - 2ab$$

sayılarının da ortak böleni olmalıdır. Öte yandan, a^2 ve b^2 aralarında asal olduklarından, d sayısı 2'nin böleni olmalıdır.

(Çözenler: Mustafa Sabri Kılıç (Ankara), Alper Çay (Kayseri), Murat Ak (Antalya), Mehmet Erhan Ünal (Isparta), Ali Çivril (Isparta)).

Y.189 a, b ve c negatif olmayan herhangi sayılar olmak üzere,

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2bc + b^2ac + c^2ab \geq 0$$

eşitsizliğin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. Eşitsizliğin sol tarafına $f(a, b, c)$ diyelim. Bazı hesaplamalardan sonra $f(a, b, c)$ 'yi şu biçimde yazabiliriz:

$$f(a, b, c) = (a+b+c)[abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)].$$

$(a+b-c)$, $(b+c-a)$ ve $(c+a-b)$ sayıları içinde en fazla bir tanesi negatif olabilir (çünkü, örneğin, $a+b-c < 0$ ve $b+c-a < 0$ olursa, taraf tarafa toplamakla $2b < 0$ elde ederiz). Şimdi, eğer bu sayılardan, sadece, bir tanesi negatif ise, onların çarpımı ≤ 0 olacaktır ve bu takdirde $f(a, b, c) \geq 0$ olacağı açıktır. Eğer söz konusu sayıların hiçbirisi de negatif değilse, bu takdirde

$$a^2b^2c^2 \geq [a^2 - (b-c)^2] \cdot [b^2 - (a-c)^2] \cdot [c^2 - (a-b)^2] \\ = (b+c-a)^2(a+c-b)^2(b+a-c)^2$$

eşitsizliğin her iki yanından karekök alarak

$$abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(b+a-c) \Rightarrow f(a, b, c) \geq 0$$

elde ederiz. (Çözenler: Murat Ak (Antalya), Alper Çay (Kayseri)).

Y.190. $x_1, x_2, \dots, x_m$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ sayıları öyle seçilmişler ki, $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ve $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ toplamaları birbirine eşitler ve

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

sayısı için $S < m \cdot n$ eşitsizliği sağlanmaktadır. İspat ediniz ki,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

eşitliğinde bir kaç sayıyı, eşitlik korunacak biçimde silmek mümkündür.

Çözüm. $S = x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ sayısı 2'den az olamaz. (Aksi durumda, $S < m \cdot n$

şartından $1 < 1.1$ çelişkisi çıkar.) $m = n = 2$, $2 \leq S \leq 3$ durumunda problemin hükmü kolayca kontrol edilebilir. Şimdi, $m + n = k$ diyelim ve $k \geq 4$ için problemi, k 'ya göre tümevarım uygulayarak çözelim. Genelliği bozmadan, $x_1 = \max_{i=1, \dots, m} x_i$, $y_1 = \max_{j=1, \dots, n} y_j$ ve $x_1 < y_1$ olsun. ($x_1 = y_1$ durumunda eşitliğin her iki yanında bu iki sayıyı sileriz ve problem çözülmüş olur). $x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ eşitliğini

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \dots + x_m = y_2 + \dots + y_n \quad (*)$$

biçiminde yazalım. $x_1 - y_1 = x_1'$ dersek, eşitliğin her iki yanında toplam $m + n - 1 = k - 1$ terim olacaktır. Tümevarım adımı uygulayabilmemiz için $S' = y_2 + \dots + y_n$ toplamı $m \cdot (n-1)$ sayısından küçük olmalıdır. $y_1 = \max_{j=1, \dots, n} y_j$ olduğundan $y_1 > S/n$ 'dir ve dolayısıyla,

$$S' = S - y_1 < S - \frac{s}{n} = S \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$< mn \cdot \frac{n-1}{n} = m(n-1) \Rightarrow S' < m(n-1)$$

Böylece, tümevarım varsayımına göre, (*)'da bazı terimleri sildikten sonra eşitliği korumak mümkündür. Öyleyse, $x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ eşitliğinde de bazı terimleri sildikten sonra eşitliğin korunmasını sağlamak mümkündür. (Çözenler: Murat Ak (Antalya)).

