

# Matematik

D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

**Matematik Dünyasından...**

**Ah Şu Çokgenler!...**

Çağrı Özçağlar

**Açık Fonksiyonlar Hakkında**

Nurettin Ergun

**Üçgenin Elemanları Arasındaki  
Bazı Eşitlik ve Eşitsizlikler II**

Mehmet Şahin

**Geometri ve Trigonometrinin  
Cebirde Bazı Uygulamaları (2)**

Diba Yılmaz - Ali Cevahir

**Tamkatsayılı Polinomların  
Rasyonel Kökleri: Newton Yöntemi**

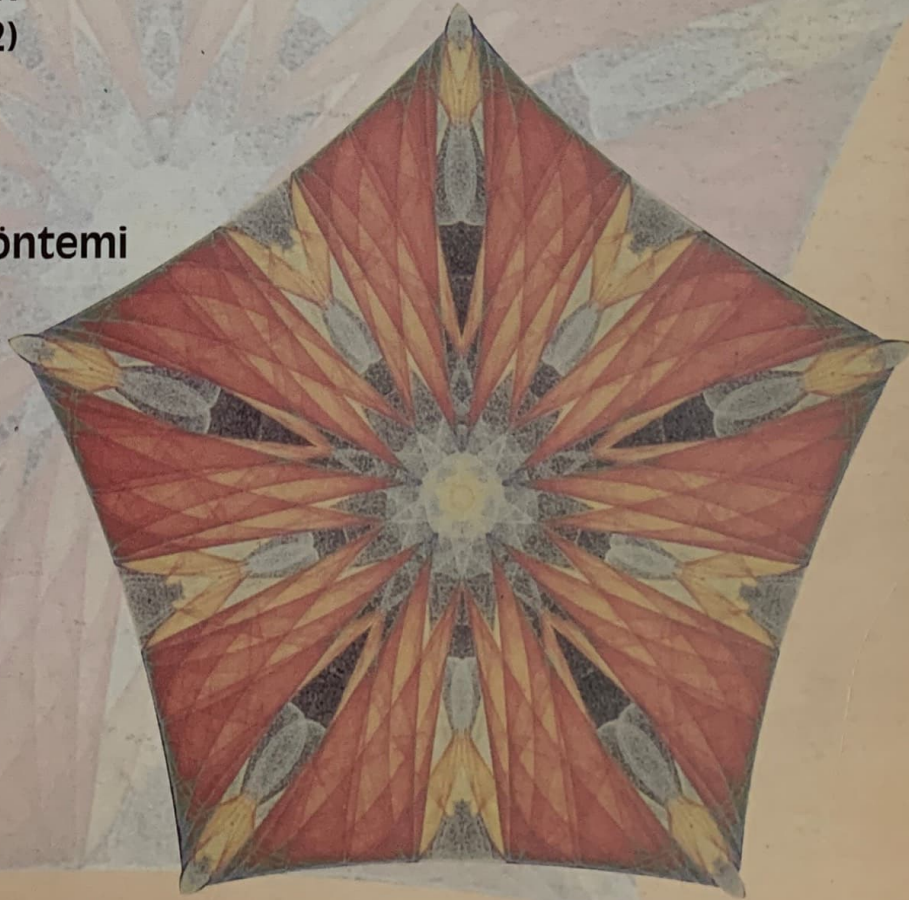
Halil İ. Karakaş

$\pi$

**Rasgele Dizi ve  $\pi$**

Levent Özbek

**Problemler ve Çözümleri**





## MATEMATİK DÜNYASINDAN...

İkibin yılının ilk sayısı ile yeniden karşınızda olmaktan mutluyuz. Yeni bir binyılın başlangıcı olmasının yanında, 2000 yılı,

### Dünya Matematik Yılı

olarak ilan edilmiş bulunuyor. Zaman koordinatlarında onyıl, yüzyıl ya da binyıl başları, belki de şöyle bir durup geçmiş ve içinde bulunulan dönemi değerlendirerek geleceğin amaçlarını belirlemek için işaretleniyor.

Yeni binyılın başında, uluslararası ün kazanmış bazı matematik dergileri, yüzyıl önce yayınladıkları bazı yazılarını yeniden yayınlıyor ve okuyucularının dikkatine sunuyor. Bu yazılar, matematik dünyasında meydana gelen gelişmelere ışık tutuyor ve ayrıca matematiğin akıp giden zaman içinde daima temiz, duru ve güzel kalan değerlerden biri olduğu belgeleniyor.

**Matematik Dünyası** dergisinin de nice onyıllar, yüzyıllar, ... boyu yaşaması dileğimizi yineleyerek Antalya'dan sizlere sıcak sevgilerimizi yolluyoruz...

## MATEMATİK DÜNYASI

## İ Ç İ N D E K İ L E R

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Matematik Dünyasından...                                                                | 1  |
| Ah Şu Çokgenler!...<br>Çağrı Özçağlar                                                   | 2  |
| Açık Fonksiyonlar Hakkında<br>Nurettin Ergun                                            | 4  |
| Üçgenin Elemanları Arasındaki Bazı<br>Eşitlik ve Eşitsizlikler II<br>Mehmet Şahin       | 11 |
| Geometri ve Trigonometrinin Cebirde<br>Bazı Uygulamaları (2)<br>Diba Yılmaz-Ali Cevahir | 16 |
| Tamkatsayılı Polinomların Rasyonel<br>Kökleri: Newton Yöntemi<br>Halil İ. Karakaş       | 18 |
| $\pi$                                                                                   | 25 |
| Rasgele Dizi ve $\pi$<br>Levent Özbek                                                   | 26 |
| Problemler ve Çözümleri                                                                 | 29 |

### Matematik Dünyası

|              |   |                                                                                               |
|--------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| SAHİBİ       | : | Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU                                           |
| YAYIN KURULU | : | H. İbrahim Karakaş, Timur Karaçay, Doğan Çoker,<br>İlham Aliyev, Ünal Ufuktepe, Güvenç Arslan |
| DİZGİ        | : | Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü                                |

**Matematik Dünyası**, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

**Matematik Dünyası'nın**, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

**ABONE KOŞULLARI (2000)** : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 3.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

**ABONE ADRESİ:** Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,  
07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@pascal.sci.akdeniz.edu.tr

## AH ŞU ÇOKGENLER!...

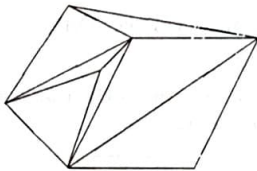
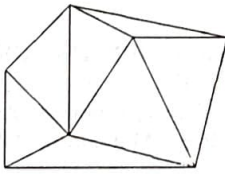
Çağrı Özçağlar

Akdeniz Koleji Fen Lisesi, ANTALYA

**Giriş.** Klasik düzlem geometrisinin ilginç konularından biri çokgenler (üçgenler, dörtgenler, ...vs.) konusudur. Çokgenler ile ilgili sayı kullanılmayan, hesap yapılmayan problemler düşünülmüştür ve düşünülmektedir. Genelde "üçgen problemi" sözkonusu olduğunda akla gelen ilk şeyler üçgenin alanı, yükseklikleri, açıortayları ve kenarortayları, iç ve dış teğet çemberin yarıçapı, ... vs. gibi kavramlar oluyor. Ancak üçgen ve başka çokgenlerle ilgili olup da, yukarıdaki kavramların kullanılmadığı bir sürü çok ilginç problem mevcuttur. İşte, bu yazımızda bu tip problemlerin bazılarını inceleyeceğiz.

İlk problemimiz bir konveks çokgeni üçgenlere bölmekle ilgili.

**Problem-1:**  $n \geq 3$  olmak üzere, bir konveks  $n$ -gen verilsin.  $n$ -genin içinde  $m$  tane nokta işaretlensin.  $n$ -genin köşelerinin ve işaretlenmiş noktaların oluşturduğu  $n + m$  tane noktanın herhangi üçünün doğrusal olmadığını düşünelim.  $n$ -geni, kenarları birbiriyle kesişmeyen ve köşeleri sözkonusu  $n + m$  nokta üzerinde bulunan üçgenlere bölelim. Örneğin 5-gen içinde 2 tane nokta işaretlenmişse, 5-genin üçgenlere "ayrışım"larından -ki bunlar çok fazladır- ikisi şekildeki gibidir:



Dikkat edilirse, her iki şekilde de 7 tane üçgen olduğu gözlenebilir. Acaba bu bir rastlantı mıdır, yoksa üçgenler sayısı ayrışımından bağımsız ve yalnızca  $n$  ile  $m$ 'ye bağımlı bir sabit midir? Son söylediğimiz bu sorunun yanıtıdır ve çözümü oldukça ilginçtir.

Üçgenleri şöyle sayalım: Tüm üçgenlerin

içaçılarının toplamını bulalım ve bu sayıyı 180'e bölelim! Kolayca anlaşılacağı üzere; üçgenlerin içaçıları toplamı,  $n$ -genin içaçıları toplamı ile (yani  $(n - 2) \cdot 180$  ile)  $m \cdot 360$  sayısının (çünkü  $n$ -genin içindeki  $m$  noktadan herbiri, üzerinden ne kadar doğru geçerse geçsin,  $360^\circ$ 'lik bir açı oluşturur) toplamına eşittir. Öyleyse, herhangi bir ayrışımındaki üçgenler sayısı,

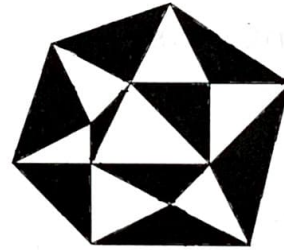
$$\frac{(n - 2) \cdot 180 + m \cdot 360}{180} = 2m + n - 2 = 2(m - 1) + n$$

formülüyle bulunabilir. Bu genel formülden görüldüğü gibi, üçgenler sayısının tek veya çift olması,  $m$  sayısından bağımsızdır ve  $m$  ne olursa olsun; konveks çokgenin köşe sayısı çift ise üçgenler sayısı da çift; köşe sayısı tek sayı ise üçgenler sayısı da tek sayı olur.

Yukarıdaki yöntemi kullanarak, bir çokgeni üçgenlere değil, dörtgenlere (konveks olmaları gerekmez) bölebilir misiniz? (Bu durumda  $n$ 'nin çift olması gerekecektir.)

Şimdi, bir konveks çokgenin üçgenlere ayrışımı konusundaki ikinci problemimize geçelim:

**Problem-2:** Bir konveks 6-gen, şekildeki gibi siyah ve beyaz üçgenlere bölünmüştür, şöyle ki:



(a) Herhangi iki üçgenin ya ortak kenarı vardır (ki böyle üçgenlerin rengi farklıdır); ya ortak köşesi vardır; ya da hiç bir ortak noktası yoktur.

(b) Altıgenin her kenarı bir siyah üçgenin kenarındır.

İspat ediniz ki; 10-gen, 1999-gen, 2000-gen yukarıdaki koşulları sağlayan üçgenlere bölemeyiz.

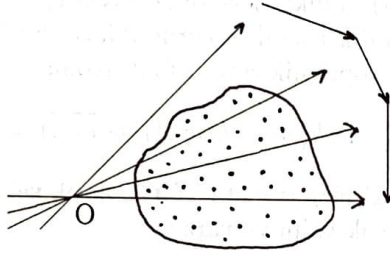
Bunu ispat etmek için siyah ve beyaz üçgenlerin kenar sayılarıyla, verilen çokgenin kenar sayısı arasındaki bağıntıyı veren bir formül bulalım. Siyah üçgenler sayısı  $n$ , beyaz üçgenler sayısı  $k$  ve çokgenin kenar sayısı  $m$  olursa, şekilden de anlaşılacağı üzere,

$$3 \cdot n = 3 \cdot k + m$$

formülü geçerlidir. Yani, çokgenin kenar sayısı olan  $m$ , 3'e bölünmezse, bu koşulları sağlamak mümkün değildir. Buradan görüldüğü gibi,  $m = 10, 1999, 2000$  olamaz.

Üçüncü problemimiz düzlem geometrisinin tanımsız terimleri ve dörtgenlerle ilgili. Bu problemde, köşeleri verilmiş  $4k$  tane noktada bulunan  $k$  tane dörtgen çizmekle uğraşacağız.

**Problem-3:** Düzlem üzerinde, herhangi üçü doğrusal olmayan 4000 tane nokta verilsin. Köşeleri bu noktalardan oluşan ve birbiriyle kesişmeyen 1000 tane dörtgenin çizilebileceğini kanıtlayınız. (Dörtgenlerin konveks olması gerekmez.)



Problemi çözmek için, bütün noktaları ikiye ikiye alarak, onlardan doğrular geçirelim (toplam  $\binom{4000}{2}$  tane doğru). Verilen 4000 noktayı kapsayan bir dairenin dışında, sözkonusu doğrulardan hiçbirinin üzerinde bulunmayan bir  $O$  noktası alalım.

$O$  'dan geçen her doğru üzerinde en fazla bir tane işaretlenmiş nokta bulunacaktır.  $O$  'dan geçen bir ışını saat yönünde döndürerek, işaretlenmiş noktaları birer birer "sol" tarafa bırakıyoruz. Sol tarafta 4 nokta elde edildiği anda, köşeleri bu noktalarda olan bir dörtgen çiziyoruz. Daha sonra ikinci dörtlüyü "sol" tarafa bırakarak ikinci dörtgeni çiziyoruz ve bu şekilde devam ediyoruz. (Dörtgenlerin konveks olması gerekmediğini unutmayalım.)

Son problemimiz ise bir kaç çokgenle, bir başka çokgeni örtmek konusu ile ilgili:

**Problem-4:** Kağıttan kesilerek yapılmış 15 tane çokgen, masayı tam örtecek biçimde masa üzerine yerleştirilmiştir. (Çokgenler masa dışına taşabilirler ve birbirlerinin üzerine kapatabilirler.) İspat edelim ki, çokgenlerden öyle 7'sini almak mümkündür ki, geriye kalanlar masanın en az  $\frac{8}{15}$

'lik kısmını kapatmış olsun.

Bunun için çokgenleri rasgele numaralayalım.  $k$  ( $= 1, 2, 3, \dots, 15$ ) numaralı çokgenin altında kalan ve başka çokgenlerle örtülmemiş masa parçasının alanına  $S_k$  diyelim. (Bazı  $k$  'lar için  $S_k = 0$  olabilir.) Masanın alanına  $S$  denirse,

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{15} = S$$

olur.  $S_k$  'lar içinde en küçük olan 7 tanesini alırsak, geriye kalanların toplamı  $\geq \frac{8}{15} \cdot S$  olacaktır. Dolayısıyla, geriye kalan çokgenler masanın en az  $\frac{8}{15}$  'lik kısmını örtmüş olacaktır.

Sonuncu problemi şöyle de ifade edebiliriz: Bir ağaçta  $n$  tane yaprak olsun. Ağacın altındaki gölgenin alanına  $S$  diyelim. Yapraklardan öyle  $k$ , ( $k < n$ ) tanesini almak mümkündür ki, geriye kalan yapraklar, alanı en az  $\frac{n-k}{n} \cdot S = (1 - \frac{k}{n}) \cdot S$  olan bir bölgeyi gölgelendirmiş olsun.

**Teşekkürler:** Bu çalışmanın gerçekleşmesindeki katkılarından dolayı Doç. Dr. İlham Aliyev'e (Akdeniz Üniversitesi) içten teşekkürlerimi sunarım.

## SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 750.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

## Elimizde Bulunan Sayılar:

|        |                 |
|--------|-----------------|
| Cilt 1 | Sayı: 1,2,3,4   |
| Cilt 2 | Sayı: 1,2,3,4,5 |
| Cilt 3 | Sayı: 5         |
| Cilt 4 | Sayı: 1,3,4,5   |
| Cilt 5 | Sayı: 1,5       |
| Cilt 6 | Sayı: 1,2,3,4,5 |
| Cilt 7 | Sayı: 1,2,3,4,5 |
| Cilt 8 | Sayı: 1,2,3,4,5 |

## AÇIK FONKSİYONLAR HAKKINDA

Nurettin Ergun

İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü,  
İSTANBUL

Bu yazı, baştan belirtmeli, vektör uzayı, metrik uzay, topolojik vektör uzayı ve Banach uzayı denilen kavramları biraz olsun bilenler için yazılmıştır ve bu konularda ilginç bir iki sonucu onların dikkatlerine sunmayı amaçlamaktadır. Ülkemizdeki üniversitelerin Matematik Bölümlerinin öğretim üye ve yardımcıları arasında bu derginin okuru olanlara yöneliktir öncelikle bu yazı, ama anılan kavramları biraz olsun tanımış ve kavrama isteğiyle okuyan okurların da bu yazıdan yararlanabilmeleri için yazı boyunca belirli ölçüde açıklayıcı olunmaya çalışılacaktır. O halde daha baştan bu yazının okurlarının, örneğin, bir  $d$  metriği ile donatılmış bir  $X$  metrik uzayında boştan farklı herhangi bir  $A$  kümesi için,  $x \in \bar{A}$  ile  $d(x, A) = 0$  iddialarının eşdeğer olduklarını ve dolayısıyla şu çok yalın ve yararlı

$$\bar{A} \subseteq S_d(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$$

kapsamasını kolayca gözleyebildiklerini varsayıyoruz;  $\bar{A}$  elbette  $A$  'nın kapanış kümesini göstermektedir. Yine okurlarımızın, azalarak sifıra yakınsayan bir  $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  pozitif gerçel sayılar dizisi yardımıyla, böyle bir metrik uzayda, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon_n$  gerçekleyen bir  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin, bir Cauchy dizisi olduğunu zorlanmadan gözleyebileceklerini varsayıyoruz. Öte yandan bir **topolojik vektör uzayı**, bilindiği gibi, vektör uzayındaki iki temel cebirsel işlemi, yani toplama ve skalerle çarpım işlemlerini sürekli kılacak bir topolojiyle donatılmış özel bir vektör uzayına denir ve yine iyi bilindiği gibi bir vektör uzayının elemanlarına ise **vektör** denir. O halde toplama işleminin sürekliliği nedeniyle bir  $X$  topolojik vektör uzayının  $x_0$  ve  $y_0$  vektörleri ne olursa olsun  $x_0 + y_0$  toplam vektörünün herhangi bir  $G$  komşuluğu, bu vektörlerin sırasıyla uygun birer  $U_{x_0}$  ve  $V_{y_0}$  komşuluğuna ait vektör çiftlerinin toplamalarını ihtiva eder, kısacası  $x \in U_{x_0}$  ve  $y \in V_{y_0}$  vektörleri ne olursa olsun  $x + y \in G$  gerçekleşir, kısa yazılışla  $U_{x_0} + V_{y_0} \subseteq G$  geçerli olur. Skalerle çarpım işlemi,  $\alpha$  gerçel ya da karmaşık sayısı ile  $x$  vektörünün oluşturduğu

ikiliye  $\alpha x$  işareti ile gösterilen vektörü eşleştirir ve bu işlemin bir  $(\alpha_0, x_0)$  ikilisinde sürekli olması, bilindiği gibi  $\alpha_0 x_0$  vektörünün herhangi bir  $U$  komşuluğu alındığında  $\alpha_0$  gerçel ya da karmaşık sayısının  $\mathbb{R}$  ya da  $\mathbb{C}$  üzerinde tanımlı topolojik uzaydaki uygun bir komşuluğundaki tüm  $\alpha$  skalerleri ile  $x_0$  vektörünün uygun bir  $U_{x_0}$  komşuluğundaki tüm  $x$  vektörlerinin  $\alpha x$  çarpımlarının  $\alpha x \in U$  gerçeklemesi demektir. Yine iyi bilindiği gibi sabit bir  $x_0$  vektörü ile **öteleme** (tüm  $x \in X$  vektörlerine  $h_{x_0}(x) = x + x_0$  vektörünü eşleştiren fonksiyon) ve sabit ve sıfırdan farklı bir  $\alpha_0$  skaleri ile çarpma (tüm  $x \in X$  vektörlerine  $\alpha_0 x$  vektörünü eşleştirme)  $X$  topolojik vektör uzayından kendisine tanımlanan birer topolojik eşyapı fonksiyonu (homeomorfizma) oldukları ve dolayısıyla iç ve kapanış gibi topolojik işlemleri korudukları için (biliyorsunuz  $h$  bir topolojik eşyapı fonksiyonu ise gerçekten

$$\text{iç } h(A) = h(\text{iç } A) \text{ ve } \overline{h(A)} = h(\bar{A})$$

gerçekleşir) sonuçta,  $X$  topolojik vektör uzayında yine çok yalın ve yararlı

$$\text{iç}(x_0 + A) = x_0 + \text{iç } A, \quad \overline{x_0 + A} = x_0 + \bar{A}$$

ve benzer nedenlerle

$$\overline{\alpha_0 A} = \alpha_0 \bar{A}, \quad \text{iç}(\alpha_0 A) = \alpha_0(\text{iç } A)$$

ve özellikle  $x_0$  vektörü yerine  $-x_0$  vektörü alınır,

$$\text{iç}(A - x_0) = (\text{iç } A) - x_0$$

bağıntılarının geçerli olduğu anlaşılır, çünkü örneğin  $x_0 + A$  kümesi, yukarıda tanımlanan  $h_{x_0}(A)$  görüntü kümesinden başka bir şey değildir. Bir vektör uzayında  $A$  ve  $B$  altkümeleri ne olursa olsun  $A + B$  işareti ile

$$\{x + y : x \in A, y \in B\}$$

kümesinin gösterildiğini anımsatalım.  $A - B$  kümesi de benzer biçimde tanımlanır ve elbette  $\alpha$  skaleri ne olursa olsun  $\alpha A$  kümesi de

$$\{\alpha x : x \in A\}$$

'dır. Bir  $X$  topolojik vektör uzayında daima

$$\overline{A + B} \subseteq \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{A - B} \subseteq \overline{A} - \overline{B}$$

kapsamaları geçerlidir. Bunlar toplama ve (her  $x$  ve  $y$  vektör ikilisine  $x - y = x + (-y)$  vektörünü

eşleştiren) çıkarma işlemlerinin sürekli oluşunun kolay sonuçlarıdır; peki çıkarma işlemi neden süreklidir?

Bu yazı üç sonucun kanıtlandığı üç bölümden oluşmaktadır.

### Birinci Sonuç

Şimdi bu yazıdaki ana amaca, Fonksiyonel Analiz'in öncüsü ve büyük ustası Polonyalı Stefan Banach'ın en olağanüstü sonuçlarından birisi olan **Açık Fonksiyon Teoreminin** (bak. ikinci bölüm) özgün ve ilk kanıtındaki nedenlemenin bir bakıma topolojik kökeni sayılabilecek temel ve bağımsız bir önermeyi kanıtlayarak girelim. Dolayısıyla bu bölümde salt metrik uzaylarla ilgileneceğiz. Bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı bir  $d$  metriğinin belirlediği topolojik uzayda, iyi bilindiği gibi, bir  $x \in X$  noktasının yerel taban üyeleri

$$S_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

açık yuvarlarıdır, kısacası ancak ve yalnız uygun bir  $0 < \varepsilon$  sayesinde  $S_d(x, \varepsilon) \subseteq G$  gerçekleyen bir  $G$  açık kümesi  $x \in X$  noktasını ihtiva edebilir ve  $d$  metriğinin belirlediği metrik uzay kısaca  $(X, d)$  işareti ile gösterilir. Bu metrik uzayda  $S_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$  kümesinin,  $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$  tanımını kullanılarak  $\cup\{S_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$  birleşimine eşit olduğunu gözlemek güç değildir. Bilindiği gibi tüm Cauchy dizilerinin yakınsaklığının güvence altında olduğu özel bir metrik uzaya **tam metrik uzay** denir.  $(X, d)$  ve  $(Y, \rho)$  metrik uzayları arasında tanımlı bir  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  fonksiyonu ancak ve yalnız,  $0 < \varepsilon$  verildiğinde

$$\exists \delta > 0, f(S_d(x, \delta)) \subseteq S_\rho(f(x), \varepsilon)$$

koşulu gerçekleşirse  $x \in X$  **noktasında sürekli** denir; bu tanında sözü edilen pozitif  $\delta$  sayısı genellikle hem  $\varepsilon$  ve hem de  $x$ 'e bağlıdır. Yeri gelmişken şunları anımsatalım:  $\varepsilon$  verildiğinde bu  $\delta$  sayısını sürekliliğin incelendiği  $x$  elemanına bağlı olmaksızın belirleyebiliyorsak, kısacası aynı bir  $\delta_\varepsilon$ , tüm  $x \in X$  elemanlarının süreklilik tanımında, yukarıda yazılı  $f(S_d(x, \delta_\varepsilon)) \subseteq S_\rho(f(x), \varepsilon)$  kapsamasında kullanılabiliyorsa, ya da eşdeğer bir yazışla, eğer bir  $x, y$  çifti için  $d(x, y) < \delta_\varepsilon$  gerçekleşmesi  $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$  gerektiriyorsa, işte bu özel

durumda  $f$  fonksiyonuna bu iki metrik uzay arasında **düzgün sürekli fonksiyon** denir, yalnızca  $\varepsilon$  tarafından belirlenen  $\delta_\varepsilon$  pozitif sayısına ise  $\varepsilon$ 'nun belirlediği **düzgün süreklilik sabiti** denir. Örneğin  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonu  $(0, 1)$  aralığından  $(0, \infty)$  aralığına tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur, ama düzgün sürekli değildir, çünkü  $\varepsilon = 0,1$  için hiç bir  $\delta$  pozitif sayısı düzgün süreklilik sabiti görevini göremeyecektir; gerçekten  $\delta$  verildiğinde  $0 < \delta' < \min\{\delta, \frac{1}{2}\}$  gerçekleyen pozitif  $\delta'$  yardımıyla tanımlanan  $x = \frac{\delta'}{2}$  ve  $y = \frac{\delta'}{3}$  gerçel sayıları için  $d$  Öklit metriğini göstermek üzere  $d(x, y) = |x - y| = \frac{\delta'}{6} < \delta' \leq \delta$  olur, ama  $2 \leq \frac{1}{\delta'} = |f(x) - f(y)|$  nedeniyle apaçıktır ki  $|f(x) - f(y)| < 0,1$  gerçekleşmemektedir. Düzgün süreklilik kavramı özellikle ikinci bölümde kullanılacaktır. Şimdi ana önermemizi görelim. Ama önce anımsatalım: Tanımlandığı uzayda **her noktada sürekli** olabilen bir fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.

**Ana Önerme:**  $(X, d)$  tam bir metrik uzay ve  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir:

$$(1) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in X \text{ için}$$

$$S_\rho(f(x), \delta_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon))}$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon^* > 0, \forall x \in X \text{ için}$$

$$S_\delta(f(x), \delta_\varepsilon^*) \subseteq f(S_d(x, \varepsilon))$$

**Kanıtlama:** Bir küme kapanışı tarafından kapsandığı için (2) koşulu gerçekleşiyorsa,  $\delta_\varepsilon$  olarak  $\delta_\varepsilon^*$  alarak (1) koşulunun gerçekleştiğini gözlemek kolaydır. Şimdi tersine  $f$  fonksiyonunun (1) koşulunu gerçeklediğini varsayalım ve (2)'nin gerçekleştiğini göstermeye çalışalım. Herhangi bir  $x \in X$  ve  $0 < \varepsilon$  alınsın ve tüm kanıtlama boyunca bunlar sabit tutulsun. (1) koşulu nedeniyle

$$\forall x \in X \text{ için } S_\rho(f(x), \delta_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon))} \quad (3)$$

gerçeklenecek biçimde bir pozitif  $\delta_\varepsilon$  vardır. Şimdi önce her  $n$  doğal sayısı için  $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$  yazıp bu  $\varepsilon_n$  sayılarına karşılık (3) koşulunu gerçekleyen ve var olan pozitif sayıları  $\delta_n^*$  işareti ile gösterirsek, bunlar yardımıyla

$$\delta_n = \min\{\delta_n^*, \frac{1}{n}\}$$

pozitif sayılarını tanımlarsak,  $\delta_n \leq \delta_n^*$  nedeniyle, (3) kullanılarak

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$  için

$$S_\rho(f(x), \delta_n) \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon_n))} \quad (3')$$

elde edilir. Bundan sonra artık amacımız

$$\forall x \in X \text{ için } S_\rho(f(x), \delta_1) \subseteq f(S_d(x, \varepsilon))$$

gerçeklendiğini göstermek olacaktır. Bu son iddiayı kanıtlamak için Banach'ın Açık Fonksiyon Teoremindeki özgün kanıtlanmasında yararlandığı dahiyane yöntemini kullanacağız. (Böylelikle dahiyane bir yöntemi kullanarak yeni şeylerin kanıtlanabildiğini öğrenmiş olacağız.)

Önce gelişigüzel bir  $y \in S_\rho(f(x), \delta_1)$  elemanı seçelim ve gerekli olacağı için  $x$  yerine tüm kanıtlanma boyunca  $x_0$  yazalım. (3') koşulu nedeniyle

$$y \in S_\rho(f(x_0), \delta_1) \subseteq \overline{f(S_d(x_0, \varepsilon_1))}$$

geçerli olduğundan,  $y \in Y$  noktasının her açık yuvarı  $f(S_d(x_0, \varepsilon_1))$  görüntü kümesiyle boştan farklı olarak kesişmek zorundadır, bu nedenle

$$S_\rho(y, \delta_2) \cap f(S_d(x_0, \varepsilon_1)) \neq \emptyset$$

kesişim kümesinde en az bir eleman vardır; kısacası  $S_d(x_0, \varepsilon_1)$  yuvarına ait en az bir elemanın, örneğin belirli ve seçilmiş bir  $x_1 \in S_d(x_0, \varepsilon_1)$  elemanının  $f(x_1)$  görüntüsü bu kesişimde bulunur. Bu yöntemi ardarda yineleyip, tümevarım yardımıyla  $X$  uzayında öyle bir  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  dizisi tanımlayacağız ki

$\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$d(x_{n-1}, x_n) < \varepsilon_n, \rho(f(x_n), y) < \delta_{n+1} \quad (4)$$

gerçekleşecektir. Gerçekten de biraz önce seçilen  $x_1 \in X$  elemanının

$$d(x_0, x_1) < \varepsilon_1 \text{ ve } \rho(f(x_1), y) < \delta_2$$

gerçeklendiği apaçıktır ve sözü edilen dizinin (4) koşulunu gerçekleyen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  terimleri tanımlanmış olduğunda (3') yardımıyla

$$S_\rho(f(x_n), \delta_{n+1}) \subseteq \overline{f(S_d(x_n, \varepsilon_{n+1}))}$$

$$\text{ve } \rho(y, f(x_n)) < \delta_{n+1}$$

geçerli olan bilgilerini ve herhangi bir metrik uzaydaki temel  $\bar{A} \subseteq S_d(A, \delta)$  kapsamasını kullanarak

$$\begin{aligned} y \in S_\rho(f(x_n), \delta_{n+1}) &\subseteq \overline{f(S_d(x_n, \varepsilon_{n+1}))} \\ &\subseteq S_\rho(f(S_d(x_n, \varepsilon_{n+1})), \delta_{n+1}) \\ &= \bigcup \{S_\rho(z, \delta_{n+1}) : z \in f(S_d(x_n, \varepsilon_{n+1}))\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise  $y$  elemanının son birleşime katılan  $\delta_{n+1}$  yarıçaplı yuvarlardan en az birisine ait olmasını gerektirir. Demek ki öyle belirli bir  $x_{n+1} \in S_d(x_n, \varepsilon_{n+1})$  vardır ki  $y$  elemanı  $f(x_{n+1})$ 'in  $\delta_{n+1}$  yarıçaplı yuvarındadır, kısacası hem  $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}$  ve hem de  $\rho(y, f(x_{n+1})) < \delta_{n+1}$  geçerlidir. O halde gerçekten tümevarımla (4) iddialarının doğruluğu gösterilmiş olur. Oysa

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \rho(y, f(x_n)) < \delta_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

nedeniyle, kolayca  $(Y, \rho)$  metrik uzayında  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  bulunur. Üstelik  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $d(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon_n$  olduğundan, yine zorlanmadan,  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  dizisinin  $(X, d)$  metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gözlenir ve bu uzay bir tam metrik uzay olduğu için, bu dizi uygun bir  $\xi \in X$  limitine yakınsamak zorunda kalacağından hem  $d(\xi, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0)$  ve hem de  $f$  sürekli fonksiyon olduğu için  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$  bulunur. Oysa

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq \sum_{k=1}^n d(x_{k-1}, x_k) < \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

geçerli olduğundan  $d(\xi, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , yani  $\xi \in S_d(x_0, \varepsilon)$  ve dolayısıyla  $y = f(\xi) \in f(S_d(x_0, \varepsilon))$  bulunur.  $y$  elemanını nereden aldığımızı ve  $x_0 = x$  yazıldığını anımsayarak, tüm bunların sonunda gerçekten

$$\forall x \in X \text{ için } S_\rho(f(x), \delta_1) \subseteq f(S_d(x, \varepsilon))$$

gerçeklendiğini anlarız. Demek ki  $f$  sürekli fonksiyonu (1) koşulunu gerçeklerse, (2) koşulunu gerçeklemektedir, çünkü (2) koşulunda varlığı aranan  $\delta_\varepsilon^*$  olarak  $\delta_1$ 'in, alınabileceği

kanıtlanmıştır. Kısacası tam bir metrik uzayda tanımlı ve sürekli  $f$  fonksiyonu için (1) ve (2) koşulları eşdeğerdir.

**Sonuç:**  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzay (bir metrik ile donatılmış olmaları gerekmez) ve  $g$  fonksiyonu  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlı olsun. Bilindiği gibi  $X$  uzayındaki tüm açık kümelerin  $g$  fonksiyonu altındaki görüntü kümeleri  $Y$  uzayında birer açık küme ise, ancak bu koşul gerçekleştiğinde  $g$  fonksiyonuna **açık bir fonksiyon** denir.  $f(x) = x^3$  fonksiyonu (ve genel olarak  $p(x) = x^{2n+1}$  biçimindeki özel polinomlar)  $\mathbf{R}^1$  uzayından kendisine tanımlanmış (sürekli ve) açık fonksiyondur. Yukarıdaki ana önermede incelediğimiz ve (1) koşulunu gerçekleyen sürekli  $f$  fonksiyonu açık bir fonksiyondur. Gerçekten  $G \subseteq X$  altkümesi, önermede sözü edilen  $(X, d)$  tam metrik uzayında açık ise,  $f(G)$  görüntü kümesi  $(Y, \rho)$  metrik uzayında açıktır, çünkü herhangi  $x \in G$  için  $S_d(x, \varepsilon) \subseteq G$  gerçekleşecek biçimde bir pozitif  $\varepsilon = \varepsilon_x$  vardır ve bu sayıya karşılık (1)  $\equiv$  (2) koşulu nedeniyle  $S_\rho(f(x), \delta_\varepsilon) \subseteq f(S_d(x, \varepsilon)) \subseteq f(G)$  gerçekleşir, yani  $f(G)$  kümesi her elemanının  $\rho$  metriğinde uygun bir açık yuvarını kapsadığı için açık bir küme olur; gerçekten **herhangi** bir metrik uzayda bir  $A$  altkümesi her bir  $x \in A$  elemanının uygun bir  $\delta_x$  yarıçaplı açık yuvarını kapsıyorsa, kolayca

$$A = \cup \{S(x, \delta_x) : x \in A\}$$

gerçeklenir (nasıl?) ve bir takım açık yuvarların birleşimi olan  $A$  kümesi açık bir küme olur.

### İkinci Sonuç

Şimdi yeniden topolojik vektör uzaylarıyla uğraşmaya dönelim. Bu ikinci bölümün ana sonucu Banach'ın ünlü **Açık Fonksiyon Teoremi** olacaktır hiç kuşkusuz.  $X$ , topolojisi bir  $d$  metriği tarafından belirlenen bir topolojik vektör uzayı olsun. Bu uzayda herhangi bir  $0 < \varepsilon$  için, çabuk biçimde

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot S_d(\theta, \varepsilon)$$

geçerli olduğunu gözleyelim; dikkat  $X$  uzayındaki sıfır vektörünü,  $\mathbf{R}$  ya da  $\mathbf{C}$  cisminde 0 işareti ile gösterilen sıfır skalerinden ayırdetmek için  $\theta$  işareti ile gösteriyoruz. Gerçekten herhangi bir  $x \in X$  vektörü alındığında  $\{\frac{x}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  vektör

dizisi  $\theta$  vektörüne yakınsadığı için, uygun bir  $n_x \in \mathbf{N}$  yardımıyla (her)  $n \geq n_x$  için  $\frac{x}{n} \in S_d(\theta, \varepsilon)$  ve sonuçta  $x \in n \cdot S_d(\theta, \varepsilon)$  geçerli olacaktır. Eğer böyle bir topolojik vektör uzayında, üstelik toplama işlemi düzgün sürekli oluyorsa, bu takdirde bu özel topolojik vektör uzayına **lineer metrik uzay** denir. O halde lineer metrik uzaylarda,  $0 < \varepsilon$  verildiğinde, bu pozitif sayıya karşılık gelen öyle bir  $\delta_\varepsilon$  düzgün süreklilik sabiti vardır ki,  $x$  ve  $y$  vektörleri ne olursa olsun

$$S_d(x, \delta_\varepsilon) + S_d(y, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x + y, \varepsilon) \quad (5)$$

gerçeklenir, çünkü  $(x, y)$  ikilisinin çarpım uzayında,  $\delta_\varepsilon$  tarafından belirlenen  $S_d(x, \delta_\varepsilon) \times S_d(y, \delta_\varepsilon)$  komşuluğunun toplama fonksiyonu altındaki görüntüsü (5) bağıntısında sol yandaki kümeden başka bir şey değildir. Bu son bağıntıda  $y = \theta$  alınıp

$$x + S_d(\theta, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x, \delta_\varepsilon) + S_d(\theta, \delta_\varepsilon)$$

nedeniyle yalın ama çok yararlı

$$x + S_d(\theta, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x, \varepsilon) \quad (\forall x \in X) \quad (6)$$

kapsaması ve bu kez de  $y = -x$  alınarak

$$S_d(x, \delta_\varepsilon) \subseteq x + S_d(\theta, \delta_\varepsilon) \quad (\forall x \in X) \quad (6')$$

kapsaması elde edilir.

Bu bölümün önemli bir başka kavramı **seyrek küme** 'dir; bir topolojik uzayda ancak ve yalnız iç  $\bar{A} = \emptyset$  gerçekleyen bir  $A$  altkümesine seyrek küme denir.  $\mathbf{R}^1$  uzayında  $\mathbf{Z}$  tamsayılar kümesi ve  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$  kümesi tipik seyrek küme örnekleridir, ama bu uzayda sayılabilir elemanlı ve içi boş olup seyrek olmayan kümeler örnek olarak  $\{r \in \mathbf{Q} : 0 \leq r \leq 1\}$  verilebilir; bu son kümenin kapanışı  $[0, 1]$  ve kapanışının içi ise  $(0, 1)$  aralıklarıdır. Biraz topoloji bilen ilgili okurlara bir not ekleyelim: Seyrek bir kümenin boş olmayan herhangi bir açık alt uzaya ait noktalarının oluşturduğu altküme, bu açık alt uzayda yoğun olmadığı için, seyrek kümeler **hiç bir yerde yoğun olmayan** (nowhere dense) küme de denir. Kapanışı ana kümeye eşit olan kümeler, bilindiği gibi, **yoğun** denir.

**Yardımcı Önerme:** Bir lineer metrik uzaydan bir tam metrik uzaya tanımlanan örten (üzerine) bir  $f$  lineer fonksiyonu için  $0 < \varepsilon$  ne olursa olsun  $f(S_d(\theta, \varepsilon))$  kümesi seyrek olamaz.

**Kanıtlanma:** Bir  $X$  lineer metrik uzayından  $Y$  tam metrik uzayına tanımlı olan  $f$  örten ve lineer fonksiyonu, örtenlik nedeniyle,  $Y = f(X)$  gerçekler ve üstelik  $f$  lineer olduğu için sonuçta

$$Y = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot S_d(\theta, \varepsilon)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot f(S_d(\theta, \varepsilon))$$

bulunur. Oysa bir tam metrik uzayda boştan farklı herhangi bir yoğun açık kümenin asla sayılabilir sayıda seyrek kümenin birleşimi olarak yazılamadığı sonucunu veren ünlü ve olağanüstü **Baire Teoremi** nedeniyle,  $A_n = n \cdot f(S_d(\theta, \varepsilon))$  kümelerinin tümü seyrek olamaz, kısaca uygun bir  $n_0$  doğal sayısı yardımıyla

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \text{ic} \bar{A}_{n_0} &= \text{ic}(n_0 \cdot \overline{f(S_d(\theta, \varepsilon))}) \\ &= n_0 \cdot (\text{ic} f(S_d(\theta, \varepsilon))) \end{aligned}$$

bulunur, o halde  $f(S_d(\theta, \varepsilon))$  kümesinin kapanışının içi boştan farklıdır, kısacası bu görüntü kümesi seyrek değildir.

Burada Baire Teoreminin ifadesini bilen okurlar için açıklayıcı bir iki şey söyleyip olası ikirciklenmelerini gidermenin gerekli olduğunu düşünüyorum. Ünlü Baire Teoremi aslında bir tam metrik uzayda sayılabilir sayıda açık-yoğun kümenin kesişiminin yoğun bir küme olduğunu söyler ve kanıtlar; böylelikle bir tam metrik uzayda, bir  $A$  açık kümesinin sayılabilir sayıda  $S_n$  seyrek kümesinin birleşimi olarak yazılması durumunda, apaçıktır ki bu küme  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  birleşimi tarafından kapsanacak ve her açık küme içine eşit ve üstelik daima

$$\text{ic} B = X \setminus (\overline{X \setminus B})$$

geçerli olduğundan, sonuçta

$$\begin{aligned} A = \text{ic} A &\subseteq \text{ic}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}\right) = X \setminus X \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n} \\ &= X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus \overline{S_n} = \emptyset \end{aligned}$$

elde edilecektir, çünkü  $X \setminus \overline{S_n}$  kümeleri hem açık hem yoğun oldukları için (neden?) kesişimleri Baire Teoremi nedeniyle yoğun olacaktır. Bu nedenle yardımcı önermedeki nedenleme doğrudur.

Evet, şimdi bu ikinci bölümün ana sonucunu, ünlü Banach Açık Fonksiyon Teoremini görelim.

Olağanüstü Baire Teoremi olağanüstü bir sonuç türetiyor:

**Banach Açık Fonksiyon Teoremi:** İki tam lineer metrik uzay arasında tanımlı herhangi bir sürekli lineer ve örten fonksiyon açık bir fonksiyondur.

**Kanıtlanma:** Baştan önemli bir uyarı yapalım: “-” işareti tüm kanıtlama boyunca vektörel çıkarma işlemini gösterecektir. Şimdi  $X$  ve  $Y$  lineer metrik uzayları tam olsun ve  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu söylenen nitelikte olsun. Şimdi amacımız öncelikle

$$\theta_Y \in \text{ic} \overline{f(S_d(\theta_X, \varepsilon))} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

göstermek olacaktır.  $\theta$  'ların altlarındaki harfler onların hangi lineer metrik uzayın sıfır vektörü olduğunu ayımsamak içindir.  $d$  metriği ile donatılmış  $X$  lineer metrik uzayında vektörel çıkarma işlemi sürekli olduğundan, pozitif  $\varepsilon$  verildiğinde

$$S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon) - S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(\theta_X, \varepsilon) \quad (7)$$

gerçeklenecek biçimde,  $\theta_X$  vektörüne bağlı olarak belirlenen pozitif bir  $\delta_\varepsilon$  vardır ve bu pozitif sayı yardımıyla, yardımcı önerme kullanılarak

$$y_\varepsilon \in \text{ic} \overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}$$

gerçekleyen bir  $y_\varepsilon \in Y$  vektörünün varlığı anlaşılır ve  $Y$  uzayında

$$\begin{aligned} \theta_Y &= y_\varepsilon - y_\varepsilon \in (\text{ic} \overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}) - y_\varepsilon \\ &= \text{ic} (\overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))} - y_\varepsilon) \\ &\subseteq \text{ic} (\overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon)) - f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}) \end{aligned}$$

bulunur. Oysa

$$\begin{aligned} \overline{f(A_1) - f(A_2)} &\subseteq \overline{f(A_1) - f(A_2)} \\ &= \overline{f(A_1 - A_2)} \end{aligned}$$

nedeniyle (çünkü son adımdaki eşitliği yazarken  $f$  'nin lineerliği nedeniyle  $f(A_1) - f(A_2) = f(A_1 - A_2)$  geçerli olduğu anımsandı), sonuçta (7) kullanılarak, kolayca öncelikli amaç kanıtlanmış olur.

O halde  $Y$  lineer metrik uzayının metriği  $\rho$  ile gösterilecek olursa, yukardaki  $\varepsilon$  sayısına karşılık uygun bir pozitif  $\eta_\varepsilon$  sayısı yardımıyla

$$S_\rho(\theta_Y, \eta_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(\theta_X, \varepsilon))} \quad (8)$$

elde edilir.

Şimdi bu sonuçtan yararlanalım. (6) nedeniyle,  $0 < \varepsilon$  verildiğinde uygun bir pozitif  $\delta_\varepsilon$  yardımıyla

$$x + S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x, \varepsilon)$$

kullanılırsa ve (8) bağıntısında  $\varepsilon$  yerine bu son belirlenen  $\delta_\varepsilon$  alınırsa ve yine (8) bağıntısında  $\delta_\varepsilon = \delta$  sayısına karşılık belirlenen  $\eta_\delta$  yardımıyla

$$f(x) + S_\rho(\theta_Y, \eta_\delta) \subseteq f(x) + \overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}$$

$$= \overline{f(x) + f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}$$

$$= \overline{f(x + S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))} \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon))}$$

bulunur. Son olarak da (6') özelliği kullanılırsa, sonuçta uygun bir  $\delta_\varepsilon^*$  pozitif sayısı sayesinde

$$S_\rho(f(x), \delta_\varepsilon^*) \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon))} \quad (\forall x \in X)$$

bulunur. O halde sözü edilen  $f$  fonksiyonu ana önermedeki (1) koşulunu gerçekler ve dolayısıyla açık bir fonksiyon olur. Bitti!

Baire Teoremi sayesinde yardımcı önermeyi ve onun yardımıyla Banach'ın bu ünlü sonucunu kanıtıyoruz, ayırımsıyoruz değil mi? Son adımda kullandığımız "Ana Önermenin" önemini unutmadan elbette!

### Üçüncü Sonuç

Bu son kısımda bu yazının yazarının ilginç olduğunu düşündüğü bir gözlemi yer almaktadır. Bu sonucun başkaları tarafından daha önce gözlenip gözlenmediğini bilmiyorum. İyi bilindiği gibi Banach uzayları çok özel ve çok güçlü lineer metrik uzaylardır, üzerlerindeki metrik bir norm

sayesinde belirlenir. Bir  $X$  vektör uzayı üzerinde  $\|\cdot\|$  işareti ile yazılan bir norm tanımlıysa,  $d(x, y) = \|x - y\|$  biçiminde tanımlanan  $d$  uzaklık fonksiyonu bu küme üzerinde bir metriktir ve eğer  $(X, d)$  uzayı üstelik tam bir metrik uzay ise  $X$ 'e **Banach uzayı** denir. Tamlik koşulu aranmadan bir normla donatılmış vektör uzayına salt **normlu vektör uzayı** denir. Yazıyı çok uzatmamak için, okurun norm konusunda, en azından

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) = \|x - y\| < \varepsilon\}$$

açık yuvarlarının, şu inanılmaz

$$-B(\theta, \varepsilon) = B(\theta, \varepsilon),$$

$$B(x, \varepsilon) = x + B(\theta, \varepsilon)$$

$$B(\theta, 2\varepsilon) = B(\theta, \varepsilon) \mp B(\theta, \varepsilon) \\ = B(x, \varepsilon) - B(x, \varepsilon)$$

bağlantıları gerçeklediğini ya bildiğini ya da kolayca gözleyebileceğini varsayıyorum. Dikkat edilirse ikinci ve üçüncü bağıntıdan kolayca

$$B(x, \frac{\varepsilon}{2}) + B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = B(x + y, \varepsilon)$$

elde edilir, dolayısıyla her Banach uzayında toplama işlemi düzgün süreklidir başka bir deyişle Banach uzayları birer lineer metrik uzaydır. Buna karşın, tüm karmaşık sayı dizilerinin kümesi  $C^\omega$ 'nın  $C$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu, bu küme üzerinde,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ve  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  "elemanları" arasındaki uzaklığın

$$d(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

biçiminde tanımlanan **Fréchet metriğinin** bir lineer metrik uzay belirlediğini ve uzayın bir Banach uzayı olmadığı iyi bilinmektedir. Evet, son gözlemimize geçmeden gerekli son tanımları anımsatalım: İki topolojik uzay arasında tanımlı bir fonksiyona, tanımlandığı uzaydaki tüm kapalı kümelerin görüntülerini kapalı yapabiliyorsa, **kapalı fonksiyon** denir. Tüm polinomlar kapalı fonksiyonlardır (ama dereceleri  $\geq 2$  olanlar lineer olamazlar).

**Önerme:** Bir  $X$  normlu uzayından bir  $Y$  Banach uzayına tanımlanan örten ve lineer bir fonksiyon bir kapalı bir fonksiyon ise, açık bir fonksiyondur.

Evet, şaşırtıcı değil mi? Fonksiyonumuz kapalı bir fonksiyon ise, açık bir fonksiyondur,

üstelik süreklilik koşulu aranmaksızın, ama yine lineerlik ve örtenlik yeterince güçlü hipotezlerdir. Kanıtlayalım. Gerçekten  $f : X \rightarrow Y$  lineer örten fonksiyonu kapalı bir fonksiyon ise,  $0 < \varepsilon$  verildiğinde  $0 < \delta_2 < \frac{1}{2} \delta_1 < \delta_1 < \varepsilon$  gerçekleyen pozitif sayılar yardımıyla

$$\begin{aligned} B(\theta_X, \delta_2) - B(\theta_X, \delta_2) &= B(\theta_X, 2\delta_2) \\ &\subseteq B(\theta_X, \delta_1) \end{aligned}$$

gerçekleştigiinden ve üstelik uygun bir  $y_0 \in Y$  vektörü ve uygun bir pozitif  $\delta_0$  sayesinde

$$B(y_0, \delta_0) \subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_2))}$$

gerçekleştigiinden (ikinci bölümdeki yardımcı önerme nedeniyle,

$$y_0 \in \text{iş}(\overline{f(B(\theta_X, \delta_2))})$$

gerçekleyen vektörün uygun bir açık yuvarı bu kapanış tarafından kapsanır) ve sonuçta Banach Teoreminin kanıtlanmasındaki akıl yürütmelerinin benzerleriyle

$$\begin{aligned} B(\theta_Y, \delta_0) &\subseteq B(\theta_Y, 2\delta_0) = B(y_0, \delta_0) - B(y_0, \delta_0) \\ &\subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_2))} - \overline{f(B(\theta_X, \delta_2))} \\ &\subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_1))} \subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_1))} \subseteq f(B(\theta_X, \varepsilon)) \end{aligned}$$

bulunur. Gerçekten son iki adıma geçerken şunlara dikkat edildi.  $f$  kapalı bir fonksiyon olduğu için ve özellikle kapanış kümelerinin (ki kapalıdır) görüntüleri kapalı olacağından,  $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$  kapsamı apaçıktır ki

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(A)} = f(\overline{A})$$

verecektir ve üstelik  $\delta_1 < \varepsilon$  seçimi nedeniyle

$$\overline{B(\theta_X, \delta_1)} = \{x \in X : \|x\| \leq \delta_1\} \subseteq B(\theta_X, \varepsilon)$$

geçerlidir. O halde her iki yana  $f(x)$  vektörünü ekleyerek ve  $f$  lineer olduğu için

$$B(f(x), \delta_0) = B(\theta_Y, \delta_0) + f(x)$$

$$\subseteq f(B(\theta_X, \varepsilon)) + f(x) = f(B(x, \varepsilon))$$

elde edilir. Bu son sonuç  $f$  fonksiyonunun, birinci bölümün sonunda yer alan Sonuçtaki akıl yürütmeler nedeniyle açık bir fonksiyon olduğunu söylemektedir.

## YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- \* Konu sunuşları.
- \* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- \* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- \* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- \* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- \* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- \* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

## Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

## ÜÇGENİN ELEMANLARI ARASINDAKİ BAZI EŞİTLİK VE EŞİTSİZLİKLER II

**Mehmet Şahin**

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100, Tandoğan-ANKARA

e-posta: sahinm@science.ankara.edu.tr

Öncelikle yazıda kullandığımız bazı gösterimleri tanımlayalım.  $R$ : çevrel çember yarıçapı;  $r$ : içteğet çember yarıçapı;  $s$ : yarı çevre;  $F$ : alan;  $a, b, c$ : üçgenin  $BC, AC, AB$  kenarlarının uzunlukları;  $\alpha, \beta, \gamma$ : üçgenin iç açıları;  $r_a, r_b, r_c$ : dış teğet çemberlerin yarıçapları;  $h_a, h_b, h_c$ : üçgenin yükseklikleri;  $m_a, m_b, m_c$ : üçgenin kenarortayları;  $w_a, w_b, w_c$ : üçgenin açıortayları.

**Teorem 1.1.** Her üçgende

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}s$$

olur. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

**Kanıt:**  $2F = ah_a = bh_b = ch_c$  olduğundan

$$h_a + h_b + h_c = 2F \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

'dir. Aritmetik ortalama-harmonik ortalama eşitsizliğine göre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ olup } h_a + h_b + h_c \geq \frac{9 \cdot 2F}{a+b+c} = \frac{18F}{2s} = \frac{9F}{s}$$

ve  $F = r \cdot s$  olduğundan  $h_a + h_b + h_c \geq 9r$  bulunur.  $h_a \leq w_a, h_b \leq w_b, h_c \leq w_c$ , olduğu biliniyor.  $p = w_a + w_b + w_c$  diyelim.  $p \leq \sqrt{3}s$  olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a+c \geq 2\sqrt{ac}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

eşitsizliklerini kullanacağız.

$$w_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}, \quad w_b = \frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c}, \quad w_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$$

olduğu biliniyor. O halde yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak

$$w_a \leq \sqrt{s(s-a)}, \quad w_b \leq \sqrt{s(s-b)}, \quad w_c \leq \sqrt{s(s-c)}$$

elde edilir.

$$p = w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}$$

olup  $\forall x, y, z > 0$  için  $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$  eşitsizliği kullanılırsa,

$$p^2 \leq \left( \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)} \right)^2$$

$$\leq 3[s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)] \leq 3s^2$$

ve böylece  $p \leq \sqrt{3}s$  bulunur.

**Sonuç:**  $\triangle ABC$  üçgeninde

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}s,$$

$$9r \leq w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}s$$

'dir.

**Kanıt:**  $\triangle ABC$  'de  $h_a \leq w_a \leq m_a$ ,  $h_b \leq w_b \leq m_b$  ve  $h_c \leq w_c \leq m_c$  olduğundan kanıt açıktır.

**Teorem 1.2.**  $\triangle ABC$  üçgeninin dış teğet çemberlerinin merkezleri  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , ve  $O_1O_2O_3$  ile  $\triangle ABC$  üçgenlerinin alanları sırasıyla  $F_1$  ve  $F_2$  ise,

$$\frac{F_1}{F_2} = 2\frac{R}{r}$$

'dir.

**Kanıt:**  $O_1CB$  üçgeninin alanı  $S_1$ ,  $O_2CA$  üçgeninin alanı  $S_2$  ve  $O_3AB$  üçgeninin alanı  $S_3$  olsun. Bu durumda

$$F_1 = F_2 + S_1 + S_2 + S_3 \quad (0.1)$$

olur.

$$S_1 = \frac{a \cdot r_a}{2}, S_2 = \frac{b \cdot r_b}{2}, S_3 = \frac{c \cdot r_c}{2}$$

olup bu değerler (0.1) 'de yerine yazılırsa,

$$F_1 = F_2 + \frac{a \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_b}{2} + \frac{c \cdot r_c}{2}$$

ve

$$r_a = \frac{F_2}{s-a}, r_b = \frac{F_2}{s-b}, r_c = \frac{F_2}{s-c} \quad (0.2)$$

olduğundan

$$F_1 = F_2 + \frac{aF_2}{2(s-a)} + \frac{bF_2}{2(s-b)} + \frac{cF_2}{2(s-c)}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_2} &= 1 + \frac{a}{2(s-a)} + \frac{b}{2(s-b)} + \frac{c}{2(s-c)} \\ &= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c) + a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b)}{2(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

'dir.

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad (0.3)$$

olduğundan

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{2F_2^2}{s} + s^2(a+b+c) - s[a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)] + 3abc}{\frac{2F_2^2}{s}} \quad (0.4)$$

'dir.  $a+b+c = 2s$  olduğundan  $b+c = 2s-a$ ,  $a+c = 2s-b$ ,  $a+b = 2s-c$  ve  $F_2 = rs$ ,  $abc = 4RF_2$  'dir.

([2], Önerme 1.1) 'den  $ab+ac+bc = r^2 + s^2 + 4Rr$  olduğundan  $a^2+b^2+c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$  'dir. Bu değerler (0.4) 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_2} &= \frac{2r^2s + 2s^3 - s[a(2s-a) + b(2s-b) + c(2s-c)] + 3.4RF_2}{2r^2s} \\
&= \frac{2r^2s + 2s^3 - 2s^2(a+b+c) + s(a^2+b^2+c^2) + 12RF_2}{2F_2r} \\
&= \frac{2r^2s + 2s^3 - 2s^2 \cdot 2s + s(2s^2 - 2r^2 - 8Rr) + 12RF_2}{2F_2r} \\
&= \frac{12RF_2 - 8Rrs}{2F_2r} = \frac{12RF_2 - 8RF_2}{2F_2r} = \frac{4RF_2}{2F_2r} = 2\frac{R}{r}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 1.3.** Her üçgende

$$\frac{ar_a + br_b + cr_c}{a + b + c} = 2R - r$$

'dır.

**Kanıt:**

$$r_a = \frac{F}{s-a}, r_b = \frac{F}{s-b}, r_c = \frac{F}{s-c},$$

$ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr$ ,  $abc = 4RF$  ve  $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$  eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

**Teorem 1.4.**  $\triangle ABC$  üçgeninde

$$3\sqrt{3}r \left( \frac{2r}{R} \right)^{\frac{1}{3}} \leq h_a \tan \frac{\alpha}{2} + h_b \tan \frac{\beta}{2} + h_c \tan \frac{\gamma}{2} \leq s$$

'dır. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

**Kanıt:**

$$p = h_a \tan \frac{\alpha}{2} + h_b \tan \frac{\beta}{2} + h_c \tan \frac{\gamma}{2}$$

diyelim.

$$h_a = \frac{2F}{a}, h_b = \frac{2F}{b}, h_c = \frac{2F}{c}$$

ve

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
p &= \frac{2F}{a} \frac{r}{s-a} + \frac{2F}{b} \frac{r}{s-b} + \frac{2F}{c} \frac{r}{s-c} \\
&= 2Fr \left[ \frac{1}{a(s-a)} + \frac{1}{b(s-b)} + \frac{1}{c(s-c)} \right]
\end{aligned}$$

Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$p \geq 3.2.Fr \frac{1}{[abc(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{3}}} \quad (0.5)$$

ve  $abc = 4RF$ ,  $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$  olduğundan

$$p \geq 6Fr \frac{1}{(4RF \frac{F^2}{s})^{1/3}} = \frac{6r}{(\frac{4R}{s})^{1/3}}$$

'dür. ([1].(9)) 'dan  $s^2 \geq 27r^2$  olduğundan  $s \geq 3\sqrt{3}r$  olup

$$p^3 \geq \frac{6^3 r^3 s}{4R} \geq \frac{6^3 r^3 3\sqrt{3}}{4R} \Rightarrow p \geq 3\sqrt{3}r \left(\frac{2r}{R}\right)^{1/3}$$

Eşitsizliğin diğer yanı aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerden gösterilir:

$$s^2 \geq 27r^2, F = rs, ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr.$$

Teoremin ifadesinde eşitlik  $a = b = c$  için sağlanır.

**Teorem 1.5.** Her  $\triangle ABC$  üçgeninde

$$3^{1+\frac{n}{2}} 2^{n-1} r^n \leq a^n \sin \frac{\alpha}{2} + b^n \sin \frac{\beta}{2} + c^n \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4} \sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}$$

'dir. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

**Kanıt.**  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ ,  $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$  ve  $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$  eşitlikleri biliniyor. Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a^n \sin \frac{\alpha}{2} + b^n \sin \frac{\beta}{2} + c^n \sin \frac{\gamma}{2} \geq 3 [(abc)^{n-1} r^2 s]^{1/3} \quad (0.6)$$

([2], 4.13) 'den

$$4\sqrt{3} \leq \frac{9abc}{a+b+c} \quad (0.7)$$

olup

$$a^n \sin \frac{\alpha}{2} + b^n \sin \frac{\beta}{2} + c^n \sin \frac{\gamma}{2} \geq 3^{1+\frac{n}{2}} 2^{n-1} r^n$$

bulunur. Şimdi

$$x = a^n \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, y = b^n \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, z = c^n \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

denilip  $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$  eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} x+y+z &\leq \sqrt{3} \left[ \frac{a^{2n}(s-b)(s-c)}{bc} + \frac{b^{2n}(s-a)(s-c)}{ac} + \frac{c^{2n}(s-a)(s-b)}{ab} \right]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{3} \left[ \frac{a^{2n+1}(s-b)(s-c) + b^{2n+1}(s-a)(s-c) + c^{2n+1}(s-a)(s-b)}{abc} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (0.8)$$

olur. Şimdi A.O-G.O. eşitsizliğinden

$$\frac{a}{2} = \frac{(s-b) + (s-c)}{2} \geq \sqrt{(s-b)(s-c)}$$

olup  $(s-b)(s-c) \leq \frac{a^2}{4}$  ve benzer şekilde  $(s-a)(s-c) \leq \frac{b^2}{4}$ ,  $(s-a)(s-b) \leq \frac{c^2}{4}$  bulunur. Bu eşitsizlikler (0.8) 'de kullanılırsa  $abc = 4RF$  olup

$$x+y+z \leq \sqrt{3} \left( \frac{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}{16RF} \right)^{1/2}$$

bulunur.  $F = rs$  eşitliği,  $R \geq 2r$  ve  $s^2 \geq 27r^2$  eşitsizlikleri yardımıyla

$$x + y + z \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}}{4\sqrt{RF}} \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}}{4(108)^{1/4}r\sqrt{r}}$$

$$x + y + z \leq \frac{\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}}{4(12)^{1/4}r\sqrt{r}}$$

bulunur. Üçgenin eşkenar olması durumunda eşitlik sağlanır.

Yazımızı aşağıdaki problemlerle bitirelim:

$\triangle ABC$  üçgeninde aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerin varlığını kanıtlayınız:

$$1. \frac{r_a}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{r_b}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{r_c}{\tan \frac{C}{2}} = 3s$$

$$2. \frac{a}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{b}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{c}{\tan \frac{C}{2}} = 2(r_a + r_b + r_c)$$

$$3. \frac{h_a + h_b}{a+b} + \frac{h_b + h_c}{b+c} + \frac{h_c + h_a}{c+a} = \frac{s}{R}$$

$$4. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{r+1}{4r^2}$$

## KAYNAKLAR

- [1] Radovan R. Janič, Deux Inégalites Relatives à Un Triangle, Publications de la Faculté d'electro technique de L'Université à Belgrade, No:195 (1967), 75-76.
- [2] Mehmet Şahin, Üçgenin Elemanları Arasındaki Bazı Eşitlikler ve Eşitsizlikler I, Matematik Dünyası, Cilt 8, Sayı 4, (1999), 17-24.

## GEOMETRİ VE TRİGONOMETRİNİN CEBİRDE BAZI UYGULAMALARI (2)

**Diba Yılmaz-Ali Cevahir**

Akdeniz Koleji Fen Lisesi, ANTALYA

Bu yazıda, Matematik Dünyası 'nın önceki sayısında yer alan yazımızın devamını sunuyoruz.

### 2. Trigonometrik Yöntemlerin Bazı Cebir Problemlerine Uygulanması

Aşağıda bakacağımız cebir problemlerini, doğrudan cebirsel işlemler yaparak çözmek olanaksız gibi gözüküyor. Oysa trigonometrik fonksiyonların devreye girmesi işimizi çok kolaylaştırır. Değişik problem örneklerinden de görülebileceği gibi, bize yardımcı olan esas "teknik araçlar"

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad (*)$$

vs. gibi iyi bilinen trigonometrik özdeşlikler olacaktır. İlk örnek olarak, reel sayılar kümesinde

$$y = x(xy + 2), \quad z = y(yz + 2), \quad x = z(zx + 2)$$

denklemler sistemini çözelim. Bu sistemin,

$$y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad z = \frac{2y}{1-y^2}, \quad x = \frac{2z}{1-z^2}$$

biçimine indirgenebildiğini görmek kolaydır. Sağ taraftaki ifadeler  $\tan 2\alpha$  'nın açılımına benzediğinden  $x = \tan \alpha$  diyelim. O halde  $y = \tan 2\alpha$ ,  $z = \tan 4\alpha$ ,  $x = \tan 8\alpha$  olur. Buradan ise,

$$\begin{aligned} \tan 8\alpha = \tan \alpha &\Leftrightarrow \tan 8\alpha - \tan \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 7\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 8\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 7\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{7} \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Böylece,  $x = \tan \frac{n\pi}{7}$ ,  $y = \tan \frac{2n\pi}{7}$ ,  $z = \tan \frac{4n\pi}{7}$  olur.

Aşağıdaki problem 7.dereceden bir polinomun köklerini bulmakla ilgilidir ve doğrudan cebirsel yöntemler kullanmanın bir sonucu vermeyeceği apaçıktır.

$$(8x^4 - 8x^2 + 1)(1 - 2x^2) \cdot x = 1/8$$

Sol tarafta  $1-2x^2$  çarpanı bulunduğundan (\*) 'daki  $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  formülünü göz önüne alarak  $x = \cos \alpha$ ,  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  diyelim. O halde denklemin sol tarafı,

$$\begin{aligned} (8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1)(1 - 2\cos^2\alpha) \cdot \cos \alpha &= \cos \alpha \cdot (-\cos 2\alpha) \cdot [8\cos^2\alpha (\cos^2\alpha - 1) + 1] \\ &= \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot (-2\sin^2 2\alpha + 1) \end{aligned}$$

olur. Buradan  $-8\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1$  elde edilir. Eşitliğin her iki yanını  $\sin \alpha$  ile çarparsak, ve  $2\sin t \cdot \cos t = \sin 2t$  formülünü kullanırsak,

$$-\sin 8\alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow \sin 8\alpha + \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{9}{2}\alpha \cdot \cos \frac{7}{2}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{9}k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \text{ veya } \alpha = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \cdot n, (n \in \mathbb{Z}) \text{ buluruz.}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  koşulunu da göz önüne alırsak,  $\alpha$  için 4 tane değer buluruz:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{9}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{7}, \quad \alpha_4 = \frac{3\pi}{7}.$$

Böylece verilen denklemin 4 reel kökünü bulmuş oluruz:  $x_1 = \cos \frac{2\pi}{9}, x_2 = \cos \frac{4\pi}{9}, x_3 = \cos \frac{\pi}{7},$

$$x_4 = \cos \frac{3\pi}{7}.$$

Bir tane de "irrasyonel" ifadelerin bulunduğu bir denklemi trigonometrik dönüşümler uygulayarak çözelim:

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$$

$|x| \leq 1$  olacağından  $x = \cos \alpha$ , ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ) diyebiliriz. Bu takdirde,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos 3\alpha & \Leftrightarrow & \sin \alpha = \cos 3\alpha \\ & & \Leftrightarrow & \cos 3\alpha - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuncu denklemden

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, (k \in \mathbb{Z}) \text{ ve } \alpha = \frac{3}{4}\pi + \pi \cdot n, (n \in \mathbb{Z}) \text{ buluruz.}$$

$0 \leq \alpha \leq \pi$  olduğundan,  $\alpha$  için 3 tane değer buluyoruz:  $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}, \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$ . Sonuçta,  $x = \cos \alpha$

formülünden denklemin 3 çözümünü elde ederiz.

Bu bölümü de [5] yazımızın girişinde verdiğimiz ikinci problemin çözümü ile bitirelim. Herhangi 13 tane reel sayı verildiğinde, bunların içinde

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}$$

eşitsizliğini sağlayan en az ikisinin varlığını kanıtlamalıyız.

Verilen sayılara  $a_1, a_2, \dots, a_{13}$  diyelim. Her  $i=1,2,\dots,13$  için  $a_i = \tan x_i$  olacak biçimde  $x_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

sayıları vardır.  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  aralığının uzunluğu  $\pi$  ve  $x_i$  sayıları 13 tane olduğundan onlar içerisinde  $0 < x_i - x_j <$

$\frac{\pi}{12}$  eşitsizliğini sağlayan en az ikisi vardır. Bu takdirde  $0 < \tan(x_i - x_j) < \tan \frac{\pi}{12}$  olur.  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

formülünü ve  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  eşitliğini kullanarak  $\tan \frac{\pi}{12}$  'yi hesaplamak zor değildir:  $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ .

Böylece  $0 < \tan(x_i - x_j) < 2 - \sqrt{3}$  olur. Buradan ise,

$$0 < \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1 + \tan x_i \cdot \tan x_j} < 2 - \sqrt{3}$$

elde edilir.  $a=\tan x_i$  ve  $b=\tan x_j$  yazarak problemin çözümünü bitiriyoruz.

**Teşekkürler:** Bu çalışmanın gerçekleşmesinde yaptığı katkılar nedeniyle Doç. Dr. İlham Aliyev 'e (Akdeniz Üniversitesi) teşekkürlerimizi sunarız.

## KAYNAKLAR

- [1] Halil İ. Karakaş- İlham Aliyev, Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, Tübitak, Anlara, 1998.
- [2] Halil İ. Karakaş- İlham Aliyev, Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, Tübitak , Ankara, 1998.
- [3] Halil İ. Karakaş, Analitik Geometri, Akdeniz Üniversitesi Yayınları.
- [4] Abdullah Demiralp-Mehmet Gürkan-Tahsin Pelit, Liseler için Matematik 3 Ders Kitabı.
- [5] Diba Yılmaz-Ali Cevahir, Geometri ve Trigonometrinin Cebirde Bazı Uygulamaları (1), Matematik Dünyası , 8-5 (1999) 24-27.

## ÖNEMLİ DUYURU

Türk Matematik Derneği, Vezneciler'den Karaköy'e taşındı. Türk Matematik Derneği'nin yeni adresi, telefon ve faks numaraları aşağıdaki gibidir:

**Adres:** Türk Matematik Derneği  
Sabancı Üniversitesi Karaköy İletişim Merkezi, Bankalar Caddesi, No.2  
80020-Karaköy/İSTANBUL  
**Tel:** (0.212) 292.49.39/1506  
**Faks:** (0.212) 252.32.93

# TAMKATSAYILI POLİNOMLARIN RASYONEL KÖKLERİ: NEWTON YÖNTEMİ

Halil İ. Karakaş

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Cebir ve sayılar teorisinin ilginç problemlerinden biri, katsayıları tamsayılar olan bir polinomun rasyonel köklerinin belirlenmesi problemidir. Okullarımızın ders programlarında bu konuya değinilmekle beraber, bu yazımızda sunacağımız Newton yöntemi konu ile ilgili derslerin içeriğinde pek görülmez.

Burada, polinomlarla ilgili temel tanım, kavram ve özellikleri tekrar etmeyeceğiz. Arzu eden okurumuz bu doğrultuda özet bilgiyi [2] no'lu kaynakta (Sayfa:10,11) bulabilir.

Bununla beraber, bir tamkatsayılı polinom denince,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tamsayılar olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

biçiminde bir ifade anlaşıldığını ve herhangi bir  $s$  sayısı için

$$P(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

tanımlandığını hatırlayalım. Eğer  $P(x)$  polinomunun katsayıları olarak adlandırılan  $a_0, a_1, \dots, a_n$  'yi reel sayılar veya bilen okurlarımız için herhangi bir tamlık bölgesinin elemanları olarak seçersek, o zaman  $P(x)$  'e, reel katsayılı veya katsayıları sözkonusu tamlık bölgesinde olan polinom denir.

Katsayıları bildiğimiz sayı sistemlerinden biri içinde olan bir  $P(x)$  polinomu ve bir  $s$  sayısı verildiğinde,  $P(s) = 0$  ise,  $s$  sayısı  $P(x)$  polinomunun bir kökü 'dür denir. Eğer  $s$  bir rasyonel sayı ise,  $s$  'ye  $P(x)$  'in bir rasyonel kökü denir.

Tüm katsayıları tamsayı olan bir polinoma "tamkatsayılı polinom" diyeceğiz. Polinomların kökleri ile ilgili birkaç temel özelliği verdikten sonra tamkatsayılı polinomların köklerinin incelenmesine geçeceğiz ve Newton yöntemini sunacağız.

**Teorem 1 (Bezout).** Reel katsayılı bir  $P(x)$  polinomu ve bir  $s$  reel sayısı verilmiş olsun. Bu takdirde,  $(x - s)$  polinomu  $P(x) - P(s)$  'yi böler. Daha açık bir ifade ile,

$$P(x) - P(s) = (x - s)A(x) \quad (1)$$

olacak biçimde, reel katsayılı bir  $A(x)$  polinomu vardır. Ayrıca, eğer  $P(x)$  'in katsayıları ve  $s$  sayısı rasyonel ise, (1) ifadesindeki  $A(x)$  polinomunun katsayıları da rasyoneldir.

**İspat.** Her  $k \geq 1$  için

$$x^k - s^k = (x - s)(x^{k-1} + x^{k-2}s + \dots + xs^{k-2} + s^{k-1}) \quad (2)$$

olduğunu biliyoruz.  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  ise,

$$P(x) - P(s) = a_n(x^n - s^n) + \dots + a_2(x^2 - s^2) + a_1(x - s)$$

olur. (2) özdeşliği  $k = 1, \dots, n$  için uygulanırsa, uygun bir  $A(x)$  polinomu için

$$P(x) - P(s) = (x - s)A(x)$$

elde edilir. Burada,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ve  $s$  rasyonel sayılar ise,  $A(x)$  'in katsayılarının da rasyonel olacağı açıktır.

**Sonuç 1.** Eğer  $P(x)$ , reel katsayılı bir polinom ve  $s$  sayısı onun bir kökü ise, uygun bir reel katsayılı  $A(x)$  polinomu için,

$$P(x) = (x - s)A(x) \quad (3)$$

olur. Ayrıca,  $P(x)$  'in katsayıları ve  $s$ , rasyonel sayılar ise,  $A(x)$  'in katsayıları da rasyoneldir.

**İspat.** Teorem 1 'de  $P(s) = 0$  olacaktır.

**Sonuç 2.**  $P(x)$  rasyonel katsayılı bir polinom,  $p$  ve  $q$  tamsayılar,  $q \neq 0$  olsun. Eğer  $\frac{p}{q}$  sayısı  $P(x)$  'in bir kökü ise,

$$P(x) = (qx - p)B(x) \quad (4)$$

olacak biçimde rasyonel katsayılı bir  $B(x)$  polinomu vardır.

**İspat.** Sonuç 1 'e göre,

$$P(x) = (x - \frac{p}{q})A(x)$$

olacak biçimde rasyonel katsayılı bir  $A(x)$  polinomu vardır.  $B(x) = \frac{1}{q}A(x)$  de rasyonel katsayılı bir polinomdur ve

$$P(x) = (qx - p)\frac{1}{q}A(x) = (qx - p)B(x)$$

istenilen sonucu verir.

Sonuç 1 'de,  $s$  sayısının  $P(x)$  'in bir kökü olması için bir gerek koşul verilmektedir. Bu gerek koşulun aynı zamanda bir yeter koşul olduğu; yani, (3) koşulu sağlanırsa,  $s$  'nin,  $P(x)$  'in bir kökü olacağı açıktır. Benzer şekilde, Sonuç 2 'de (4) koşulu sağlanırsa,  $\frac{p}{q}$  sayısı  $P(x)$  'in bir kökü olur.

Şimdi, tamkatsayılı polinomları ele alıyoruz:

**Teorem 2.**  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , tamkatsayılı bir polinom;  $p$  ve  $q$  aralarında asal tamsayılar,  $q \neq 0$  olsun. Eğer  $\frac{p}{q}$  sayısı  $P(x)$  'in bir kökü ise,  $a_0$  sayısı  $p$  ile ve  $a_n$  sayısı da  $q$  ile tam bölünür.

**İspat.**  $\frac{p}{q}$  'nın kök olması durumunda,

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

ifadesi  $q^n$  ile çarpılırsa,

$$a_n p^n + q^{n-1} a_{n-1} p + \dots + q^{n-1} a_1 p + q^n a_0 = 0$$

elde edilir. Bu ifadede son terim dışında her terim  $p$  ile bölündüğünden ve  $q$  ile  $p$  aralarında asal olduğundan,  $p$  sayısı  $a_0$  'ı böler. Benzer şekilde, ilk terim dışında her terim  $q$  ile bölündüğünden,  $q$  sayısı  $a_n$  'yi böler.

Teorem 2, tamkatsayılı bir polinomun rasyonel kökleri araştırılırken kök olmağa aday olarak düşünülebilecek rasyonel sayıları sonlu bir kümeye indirgemektedir. Örneğin,

$$P(x) = 8x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 18x^2 + 7x + 3$$

polinomunun kökleri (varsa),

$$\left\{ \frac{-3}{8}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{1}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{1}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

kümesinin elemanları arasındadır. Bunlardan hangisinin  $P(x)$  polinomunun kökü olduğunun belirlenmesi de başlı başına bir problemidir. Newton yöntemi, bu doğrultudaki pratik yöntemlerden biridir.

Newton yönteminin temelini oluşturan aşağıdaki teorem, [2] no'lu kaynakta problem olarak verilmiştir (Sayfa 184, Problem 6.27). Orada verilen ispatta bazı yazım hataları ve eksikler vardır. Bu vesile ile oradaki yazım hatalarını ve eksikleri de gidermiş oluyoruz.

**Teorem 3.**  $P(x)$ , tamkatsayılı bir polinom;  $p$  ve  $q$  aralarında asal tamsayılar ve  $q \neq 0$  olsun. Eğer  $\frac{p}{q}$  sayısı  $P(x)$  'in bir kökü ise, her  $t$  tamsayısı için  $(qt - p)$  sayısı  $P(t)$  'yi tam böler.

**İspat.**  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  olsun. Burada,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tamsayılardır. Eğer  $\frac{p}{q}$ ,  $P(x)$  'in bir kökü ise, Sonuç 2 'ye göre,

$$P(x) = (qx - p)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0) \quad (5)$$

olacak biçimde  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  rasyonel sayıları vardır. Teoremin ispatı için  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  'in her birinin bir tamsayı olduğunu göstermek yeter. Şimdi, (5) eşitliğinde katsayılar karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned} a_0 &= -pb_0 \\ a_1 &= qb_0 - pb_1 \\ a_2 &= qb_1 - pb_2 \\ &\vdots \\ a_{k-1} &= qb_{k-2} - pb_{k-1} \\ a_k &= qb_{k-1} - pb_k \\ a_{k+1} &= qb_k - pb_{k+1} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= qb_{n-2} - pb_{n-1} \\ a_n &= qb_{n-1} \end{aligned} \quad (6)$$

olduğu görülür. Teorem 2 'ye göre  $p$  sayısı  $a_0$  'ı ve  $q$  sayısı  $a_n$  'yi böldüğünden,  $b_0$  ve  $b_{n-1}$  her ikisi de tamsayıdır. Tümevarımla,  $b_1, \dots, b_{n-2}$  'nin her birinin bir tamsayı olduğunu göstereceğiz.  $b_0, b_1, \dots, b_k$  'nın her birinin bir tamsayı olduğunu gösterdiğimiz varsayalım ( $0 \leq k < n-2$ ) ve  $b_{k+1}$  'in de bir tamsayı olduğunu gösterelim. Katsayılar arasındaki ilişkiler de kullanılarak kolayca görülebilir ki,

$$\begin{aligned} P(x) - (qx - p)(b_0 + b_1x + \dots + b_{k-1}x^{k-1}) &= (qx - p)(b_kx^k + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) \\ &= (-pb_k)x^k + (qb_k - pb_{k+1})x^{k+1} + \dots + (qb_{n-1})x^n \\ &= (a_k - qb_{k-1})x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_nx^n \end{aligned}$$

'dir. Burada  $x$  yerine  $\frac{p}{q}$  yerleştirilirse,

$$0 = (a_k - qb_{k-1})\frac{p^k}{q^k} + a_{k+1}\frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} + \dots + a_n\frac{p^n}{q^n}$$

elde edilir. Son eşitlik  $\frac{q^n}{p^k}$  ile çarpılarak,

$$0 = (a_k - qb_{k-1})q^{n-k} + a_{k+1}q^{n-k-1}p + \dots + a_np^{n-k}$$

elde edilir. Buradan,  $a_k - qb_{k-1}$  tamsayısının  $p$  ile tam bölündüğü görülür ki,  $-pb_k = a_k - qb_{k-1}$  olduğundan bu,  $b_k$  'nın da bir tamsayı olduğunu gösterir.

Teorem 3 'ün ispatında kullandığımız (6) özdeşliklerine biraz daha yakından bakalım. Bu özdeşlikler kullanılarak  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  ardışık olarak elde edilebilir. Bu düşünce ile,  $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$  'yı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} c_0 &= -b_0 = +\frac{a_0}{p} \\ c_1 &= -b_1 = +\frac{a_1 - qb_0}{p} = \frac{a_1 + qc_0}{p} \\ c_2 &= -b_2 = +\frac{a_2 - qb_1}{p} = \frac{a_2 + qc_1}{p} \\ &\vdots \\ c_k &= -b_k = +\frac{a_k - qb_{k-1}}{p} = \frac{a_k + qc_{k-1}}{p} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

O halde,  $p$  ve  $q$  aralarında asal tamsayılar,  $q \neq 0$  olmak üzere,  $\frac{p}{q}$  'nın  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  'nin bir kökü olması için önce,  $c_0 = \frac{a_0}{p}$ , sonra,  $c_1 = \frac{a_1 + qc_0}{p}$ ,  $\dots$ , sonra,  $c_k = \frac{a_k + qc_{k-1}}{p}$ ,  $\dots$  tamsayı olmalıdır. Bu durumu pratik olarak kontrol etmek için,  $P(x)$  'in katsayıları sıralanarak

|       |       |         |           |       |
|-------|-------|---------|-----------|-------|
| $a_0$ | $a_1$ | $\dots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|       |       |         |           |       |
|       |       |         |           |       |

tablosu oluşturulur ve  $c_0 = \frac{a_0}{p}$  sayısı bulunur. (Burada sıralamanın  $a_0$  ile başlayıp  $a_n$  ile bittiğine dikkat ediniz.) Eğer  $c_0$  bir tamsayı değilse,  $\frac{p}{q}$  sayısı  $P(x)$  'in kökü olamaz;  $c_0$  tamsayı ise, yukarıdaki tabloda  $a_1$  'in altına  $c_0$  yazılır ve üçüncü satıra,  $a_1 + qc_0$  'in değeri yazılır.

|       |              |       |       |         |       |
|-------|--------------|-------|-------|---------|-------|
| $a_0$ | $a_1$        | $a_2$ | $a_3$ | $\dots$ | $a_n$ |
|       | $c_0$        |       |       |         |       |
|       | $a_1 + qc_0$ |       |       |         |       |

Şimdi,  $c_1 = \frac{a_1 + qc_0}{p}$  sayısı hesaplanır. Eğer  $c_1$  bir tamsayı değilse,  $\frac{p}{q}$  sayısı  $P(x)$  'in bir kökü olamaz;  $c_1$  bir tamsayı ise, tabloda  $a_2$  'nin altına  $c_1$  yazılır ve bunun da altına, üçüncü satıra,  $a_2 + qc_1$  'in değeri yazılır. Sonra,  $c_2 = \frac{a_2 + qc_1}{p}$  sayısı hesaplanarak aynı işlem sürdürülür:

|       |              |              |       |         |           |       |
|-------|--------------|--------------|-------|---------|-----------|-------|
| $a_0$ | $a_1$        | $a_2$        | $a_3$ | $\dots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|       | $c_0$        | $c_1$        | $c_2$ |         |           |       |
|       | $a_1 + qc_0$ | $a_2 + qc_1$ |       |         |           |       |

Açıklamaya çalıştığımız bu yöntem **Newton yöntemi** denir. Newton yönteminde ikinci satırda  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  tamsayıları elde edilebilirse, her  $k = 0, 1, \dots, n-1$  için  $b_k = -c_k$  olmak üzere,

$$P(x) = (qx - p)(b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1})$$

'dir.

Örnek olarak, Newton yöntemini

$$P(x) = 8x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 18x^2 + 7x + 3$$

polinomuna uygulayalım. Bu polinomun kökü olabilecek sayıların

$$\left\{ \frac{-3}{8}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{1}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

kümesinin elemanları arasında olacağını biliyoruz. Önce  $\frac{-3}{2}$  sayısını deneyelim: Bu örneğimizde,  $a_0 = 3, a_1 = 7$  (Neden?),  $a_2 = -18, a_3 = 5, a_4 = -10, a_5 = 8$ ;  $p = -3, q = 2$  'dir. Dolayısıyla,  $c_0 = \frac{3}{-3} = -1, c_1 = \frac{7-2}{-3} = -\frac{5}{3}$  'tür:

|   |   |                |   |     |   |
|---|---|----------------|---|-----|---|
| 3 | 7 | -18            | 5 | -10 | 8 |
|   | 1 | $-\frac{5}{3}$ |   |     |   |
|   |   |                |   |     |   |

$c_1 = -\frac{5}{3}$  bir tamsayı olmadığından,  $-\frac{3}{2}$  bir kök değildir.

Şimdi  $\frac{3}{2}$  'yi deneyelim:  $p = 3, q = 2$ .  $c_0 = \frac{3}{3} = +1, c_1 = \frac{7+2}{3} = 3$ . İşlemlerimizi tablo üzerinde sürdürelim:

|   |   |     |    |     |    |
|---|---|-----|----|-----|----|
| 3 | 7 | -18 | 5  | -10 | 8  |
|   | 1 | 3   | -4 | -1  | -4 |
|   | 9 | -12 | -3 | -12 |    |

Böylece,  $\frac{3}{2}$  sayısının bir kök olduğu ve  $P(x) = (2x-3)(-1-3x+4x^2+x^3+4x^4)$  yazılabileceği görülür. Eğer  $P(x)$  'in başka rasyonel kökleri varsa, bunlar  $Q(x) = (-1-3x+4x^2+x^3+4x^4)$  polinomunun kökleri ve dolayısıyla,  $\{\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$  kümesinin elemanlarından biri olmalıdır.  $\frac{-1}{4} = \frac{(-1)}{4}$  sayısını deneyelim:

|    |    |    |   |    |
|----|----|----|---|----|
| -1 | -3 | 4  | 1 | 4  |
|    | 1  | -1 | 0 | -1 |
|    | 1  | 0  | 1 |    |

Tablodan,  $\frac{-1}{4}$  'ün  $Q(x)$  için bir kök olduğu ve

$$Q(x) = (4x+1)(-1+x+x^3)$$

yazılabileceği görülür. Böylece,

$$P(x) = (2x-3)(4x+1)(x^3+x-1)$$

olduğu görülür. Ayrıca,  $x^3+x-1$  polinomunun hiç rasyonel kökü bulunmadığından (nedenini düşününüz),  $P(x)$  'in rasyonel kökleri  $\frac{3}{2}$  ve  $\frac{-1}{4}$  'ten ibarettir.

$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  polinomu verildiğinde,

$$R(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

polinomunu düşünelim. Eğer  $s \neq 0$ ,  $P(x)$  polinomunun bir kökü ise,  $\frac{1}{s}$  de  $R(x)$  polinomunun bir kökü olur. Bu bağlamda, yukarıda  $Q(x) = -1 - 3x + 4x^2 + x^3 + 4x^4$  polinomunun kökleri araştırılırken, bunun yerine  $R(x) = 4 + x + 4x^2 - 3x^3 - x^4$  polinomunun köklerine bakmak yeterli olabilirdi.  $R(x)$  için kök adayları,  $\mp 4, \mp 2, \mp 1$  'dir.  $-4 = \frac{-4}{1}$  sayısını Newton yöntemi ile denersek

|   |    |   |    |    |
|---|----|---|----|----|
| 4 | 1  | 4 | -3 | -1 |
|   | -1 | 0 | -1 | 1  |
|   | 0  | 4 | -4 |    |

tablosu elde edilir, buradan  $R(x) = (x+4)(1+x^2-x^3)$  olduğu; dolayısıyla  $R(x)$  'in  $-4$  'ten başka,  $Q(x)$  'in de  $\frac{-1}{4}$  'ten başka rasyonel kökü bulunmadığı görülür.

Newton yönteminin  $R(x)$  'e uygulaması **Horner yöntemini** çağrıştırıyor mu?

Newton yönteminden hoşlanan ve yöntemi pekiştirmek isteyen okurlarımıza, rasyonel köklerini bulmaları için aşağıdaki polinomları öneriyoruz:

- (1)  $8t^3 + 22t^2 - 13t + 6$
- (2)  $48x^5 + 80x^4 - 160x^3 - 140x + 37x + 30$
- (3)  $12x^3 - 4x^2 - 17x - 6$
- (4)  $6x^3 + 17x^2 + 4x - 12$
- (5)  $21x^3 + 11x - 9x^3 + x^3$

## KAYNAKLAR

- [1] Barbeau, E. J.; Polynomials, Problem Books in Mathematics; Springer- Verlag, Berlin, 1995.
- [2] Karakaş, H. İ. - Aliyev, İ.; Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri (4. baskı) TÜBİTAK, 1999.

|   |    |   |    |    |
|---|----|---|----|----|
| 4 | 1  | 4 | -3 | -1 |
|   | -1 | 0 | -1 | 1  |
|   | 0  | 4 | -4 |    |

$\pi \approx$ 

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510  
 58209749445923078164062862089986280348253421170679  
 82148086513282306647093844609550582231725359408128  
 4811174502841027019385211055596446229489S493038196  
 45648566923460348610454326648213393607260249141273  
 72458700660631558817488152092096282925409171536436  
 78925903600113305305488204665213841469519415116094  
 33057270365759591953092186117381932611793105118548  
 07446237996274956735188575272489122793818301194912  
 98336733624406s66430860213949463952247371907021798  
 60943702770539217176293176752384674818467669405132  
 00056812714526356082778577134275778960917363717872  
 14684409012249534301465495853710507922796892589235  
 42019956112129021960864034418159813629774771309960  
 51870721134999999837297804995105973173281609631859  
 50244594553469083026425223082533446850352619311881  
 71010003137838752886587533208381420617177669147303  
 59825349042875546873115956286388235378759375195778  
 18577805321712268066130019278766111959092164201989  
 38095257201065485863278865936153381827968230301952  
 03530185296899577362259941389124972177528347913151  
 55748572424541506959508295331168617278558890750983  
 81754637464939319255060400927701671139009848824012  
 85836160356370766010471018194295559619894676783744  
 94482553797747268471040475346462080466842590694912  
 93313677028989152104752162056966024058038150193511  
 25338243003558764024749647326391419927260426992279  
 67823547816360093417216412199245863150302861829745  
 55706749838505494588586926995690927210797509302955  
 32116534498720275596023648066549911988183479775356  
 63698074265425278625518184175746728909777727938000  
 81647060016145249192173217214772350141441973568548  
 16136115735255213347574184946843852332390739414333  
 45477624168625189835694855620992192221842725502542  
 56887671790494601653466804988627232791786085784383  
 82796797668145410095388378636095068006422512520511  
 73929848960841284886269456042419652850222106611863  
 06744278622039194945047123713786960956364371917287  
 46776465757396241389086583264599581339047802759009  
 94657640789512694683983525957098258...

## RASGELE DİZİ VE $\pi$

**Levent Özbek**

Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, Tandoğan, 06100-ANKARA

### Giriş

$\pi$  sayısı matematik bahçesinin en zarif çiçeklerinden birisidir. Archimedes'den beri yüzlerce yıldır matematikçilerin ve diğer bilim insanlarının merak ve ilgiyle kokladıkları bir çiçek olagelmıştır. Bu sayının birçok özelliği vardır: Dairenin çevresinin çapına oranıdır, transandant (aşkın) bir sayıdır (katsayıları tamsayı olan cebirsel bir denklemin çözümü olamayan sayı). Binlerce yıldır insanlar  $\pi$  'nin daha çok ondalık basamağını hesaplamaya çalışmaktadır ve bu ondalık basamakların nasıl bir dağılım gösterdiği merak konusudur.  $\pi$  'ye duyulan bu ilgi nereden kaynaklanmaktadır? Acaba  $\pi$  'nin bugüne kadar bilinen özelliklerinden başka daha keşfedilmeye hazır hangi özellikleri vardır? Matematik bahçesinin en zarif çiçeği orada durmakta ve belki de sonsuz özelliklerini sunmaya hazır bir sevgili gibi beklemektedir.

Bu yazı, rasgele dizi kavramı çerçevesinde  $\pi$  'nin ondalık basamaklarını ele almakta, bu ondalık basamakların rasgele dizi tanımına uygunluğunun araştırılması amacını taşımaktadır.

### Kısa Tarihçe

Hemen hemen tüm matematik kitaplarında, özellikle matematiğe ilgi duyan kişilerin okuması için yazılan matematikle ilgili kitaplarda  $\pi$  'nin özelliklerinden söz edilmeden geçilmemiştir [1]-[9].

Archimedes bir dairenin içine çizdiği çokgenin kenar sayısını artırarak  $\pi$  'nin 310/71 ile 31/7 arasında olduğunu yaklaşık olarak hesaplamış, bunu Mısırlı matematikçiler yaklaşık 3.16 olarak bulmuştu. M.S. 150 'de Batlamyus,  $\pi$  'yi 3,1416 olarak hesaplamıştır. Archimedes 'in yaklaşık olarak hesaplama yöntemi sürdürülebilirdi. Ama diferansiyel ve integral hesabın bulunmasından sonra Eski Yunan yöntemi bırakıldı;  $\pi$  'yi yaklaşık olarak hesaplarken, yakınsak sonsuz seriler, çarpımlar ve sürekli kesirler kullanıldı [4].

Archimedes'ten sonra  $\pi$  sayısı üzerinde çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan biri,  $\pi$  sayısının irrasyonel bir sayı olduğunun gösterilmesidir.  $\pi$  sayısının ondalık gösterimi veya açılımı,  $\pi=3,14159265...$  biçiminde, devretmeyen sonsuz ondalıklı bir sayıdır. James Gregory (1638-1675)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

olduğunu buldu. Bu seri,  $\pi$  sayısının sayısal değerini hesaplamak için kullanışlı bir seri olmamakla birlikte,  $\pi$  sayısı ile tek sayılar arasındaki zarif bağıntıyı göstermesi bakımından ilginçtir. Lindemann (1852-1939), 1882 yılında  $\pi$  sayısının transandant (aşkın) olduğunu göstermiştir. Ludolph, 1600 yıllarında  $\pi$  sayısının 35.ondalık basamağına kadar hesabını yaptı. Daha sonra John Machin (1680-1751), 1706 yılında bulduğu bir formülle,  $\pi$  sayısının 100. ondalık basamağına kadar hesabını yaptı. John Wallis (1616-1703)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n-1)}$$

olduğunu buldu. Yine Machin 'in

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

biçimindeki formülünü kullanan William Shanks, 1873 yılında  $\pi$  sayısının 707. ondalık basamağına kadar bu hesaplamayı götürdü. Bu hesaplama tam on beş yıl sürdü. O. F. Ferguson, 1946 yılında Shanks'in bu hesabının 528.basamağında bir yanlışlığın yapıldığını saptadı. John W. Wrench Jr. ve Daniel Shanks, Wasinghton'daki IBM 7090 bilgisayarı ile  $\pi$  sayısının değerini, 100625. ondalık basamağına kadar doğru olarak hesapladı. Bu sürenin dokuz saatten daha az bir zaman aldığını

belirtelim. Son olarak,  $\pi$  sayısı iki milyonuncu basamağa kadar hesaplandı ve 800 sayfalık bir kitap haline getirildi. Bu kitabın son satırının son on basamağı 1457297909 rakamlarıyla bitiyordu [7].

$\pi$  'yi hesaplamak için kullanılan en ilginç yollardan birini 18.yy'da Fransız doğa bilimci Buffon (kontu) George "İğne Probleminde" kullanmıştır. Bir düzlem, araları  $d$  birim olan paralel çizgilerle ayrılmıştır. Uzunluğu  $d$ 'den kısa olan bir iğne, bu çizgili yüzeye düşürülür. Eğer iğne bir çizginin üzerine düşerse, iyi atış olarak kabul edilir. Buffon' un şaşırtıcı buluşu, iyi atışların, kötü atışlara oranının  $\pi$  'yi içeren bir açıklamasının olmasıydı. Eğer iğnenin uzunluğu  $d$  birimse, iyi atış olasılığı  $2/\pi$  'dir. 1901 'de Lazzerini 3408 atış yaparak  $\pi$  'nin değerini 3,1415929 olarak hesapladı ki bu altı ondalık basamağa kadar doğrudur.  $\pi$  'yi hesaplamak için başka bir olasılık yöntemi 1904 'de R. Charles tarafından bulundu. Buna göre, rasgele yazılan iki sayının göreceli asal olmalarının olasılığı  $6/\pi$  'dir.  $\pi$  'nin geometri, olasılık, diferansiyel ve integral hesaplamalarında nasıl farklı bir biçimde kullanıldığını görmek gerçekten de ilginçtir. Niye biri bugün süper bilgisayarlarla yapıldığı gibi,  $\pi$  'nin değerini milyonlarca basamağa kadar hesaplamak istesin?  $\pi$  'nin ondalık basamaklarına karşı bu ilginin kaynağı nedir? Bu, süper bilgisayarların donanım ve yazılımlarının kapasitelerinin ölçülmesinde kullanılır. Hesaplama yöntemleri, yeni düşüncelerin ve kavramların ortaya çıkmasını sağlar. Gerçekten,  $\pi$  'nin bir düzeni, kalıbı yok mu? Sonsuz çeşitlilikte kalıplar mı içeriyor?.  $\pi$  'nin içindeki bazı sayılara daha sık mı rastlanıyor? Öyleyse bu sayılar tam da rasgele dağılmış değil mi acaba? Belki de matematikçilerin yüzyıllar boyunca  $\pi$  'ye duydukları ilgi ve hayranlık, dağcılar hep daha yükseklerle tırmanmaya yönelten güçlü istek ve duygulara benzetilebilir [4].

#### Rasgelelik ve $\pi$ Sayısı

Rasgelelik veya bununla bağlantılı determinizm (belirlenmişlik) konusu, Aristoteles'den günümüze tartışılan felsefi problemler arasında yer almaktadır. 20. yy.'ın başlarında kuantum fiziğinin gelişmesiyle beraber Newton'un belirlenimci dünya görüşü (saat gibi tıkır-tıkır işleyen evren) yerini olasılıkçı dünya görüşüne bırakmak zorunda kalmıştır.

Pagels "rasgelelik nedir?" sorusuna cevap vermeye çalışırken, matematiksel ve fiziksel rasgelelik problemleri arasında ayırım yapmanın önemine değinmiştir.

*Matematiksel problem, sayılar veya fonksiyonların rasgele sırasının ne anlama geldiğini tanımlayan bir mantıksal problemdir. Fiziksel rasgelelik problemi gerçek fiziksel olayların rasgelelik konusundaki matematiksel kriterlere uyup uymadığını belirlemektir. Rasgeleliğin matematiksel bir tanımına sahip olana kadar, doğal olayların bir dizisinin gerçekten rasgele olup olmadığını belirleyemeyiz. Bir kere böyle bir tanımımız olunca, o zaman, gerçek olayların böyle bir tanıma karşılık gelip gelmediğini belirleme konulu ek deneysel bir problemimiz olur. Burada ilk problemle karşılaşırız: Matematikçiler, rasgeleliğin kesin bir tanımını verme ya da onunla bağlantılı bir iş olan olasılığı tanımlama işinde hiç bir zaman başarı sağlayamamıştır ... [8].*

Yine Pagels  $\pi$  sayısının ondalık açılımındaki sayıların rasgelelik testlerinden geçebileceğini veya bu sayıların çeşitli olasılık dağılımlarına uyabileceğini belirtmiş,  $\pi$  sayısının ondalık açılımındaki sayıları ele alarak rasgele bir tamsayılar dizisini tanımlama problemi üzerinde durmuştur.

Buffon 'un İğne Problemi;  $\pi$ 'nin bir geometrik olasılık probleminin çözümü sonucunda ortaya çıkması açısından özellikle ilginçtir. Bu deney herkes tarafından kolayca yapılabilir ve  $\pi$  için bir tahmin elde edilebilir. Olasılık ve istatistik kitaplarının hemen hepsinde Buffon 'un İğne Problemine yer verilmiştir [10]-[14]. Yine  $\pi$  'yi tahmin etmek için,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

formülü ele alınarak Monte-Carlo İntegrasyonu olarak bilinen yöntem kullanılabilir.  $U_1, U_2, \dots, U_n$  rasgele değişkenleri (0,1) aralığında düzgün dağılıma sahip olmak üzere (hesap makinalarındaki

RND tuşu, bilgisayarlardaki RND fonksiyonu veya rasgele rakamlar tablosu kullanılarak bu sayılar elde edilebilir)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - U_i^2}$$

toplamı;  $\pi/4$  için bir tahmin verecektir.

Ekonomi, sayısal çözümleme, şifreleme, bilgisayar programlama, deneysel fizik, istatistik,... gibi birçok uygulamalı bilim alanında rasgele sayılar simülasyon (benzetim) aşamasında kullanılmaktadır. Kısaca simülasyon; model üzerinde deney yapmadır. Rasgelelik içeren olay ve süreçlerin bilgisayar ortamında deneyinin yapılmasıdır.

Gerçek dünyada rasgelelik olgusunun içinde bulunan ve ölçümler ile elde edilen sayılar bir rasgele değişkenin sahip olduğu dağılımdan alınan örneklemenin gözlenen değerleri olarak düşünülmele birlikte, simülasyonda böyle gözlemler nasıl elde edilir?

Son yıllarda, simülasyon, özellikle eğitim alanında kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir. Simülasyonun temelinde de rasgele sayılar yatmaktadır. Yapılan simülasyon işleminin gerçek dünyadaki olayı iyi bir şekilde taklit edebilmesi istenir, eğer taklit iyi yapılamıyorsa deney gerçek dünyadaki olayı iyi temsil edemeyecektir. Bu nedenlerle rasgele dizi kavramının uygulama açısından önemi büyüktür. İstatistiksel dağılımlardan örnek almak (model üzerinde deney yapma, bilgisayarda deney yapma, gözlem alma) için  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenlerin çeşitli fonksiyonları kullanılır. Eğer  $(0,1)$  aralığındaki düzgün dağılımdan rasgele sayı üretilemiyorsa doğaldır ki diğer dağılımlardan da sayı üretmek mümkün olamamaktadır. Bunun için çeşitli üreteçler (fonksiyonel ilişki) kullanılmakta ve çeşitli istatistiksel özellikleri sağlayan üreteçler rasgele sayı üreteçleri olarak kullanılmaktadır. Bu sayılar belirli kurallara göre üretildiklerinden "sözde rasgele sayı" olarak bilinmektedir.

Günümüzde bilgisayar teknolojilerinin gelişmesi ile beraber  $\pi$  'nin milyarlarca ondalık basamağı CD-ROM 'lara kaydedilerek simülasyon çalışması yapanların kullanımına sunulmuştur.  $\pi$  sayısı doğal rasgele sayı üretici olarak adlandırılmıştır. Dodge [15],  $\pi$  ile ilgili geniş bir tarihçe ve son hesaplama yöntemleri ile ilgili bilgi verdikten sonra,  $\pi$  'nin ilk 6 milyar basamağında geçen 0,1,...,9 rakamlarının düzgün dağıldığını göstermiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] S. Sertöz, Matematik'in Aydınlatıcı Dünyası, Tübitak Yay., 1996.
- [2] M. Boll, Matematik Tarihi, İletişim Yay., 1991.
- [3] G. Gamov, 1-2-3 Sonsuz, Evrim Yay., 1995.
- [4] T. Pappas, Yaşayan Matematik, Sarmal Yay., 1993.
- [5] G. H. Hardy, Bir Matematikçinin Savunması, Tübitak Yay., 1994.
- [6] J. P. King, Matematik Sanatı, Tübitak Yay., 1997.
- [7] A. Dönmez, Matematik Tarihi, V Yay., 1986.
- [8] H. R. Pagels, Kozmik Kod, Doğanın Dili/Kuantum Fiziği, Sarmal Yay., 1992.
- [9] A. Erdil, Aşkın Sayılar Üzerine, Matematik Dünyası, Sayı 2, 1998.
- [10] B.J.T. Morgan, Elements of Simulation, Chapman and Hall, 1992.
- [11] H.C. Tuckwell, Elementary Applications of Probability Theory, Chapman and Hall, 1998.
- [12] F.Öztürk, Matematiksel İstatistik, A.Ü.F.F. Yay. No:10, 1993.
- [13] P. Bremaud, An Introduction to Probabilistic Modeling, Springer-Verlag, 1988.
- [14] I. Deak, Random Number Generators and Simulation, Akademiai Kiado, Budapest 1990.
- [15] Y. Dodge, A Natural Random Number Generator, International Statistical Review, 1996, 329-344.

## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

**Uyarı:** Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 29 Şubat 2000 tarihine kadar gönderiniz.

## ALİŞTIRMA PROBLEMLERİ

**A.201.**  $x^3 - x + 1 = 0$  denkleminin her bir kökünün tersi,  $x^5 + x + 1 = 0$  denkleminin bir köküdür; kanıtlayınız.

**A. 202.** Toplamları ve çarpımları tam kareler olan doğal sayı ikilileri bulmak için bir yöntem gösteriniz.

**A. 203.** Kenar uzunlukları  $a, b, c, d$  olan bir dörtgenin alanının  $\frac{ac+bd}{2}$  'den fazla olamayacağını gösteriniz.

**A. 204.** Sıfırdan başka tüm rakamların bulunduğu ve 5 ile biten bir 9 basamaklı sayı tamkare olamaz; kanıtlayınız.

**A. 205.**  $\triangle ABC$  üçgeninin  $AH$  yüksekliği,  $BD$  kenarortayı ve  $CN$  iç açıortayı aynı bir noktadan geçiyorsa,  $a, b, c$  (kenar uzunlukları) arasında hangi bağıntı vardır?

## YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y.201.**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-3}$  reel sayılar olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-3}x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden en az birinin reel olmayacağı; yani, karmaşık olacağını kanıtlayınız.

**Y.202.**  $\frac{20}{60} < \sin 20^\circ < \frac{21}{60}$  eşitsizliğini ispatlayınız.

**Y.203.** Bir  $k \in \mathbb{N}$  sayısının şu özelliği vardır:  $k$  ya bölünen herhangi bir sayının rakamları ters sırada dizilerek elde edilen sayı da  $k$  ya bölünmektedir.  $k$  nın 99 'u böldüğünü kanıtlayınız.

**Y.204.**  $\sqrt{2}$ , 2 ve  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sayıları verilmiştir. Bu sayılardan herhangi ikisinin yerine, onların toplamının  $\sqrt{2}$  ye bölümünü ve farkının  $\sqrt{2}$  'ye bölümünü koymaya izin veriliyor. Bu işlemler bir kaç defa yapılarak,  $1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$  üçlüsünü elde etmek mümkün müdür?

**Y.205.** Bir  $P$  noktasından geçen  $S_1, S_2, S_3$  çemberleri birbirleriyle ayrıca  $A, B, C$  noktalarında kesişiyorlar. Eğer  $A, B, C$  noktaları  $P$  'den geçmeyen bir doğrunun üzerinde ise, bu çemberlerin merkezlerinden geçen çemberin  $P$  noktasından da geçeceğini ispatlayınız.

## ÇÖZÜMLER

**A.191.** Düzlem üzerinde 1111 tane nokta, rasgele alınmış herhangi 3 nokta yarıçapı 1 'e eşit olan bir dairenin üzerinde bulunacak biçimde işaretlenmiştir. Bu durumda, noktaların hepsinin yarıçapı 1 olan dairenin üzerinde olduğunu ispat ediniz.

**Çözüm.** İşaretlenmiş noktaların hepsini üzerinde bulunduran en küçük çaplı daireye bakalım. Bu dairenin çemberi üzerinde ya merkeze göre simetrik 2 işaretlenmiş nokta bulunacaktır, ya da dar açılı bir üçgenin işaretlenmiş noktalardan oluşan köşeleri bulunacaktır. Fakat, işaretlenmiş üç noktayı üzerinde bulunduran minimal yarıçaplı dairenin yarıçapı  $\leq 1$  olduğundan, işaretlenmiş noktaların hepsini içeren minimal dairenin yarıçapı da  $\leq 1$  olacaktır.

**A.192.**  $x + xy + y = x^2 + y^2$  denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulunuz.

**Çözüm.** Denklemin her iki yanını 2 ile çarpıldıktan ve uygun düzenlemeler yapıldıktan sonra onu aşağıdaki denk biçime getirmek mümkündür:

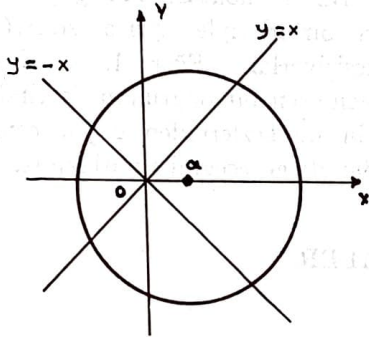
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2.$$

Sonuncu denklemin ise tüm tamsayı çözümlerinin  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 2)$  olduğunu görmek zor değildir.

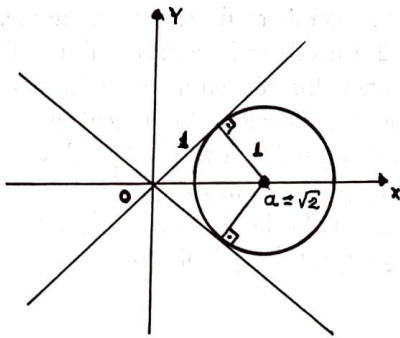
**A.193.**  $x^2 - y^2 = 0$ ,  $(x - a)^2 + y^2 = 1$  denklemler sisteminin tam:

(a) 4 tane; (b) 3 tane; (c) 2 tane çözüme sahip olması için  $a$  parametresinin sağlaması gereken koşulları bulunuz.

**Çözüm.** Birinci denklemin çözüm kümesi  $y = x$  ve  $y = -x$  doğruları üzerindeki noktalardır.



İkinci denklemin çözüm kümesi ise, merkezi  $(a, 0)$  noktasında ve yarıçapı 1 olan çember ( $a$  parametresinin  $(-\infty, \infty)$  aralığında değiştiğini unutmayın) üzerindeki noktalardır.



Problemi,  $a \geq 0$  için inceleyelim (simetriden dolayı,  $a < 0$  için de uygun sonuçlar çıkarılabilir). İkinci resimden anlaşılacağı gibi,  $a > \sqrt{2}$  için sistemin hiç çözümü yoktur.

$a = \sqrt{2}$  için tam 2 tane çözüm vardır:

$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ,  $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ ; ve  $a = 1$  için tam 3 tane çözüm vardır:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ; diğer durumlarda ise (yani,  $0 \leq a < 1$  ve  $1 < a < \sqrt{2}$  hallerinde) tam 4 tane çözüm vardır.

**A.194.**

$$\underbrace{(((\dots((x - 2)^2 - 2)^2 - \dots - 2)^2 - 2)^2}_{100 \text{ tane parantez}}$$

ifadesinde parantezler açılarak sadeleştirmeler yapıldıktan sonra  $x^2$ 'nin önündeki katsayı ne olacaktır?

**Çözüm.** Verilmiş polinomun serbest terimi  $x = 0$  noktasındaki değerine, yani,

$$\left( \dots \left( (4 - 2)^2 - 2 \right)^2 - \dots - 2 \right)^2 = (4 - 2)^2 = 4$$

sayısına eşittir.

Şimdi, probleme genel halde bakarak,  $k$  tane parantezin bulunduğu ifadeye  $x$ 'in katsayısına  $A_k$  ve  $x^2$ 'nin katsayısına  $B_k$  dersek,

$$A_k = 4.A_{k-1} \quad \text{ve} \quad B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$$

olduğunu kontrol edebiliriz.

Öte yandan,  $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$  özdeşliğinden dolayı,  $A_1 = -4$ ,  $B_1 = 1$ 'dir. Böylece,  $A_k = 4.A_{k-1}$  formülünü gözönüne alırsak, her  $k = 1, 2, 3, \dots$  için  $A_k = -4^k$  olur. Bunu  $B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$  formülünde yerine koyarsak,

$$B_k = 4B_{k-1} + 4^{2k-2}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

elde ederiz.

$B_1 = 1$  olduğunu gözönünde tutarak, sonuncu rekürans denklemini çözersek,

$$B_k = 4^{k-1} \cdot \frac{4^k - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^{2k-1} - 4^{k-1})$$

elde ederiz. Özel halde,

$$B_{100} = \frac{1}{3}(4^{199} - 4^{99})$$

olur.

**A. 195.** İkişer ikişer birbirine dıştan teğet olan  $A, B, C$  merkezli ve  $R_1, R_2, R_3$  yarıçaplı üç çember aynı zamanda bir  $d$  doğrusuna da teğettir.

$A$  merkezli çemberin  $d$  doğrusuna değdiği noktanın  $A$  ya göre simetriği  $P$ , diğer iki çemberin birbirine değdiği nokta  $Q$  ile gösterilmek üzere  $PQ \perp CB$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.**  $BK \perp AP$  olsun.  $AB = R_1 + R_2$  ve  $AK = |R_1 - R_2|$  'dir.  $BK = 2\sqrt{R_1 R_2}$ ,  $BP = \sqrt{4R_1^2 + R_2^2}$ ,  $PC = \sqrt{4R_1^2 + R_2^2}$  bulunur.  $C, Q, B$  noktadadır. Kosinüs teoreminden,

$$PB^2 = PQ^2 + R_2^2 - 2PQR_2 \cos \hat{PQB} = 4R_1^2 + R_2^2$$

$$PC^2 = PQ^2 + R_3^2 - 2PQR_3 \cos \hat{PQB} = 4R_1^2 + R_3^2$$

$$\Rightarrow PB^2 - PC^2 = R_2^2 - R_3^2 - 2PQ \cdot \cos \hat{PQB} (R_2 + R_3) = R_2^2 - R_3^2 \Rightarrow \cos \hat{PQB} = 0 \text{ elde edilir. O halde, } PQ \perp BC \text{ 'dir.}$$

**Y.191.** Pozitif sayılardan oluşan  $(a, b, c, d)$  sıralı dörtlüsünden her sayı bir sonraki ile ve dördüncü sayı ise birinci sayı ile çarpılarak elde edilen sayıların sıralanmasıyla  $(ab, bc, cd, da)$  sıralı dörtlüsü elde ediliyor; sonra aynı işlem bu yeni dörtlüye uygulanıyor ve üçüncü sıralı dörtlü oluşturuluyor, ve bu işlem sürdürülüyor. Böylece elde edilen dörtlüler dizisinde  $(a, b, c, d)$  dörtlüsüne ikinci kez rasgelebilmek için gerek ve yeter koşul,  $a = b = c = d = 1$  olmasıdır. Kanıtlayınız.

**Çözüm.** Yeterlilik açıktır. Koşulun gerekliliğini kanıtlayalım. Varsayalım ki, dörtlüler dizisinde  $(a, b, c, d)$  'ye ikinci kez rast gelinmiştir (yani, dörtlüler dizisi bir periyodik dizidir). Bu takdirde, önce  $abcd = 1$  olması gerektiğini göstereyim.  $abcd = p$  olsun. Bu durumda ikinci dörtlüdeki sayıların çarpımı  $p^2$ , üçüncüdeki sayıların çarpımı  $p^4$ , dördüncüdekilerin çarpımı  $p^8$ , ... olur.  $p = 1$  değilse,  $p, p^2, p^4, p^8, \dots$  sayılarının hepsi farklı olur ve dolayısıyla, dörtlüler dizisinde iki aynı terim olamaz. Şimdi, ikinci dörtlüye bakalım:  $(ab, bc, cd, da)$ .  $abcd = 1$  olduğundan, dördüncü dörtlü  $(b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2)$  olacaktır (kontrol ediniz!). Yani, dördüncü dörtlüyü elde etmek için ikinci dörtlünün "girdilerinin" karesini alıp, uygun yerdeğiştirme yapmak lazımdır. Benzer şekilde, altıncı dörtlü, dördüncü dörtlünün "girdilerinin" karelerinin yerdeğiştirmesinden elde edilir:  $(c^4d^4, d^4a^4, a^4b^4, b^4c^4)$ . Benzer yol izlenerek, dizinin sekizinci, onuncu ve diğer te-

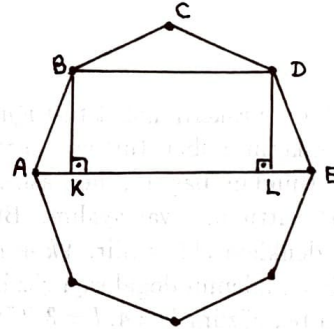
rimleri bulunabilir.

Şimdi iddia ediyoruz ki, ikinci dörtlünün tüm "girdileri" 1 'e eşittir:  $ab = bc = cd = da = 1$ . Gerçekten, eğer bu "girdilerin" hepsi 1 'e eşit değilse, onların en büyüğü 1 'den büyük olacaktır. Örneğin, diyelim ki,  $ab > 1$  'dir. O halde  $(ab)^2, (ab)^4, (ab)^6, \dots$  sayısal dizisi sınırsız artıyor. Bu ise dörtlüler dizisinin periyodik oluşuyla çelişiyor (periyodik bir dizi (fonksiyon) sınırlı olmak zorundadır). Böylece,  $ab = bc = cd = da = 1 \Rightarrow a = b = c = d = 1$ .

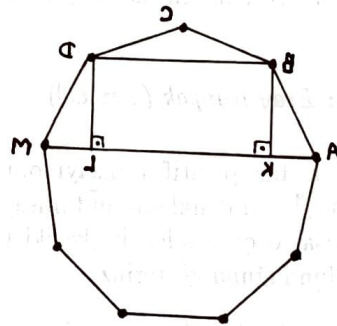
**Y.192.**  $n > 5$  olmak üzere, bir düzgün  $n$ -gende, en büyük ve en küçük köşegenlerin farkı  $n$ -genin kenar uzunluğuna eşit ise,  $n$  sayısını bulunuz.

**Çözüm.**  $n$ -genin kenar uzunluğuna  $a_n$ , büyük ve küçük kümelerinin uzunluğuna da, sırası ile,  $D_n$  ve  $d_n$  diyelim. Hangi  $n$  ler için  $a_n = D_n - d_n$  olduğunu bulmak istiyoruz.

$n = 8$  durumu



$n = 9$  durumu



$n = 6$  veya  $n = 7$  için  $D_n - d_n < a_n$  olduğu kolayca görülebilir (kontrol ediniz!).

$n = 8$  durumunda küçük köşegen olan  $BD$  'nin uçlarından büyük köşegen olan  $AE$  'ye  $BK$  ve

$DL$  diklerini indirelim.

$$\hat{A}\hat{B}K = \hat{L}\hat{D}E = 22,5^\circ < 30^\circ$$

olduğundan,  $|AB| = a_8 > 2|AK| = D_8 - d_8 \Rightarrow |AB| = a_8 > D_8 - d_8$  olur.

$n = 9$  durumunda  $\hat{A}\hat{B}K = \hat{L}\hat{D}E = 30^\circ$  olduğundan  $|AB| = a_9 = 2|AK| = D_9 - d_9$  olur. Yani, düzgün dokuzgende  $a_9 = D_9 - d_9$  olur.

Şimdi  $n > 9$  olsun. Bu takdirde  $D_n \geq D_9, d_n \leq d_9$  ve  $a_n < a_9$  olduğundan,

$$D_n - d_n \geq D_9 - d_9 = a_9 > a_n \Rightarrow D_n - d_n > a_n$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, problemin koşulunu sağlayan  $n$  sayısı 9'a eşittir.

**Y.193.** Bir subay her gece, 33 asker içinden seçtiği bir takımı nöbete göndermektedir. Takımdaki asker sayısı bazı geceler 9, bazı geceler ise 10 olmaktadır. Bütün askerlerin aynı sayıda nöbet tutmuş olmaları için en az kaç gece geçmelidir?

**Çözüm.** 9 tane askerın nöbet tuttuğu gece sayısı  $k$  ve 10 askerın nöbet tuttuğu gece sayısı da  $l$  olsun. Bundan başka, her askerın tam  $m$  gece nöbet tuttuğunu varsayalım. Bu takdirde, aşağıdaki denklem elde edilir:  $9k + 10l = 33m$ .  $m = 1$  için denklemin doğal sayı çözümü yoktur.  $m = 2$  için tek çözüm  $k = 4, l = 3$  tür.

Dolayısıyla, bütün askerlerin aynı sayıda nöbet tutmuş olmaları için en az  $4 + 3 = 7$  gece geçmelidir.

(Çözenler: Eray Kanpak (Yozgat))

**Y. 194.**  $n$  bir pozitif tamsayı olmak üzere  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$  denkleminin tamsayılarda bir çözümü varsa, o çözümden başka iki tane daha çözümü bulunduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Denklemin sol tarafına  $P(x, y)$  diyerek, onu şu biçimde yazalım:

$$P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3x^2y + 2x^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 - x^3 = P(y - x, -x).$$

Böylece, her  $(x, y)$  ikilisi için  $P(x, y) = P(y - x, -x) = P(-y, x - y)$  olur. Bu eşitliklerden eğer  $(x, y)$  çifti verilen denklemin çözümü ise,  $(y -$

$x, -x)$  ve  $(-y, x - y)$  çiftlerinin de birer çözümü olduğu görülür. Bu çözümler, farklı çözümlerdir; çünkü aksi halde  $x = y = 0$  olur ve buradan da  $n = 0$  olması gerekir. Halbuki, varsayıma göre  $n \neq 0$  'dır.

(Çözenler: Eray Kanpak (Yozgat))

**Y. 195.** Merkezleri  $A$  ve  $B$  ile gösterilen, birbirlerinin dışında bulunan  $K_1, K_2$  küreleri veriliyor. Tepe noktası  $K_2$  küresi üzerinde bulunan ve  $K_1$  küresine teğet olan koninin bu küreye değdiği noktaların oluşturduğu çemberin merkezi gözönüne alınıyor. Tepe noktası  $K_2$  üzerinde değiştiği zaman sözü edilen merkezin geometrik yerini belirleyiniz.

**Çözüm.**  $AB$  doğrusundan geçen bir  $D$  düzlemi ile  $K_1$  ve  $K_2$  nin arakesiti olan çemberler  $a$  ve  $b$  olsun.  $b$  çemberinin bir  $T$  noktasında tepesi olan koninin kürede belirlediği çemberin  $T$  den geçen iki teğeti,  $D$  ile koninin arakesiti olan  $TT_1, TT_2$  doğrularıdır.  $[T_1, T_2]$  'nin orta noktası  $O$  olmak üzere,  $O$  noktası sözü edilen çemberin merkezidir. Buradan  $AT.AO = AT_1^2$  bulunur.  $AB$  'nin  $K_2$  küresini kestiği noktalar  $P, Q$  olmak üzere tepesi bu noktalar olan konilerle elde edilen çemberlerin merkezleri de  $O_1, O_2$  olsun.  $AP.AO_1 = AT_1^2, AQ.AO_2 = AT_1^2$  'den yararlanıp ilk bağıntı da kullanıldığında  $\frac{AT}{AQ} = \frac{AO_2}{AO}$ ,

dolayısıyla  $\hat{A}\hat{O}O_2 \sim \hat{A}\hat{Q}T$  ve  $\hat{A}\hat{O}_2O = \hat{A}\hat{T}Q$  elde edilir. Benzer biçimde,  $\hat{A}\hat{O}_1O = \hat{A}\hat{T}P$  bulunur.

$$O_1\hat{O}O_2 = \hat{A}\hat{O}_2O - \hat{A}\hat{O}_1O = \hat{A}\hat{T}Q - \hat{A}\hat{T}P = \hat{P}\hat{T}Q = 90^\circ$$

'dir.

$T, [PQ]$  çaplı çemberi çizirken,  $O$  noktası da  $O_1O_2$  çaplı çemberi çizerek,  $D$  düzleminde geometrik yer bir çemberdir.  $AB$  'den geçen her düzlem için  $D$  'deki durum benzer olarak ortaya çıkarılacağından  $O$  noktasının geometrik yeri  $[O_1O_2]$  çaplı küredir.