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Galilei, Galileo (1564-1642): "Ölçülebilir olan şeyi ölç, olmayanı da ölçülebilir kıl."

Galton, Francis (1822-1911): "Olanak bulduğunuzda ölçünüz."

Gauss, Karl Friedrich (1777-1855): "Miknatıs demiri çektiği gibi kuram da uygulamayı çeker."

Hadamard, Jacques: "Gerçek bölgede iki gerçek arasındaki en kısa yol karmaşık bölgeden geçer."

Halmos, Paul R.: "Yalnızca okumayınız; onunla savaşınız! Kendi sorularınızı sorunuz, kendi kanıtlarınızı keşfediniz. Acaba varsayımlar gerekli mi? Acaba tersi doğru mu? Klasik özel durumda acaba neler oluyor? Dejenere durumlarda neler var? Varsayımlar kanıt içinde nelerde kullanılıyor?"

C İ L T 8 D İ Z İ N İ

- Ahmet Derviş-Reşat Satılmış, *Paradokslar...*, SAYI 5, 12-12.
- Albert Erkip, *Problem Çözme Stratejileri*, SAYI 5, 15-19.
- Ali Ülger, *Analiz Nedir?*, SAYI 2, 9-12.
- Arzu Yılmaz, *En Güzel Önyargı: Matematik Önyargısı*, SAYI 4, 25-28.
- Behiye Ubuz, *Genel Matematik'te (Calculus) Öğrenci Hataları*, SAYI 5, 9-11.
- Cahit Arf, *Matematikçi, Bilim Adamı ve Toplum*, SAYI 1, 4-8.
- Cem Tezer, *Collatz Problemi*, SAYI 4, 11-18.
- Diba Yılmaz-Ali Cevahir, *Geometri ve Trigonometrinin Cebirde Bazı Uygulamaları*, SAYI 5, 24-27.
- Fikri Gökdal, *Heron ve Brahmagupta Formülleri*, SAYI 2, 20-24.
- Fikri Gökdal, *Bir ÖSS Sorusu Üzerine Notlar*, SAYI 5, 20-23.
- H. İ. Karakaş-İ. Aliyev-F. Gökdal-D. Çoker, *Dördüncü Antalya Matematik Olimpiyadı Birinci Seçme Sınavı*, SAYI 2, 2-8.
- H. İ. Karakaş-İ. Aliyev-F. Gökdal, *Dördüncü Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavı*, SAYI 3, 22-28.
- İlham Aliyev, *Aritmetik ve Geometrik Dizilerin 1001 Özelliği*, SAYI 3, 2-8.
- Kazım Büyükboduk, *Bir Olimpiyatın Ardından*, SAYI 1, 9-10.
- Mehmet Şahin, *Bir Üçgenin Elemanları Arasındaki Bazı Eşitlik ve Eşitsizlikler I*, SAYI 4, 17-24.
- Nesrin Tutaş, *Asal Sayılar Denizinde Gezinti*, SAYI 2, 16-19.
- Nurettin Ergun, *Nedir Ordinal Sayılar?*, SAYI 1, 19-24.
- Nurettin Ergun, *Bir Sabit Eleman Teoremi*, SAYI 2, 13-15.
- Nurettin Ergun, *Dirichlet 'nin Bir Teoremi Hakkında*, SAYI 5, 2-9.
- Oğün Doğru, *Gauss Toplamları İçin Açık Formüller*, SAYI 3, 13-17.
- Orhan Gölbaşı, *Gökbilimcilerin Otuz Yıllık Düşü Ulusal Gözlemevi Gerçekleşti*, SAYI 1, 2-3.
- Raziye Oruç-Bülent Nuri Özcan, *Dairenin Alanına Farklı Bir Bakış*, SAYI 4, 14-16.
- Samet Bağçe, *Saccheri 'nin "Euklides" 'i Üzerine Bir Metodolojik-Tarihsel Çalışma (II)*, SAYI 1, 25-29.
- Samet Bağçe, *Saccheri 'nin "Euklides" 'i Üzerine Bir Metodolojik-Tarihsel Çalışma (III)*, SAYI 2, 25-28.
- Sofia Ostrovska-Ceylan Yücesoy, *Markov Zincirler Teorisinin Elemanları*, SAYI 3, 18-21.
- Uygur Sümbül, *Rolle Teoreminin Bir Genelleşmesi Üzerine*, SAYI 5, 13-14.
- Yusuf Avcı-Kamil Alınacak-Nurettin Ergun, *Üç Analiz Problemi*, SAYI 4, 2-13.
- VI. Ulusal Matematik Olimpiyadı İkinci Aşama Sınavı Soruları, SAYI 1, 10-10.
- VI. Ulusal Matematik Olimpiyadı İkinci Aşama Sınavı Soruları ve Çözümleri, SAYI 3, 9-12.
- Problemler ve Çözümleri*, SAYI 1, 30-32.
- Problemler ve Çözümleri*, SAYI 2, 29-32.
- Problemler ve Çözümleri*, SAYI 3, 29-32.
- Problemler ve Çözümleri*, SAYI 4, 29-32.
- Problemler ve Çözümleri*, SAYI 5, 28-31.
- Cilt 8 Dizini*, SAYI 5, 32-32.
-

TEŞEKKÜRLER

Elinizdeki bu sayıyla dergimizin 8. cildinin son sayısına ulaşmış oluyoruz. **Türk Matematik Derneği** 'nin bir yayını olan **Matematik Dünyası** dergisinin yayımını 1998 ve 1999 yılları için yüklenen Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, bu yılda da, **var olan** kısıtlı olanakları içerisinde elinden gelebildiği kadarıyla iyi bir biçimde bu görevini yapmaya **çalıştı**. Bu görev sırasında, istemeden de olsa, yapmış olduğu tüm yanlışlıklar, eksiklikler, gecikmeler **ya da** düzensizlikler için siz okurlarımızdan özür dileriz.

Dergimizin hazırlanışında katkıda bulunan tüm yazarlarımıza, dizgisine emek verenlere, derginin iletişim işleriyle ilgilenenlere, derginin çıkışını yapanlara, grafiklerini çizenlere, derginin yaygınlaşması konusunda uğraşanlara, sürdürüm işleriyle ilgilenenlere, basılmış dergilerin sürdürücülerimize yollanmasına yardımcı olanlara gönül borcumuz vardır. Bu tür görevlerde bulunan ve ada göre abecesel olarak aşağıda sıralanan tüm arkadaşlarımıza, bölüm çalışanlarımıza, araştırma görevlilerimize sizlerin önünde bir kez daha teşekkür ediyoruz:

Demet Cezan	Fuat Yeniçerioğlu	Melih Eryiğit
Muhammet Çelik	Mutlu Güloğlu	Mümin Can
Nesrin Tutaş	Özlem Yılmazhan	Sevda Sezer
Simten Bayrakçı	Sinem Sezer	Zeynep Güvenç

Ayrıca yazmış olduğu yazılarla gerçek anlamda dergimizi besleyen İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümünden **Prof. Dr. Nurettin Ergun** 'a da en içten dileklerimizle çok özel teşekkürlerimizi yolluyoruz.

2000 yılında da **Matematik Dünyası** 'nın çıkartılması görevini, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü, *son kez olmak koşuluyla*, üstlenmiş bulunmaktadır. Bir yıl sonra bu görevi bırakmak istememizdeki temel nedenler, giderek azalan öğretim elemanı sayımız ve olağan görevlerimizi yapmakta karşılaştığımız güçlüklerdir. Önümüzdeki yıl dergimize abone olmayı dileyen okurlarımız, abonelik ile ilgili bilgileri 1. sayfamızda bulabilirler. *Ocak/2000* ayından başlayarak mektupla, telefonla, faksla ya da e-posta adresimizi kullanarak internet üzerinden bölümümüze başvurarak aboneliğinizi yinelemek konusunda bizlerle iletişime geçebilirsiniz.

Dergimiz olarak, önümüzdeki yıl da yeniden yanbaşınızda olmamız ve güzellikler dolu yeni ve umutlu bir yıl dileklerimizle hoşça kalınız...

Antalya, Aralık/1999

MATEMATİK DÜNYASI YAZI KURULU
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA
