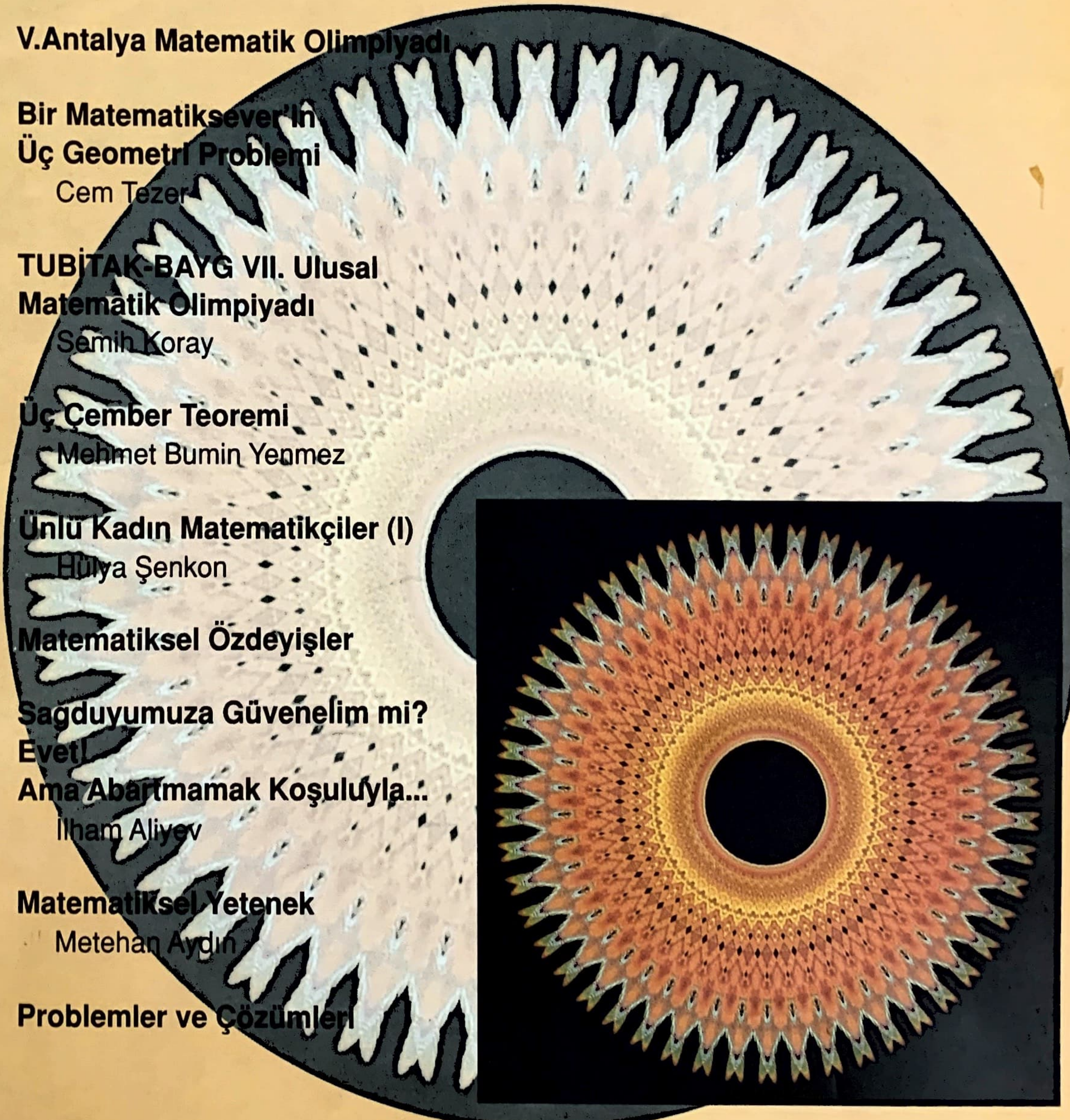
MAYIS 2000 / CİLT: 9 / SAYI: 2

ISSN - 1300-624X

Matematik
D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR



MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Dünya Matematik Yılı olan 2000 yılının 2.sayısıyla yeniden sizlerle buluşmanın sevinç ve mutluluğu içindeyiz. 8 Nisan 2000 günü, gelenekselleşme yönünde önemli ölçüde yol almış olan Antalya Matematik Olimpiyadı'nın beşincisinin 1.seçme sınavı yapıldı. Bu sayımızda, 5.Antalya Matematik Olimpiyadı birinci seçme sınavının sorularını ve cevap anahtarlarını bulacaksınız; soruların çözümleri ise bir sonraki sayımızda yayınlanacak.

Bu sayımızda, ayrıca, Dr. Cemil Uğurlu 'nun Cem Tezer tarafından derlenen üç geometri problemini; M. Bumin Yenmez 'in üç çember teoremini; Hülya Şenkon 'nun daha önceki yazılarının devamı olan "Ünlü Kadın Matematikçiler" başlıklı yazısını ve TÜBİTAK-BAYG VII. Ulusal Matematik Olimpiyadı sorularını ve çözümlerini zevkle okuyacağınızı umuyoruz.

Dergimizin bu sayısında sunduğumuz "Problemler ve Çözümleri" bölümünün tüm okurlarımız tarafından izlendiğinden kuşkumuz yok; ancak, çözüm gönderenlerin sayısının gittikçe azaldığı görülüyor. Daha çok okurumuzdan çözümler beklediğimizi özellikle vurgulamak istiyoruz.

Antalya 'dan selam ve sevgilerle...

MATEMATİK DÜNYASI

İ Ç İ N D E K İ L E R

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Fikret Gökdal
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2000) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 3.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@pascal.sci.akdeniz.edu.tr

V. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI
BİRİNCİ SEÇME SINAVI SORULARI VE CEVAP ANAHTARLARI

İlki 1996 yılında yapılan Antalya Matematik Olimpiyadının beşincisinin birinci seçme sınavı **8 Nisan 2000 Cumartesi** günü yapıldı. Akdeniz Üniversitesi Matematik Kulübünce düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyadının organizasyonu, **Akdeniz Üniversitesi Sağlık, Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığınca**; akademik sorumluluğu ise **Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünce** üstlenilmiştir. Bu yıl olimpiyatlara, **Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğü** ve **Akdeniz Üniversitesi Sosyal Dayanışma Derneği** 'ne ek olarak **Konyaaltı Belediyesi** tarafından da maddi destek verildi.

Olimpiyat sınavı öncesinde, Akdeniz Üniversitesi Rektörü **Prof. Dr. Yaşar Uçar** ve Konyaaltı Belediye Başkanı **Muhittin Böcek** birer konuşma yaparak yarışmacılara "hoşgeldiniz" dediler ve başarı dilediler.

Bu yıl, Antalya Matematik Olimpiyatlarına, aralarında Türkiye'yi Kırkıncı Uluslararası Matematik Olimpiyatlarında temsil etmiş olan öğrencilerin de bulunduğu, 46 ilimizden 1300'e yakın öğrenci katıldı. Sınav, Lise I ve Lise II-III adıyla iki kategoride yapıldı. Lise I ve Lise II-III öğrencilerine ayrı ayrı testler verildi. Testlerin her biri 20 sorudan oluşmuştu ve cevaplama süresi 180 dakika idi.

Bu sınavda başarılı olan öğrenciler, **19 Mayıs 2000 Cuma** günü yapılacak ikinci aşama sınavına çağrılacaklar.

Bu yıl geçen sınavlardan farklı olarak, ikinci sınavın hemen değerlendirilmesi ve **21 Mayıs 2000 Pazar** günü **madalya ve ödül töreni** yapılması planlanmıştır.

Birinci seçme sınavında sorulan soruları ve cevap anahtarlarını, her iki kategorinin A grubu soruları için aşağıda veriyoruz. (B grubu soruların cevap anahtarları, sorular karşılaştırılarak elde edilebilir.) Soruların çözümleri ise **Matematik Dünyası** 'nın bir sonraki sayısında verilecektir.

Lise I, A Grubu Cevap Anahtarı

1-B, 2-A, 3-E, 4-D, 5-C, 6-C, 7-D, 8-B, 9-E, 10-A, 11-C, 12-A, 13-B, 14-E, 15-D, 16-A, 17-D, 18-B, 19-C, 20-E

Lise II-III, A Grubu Cevap Anahtarı

1-D, 2-B, 3-E, 4-E, 5-B, 6-A, 7-A, 8-D, 9-E, 10-B, 11-C, 12-B, 13-D, 14-A, 15-C, 16-A, 17-C, 18-C, 19-D, 20-A

V. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI, LİSE I

1. $(x_1 + x_2 + . . . + x_{19} + x_{20})^3$ ifadesinin açılımında, benzer terimler toplandıktan sonra ortaya çıkan ifade kaç terimlidir? (Örnek : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ifadesi dört terimlidir.)

A) 1550 B) 1540 C) 1570 D) 400 E) 8000

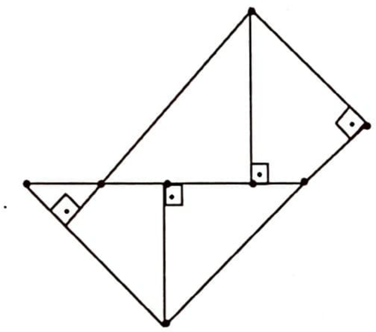
2. Bir f fonksiyonu her a ve b reel sayıları için

$$f(a+b)=f(ab) \quad \text{ve} \quad f(1999)=1999$$

koşullarını sağlamaktadır. Buna göre, $f(2000)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1999 B) 2000 C) 1000 D) 999 E) Hiçbiri

3. Aşağıdaki şekilde işaretlenmiş noktaların en az dördünden geçen kaç çember vardır?

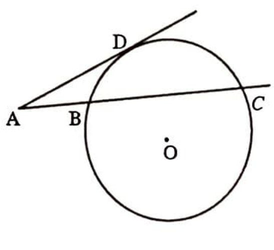


A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) En az 4

4. 5,10,15, . . . ,995,1000 aritmetik dizisinin tüm terimlerinin çarpımı olan sayının sondan kaç basamağında sıfır bulunur ?

A) 200 B) 199 C) 198 D) 197 E) 196

5. Şekilde, O merkezli çemberin D noktasındaki teğeti ile $[BC]$ kirişinin uzantısının kesişim noktası A 'dır. $|AD|=|BC|=a$ ve $|AB|=b$ ise, $(2b+a)^2$ 'nin a cinsinden değeri nedir?



A) a^2 B) $4a^2$ C) $5a^2$ D) $9a^2$ E) $3a^2$

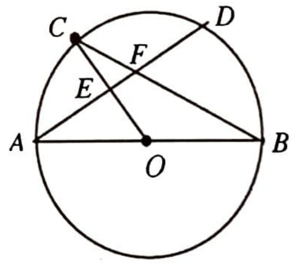
6. 318 sayfalık bir kitabın tüm sayfalarındaki sayfa numaraları kesiliyor, sonra her sayfa numarasının bulunduğu parça, her bir parçada bir rakam bulunacak şekilde kesilerek küçük parçalara ayrılıp, bu küçük parçalar bir torbaya dolduruluyor ve torbadan rasgele bir parça çekiliyor. Çekilen parçadaki rakamın 1 olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{11}{98}$ C) $\frac{19}{94}$ D) $\frac{23}{92}$ E) $\frac{1}{3}$

7. Saf asitle dolu olan 54 litrelik bir kaptan bir miktar asit alınıp yerine aynı miktarda su konuyor. Sonra, bu kaptaki karışımdan, ilk alınan miktarda karışım alınıp, yerine su konuyor. Bu işlem tamamlandıktan sonra, kaptaki karışımın 24 litresi saf asit olduğuna göre, birinci defada kaptan kaç litre asit alınmıştır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

8. Şekilde, merkezi O ve çapı $[AB]$ olan çember üzerinde C ve D noktaları işaretlenmiş olup, AD ile OC nin kesişim noktası E ve AD ile BC nin kesişim noktası F 'dir. $m(E\hat{A}B) = 19^o$, $m(F\hat{E}O) = 91^o$ ise, $m(B\hat{F}D)$ kaç derecedir?



A) 50 B) 55 C) 60 D) 63 E) 65

9. Her n pozitif tamsayısı için n nin en büyük asal çarpanını $A(n)$ ile gösterelim. $a_1=68$ ve her $n\geq 1$ için $a_{n+1}=a_n + A(a_n)$ ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin 19 'uncu terimi kaçtır?

A) 340 B) 371 C) 361 D)350 E)380

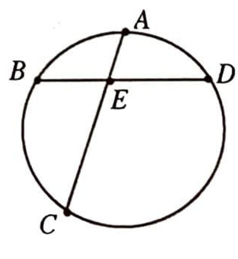
10. $p^3 + p^2 + 11p + 2$ ifadesinin asal sayı olmasını sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 11 D) Sonsuz E) Hiçbiri

11. İçinde 13 kırmızı ve 8 mavi top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 6 'sının kırmızı ve en az 4 'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir?

A) 10 B) 19 C) 17 D) 15 E) 12

12. Şekilde E, çemberin $[BD]$ ve $[CA]$ kirişlerinin kesişim noktası olup, $|BA|=|AD|$ 'dir. $|AE|=3$ ve $|EC|=9$ ise, $|AD|$ kaçtır?



A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

13. m ve n sayıları 2000 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m,n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m 'yi tam böler?

A) 200 B) 150 C) 100 D) 60 E) 35

14. Hiç bir basamağında sıfır bulunmayan üç basamaklı tamsayılar içinde, basamaklarından biri diğer iki basamağının toplamına eşit olan kaç sayı vardır?

A) 66 B) 75 C) 87 D) 96 E) 108

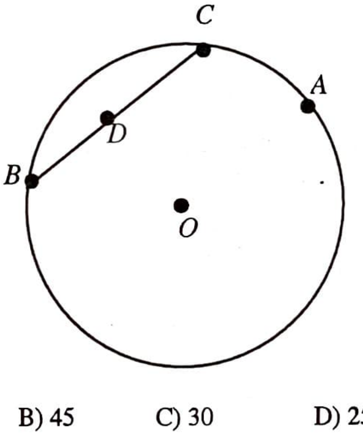
15. 369 sayısı bir kaç ardışık doğal sayının toplamı olarak kaç farklı biçimde yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

16. $x = 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \ldots - 110^2 + 111^2$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6271 B) 6241 C) 6251 D) 6231 E) 6261

17. Şekilde O merkezli çemberin, $[BC]$ kirişinin orta noktası D ve bir noktası A 'dır. $m(\widehat{DOA}) = 90^o$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40^o$ ise, $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?



A) 50 B) 45 C) 30 D) 25 E) 20

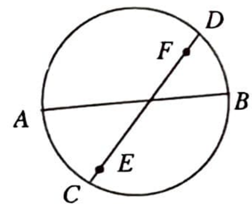
18. n kenarlı bir düzgün (dış bükey) çokgenin bir iç açısının 3 katı , m kenarlı bir düzgün (dış bükey) çokgenin bir iç açısının 4 katına eşit ise, $(m+n)$ sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 49 B) 25 C) 24 D) 15 E) 10

19. 8 şeker kutusunun her birinde farklı sayıda şeker bulunmaktadır. Bu kutulardan rasgele biri boşaltılıp diğer kutulara uygun biçimde dağıtılınca, diğer 7 kutunun her birindeki şeker sayısı aynı oluyor. Başlangıçta en çok şeker bulunan kutuda en az kaç şeker vardır?

A) 18 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

20. Şekilde, $[AB]$ çaplı çemberin bu çapını kesen bir kirişi $[CD]$, A ve B 'den $[CD]$ kirişine indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla E ve F 'dir. $|AE|=16$, $|BF|=14$, ve $|AB|=34$ ise, $|FD|$ aşağıdakilerden hangisidir?



A) $4(2\sqrt{2}+1)$ B) $3(4\sqrt{2-1})$ C) $4\sqrt{7}$

D) $2(3+\sqrt{2})$ E) $4(3\sqrt{2}-2)$

V. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI, LİSE II-III

---

1. 369 sayısı bir kaç ardışık doğal sayının toplamı olarak kaç farklı biçimde yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

5. $a,b,c \in \mathbf{Z}$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantının 47 olmasını sağlayan kaç tane (a,b,c) üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 47 E) Sonsuz

3. m ve n sayıları 2520 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m,n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m 'yi tam böler?

A) 270 B) 540 C)250 D) 455 E) 500

4. ABC bir dik üçgen, $m(\widehat{A}) = 90^o$, $[BC]$ 'nin orta noktası D; $[AC]$ 'nin bir noktası E olmak üzere, $|AB|=|AE|$ ve $|AC|=3|AB|$ ise, $m(\widehat{AED})$ kaç derecedir?

A) 105^o B) 120^o C) 135^o D) 140^o E) 150^o

5. 30 farklı kitap, her bir bölmesi 30 kitap alabilen 7 bölmeli bir rafa kaç değişik biçimde dizilebilir? (Bazı bölmeler boş kalabilir.)

A) $\binom{30}{7}$ B) 23! C) $\frac{36!}{6!}$ D) $\frac{37!}{7!}$ E) $\frac{30!}{7!}$

6. Tüm pozitif tamsayılardan oluşan küme **N** ile gösterilmek üzere, $f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ fonksiyonu

(i) m ve n aralarında asal olunca, $f(mn)=f(m)f(n)$;

(ii) p ve q asal olunca, $f(p+q)=f(p)+f(q)$

özelliklerine sahipse, $f(100)$ kaçtır?

A) 29 B) 50 C) 70 D) 125 E) Hiçbiri

7. Bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarının orta noktası D ile; D, B ve C noktalarından geçen çemberin $[AC]$ kenarı ile (ikinci defa) kesişim noktası E ile gösterilmek üzere, $|AC|=3|AE|$ ve $m(\widehat{EBC})=90^o$ ise, $|EB|^2/|BC|^2$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{7}$ E) 2

8. $\begin{cases} y^2-(x+1)(x^2+4)=0 \\ y^2-(4-2x)y+(4-4x-3x^2)=0 \end{cases}$

denklem sisteminin çözüm kümesinde kaç (x,y) reel sayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 3 'ten fazla

9. $a_1=1$ ve her $n\geq 1$ için

$$a_{n+1}=\frac{1}{n}(1+2a_1+3a_2+\ldots+(n+1)a_n)$$

ile tanımlanan dizinin 2000 inci terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3.2^{1998} B) 3.2^{1999} C) 3.2^{1997}
D) 3.2^{2000} E) 3.2^{2001}

10. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2000}$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

A) 5 B) 21 C) 16 D) 10 E) 40

11. Yarıçapı r olan çember, yarıçapı R olan çembere A noktasında içten teğettir. Dıştaki çemberin herhangi bir B noktasından içteki çembere çizilen teğetin değme noktası C ve $2|BC|=|BA|$ ise, $\frac{r}{R}$ nedir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{11}{20}$

12. 8 şeker kutusunun her birinde farklı sayıda şeker bulunmaktadır. Bu kutulardan rasgele biri boşaltılıp diğer kutulara uygun biçimde dağıtılınca, diğer 7 kutunun her birindeki şeker sayısı aynı oluyor. Başlangıçta en çok şeker bulunan kutuda en az kaç şeker vardır?

A) 14 B) 21 C) 28 D) 35 E) 42

13. Aşağıdaki denklemin kaç reel çözümü vardır?

$$x=1-2(1-2x^2)^2$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. Her $x\in[-1,1]$ için $|2x^2+ax+b|\leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden reel a ve b sayıları için a^2+b^2 aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

15. $ABCDEF$ düzgün altıgeni veriliyor. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde alınan bir K noktası için $m(\widehat{KAD})=18^o$ ve $m(\widehat{KAB})=m(\widehat{KCD})$ ise, $m(\widehat{KBA})$ kaç derecedir?

A) 84 B) 81 C) 94 D) 96 E) 72

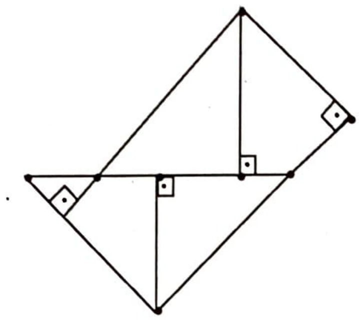
16. $a_3=3$ ve her $n\geq 1$ için $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ bağıntısı ile tanımlanmış bir $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisinin ilk 100 teriminin toplamı 100 ise, ilk 111 teriminin toplamı kaçtır?

A) 100 B) 111 C) 136 D) 194 E) 222

17. $[AB]$ çaplı yarım çemberin $\overset{\frown}{AB}$ yayının orta noktası C; $\overset{\frown}{BC}$ yayı üzerinde B ve C 'den farklı bir nokta P; CP ile AB doğrusunun kesişim noktası Q; Q 'dan geçen ve AB doğrusuna dik olan doğru ile AP 'nin kesişim noktası D olmak üzere, $|AB|=6$ ve $|DQ|=10$ ise, $|QP|.|QC|$ nedir?

A) 160 B) 169 C) 150 D) 140 E) 144

18. Aşağıdaki şekilde işaretlenmiş noktaların en az dördünden geçen kaç çember vardır?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) En az 4

19. Her n pozitif tamsayısı için n nin en büyük asal çarpanını $A(n)$ ile gösterelim. $a_1=68$ ve her $n\geq 1$ için $a_{n+1}=a_n + A(a_n)$ ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin 19 'uncu terimi kaçtır?

A) 340 B) 371 C) 361 D)350 E)380

20 . $a_n = \dfrac{n^2}{(1{,}001)^n}$, $(n=1,2,3,\ldots)$ dizisinin en büyük terimi kaçıncı terimdir?

A) 1001 B) 1999 C) 2000 D) 2001 E) 2002

DUYURU

1996'dan günümüze kadar her yıl yapılmakta olan

ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATLARI **'ında**

sorulmuş olan tüm soruların ve onların yanıtlarının yer aldığı kitapçık Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünden Halil İ. Karakaş ve İlham Aliyev tarafından hazırlanarak bölüm yayını olarak bastırılmıştır.
Bu kitapçıktan edinmek isteyen okurlarımız, ederi olan 750.000.- TL'yi *Melih Eryiğit* adına açılmış olan *1119282* no'lu Posta Çeki hesabına yatırıp fotokopisini bölüm adresine iletirlerse, kitapçığı adreslerine postalayacağız.

BİR MATEMATİKSEVERİN ÜÇ GEOMETRİ PROBLEMİ

Cem Tezer
ODTÜ, Matematik Bölümü,
06531-ANKARA

Bu kısa yazıda, tıp, edebiyat ve fikir hayatımıza hizmet vermiş ve bugün sıhhi sebeplerden dolayı verimli çalışması mümkün olmayan Dr. Cemil Uğurlu'yu tanıtmak istiyorum.

Dr. M. Cemil Uğurlu, 1926 yılında doğmuş, tıp tahsilini müteakip fizik tedavi sahasında ihtisas yapmıştır. Fizik tedavi, histoloji ve deontoloji dallarında yürüttüğü çalışmaların yanısıra gazete ve dergilerde yayınlanan muhtelif fikir ve inceleme yazıları kaleme almıştır. Bir şiir kitabı basılmıştır.

Bir kaç ay önce bir konuşma yapmak maksadıyla Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi'nde bulunduğum sırada, meslektaşım Prof. Dr. Öner Çakar bana perişan evrak halinde bazı metinler vererek incelememi rica etti. Bunlar, hayranlıkla bağlı olduğu M. K. Atatürk hakkındaki yazılarından ismen tanıdığım Dr. M. Cemil Uğurlu tarafından 1946 yılında, yani liseyi henüz bitirdiği bir çağda tanzim edilmiş ve kısmen çözülmüş dört geometri problemini ihtiva etmekteydi. Bu çalışma, nasıl bakılırsa bakılsın olağanın çok dışında bir istidadın deliliydi. Yayınlamak için Dr. Uğurlu 'dan izin aldım. Bu problemlerden üçünü aşağıda sunuyorum.

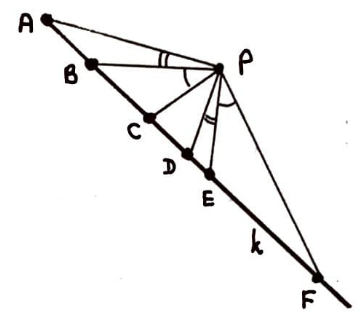
Bu yazıyı yazmaktan maksadım okuyuculara ilginç bir kaç geometri problemini sunmak, bir o kadar da, ne yazık ki değerlendirilememiş bir kabiliyetin hazin hikayesini anlatmaktır.

PROBLEM 1

Bir k doğrusu ve k üzerinde bulunmayan bir P noktası verilsin. k üzerinde alınan birbirinden farklı A, B, C, D, E, F noktaları $A\hat{P}D = B\hat{P}E = C\hat{P}F = 90°$ şartını sağlıyorsa,

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz.



Çözüm: P noktası, k doğrusu ve k üzerindeki noktalar şekilde görüldüğü konumlarda (*Şekil 1*) alınırsa elde edilecek olan

$$(A\hat{P}B) = (D\hat{P}E)$$

$$(B\hat{P}C) = (E\hat{P}F)$$

$$(A\hat{P}F) + (C\hat{P}D) = 180°$$

bağıntıları muvacehesinde,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{|PA| \cdot |PB| \cdot \sin(A\hat{P}B)}{|PB| \cdot |PC| \cdot \sin(B\hat{P}C)}$$

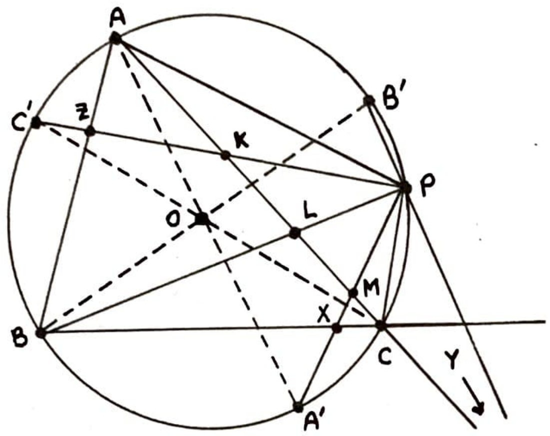
$$\frac{CD}{DE} = \frac{|PC| \cdot |PD| \cdot \sin(C\hat{P}D)}{|PD| \cdot |PE| \cdot \sin(D\hat{P}E)}$$

$$\frac{EF}{FA} = \frac{|PE| \cdot |PF| \cdot \sin(E\hat{P}F)}{|PF| \cdot |PA| \cdot \sin(F\hat{P}A)}$$

eşitliklerinin taraf tarafa çarpılmasıyla istenilen netice elde edilir.

PROBLEM 2

ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bir P noktası alınsın. PA, PB, PC doğrularına P 'den çizilen dikmeler BC, CA, AB doğrularını sırasıyla X, Y, Z noktalarında kessin. X, Y ve Z 'nin çevrel çember merkezinden geçen bir doğru üzerinde kaldığını gösteriniz.



Çözüm: ABC çemberinin çevrel çember merkezini O ile gösterelim. $[A,A']$, $[B,B']$, $[C,C']$ çap olacak şekilde çevrel çember üzerinde A', B', C' noktaları alalım (*Şekil 2*). Tabii ki, X, Y, Z noktaları PA', PB', PC' 'nün sırasıyla BC, CA, AB 'yi kestiği noktalar olacaktır. PC', PB PA' 'nün AC 'yi kestikleri noktaları sırasıyla K, L, M ile gösterelim.
Menelaus Teoremini ABL üçgeni ve KZ kesenine uygulayarak

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{PB}{PL} \cdot \frac{KL}{KA} = 1 \quad ,$$

BLC üçgeni ve MX kesenine uygulayarak da

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{MC}{ML} \cdot \frac{PL}{PB} = 1$$

bulunur. Bu denklemlerin Problem 1 'den elde edilecek olan

$$\frac{AK}{KL} \cdot \frac{LM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

denklemiyle taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

bulunur. Bu da Menelaus Teoremi vasıtasıyla X, Y ve Z 'nin doğrudaş olduğunu gösterir.
X, Y, ve Z 'nin üzerinde bulunduğu doğrunun O 'dan geçtiğinin ispatı Dr. Uğurlu'nun notları arasında yok. Benim çözümüm projektif geometri yöntemlerine dayanıyor:

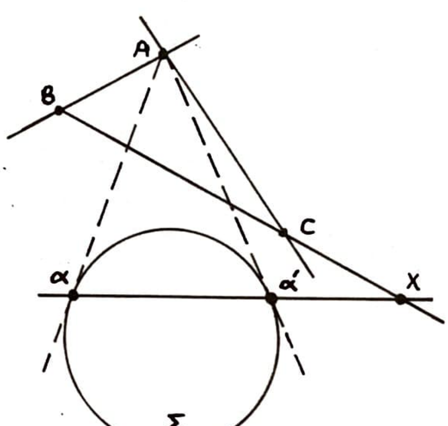
P 'nin çevrel çember üzerinde hareket ettiği farz olunarak X ve Z 'nin sırasıyla BC ve BA doğruları üzerinde projektif bir münasebet içinde oldukları görülür. X 'in B ile çakışması halinde Z de B ile çakışacağından, XZ sabit bir noktadan geçmelidir. X 'in C ile çakışması halinde XZ de CC' ile çakışır. Diğer tarafdan, X 'in AA' ile BC 'nin kesişim noktasıyla çakışması halinde de XZ doğrusu AA' ile çakışır. Demek ki aranılan sabit nokta, AA' ile CC' 'nün kesişim noktası yani O olmalıdır.

PROBLEM 3

Bir Σ çemberi ve köşeleri Σ 'nın dışında kalan bir ABC üçgeni alınsın. A, B, C 'den Σ 'ya çizilen teğetlerin değme noktaları sırasıyla α ve α', β ve β', γ ve γ' olsun. BC ve $\alpha\alpha'$, CA ve $\beta\beta'$, AB ve $\gamma\gamma'$ doğruları sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişsin.

(1) X, Y ve Z noktalarının bir doğru üzerinde kaldığını gösteriniz.

(2) $\beta\gamma'$ ve $\beta'\gamma$ doğrularının BC üzerinde kesiştiğini gösteriniz.



Çözüm:
Bu problemin çözümü de Dr. Uğurlu'nun notları arasında bulunamadı. Aslında Σ çemberi yerine herhangi bir koni kesiti (elips, hiperbol, parabol) alınabileceği gibi A, B, C noktalarının Σ 'ya göre konumları da oldukça serbestçe seçilebilir (*Şekil 3*). Aslında $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ doğruları sırasıyla A, B, C 'nin Σ 'ya göre kutupluk doğruları ("polar line", "polaire", "Polare", "kutbiyye") olarak

tarif edilmelidir. Böylece, Σ verildiğinde, problemin manalı olabilmesi için A, B ve C noktalarının kutupluk doğrularının sırasıyla BC, CA ve AB doğrularından farklı olmaları kafidir. (Paralel olmaları halinde kesişme noktalarını "sonsuzda" addetmek yetecektir.) Bu şekilde olgunlaştırdıktan sonra problemi homojen koordinatlar yardımıyla çözebiliriz:

(1) Her nokta sıfırdan farklı 3×1 bir matrisle, yani bir sütun vektörle, gene her doğru 1×3 bir matrisle, yani bir satır vektörle gösterilecektir. Transpozisyon işlemi üst olarak yazılan bir T harfiyle belirtildiği takdirde Σ 'nın denklemi $P^T \Omega P = 0$ şeklinde olacaktır. Burada

$$\Omega = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

bakışık bir matris olup, determinantı sıfırdan farklıdır. Kolaylık olması için

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yazmak suretiyle BC, CA, AB doğrularının da sırasıyla

$$[1,0,0]\,,\ [0,1,0]\,,\ [0,0,1]$$

olduğu görülür. Bu şartlar altında A, B, C 'nin kutupluk doğruları, yani $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ doğruları

$$A^T\Omega = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]\,,\ B^T\Omega = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]\,,$$
$$C^T\Omega = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$$

olarak verilecektir. $BC \neq \alpha\alpha'$, $CA \neq \beta\beta'$, $AB \neq \gamma\gamma'$ olduğundan, $(a_{12}, a_{13}) \neq (0,0)$, $(a_{21}, a_{23}) \neq (0,0)$, $(a_{31}, a_{32}) \neq (0,0)$ dir. Bu yüzden, BC ve $\alpha\alpha'$ 'nün kesiştiği nokta olarak

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

benzer şekilde de

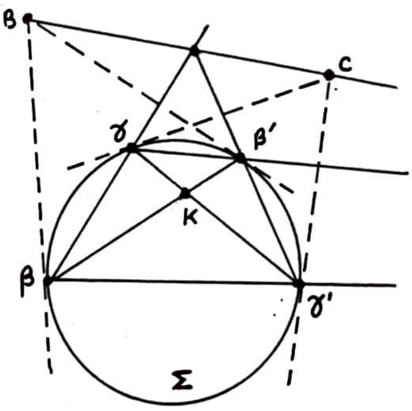
$$Y = \begin{bmatrix} a_{23} \\ 0 \\ -a_{22} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} a_{33} \\ -a_{31} \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Nihayet

$$det[X,Y,Z] = det \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & a_{33} \\ -a_{13} & 0 & -a_{31} \\ a_{12} & -a_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32}) + a_{12}(-a_{23}a_{31}) = 0$$

bulunarak X, Y, Z 'nin doğrudaş olduğu görülür.



(2) K noktası $\beta\beta'$ ve $\gamma\gamma'$ doğrularının kesişim noktası olsun. Böylece K noktasının kutupluk doğrusu BC 'dir (*Şekil 4*). Projektif geometrinin temel teoremlerinden birisi neticesinde, bir taraftan $\beta\gamma'$ ve $\beta'\gamma$ diğer tarafdan da $\beta\gamma$ ve $\beta'\gamma'$ doğru çiftleri BC üzerinde kesişmelidirler.

Yukardaki problemlerin bazı kısımlarını ancak projektif geometri yöntemleri kullanarak çözebildiğim için mütessirim. Okuyucuların daha sade çözümler arayarak eğleneceklerini ümid ederim.

NOT: Birinci problem, dergimizin Nisan 1998, 7. Cilt, 2. Sayısının 29.sayfasında yayınlanmıştı. Yazının bütünlüğünün korunması düşüncesiyle, aynen yayınlıyoruz. **Matematik Dünyası**

TÜBİTAK-BAYG-VII. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Semih Koray
Bilkent Üniversitesi, İktisat Fakültesi, ANKARA

---

2. Aşama Sınavı, 3 Aralık 1999, 1. Gün (Her soru 7 puan, süre 4,5 saattir.)

1. $0 \leq x, y, z, w \leq 36$ olmak üzere,

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$

denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

2. O merkezli bir çembere, dışındaki bir S noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları P ve Q; SO doğrusunun çemberle kesişim noktaları A ve B; PB (küçük) yayının herhangi bir iç noktası X; QX ve PX doğrularının OS doğrusu ile kesişim noktaları C ve D ile gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{2}{|AB|}$$

olduğunu ispatlayınız.

3. n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $|f(i) - f(j)| \leq p$ şartını sağlayan

$$f : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{-p, -p+1, ..., p-1, p\}$$

fonksiyonlarının sayısının $(p+1)^{n+1} - p^{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

2. Aşama Sınavı, 4 Aralık 1999, 2. Gün (Her soru 7 puan, süre 4,5 saattir.)

4. Her $n > 1$ için $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$, $\frac{1}{2} < a_1 < 1$ ve $\sum_{n=1}^{2000} a_n = 1999$ koşullarını sağlayan tüm (a_n) gerçel sayı dizilerini bulunuz.

5. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan dar açılı bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde, A_1, A_2 ve A_3 noktalarından geçen yüksekliklerin ayakları sırasıyla Y_1, Y_2 ve Y_3, $|A_1Y_1| = h_1$, $|A_2Y_2| = h_2$, $|A_3Y_3| = h_3$; A_1, A_2 ve A_3 noktalarından $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları da sırasıyla t_1, t_2 ve t_3 ile gösterilmek üzere,

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3}{2}R$$

olduğunu ispatlayınız.

6. 40 sayının toplamını, 8 "işlemci" kullanarak bulmak istiyoruz. Başlangıçta, her işlemcinin ekranında 0 sayısı bulunuyor. Herhangi bir işlemci, kendisine dışarıdan verilen ya da başka bir işlemciden aktarılan sayıyı, ekranındaki mevcut sayıyla bir birim zamanda toplayarak, elde ettiği sonucu ekranına yazıyor. Ekranındaki sayıyı başka bir işlemciye aktaran bir işlemcinin ekranı kararıyor. Verilen 40 sayıdan istediklerimizi istediğimiz işlemciye girerek ve işlemcilerin elde ettiği kısmi toplamları da istediğimiz işlemciye aktararak, bu 40 sayıyı en az kaç birim zamanda toplayabiliriz?

–o–

ÇÖZÜMLER

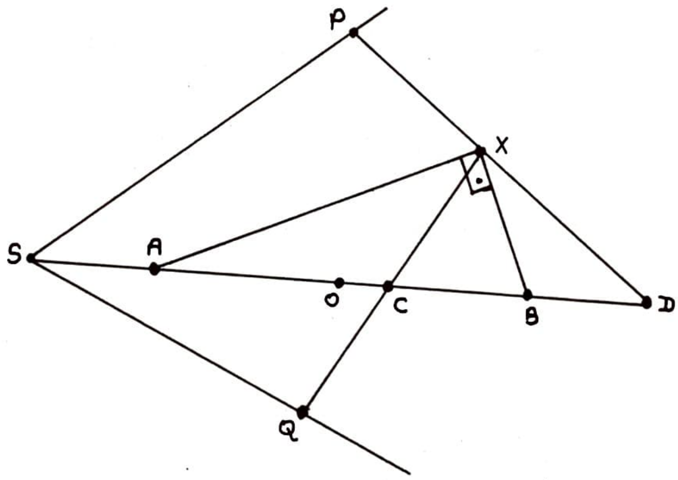
1. Önce a bir tamsayı olmak üzere, $x^2+y^2 \equiv a$ (mod 37) denkliğini sağlayan (x,y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısını bulalım. $a \equiv 0$ (mod 37) ise, $x^2+y^2 \equiv 0$ (mod 37) denkliği, $y^2 \equiv (6x)^2$ (mod 37) ve dolayısıyla $y \equiv \pm 6x$ (mod 37) denkliklerine eşdeğer olduğu için, çözüm olarak $2\cdot 36+1=73$ (x,y) sıralı ikilisi elde edilir.

Şimdi de $a \not\equiv 0$ (mod 37) durumuna bakalım. $x^2+y^2 \equiv x^2-36y^2 \equiv (x-6y)(x+6y)$ (mod 37) olduğu için, aradığımız sayı $(x-6y)(x+6y) \equiv a$ (mod 37) denkliğini sağlayan (x,y) sıralı ikililerinin sayısıdır. Öte yandan, $a \not\equiv 0$ (mod 37) olduğundan, her $1 \le u \le 36$ tamsayısı için, $uv \equiv a$ (mod 37) ve $1 \le v \le 36$ koşullarını sağlayan tam olarak bir v tamsayısı bulunur. Böyle (u,v) sıralı ikilileri ile $u \equiv x-6y$, $v \equiv x+6y$, $0 \le x$, $y \le 36$ koşullarını sağlayan (x,y) sıralı ikilileri arasında bire-bir bir eşleme bulunduğundan, bu durumda, $x^2+y^2 \equiv a$ (mod 37) bağıntısının çözümü olan 36 (x,y) ikilisi bulunur.

Diğer taraftan $z^3+w^3 \equiv 0$ (mod 37) denkliği, $w^3 \equiv -z^3$ (mod 37), dolayısıyla da $w \equiv -z$ veya $11z$ veya $-10z$ (mod 37) bağıntılarına eşdeğerdir. Yani $z^3+w^3 \equiv 0$ (mod 37), $0 \le z$, $w \le 36$ koşullarını sağlayan $36\cdot 3+1=109$ (z,w) sıralı tamsayı ikilisi vardır. Sonuç olarak, (z,w) ikililerinin alabileceği toplam 37^2 değerden 109 'u için, istenen koşulu sağlayan 73 (x,y) ikilisi, 37^2-109 tanesi için de 36 (x,y) ikilisi vardır. Aranan sayı,

$$109\cdot 73+(37^2-109)\cdot 36 = 53317 \text{ 'dir.}$$

2.



SPQ üçgeni ($SP=SQ$) ikizkenar üçgen olup, A noktası PQ yayının orta noktası ve dolayısıyla XA, $P\hat{X}Q$ açısının açıortayıdır. Diğer taraftan, $A\hat{X}B$ açısı AB çapını gören bir çevre açı olduğundan bir dik açıdır. Bu nedenle XB, $Q\hat{X}D$ açısının açıortayıdır. CXD üçgeninde XB ve XA açıortay olduklarından, açıortay teoremi gereğince,

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} \left(\Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} \Rightarrow \frac{CB}{AB\cdot AC} = \frac{DB}{AB\cdot AD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB-AC}{AB\cdot AC} = \frac{AD-AB}{AB\cdot AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

bulunur.

3. Verilen koşulları sağlayan ve aldığı en yüksek değer q olan fonksiyonların sayısını $Q(q)$ ile gösterelim. Önce $q \in \{0,...,p\}$ olduğu duruma bakalım. Her $i,j \in \{0,...,n\}$ için $|f(i) - f(j)| \leq p$ koşulu nedeniyle, bu durumda, her $k \in \{0,...,n\}$ için $f(k) \in \{q-p, q-p+1,...,q\}$ olur. Aldığı tüm değerler bu kümeye ait olan $(p+1)^n$ tane fonksiyon bulunup, bunlardan q değerini hiç almayanların sayısı p^n dir. Dolayısıyla, $Q(q) = (p+1)^n - p$ olur.

Eğer $q \in \{1,...,p\}$ ise, benzer biçimde, $Q(-q) = (p-q+1)^n - (p-q)^n$ bulunur. Verilen koşulları sağlayan fonksiyonların toplam sayısı,

$$(p+1)((p+1)^n - p^n) + \sum_{q=1}^{p}((p-q+1)^n - (p-q)^n)$$

$$= (p+1)^{n+1} - (p+1)p^n + p^n = (p+1)^{n+1} - p^{n+1}$$

olur.

4. Her $n > 1$ için,

$$1 - a_n = 1 - a_{n-1}(2 - a_{n-1}) = (1 - a_{n-1})^2;$$

dolayısıyla da

$$1 - a_n = (1 - a_1)^{2^{n-1}}$$

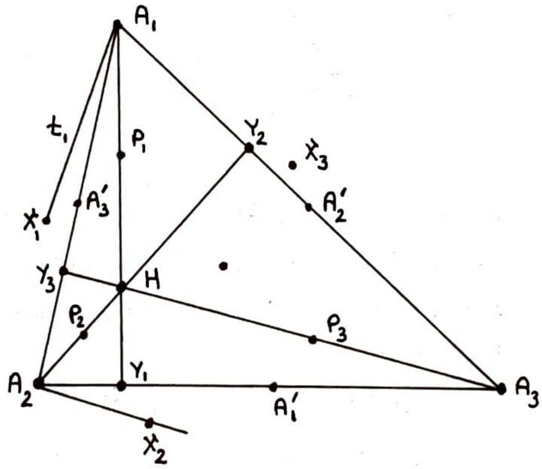
olur. (a_n) verilen koşulları sağlayan bir gerçel sayı dizisi ise,

$$1 = 2000 - 1999 = 2000 - \sum_{n=1}^{2000} a_n = \sum_{n=1}^{2000}(1 - a_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{2000}(1 - a_1)^{2^{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_1)^n = \frac{1 - a_1}{a_1} < 1$$

olacağı için, böyle bir dizinin bulunmadığı gösterilmiş olur.

5.



Çevrel çemberin merkezi O, $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberi ile yüksekliklerin kesişim noktaları P_1, P_2 ve P_3 ile gösterilmek üzere A_1 noktasının $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine göre kuvveti: A_1 'den çizilen teğetin uzunluğu t_1 olduğundan,

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot A_1Y_1$$

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot h_1 \Rightarrow \frac{t_1^2}{h_1} = A_1P_1$$

ve benzer biçimde t_2, t_3 için de bu eşitlikler yazılarak,

$$\sum_{i=1}^{3}(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}})^2 = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i$$

bulunur.Yükseklik ayaklarından geçen çember, aynı zamanda kenarların orta noktaları olan A_1', A_2', A_3' 'den ve HA_1, HA_2, HA_3'ün orta noktaları olan P_1, P_2, P_3 'den de geçer ve $A_iP_i = OA_i'$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle,

$$\sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3} OA_i'$$

olur. (İkinci tarafı hesaplayalım.) $A_1A_3'OA_2'$ kirişler dörtgeni olduğundan Ptolemy Teoremi gereğince,

$$OA_1 \cdot A_2'A_3' = OA_2' \cdot A_1A_3' + OA_3' \cdot A_1A_2' \qquad (1)$$

ve benzer biçimde $A_2A_1'OA_3'$, $A_3A_2'OA_1'$ dörtgenlerinden de,

$$OA_2 \cdot A_3'A_1' = OA_1' \cdot A_2A_3' + OA_3' \cdot A_2A_1' \qquad (2)$$

$$OA_3 \cdot A_1'A_2' = OA_1' \cdot A_3A_2' + OA_2' \cdot A_3A_1' \qquad (3)$$

'dür. Bu (1), (2), (3) eşitlikleri taraf tarafa toplanarak; $OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$ olduğu gözönünde tutulup, $A_2A_3 = a$, $A_3A_1 = b$, $A_1A_2 = c$ alındığında, $A_3'A_2' = \frac{a}{2}$, $A_3'A_1' = \frac{b}{2}$, $A_1'A_2' = \frac{c}{2}$ olacağından,

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{2} &= OA_1'\left(\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\right) + OA_2'\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right) + OA_3'\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) \\
&= OA_1'\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{a}{2}\right) + OA_2'\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{b}{2}\right) + OA_3'\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{c}{2}\right) \\
&= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)(OA_1' + OA_2' + OA_3') - \left(\frac{a \cdot OA_1' + b \cdot OA_2' + c \cdot OA_3'}{2}\right) \\
&= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sum_{i=1}^{3} OA_i' - Alan(A_1\overset{\triangle}{A_2}A_3).
\end{aligned}$$

$Alan(A_1\overset{\triangle}{A_2}A_3) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) r$ (r : iç yarıçap) yazıldığında,

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}\sum_{i=1}^{3} OA_i' - \frac{a+b+c}{2} r$$

$$\Rightarrow \quad R = \sum_{i=1}^{3} OA_i' - r \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} OA_i' = R + r$$

Her üçgende çevrel yarıçap (R) ile iç yarıçap (r) arasında $R \geq 2r$ bağıntısı vardır. O halde $R \geq 2r \Rightarrow r \leq \frac{R}{2}$ ve $R + r \leq R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ olur. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{3} OA_i' = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3R}{2}$$

bulunur.

6. Belli bir anda, herhangi bir işlemciye girilmemiş sayılarla, işlemcilerin ekranlarındaki sayılara "işlem görecek kalem" diyelim. $n(c)$ ile, c zaman birimi sonundaki işlem görecek kalem sayısını gösterelim. $n(0) = 40 + 8 = 48$ 'dir; $\bar{c}$ zaman birimi sonunda istenen toplam elde edilmişse $n(\bar{c}) = 1$

olur. (Burada genelliği yitirmeden her işlemcinin kullanıldığını varsayıyoruz.) Bir zaman biriminde en fazla 8 işlem yapılabilir; ayrıca yine bir zaman biriminde, işlem görecek kalem sayısı, en fazla yarıya indirilebilir. Dolayısıyla,

$$n(c) - n(c+1) \leq \min\{\frac{n(c)}{2}, 8\},$$

ya da eşdeğer biçimde,

$$n(c+1) \geq \max\{\frac{n(c)}{2}, n(c) - 8\}$$

olur. Şimdi $M(0) = 48$; $M(c+1) = \max\{\lceil \frac{M(c)}{2} \rceil, M(c) - 8\}$ sistemine bakalım. ($\lceil x \rceil := x$ 'ten büyük ya da x 'e eşit olan en küçük tamsayıdır.)

$\tilde{C}$, $M(\tilde{C}) = 1$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı; $\hat{C}$ da aranan yanıt ise, $\hat{C} \geq \tilde{C}$ 'dir. $\tilde{C}$ 'yı bulalım:

$M(0) = 48;$ $\quad M(1) = \max\{\lceil \frac{48}{2} \rceil, 40\} = 40;$

$M(2) = \max\{\lceil \frac{40}{2} \rceil, 32\} = 32;$ $\quad M(3) = \max\{\lceil \frac{32}{2} \rceil, 24\} = 24;$

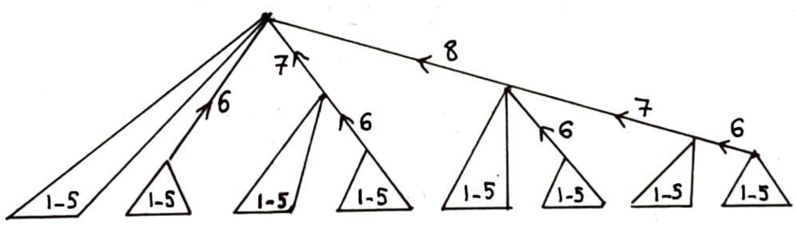
$M(4) = \max\{\lceil \frac{24}{2} \rceil, 16\} = 16;$ $\quad M(5) = \max\{\lceil \frac{16}{2} \rceil, 8\} = 8;$

$M(6) = \max\{\lceil \frac{8}{2} \rceil, 0\} = 4;$ $\quad M(7) = \max\{\lceil \frac{4}{2} \rceil, -4\} = 2;$

$M(8) = \max\{\lceil \frac{2}{2} \rceil, -6\} = 1.$

Yani $\tilde{C} = 8$ 'dir. Aranan sayı $\tilde{C} \geq 8$ olur.

Aşağıdaki çizelgede, köşeler işlemcileri; üçgenler ilk beş zaman biriminde işlemcilere girilen 5 'er sayıyı; yönlü kenarlar da, hangi işlemcinin kısmi toplamının hangi işlemciye aktarıldığını göstermek üzere; istenen toplamın 8 zaman biriminde elde edilebileceği görülmektedir. Yani, $\hat{C} = 8$ 'dir.



ÜÇ ÇEMBER TEOREMİ

Mehmet Bumin Yenmez
İzmir Özel Yamanlar Lisesi, İZMİR

Üç çember teoreminin ispatında kullanılacak olan, "bir noktanın bir çembere göre kuvveti" ve "iki çemberin kuvvet ekseni" ile ilgili şu bilgilerimizi hatırlayalım:

1. $(0, R)$ bir çember, P bir nokta, P 'den geçip çemberi iki noktadan kesen farklı iki doğrudan ayrılmış kirişler $[AB]$, $[CD]$ ve P 'den çembere çizilen teğetin değme noktası T ile gösterilmek üzere,

(a) $|PA|.|PB| = |PT|^2$ (P, çemberin dışında)

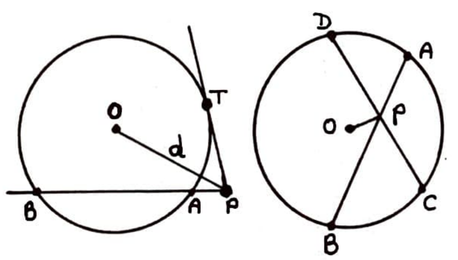
(b) $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$ (P, çemberin içinde)

$|OP| = d$ denirse,

(a') $|PA|.|PB| = d^2 - R^2$

(b') $|PA|.|PB| = R^2 - d^2$

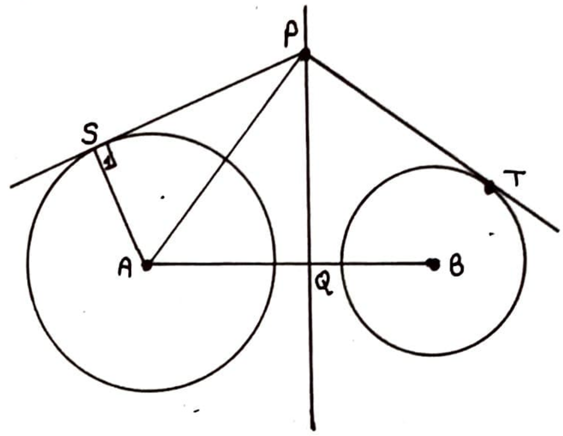
olur.



2. Düzlemde verilen iki çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaların üzerinde bulundukları doğruya, bu iki çemberin kuvvet ekseni denir.

Teorem 1. Düzlemde (merkezleri farklı) iki çembere, eşit uzunluktaki teğetlerin çizilebildiği noktalar (kümesi), bir doğru üzerinde bulunur. (Çemberler kesişiyorsa, bu doğru ortak kirişi taşıyan doğru; çemberler birbirinin dışında ise, bu doğru bu iki çemberin merkezler doğrusuna dik olan bir doğrudur.)

İspat.



Bir P noktasından (A, R_1) ve (B, R_2) çemberlerine çizilen eşit uzunluklu iki teğet

$$[PS] \quad \text{ve} \quad [PT]$$

olsun. $|PS| = |PT|$,

$$|PS|^2 = |PA|^2 - R_1^2 \quad . \tag{1}$$

P noktasından geçerek $[AB]$ 'na dik olan d doğrusu ile $[AB]$ 'nın kesişim noktası Q olmak üzere

$$|PA|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2 \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) 'den,

$$|PS|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2 - R_1^2 \tag{3}$$

benzer biçimde,

$$|PT|^2 = |PQ|^2 + |QB|^2 - R_2^2 \tag{4}$$

bulunur. $|PS| = |PT|$ ile (3) ve (4) 'ten,

$$|AQ|^2 - |BQ|^2 = R_1^2 - R_2^2 \tag{5}$$

elde edilir. $[AB]$ doğru parçasının orta noktası C ile gösterildiğinde,

$$|AQ| - |BQ| = |AC| + |CQ| - |CB| + |CQ| = 2|CQ|$$

bulunur.

$|AQ| + |QB| = |AB|$ olduğundan,

$$2|CQ|.|AB| = R_1^2 - R_2^2$$

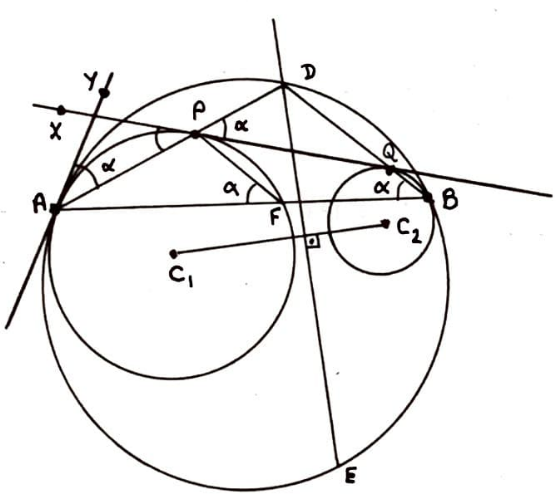
ve

$$|CQ| = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2|AB|}$$

($|AB| \neq 0$ için) elde edilir ki, bu, P 'nin d doğrusu üzerindeki yerinden bağımsız olarak $|CQ|$ 'nın sabit olması demektir.

O halde, P noktasının geometrik yeri bu biçimde belirlenmiş Q noktasında AB doğrusuna dik olan doğrudur.

Teorem 2. **(Üç Çember Teoremi)** Bir C çemberine içten teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerinin değme noktaları A, B; kuvvet ekseninin C çemberiyle keşişim noktaları D, E; $[DA]$ 'nın C_1 çemberiyle ve $[DB]$ 'nın C_2 çemberiyle kesişim noktaları P ve Q ile gösterilmek üzere, PQ doğrusu C_1 ve C_2 çemberlerinin ortak teğetidir.



İspat.

D noktası, kuvvet ekseni üzerinde olduğundan,

$$|DP||DA| = |DQ||DB|$$

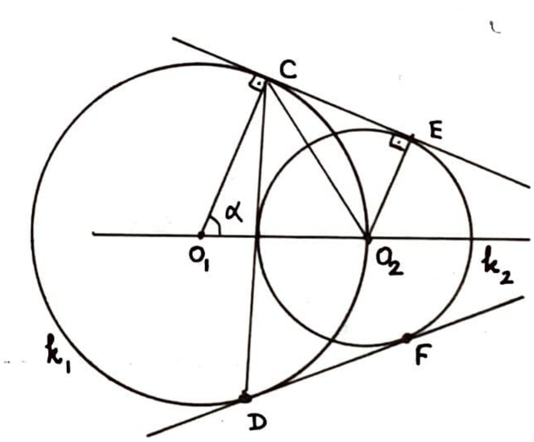
'dir. Buradan,

$$\frac{|DP|}{|DQ|} = \frac{|DB|}{|DA|}.$$

$\widehat{PDQ}$, $\overset{\triangle}{PDQ}$ ve $\overset{\triangle}{BDA}$ üçgenlerinde ortak olduğundan $\overset{\triangle}{PDQ} \sim \overset{\triangle}{BDA}$ (A.A) olup, $D\widehat{B}A = D\widehat{P}Q = \alpha$ 'dır. AB doğrusunun C_1 çemberi ile ikinci kesişim noktası F ve A 'daki teğet AY olsun, $\alpha = D\widehat{B}A = Y\widehat{A}D = P\widehat{F}A$ ve $D\widehat{P}Q = X\widehat{P}A = \alpha$ olur. $X\widehat{P}A = P\widehat{F}A \Rightarrow XP$ doğrusu C_1 çemberine teğettir. Benzer biçimde XP doğrusunun C_2 çemberine teğet olduğu gösterilir. O halde PQ doğrusu C_1 ve C_2 çemberlerine teğettir.

Bu teoremin uygulanabileceği bir çok problem kurulabilir.

1. Örnek. (1999 Uluslararası Matematik Olimpiyadı, 5. soru) Bir k çemberi ile bu çembere sırasıyla M ve N noktalarında içten teğet olan k_1 ve k_2 çemberleri, k_1 çemberi k_2 çemberinin merkezinden geçmek üzere veriliyor. k_1 ile k_2 'nin kuvvet ekseninin k çemberi ile kesişim noktaları A ve B, MA ile MB doğrularının k ile kesişim noktaları C ve D ile gösteriliyor. CD doğrusunun k_2 çemberine teğet olduğunu gösteriniz.



Çözüm. NA ve NB doğruları k_2 çemberini E ve F noktalarında kessin, üç çember teoremi gereğince CE ve DF bu çemberlerin ortak teğetleridir. CD doğrusu O_1O_2 doğrusu ile H noktasında kesişsin. CD değme kirişi olduğundan O_1O_2 doğrusuna diktir: $CD \perp O_1O_2$.

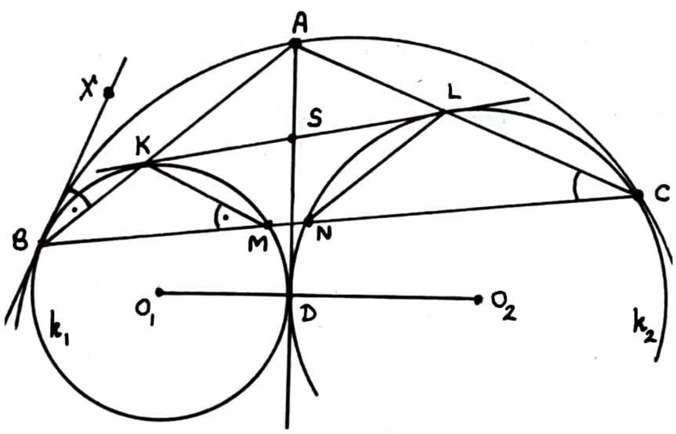
$C\widehat{O_1}O_2 = \alpha$ olmak üzere, $C\widehat{O_2}O_1 = O_1\widehat{C}O_2 =$

$90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ve $E\hat{C}O_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow C\hat{O}_2E = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ 'dir.

$$\overset{\triangle}{CO_2E} \cong \overset{\triangle}{CO_2H} \Rightarrow O_2E = O_2H \; .$$

O halde CD doğrusu k_2 çemberine teğettir.

2. Örnek. (1997 Balkan Matematik Olimpiyadı, 3. soru). Birbirine bir D noktasında dıştan ve bir t çemberine de sırasıyla B ve C noktalarında içten teğet olan k_1, k_2 çemberleri veriliyor. k_1 ile k_2 'nin kuvvet ekseninin t çemberi ile kesişim noktalarından biri A; AB ve AC 'nin k_1 ve k_2 çemberleriyle kesişim noktaları sırasıyla K ve L; BC doğrusuyla k_1 ve k_2 'nin kesişim noktaları da, sırasıyla M ve N ile gösterilmek üzere; AD, KM ve LN doğrularının aynı noktadan geçtiğini ispatlayınız.



Çözüm. Üç Çember Teoremine göre, KL, k_1 ve k_2 'nin ortak teğetidir. AD ile KL 'nin kesişim noktası S, B 'deki teğet BX ile gösterilmek üzere,

$$A\hat{C}B = A\hat{B}X = K\hat{M}B \Rightarrow KM \; // \; AL \; ,$$

benzer biçimde, $AK \; // \; LN$.

KM ile LN doğrularının kesişim noktası R ile gösterilmek üzere $AKRL$ bir paralelkenardır. Bu paralelkenarda S, köşegenlerin kesişim noktası olduğundan $KS = SR = SL \Rightarrow R, AD$ üzerindedir.

Yazımı, "Üç Çember Teoremi" yardımıyla kolayca çözeceğinizi umduğum, şu soru ile bitiriyorum:

Soru. (1992 Uluslararası Matematik Olimpiyadı, öneri): C_1 ve C_2 çemberleri, birbirine E noktasında dıştan; bir S çemberine de içten teğettir. E 'den geçen teğetin S çemberiyle kesişim noktaları A ve D, C_1 ve C_2 'nin D 'ye yakın ortak teğetinin yine S çemberiyle kesişim noktaları B ve C olmak üzere, E noktasının ABC üçgenine ait iç teğet çemberin merkezi olduğunu ispatlayınız.

ÜNLÜ KADIN MATEMATİKÇİLER (I)

Augusta Ada, Countess of Lovelace (1815-1852)

Hülya Şenkon

Ünlü şair **Lord Byron**, 2 Ocak 1815 'te zengin, dindar ve faziletli bir ailenin tek varisi olan ve iyi bir matematik ve astronomi öğrenimi görmüş olan **Anna Isabella Milbanke** ile evlendi. Bu çiftin kızı olan **Augusta Ada**, 10 Aralık 1815 'te dünyaya geldi. 15 Ocak 1816 'da Lady Byron, beklenmedik bir biçimde eşinden ayrıldı ve çıkan dedikodular üzerine Byron, bir daha geri dönmemek üzere İngiltere 'yi terketti. Byron, 8 yıl süren sürgün hayatı boyunca **Ada** ile yakından ilgilendi. Eşine sık sık mektup yazarak **Ada** 'nın durumunu soruyordu. Yunanistan 'da ölmek üzere olduğu dakikalarda bile ağzından kızı ile ilgili bir takım sözcükler dökülüyordu. **Ada**, son derece zalim ola bir kadın olan annesinden korkunç muamele görüyor, fakat bu arada zamanın en iyi öğretmenleri tarafından eğitiliyordu. **Ada** 'nın sağlık durumu yavaş yavaş bozulmaya başlamıştı, öyle ki, 14 yaşında iken her iki bacağına da felç geldi ve birkaç yıl sonra koltuk değnekleriyle yürümeye başladı. Olağanüstü bir irade gücüne sahip olan **Ada**, birkaç yıl sonra usta bir binici olmuştu.

1833 yılında 17 yaşında olan **Ada**, **Charles Babbage** ile karşılaştı ve onun bilimsel fikirlerinden çok etkilendi. **Charles**, **Ada** ile annesine kendi yaptığı küçük fark makinesini gösterdi ve onu analitik bir makineye, bir hesap makinesine genelleştirebilmek için düşündüklerini anlattı. **Ada**, kendisinin ünlü bir alim olacağına inanıyordu ki, bu o zamanlar bir kadın için korkunç bir ihtiras olarak nitelendiriliyordu. Kendidine matematik yapmasını tavsiye eden arkadaşı Mary Somerville 'den teşvik ve destek gördü.

Ada 19 yaşında iken, o zaman **William King** adını taşıyan, daha sonra 8. Lord King ve 1. Lovelace Kontu olan bir asilzade ile tanıştı ve kısa bir zaman sonra onunla evlendi. **King**, kibar, hoşsohbet, fakat zayıf kişilikli bir adamdı; eşinin zekasıyla övünüyor, fakat tamamıyla annesinin hakimiyeti altında yaşıyordu. Üstüste 3 çocuğu olan **Ada** bilimsel çalışmalarına devam edebilmek için artık zaman bulamayacağından korkuyordu. Üçüncü çocuğu birkaç aylıkken **Babbage**'a bir mektup yazdı ve bilimsel dehasını yönlendirecek birisini bulma konusunda kendisinden yardım istedi. **Babbage**, onu kendisinin çalıştırabileceğini bildirdi ve o tarihten itibaren aynı zamanda sadık bir aile dostları oldu.

1842 'de İtalyan askeri mühendisi **L. F. Menabtrea**, **Babbage** 'ın analitik makine ile ilgili fikirlerini içeren bir raporu fransızca olarak yayınladı. **Babbage**, **Ada** 'dan yalnızca bir yerinde söz ettiği anılarında şunları yazıyor: "Lovelace Kontesi bana, **Menabrea** 'nın çalışmasını tercüme ettiğini bildirdi. Kendisine niçin bu bu konuda orijinal bir makale yazmadığını sordum. **Lady Lovelace**, bunun aklına gelmediği cevabını verdi. Bunun üzerine, **Menabrea** 'nın çalışmasına bazı notlar ekleyebileceğini yazdım ve kendisi, bu fikrimi benimsedi." "Yeni buluşlar konusunda kendisiyle sık sık tartışıyorduk; ben çeşitli fikirler öne sürüyordum, fakat seçim yapmak her zaman ona aitti. çeşitli problemlerin çözümünü icra ederken de durum hep aynıydı. Yalnız, Bernouilli sayılarıyla ilgili bir çalışmamı, **Lady Lovelace** 'ı zahmete sokmamak için kendi kendime yazmış ve tamamladıktan sonra kendisine yollamıştım. Yaptığım önemli bir işlem hatasını hemen gördü ve çalışmayı, bu hatayı düzeltmem için bana geri yolladı."

"Lovelace Kontesinin yazmış olduğu notların uzunluğu, orijinal eserlerinin uzunluğunun 3 katına yakındır. Yazar bu notların hemen hepsinde konuya ilişkin, çok zor ve somut problemlere değinmektedir."

27 yaşında "Taylor's Scientific Memoires" adlı çalışmasıyla bilimsel zaferini kanıtlayan **Ada** 'nın sağlığı, dikkati çekecek şekilde bozulmaya başladı. Artık **Ada**, ilaçların esiri olmuştu. 1851 yılında doktorlar, **Ada** 'nın ileri derecede kanserden muzdarip olduğunu anladılar ve Ocak 1852 'de ağrılarını dindirebilmek için kendisine kuvvetli uyuşturucular vermeye başladılar. Uzun ve ıstırap dolu aylar boyunca sükunetini ve matematiğe karşı ilgisini kaybetmeyen **Ada**, nihayet 23 Kasım 1852 'de, henüz 36 yaşında iken ölüme yenildi. Vasiyeti üzerine, hiçbir zaman görmediği babasından çok uzaklara gömüldü. **Babbage** da 1871 yılında, kendisi için bir sabit fikir halini almış olan analitik makinenin inşasını başaramamaktan ötürü dünyaya küsmüş olarak öldü. **Ada** 'nın, **Babbage** 'ın makinesi ile ilgili çalışması, 1889 yılında bir kitap halinde tekrar basıldı. Fakat 2. Dünya Savaşı sıralarında bilgisayarlar icat edilinceye kadar **Babbage** da **Ada** da tamamen unutulmuştu. Bir İngiliz hesap uzmanı olan **Dr. B. V. Bowden**, **Ada** 'nın çalışmasını yeniden keşfetti ve büyük kızından izin alarak bu çalışmayı gözden geçirip, daha anlaşılabilir bir şekilde yazdı ve **Ada** 'nın ölümünden tam 101 yıl sonra, kısa bir yaşam öyküsünü ve en güzel fotoğraflarından birini de koyarak bastırdı. **Ada** 'nın 1843 'teki, **Babbage** 'ın hesap makinesi ile ilgili çalışması da 1961 'de Dover tarafından bir kitap olarak yeniden yayınlandı. Bu yayınlar, kendisinin bilgisayar programcılarının öncüsü olarak ün yapmasına yol açtı. Buna karşın, onun tam bir biyografisi, 1977 yılına kadar yayınlanmadı.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Aşağıda çeşitli matematikçilerin özdeyişlerini ya da matematikçi olmayan kişilerin matematik konusundaki özdeyişlerini bulacaksınız. Internet'ten derlenen bu özlü sözleri beğeneceğinizi umuyoruz.

□ **Aristo:** "Bütün, parçalarının toplamından büyüktür."

□ **Aristo:** "Thales 'e göre, en önemli sorun ne bildiğimiz değil, nasıl bildiğimizdir."

□ **Bacon, Francis (1561-1625):** "Bu dünyadaki nesneler, matematik bilgisi olmaksızın, asla bilinir kılınamazlar."

□ **Bell, Eric Temple (1883-1960):** " 'Açıktır', matematikteki en tehlikeli sözcüktür."

□ **Bell, Eric Temple (1883-1960):** "Matematik ne kadar uzun yaşarsa, o kadar soyut, ..., dolayısıyla da, çok büyük bir olasılıkla da, o kadar uygulamalı olur."

□ **Bernoulli, Jacques (1654-1705)** *(Bir problemin, Newton 'ın olduğunu düşündüğü çözümünü okuduktan sonra)*: "Ben aslanı pençesinden tanırım."

□ **Besicovitch, A. S.:** "Bir matematikçinin ünü, yapmış olduğu kötü kanıtların sayısına bağlıdır."

□ **Blake:** "Şimdi kanıtlanmış olan bir şey, eskiden yalnızca hayal ediliyordu."

□ **Cauchy, Augustin Louis (1789-1857)** *(Son sözleri)*: "İnsanlar ölüp giderler, ancak yaptıkları kalır."

□ **Chesterton, G. K. (1874-1936):** "Sorun, çözümü anlamadıkları değil, problemi anlamadıklarıdır."

□ **D'Alembert, Jean Le Rond (1717-1783)** *(Sonsuz küçükleri anlamakta geciken bir arkadaşına)*: "Yalnızca devam et... ve yakında güvene kavuşacaksın."

□ **Descartes, René (1596-1650)**: "Yetkin sayılar, yetkin insanlar kadar azdır."

□ **Dirac, Paul Adrien Maurice (1902-1984)**: "Bilimde, insanlara daha önceden hiç bir kişinin bilmediği bir şeyin herkesçe anlaşılabilecek biçimde anlatılması istenir. Ancak şiirde durum bunun tümüyle tersidir."

□ **Dyson, Freeman**: "Matematik ile fizik arasında, geçmiş yüzyıllarda çok verimli sonuçlara yol açan evliliğin, içinde bulunduğumuz dönemde boşanmayla sonuçlandığından kesinlikle eminim."

□ **Evgrafov, M.**: "Matematikçilere ne yaptıkları sorulduğunda hep aynı yanıtı alırsınız: Onlar düşünürler, zor ve alışılmadık problemler üzerinde düşünürler. Onlar sıradan problemler üzerinde düşünmezler; yalnızca yanıtlarını yazarlar."

□ **Einstein, Albert (1879-1955)**: "Matematikteki zorluklarınızı dert etmeyiniz; benimkilerin sizinkinden daha büyük olduğuna sizi temin ederim."

□ **Ellis, Havelock (1859-1939)**: "Sanatçının en derin hayal gücüne sahip olduğu sanat matematiktir."

□ **de Fermat, Pierre (1601?-1665)**: *("Diophantus' Arithmetica" kitabının kenarına yazdıkları)*: "Bir kübü diğer iki kübe, dördüncü kuvveti ya da genel olarak ikiden büyük herhangi bir kuvveti, aynı üste sahip olan iki kuvvetin toplamı olarak yazmak olanaksızdır, ve bunun hayranlık uyandıracak bir kanıtını buldum; ancak bunu yazacak kadar yer burada yok."

□ **Gibbs, Josiah Willard (1839-1903)**: "Matematik bir dildir."

□ **Gödel, Kurt (1906-1978)**: "Doğa bilimlerine inancım yoktur."

□ **Hadamard, Jacques**: "Pratik uygulama, onun kendisini aramadan bulunur; tüm uygarlaşma sürecinin bu ilkeye dayalı olduğu söylenebilir."

□ **Hamilton, William Rowan (1805-1865)**: "Kim onu yenen kişi olan Marcellus 'unki yerine Arşimet 'in ününe sahip olmayı istemez ki?'

□ **Hardy, Godfrey H. (1877-1947)**: "Öklit 'in pek çok sevdiği şey olan *olmayana indirgeme* bir matematikçinin en önemli silahlarından biridir. Bu, satrançta yapılan bir taş fedasından çok daha güzeldir; bir satranç oyuncusu bir piyonunu ya da daha değerli bir taşını feda edebilir, oysa bir matematikçi oyunun tümünü feda eder."

□ **Hardy, Godfrey H. (1877-1947)**: "Matematikle, yalnızca yaratıcı bir sanat olduğu için ilgilenmekteyim."

□ **Hardy, Godfrey H. (1877-1947)**: "Genç insanlar teorem kanıtlamalıdır, yaşlılar ise kitap yazmalıdır."

□ **Harris, Sydney J.**: "Gerçek tehlike bilgisayarların insan gibi düşünmeye başlaması değil, insanların bilgisayar gibi düşünmeye başlamasıdır."

□ **Heisenberg, Werner (1901-1976)**: "Uzman, kendi konusunda yapılabilecek en kötü yanılgıları ve de bunlardan nasıl kaçınılacağını bilen kişidir."

SAĞDUYUMUZA GÜVENELİM Mİ? EVET! ANCAK ÇOK ABARTMAYALIM...

İlham Aliyev
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058/ANTALYA

Bir bilim adamı ve özellikle, bir matematikçi için kuvvetli bir sağduyu çok önemlidir. Mükemmel bir teoremi keşfeden veya ispatı uzun yıllar bilinmeyen bir hipotezin olağanüstü kanıtını bulan matematikçi, yıllarını vermiş olduğu tecrübe ve bilginin yanısıra sağduyusuna da borçludur. Bilgisi ve tecrübesi olan yaşlı-başlı matematik doktorlarının çözemediği problemleri parlak sağduyuya sahip, tecrübesiz lise öğrencisinin çözdüğünün defalarca şahidi oldum. Bir matematikçinin cesaretli öngörüleri için çok önemli rol oynayan sağduyumuza güvenebilir miyiz? Güvenmekten başka çaremiz yoktur, fakat, bir kadar da dikkatli olmalıyız. Sağduyuların hepsi "doğruyu" söyleseydi ve böylece, Kopernik 'lerin, Einstein 'lerin, Cantor 'ların sağduyuları toplumun sağduyusunun aynısı olsaydı, şimdi güneş dünyanın etrafında dönüyordu, nükleer enerji keşfedilmemişti ve reel sayılar hakkında bilgimiz 5. sınıf öğrencisinin bilgisi kadardı!

Hatta çok büyük bilim adamlarının kendi sağduyusuna "yenik düşerek" büyük bilimsel hatalar yaptığına ait sayısız ilginç örnekler bilinmektedir. Fakat, biz hitap ettiğimiz okuyucu kitlesini göz önünde tutarak, lise-1 öğrencisinin rahatlıkla anlayabileceği çok sayıda örnek vermekle yetineceğiz.

Sevgili okurumuz! Sen de karşındaki problemleri oku ve çözüme bakmadan, sağduyunun nasıl "çalışıp çalışmadığını" kontrol etmek fırsatını yakala. İyi eğlenceler!

Problem 1.

Her birinin ağırlığı 1 tonu aşmayan bir kaç kutunun toplam ağırlığı 10 tondur. Tüm kutuları bir defada taşıyabilmek için en az kaç tane 3 tonluk kamyon gerekmektedir?

Çözüm. "Saf" bir sağduyu bu işi 4 kamyonun rahatlıkla yapabilebileceğini söylüyor. Oysa, öyle değildir. Gerçekten, her birinin ağırlığı $\frac{10}{13}$ ton olan 13 tane aynı kutu olduğunu düşünelim. Toplam ağırlığı 10 ton olan bu kutular 4 tane 3 tonluk kamyona yüklenemez! (Çünkü her kamyona en fazla 3 tane kutu koyabileceğimizden, 4 kamyona 12 kutu koyabiliriz ve böylece, 1 kutu yerde kalır.) 5 tane 3 tonluk kamyonun her zaman yeterli olacağını görmek zor değildir. Çünkü her kamyona en az 2 ton yük konulabiliyor. (Kamyondaki yük miktarı 2 tondan az ise, oraya ilave kutu(lar) koyar ve en az 2 ton yük elde edebiliriz. Bu arada her kutunun ağırlığının 1 tonu aşmadığına dikkat ediniz.)

Aşağıdaki problemle fizikçi arkadaşlarınızı şaşırtabilirsiniz:

Problem 2.

A kentinden B kentine $5,5$ giden bir trenin, her 1 saatlik zaman diliminde 100 km yol gitmiş olduğu bilinmektedir. (Örneğin, saat 8 ile 9 arasında 100 km, saat $8:27$ ile $9:27$ arasında 100 km yol gitmiştir.)

Bu trenin saatteki ortalama hızı kaçtır?

Çözüm. "Doğaldır ki, 100 km/saat" diyenler yanılıyorlar! Ortalama hızın 100 km/saat olmadığı duruma bir örnek gösterelim. Trenin kullanmış olduğu $5,5$ saatlik zaman aralığını 11 tane yarım saatlik aralığa bölelim. Tren ilk yarım saatte yolu nasıl gitmişse (ivmeli, veya sabit hızla - önemli değil), $3.,5.,...,11.$ yarım saatlerde de öyle gitsin. İlk yarım saatte (ve dolayısıyla, her tek yarım saatte) trenin gitmiş olduğu yol a $((0 \leq a \leq 100)$ km olsun. Tren 2. yarım saatte nasıl gitmişse, $4.,6.,...,10.$ yarım saatlerde de öyle gitsin ve 2. yarım saatte (dolayısıyla, her çift numaralı yarım saatte) gitmiş olduğu yol $(100-a)$ km olsun. Bu takdirde, trenin her 1 saatlik zaman diliminde tam 100 km yol gitmiş olduğu kolayca görülebilir. şimdi trenin ortalama hızını hesaplayalım. Trenin tek yarım saatlerde gitmiş olduğu toplam yol $6a$ ve çift yarım saatlerde gitmiş olduğu yol $5(100-a)$ km 'dir. Böylece tren $5,5$ saatte $6a+5(100-a) = 500+a$ km yol gitmiştir. Öyleyse, onun hız ortalaması $(500+a)/5,5$ km/saattir ki bu da sadece, $a = 50$ durumunda 100 km/saat olur.

Problem 3. "Teorem": Bir üçgenin üç açısı ve iki kenarının uzunluğu, diğer üçgenin üç açısına ve iki kenarının uzunluğuna eşitse, bu üçgenler eşit üçgenlerdir.

Bu "uyduruk" teoremin yalanını açığa çıkarmayı size bırakıyorum.

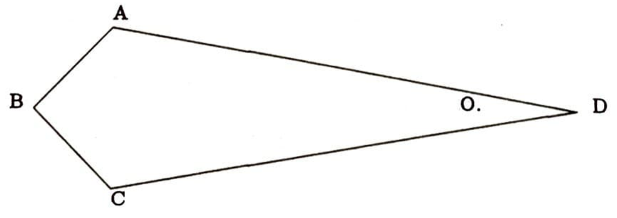
Problem 4. Bir üçgenin kenarlarının her birinin uzunluğu 100 m 'den büyük ve diğer üçgenin kenarlarının her birinin uzunluğu 1 cm 'den küçük ise, birinci üçgenin alanının ikinci üçgenin alanından büyük olacağını söyleyebilir miyiz?

Acemi bir matematiksever kesinlikle "evet!" der. Onun "kanıt" yollarından biri şöyle olabilir: Üçgenin alanı için Heron formülü $S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$' ye göre, üçgenin çevre uzunluğunun yarısı olan u büyüdükçe, alanı da büyüyecektir.

Oysa, öyle değildir. Basit bir örnek şöyle kurulabilir: Tabanı $200m$ ve yüksekliği çok küçük, örneğin, $10^{-7}m$ olan üçgenin alanı, tüm kenarları 100 m 'den uzun olmasına rağmen, kenarları $1/2$ cm olan eşkenar üçgenin alanından küçüktür. (Bu konoya dalmışken, yükseklikleri 1 'cm den küçük, alanı ise 100 cm ^{2} 'den büyük üçgen kurun.)

Problem 5. Konveks dörtgenin içinde alınmış bir noktanın köşelerden uzaklıkları toplamının, dörtgenin çember uzunluğundan her zaman küçük olacağını iddia edebilir miyiz?

Bir kaç denemeden sonra sağduyumuza dayanarak, "evet" demek istiyoruz. Oysa, sağduyumuz bizi yanıltıyor. Aşağıda resmi verilmiş $ABCD$ dörtgeni içinde O noktasını D 'ye çok yakın alırsak, problemdeki iddianın doğru olmadığını görebiliriz.



Problem 6. Aşağıdaki iddialar doğru mudur?

(a) Herhangi 6 doğal sayı içinde ya ikişer ikişer aralarında asal 3 tanesi, ya da ortak bölenleri olan 3 tanesi bulunur.

(b) Bir sıraya dizilmiş herhangi 5 doğal sayı içinde, artan sırada veya azalan sırada dizilmiş 3 sayı muhakkak bulunacaktır.

(c) Bir sıraya dizilmiş herhangi 9 doğal sayı içinde artan sırada veya azalan sırada dizilmiş 4 sayı muhakkak vardır.

Çözüm.

(a) İddia doğru değil. Örnek: $6 = 2.3$, $10 = 2.5$, $15 = 3.5$, $77 = 7.11$, $91 = 7.13$, $143 = 11.13$.

(b) İddia doğrudur. 6 sayının en küçüğüne a, en büyüğüne de b diyelim. 6 sayının verilmiş diziliminde a ve b arasında bir sayı bulunuyorsa, iş biter. Aksi halde bu iki sayı yanyana gelmek zorundadır. O halde bu ikilinin ya sağında ya da solunda en az iki sayı bulunacaktır. Bu iki sayı ya a ile, ya da b ile birlikte alındığında istenen üçlü ortaya çıkar.

(c) İddia doğru değildir. Örnek olarak, $3,2,1,6,5,4,9,8,7$ dizilimini gösterebiliriz. Gösterelim ki, bu dizilimde artan veya azalan sırada dizilmiş 4 sayı bulmak olanaksızdır. Bunun için dizinin terimlerini, bulundukları sırada üçlülere ayıralım: $3,2,1$; $6,5,4$; $9,8,7$. Buradan görünüyor ki, azalan sırada alınmış herhangi 3 sayı aynı bir üçlüde bulunmalıdır ve artan sırada alınmış sayılar ise farklı üçlülerde bulunmalıdır. Dolayısıyla, 4 sayı seçmek olanaksızdır.

Tamsayı çözümlerinin bulunması istenen denklemlerde (Diyofont denklemleri) sağduyumuz bizi sık sık yanıltabilir. Bilindiği gibi, Diyofont denklemleri ile ilgili "olumsuz problemler" 'de modüler aritmetik güçlü bir araçtır. Ne demek istediğimizi bir örnekle açıklayalım:

Örnek 7. $x^3 - 3y^2 = 2$ denkleminin tamsayılarda çözümünün olmadığını gösterelim. Şöyle bir basit gözlemi kullanacağız: Bir eşitlik doğru ise, her $n \in \mathbf{N}$ için bu eşitlik *mod n* 'de de doğru olmalıdır. Şimdi verilen denklemi *mod* 9 'da düşünelim. *mod* 9 'da sağ taraf 2 'ye denktir. $x := 3n$, $3n \pm 1$ ve $y := 3k$, $3k \pm 1$ koyarak, denklemin sol tarafının hiç bir zaman 2 'ye denk olmayacağını kontrol edebilirsiniz.

Bu tip problemlerden esinlenerek, sağduyumuz bizi, şöyle bir kuralın doğru olacağına inandırmaya "çalışıyor": Bir Diyofont denkleminin tamsayılarda çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul, bu denklemin her $n \in \mathbf{N}$ için *mod n* 'de çözümünün varlığıdır. Gereklilik kısmı açık olan bu iddianın yeterlilik kısmı bir çok matematikçiyi uzun zaman uğraştırmış ve ispat bulunamamıştır. Bir çok uğraştan sonra ispatın neden bulunamadığının sebebi ortaya çıkmıştır: Böyle bir ispat bulunamaz, çünkü iddia yanlıştır.

Norveçli matematikçi Zelmer'in kurmuş olduğu

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

denkleminin her n için *mod n* 'de çözümü olmasına rağmen, $(0,0,0)$ 'dan farklı bir tane bile tamsayı çözümü yoktur. (Bunun ispatı çok zordur!!!)

Aşağıdaki soruyu bankacı (veya muhasebeci) tanıdıklarınıza sorun ve büyük olasılıkla, vereceği "hayır" yanıtının yanlış olduğunu söylediğinizde ne hallere düşeceğine bakın:

Soru 8. Bir tüccar her ay aylık kazancını ve kaybını not defterine yazdı. Tüccarın her ardışık 5 aydaki toplam kaybı aynı süredeki toplam kazancından çok, fakat yıllık toplam kaybı yıllık toplam kazancından az olabilir mi?

Yanıt. Evet, olabilir. Aşağıdaki 12 sayı bir yılın her ayındaki kazançla kayıp arasında farkı göstersin:

$$2,2,2,2,-9,2,2,2,2,-9,2,2 \ .$$

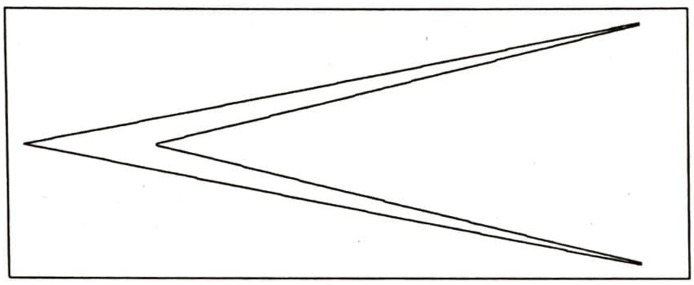
Kolayca görülebileceği üzere, herhangi 5 ardışık sayının toplamı negatif (-1) ve tüm sayıların toplamı pozitiftir (2 'dir).

Problem 9. Toplamları 1 ve her biri 1 'den küçük bir kaç sayının küpleri toplamı 1 'den büyük olabilir mi?

Çözüm. Acele etmeyin, bir az uğraşın ve sabırsızlandığınızda, yazımızın son kısımlarına bakın.

Problem 10. Çevre uzunluğu P_1 olan bir dörtgen, çevre uzunluğu P_2 olan bir dörtgenin içine çizilmişse, $P_1 > P_2$ olabilir mi?

Çözüm. "Hayır" demek için acele etmeyin ve aşağıdaki şekile bakın. (Suratınızı asmayın; ben dörtgenlerin konveks olup olmadıkları hakkında bir şey söylemedim ki...). $P_1 > 2P_2$ olabilir mi? Hiç korkmadan "hayır" diyebilirsiniz. (Hiç bir zaman $P_1 > 2P_2$ olamayacağını ispatlamaya çalışın.)



Problem 11. 4 tane 1×1, 8 tane 2×2, 12 tane 3×3, 16 tane 4×4, 20 tane 5×5 karesinden yeni bir kare oluşturulabilir mi?

Çözüm. Probleme nasıl yaklaşmalıyız? Bu kareleri, uygun biçimde birbirine yapıştırarak bir büyük kare elde edebilmek için gerek ve yeter koşul, bunların alanlar toplamının bir tam kare olmasıdır.

$$4.1^2 + 8.2^2 + 12.3^2 + 16.4^2 + 20.5^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) = 4(\frac{1+5}{2}.5)^2 = (2.15)^2 = 30^2$$

Böylece, verilen kareleri birleştirerek, kenar uzunluğu 30 olan bir kare kurulabilir (yapmaya çalışın).

Şimdi de kalem, kağıt ve sağduyunuzu (ve belki de bir bardak kahve) kullanarak, "evet" veya "hayır" diye yanıtlayacağınız bir kaç problem öneriyorum. Sizin yaşta olduğum zamandan tanıştığım ve çoğu anonim olan bu problemleri sizin de seveceğinizi umuyorum:

Problem 12. Hepsi aynı büyüklükte karton daireler verilmiştir. Bunların
(a) 24 tanesini; (b) 25 tanesini
masa üzerine, her daire tam üç daireye dokunacak biçimde dizmek mümkün müdür?

Problem 13. İkisi de tahtadan yapılmış, aynı büyüklükte küplerin birinde, diğer küp rahatlıkla geçebilecek biçimde, delik açmak mümkün müdür?

Problem 14. **(a)** 19×19 kare cetvelinin hanelerine öyle sayılar yerleştirmek mümkün müdür ki, her sütundaki sayıların toplamı pozitif ve her satırdaki sayıların toplamı negatif olsun?

(b) 5×5 kare cetvelinin hanelerine öyle sayılar yerleştirmek mümkün müdür ki, her 2×2 karesindeki sayıların toplamı negatif, fakat tüm 25 sayının toplamı pozitif olsun?

Problem 15. Kenar uzunluğu 1 cm olan küpü, kenar uzunluğu 3 cm olan kağıt yaprağa sarmak mümkün müdür?

Problem 16. Değerler kümesi tüm pozitif sayılar kümesi ile çakışan iki değişkenli $P(x,y)$ polinomu var mıdır?

Yanıtlar: 12(a)-evet, 12(b)-hayır; 13-evet; 14(a)-hayır, 14(b)-evet; 15-evet, 16-evet.

Problem 16 için, örneğin, $P(x,y) = (1-xy)^2 + x^2$ polinomu alınabilir. Nihayet, Problem 9 'daki özelliklere sahip sayılara bir örnek gösterelim. Aşağıdaki sekiz sayıyı alalım: 2 tane $0,8$; 6 tane $(-0,1)$. Bunların toplamı 1 'e eşittir; her birinin mutlak değeri 1 'den küçüktür ve küpler toplamı 1 'den büyüktür: $2(0,8)^3 + 6(-0,1)^3 = 1,018 > 1$.

T E Ş E K K Ü R L E R

Matematik Dünyası 'nı çıkartan birim olarak en büyük sorunlarımızdan biri, basılan sayılarımızın dağıtımı olmuştur. Kısıtlı olanaklara sahip olmamız dağıtım işini epeyce güçleştirmektedir. Son çıkan sayılarımızla birlikte derginin dağıtımını üstlendikleri için özellikle *Yurtiçi Kargo* sahibi Sayın **İbrahim Arıkan** 'a ve *Antalya Bölge Müdürü* Sayın **Yaşar Mutlu** 'ya en içten dileklerimizle teşekkür ediyoruz.

Matematik Dünyası Yayın Kurulu *Antalya, 04.05.2000*

MATEMATİKSEL YETENEK

Metehan Aydın
Özel Samanyolu Lisesi, İSTANBUL

Klasik öğretimin başarısızlığında çoğu kez gözden kaçan bir neden de, programda öngörülen matematiğin, ilgi ve yetenek farkları gözönünde tutulmaksızın tüm öğrenciler için zorunlu tutulmasıdır. Oysa, günlük gözlemler bile çocukların öğrenme yeteneği bakımından geniş bir dağılım içinde olduğunu göstermektedir. Pek çok çocuğun uzun sürede güçlükle kavradığı bilgile, kimi çocuklar için son derece kolaydır. Satranç ya da müzik tutkusu gibi matematik ilgisi de herkeste değil, pek az kimsede kendini açığa vurmaktadır. Matematik ilgisinin uyandırılmasında kültürel çevrenin etkisini görmezlikten gelemeyiz elbet. Ne var ki, kişide belli bir yönde ilginin yoğunlaşması, o yönde üstün yeteneğin varlığıyla olasıdır. Gerçekten, belli bir düzey üstünde matematikte ilerlemenin canlı bir ilgiyle birlikte o ilgiyi besleyen özel bir yetenek gerektirdiği, matematik tarihine göz gezdiren hiç kimsenin kolayca yadsıyamayacağı bir olaydır. Bir kaç örnek vermekle yetineceğiz:

Galileo Galilei (1564-1642), hem öncü bilimsel çalışmaları hem de engizisyonla içine düştüğü çatışması nedeniyle uygar dünyanın gözünde örnek bir insandır. Yoksul bir matematikçi olan babası, oğlunu daha kazançlı bir mesleğe yöneltmede kararlıydı. Galileo, 19 yaşına gelinceye dek "matematik" denen bir konunun varlığından neredeyse habersiz büyür. Üniversite öğrenimine tıp fakültesinde başlamıştı. Ne var ki, bir gün bir rastlantıyla kulak misafiri olduğu bir geometri dersi, onu adeta büyüler: Galileo, yeni bir dünya keşfetmiş olmanın coşkusu içindedir artık; her şeyi bir yana iterek matematiğe sarılır. Sonunda bildiğimiz gibi, matematiksel yöntemle deneyi birleştirerek modern fiziği oluşturan Galileo çıkar ortaya.

Matematikte başarının doğuştan gelen özel yetenekle ilişkisine en çarpıcı örnekleri Gauss, Abel, Galois, Ramanujan gibi büyük matematikçilerde bulmaktayız.

"Matematiğin Prensi" diye anılan Carl F. Gauss (1777-1855), daha üç yaşına basmadan, işçilerin ücret bordrosunu hazırlayan babasının bir hesap hatasını yakalayarak onu şaşırtır. On yaşında ilkokul sıralarında iken aritmetik dersindeki performansı ise daha şaşırtıcıdır: Bir toplantı için sınıftan ayrılmak üzere olan öğretmen, çocukları meşgul tutmak amacıyla 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamını bulmalarını ister. Öğretmen tam kapıdan çıkarken Gauss parmağını kaldırır, sonucun 5050 olduğunu söyler. Yüz sayının öyle kısa bir sürede ardarda yazılıp toplanabileceğine inanmayan öğretmen, öğrencisinden sonuca nasıl ulaştığını sorar. Gauss dizide en alt ve en üst sayılardan başlayarak toplamı 101 olan,

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & + & 100 & = & 101 \\ 2 & + & 99 & = & 101 \\ 3 & + & 98 & = & 101 \\ & & & \vdots & \\ 50 & + & 51 & = & 101 \end{array}$$

50 çift sayı olduğunu, dolayısıyla toplamın da

$$50 \times 51 = 5050$$

olması gerektiğini söyler. (Öğretmeninin aracılığıyla Gauss 'un üstün yeteneğini öğrenen dönemin Brunswick Dükü Ferdinand, çocuğu öğrenim yaşamı boyunca koruması altına alır, matematik dünyasının Prensi insanlığa kazandırılmış olur!)

Gauss 'ın yaşam döneminde olağanüstü yetenekleriyle genç yaşlarında adları unutulmazlar arasına yazılan iki kişi daha çıkar: Abel ve Galois. Niels Henrik Abel (1802-1829), Norveç'te bir köy papazının oğlu olarak dünyaya gelir. Yoksulluk içinde geçen kısa yaşamında inanılmaz bir tutkuyla matematiğe sarılan Abel, öğretmeninin yüreklendirmesiyle Newton, Euler, Lagrange ve Gauss çapında büyük matematikçileri okumaya koyulur. Bu arada babasının erken ölümü 7 çocuklu ailenin geçim yükünü 18 yaşındaki Abel'in sırtına yüklemiştir. Ama o tüm sıkıntılara karşın matematikten elini çekmez; Cauchy, Gauss gibi dönemin ünlülerinden beklediği ilgiyi görmediği halde çalışmasını sürdürür. Daha sonra başarısının gizemi sorulduğunda Abel, ömezleri değil doğrudan ustaları okumasını gösterir.

Abel, "usta" dediği matematikçilerin çalışmalarında kimi zayıf noktalar bulmakta, üstünkörü ortaya konan çözüm ya da ispatları yakalamakta gecikmez. Ne var ki, onu asıl yücelten başarısı, denklemlerin cebirsel çözümüne ilişkin çalışması ile şidi "Abel Teoremi" diye bilinen 1826 'da Paris Bilimler Akademisi'ne sunduğu transendental fonksiyonların geniş bir kümesine ait genel bir özellik üzerindeki çalışmasıdır. Legendre, yeni bir analiz dalının icadı saydğı bu çalışmasıyla Abel 'in ölümsüzleştiğini söylemekten kendini alamaz.

Abel, 26 yaşında yoksulluk ve ihmale kurban gitti; matematik dehası onunkine eş olan Galois ise daha da erken yaşta aptalca göze aldığı bir düellonun kurbanı oldu.

Şimdi "Galois Teorisi" olarak bilinen denklemlerin genel çözümüne ilişkin özgün çalışmasının yanısıra, modern matematikte önemli yer tutan Grup Teorisi'nin büyük öncüsü Evariste Galois (1811-1832), Paris'e yakın bir köyde büyüdü. 12 yaşına gelinceye dek okula başlamadı; evinde annesinin öğrettikleriyle yetindi. Aile çevresinde matematikle ilgilenen kimse yoktu. Galois'in öğrenim yaşamı tam bir anlayışsızlık ortamı içinde geçer. Gittiği okul onun gözünde bir okul olmaktan çok bir kışla ya da hapishaneydi: Katı bir disiplin, kapalı kapılar, yüksek duvarlarla çevrili kocaman bir bina. Klasik diller ve literatür ağırlıklı programda matematiğe tanınan yer çok dar ve önemsizdi. Galois belki de bir rastlantı sonucu eline geçen bir kitapta aradığı dünyasını bulur. Bu, dönemin ünlü matematikçisi Legendre 'ın geometri üzerine bir çalışmasıydı.

Galois bir okuyuşta kavradığı geometriyle adeta büyülenir. Oysa, okulda okutulan cebiri son derece sıkıcı, ders kitabını yavan ve katı buluyordu. Cebiri okulda değil dışarıda, asıl kaynağında araması gerektiğini anlayan Galois, çok geçmeden Langrange'ın cebirsel çözümlemelere ilişkin çalışmalarını, analitik fonksiyonlar teorisini incelemeye, matematiğin başyapıtlarını okumaya koyulur. 15 yaşındaki delikanlı, matematikte kendi gerçek dünyasını bulmuştu artık. Ne var ki, okul çevresinin tepkisi kaçınılmazdı: Öğretmenleri onu söz dinlemez,kendini beğenmiş bir ukala,özgün görünme tutkusu içinde bir "bilgiç" diye niteliyor, durumunu umutsuz görüyorlardı. Sınıf arkadaşlarının gözünde "kaafsını matematikle bozmuş", çekilmez biriydi. Galois, kurulu düzenin beklentilerine, yerleşik değer yargılarına ters düştüğü için dışlanmıştı. Öyle ki göz kamaştırıcı zekasına karşın giriş sınavında matematikten yetersiz görülerek Ecole Polytechnique'e alınmaz. Dahası, Cauchy çapında bir matematikçinin bile, tüm girişimlerine karşın ilgisini çekemez. Bu olumsuzluklar karşısında dünyası kararan Galois kendini o sıra etkinlik kazanan devrimci eyleme kaptırır; krala açıktan karşı çıktığı için iki kez tutuklanır. Başarısız sayıldığı sınavı 50 yıl sonra değerlendiren matematikçiler, "sıradan zekaların dehayı katlettiği" yargısında birleşirler.

Son örneğimiz, yetkili bir kalemin, "çağımızın en olağanüstü matematik zekası" dediği zavallı bir Hintli delikanlıya ilişkindir. 31 yaşında tüberkülozdan ölen Srivinasa Ramanujan (1889 – 1920), ölümünden 8 yıl önce kendini bir mektupla matematik dünyasına tanıtmanın yolunu aramıştı:

> Saygıdeğer Efendim,
>
> Madras'ta yılda 20 Sterlin ücretle çalışan küçük bir muhasebe memuruyum. Orta öğrenimimden sonra üniversiteye devam edemedim. Boş zamanlarımı matematik üzerinde çalışarak dolduruyorum. Çalışmam üniversite programlarında öngörülen çerçeve dışında, kendi çizdiğim yepyeni bir yönde ilerlemektedir. Özellikle "açılan seriler" (divergent series) üzerindeki araştırma sonuçlarımı burada gösterdiğim matematikçilerin "hayret"le karşıladıklarını belirtmek isterim.

.....

Sizden dilediğim, ilişikte gönderdiğim notları incelemeniz. Eğer bunlarda bir değer bulursanız, teoremlerimi yayımlama olanağı arayacağım. Örnek olarak gönderdiğim notlar ulaştığım sonuçların bir bölümü olup, araştırmamaın kendisini ve ayrıntılı ifade biçimlerini yansıtmaktadır. Yoksul ve deneyimsiz biri olarak sizden bana yol göstermenizi rica ediyorum. Verdiğim zahmetten dolayı bağışlamanız dileğimle, derin saygılar sunarım.

S. Ramanujan

Hintli delikanlı, arkadaşlarının teşvik ve yardımıyla yazdığı bu mektubu 120 teoremle birlikte Cambridge'de seçkin kürsü profesörü G. H. Hardy'ye göndermişti. Hardy şaşkınlığını daha sonra, "Kimsenin tanımadığı Hintli bir memurdan gelen böyle bir şey karşısında bir matematikçinin ilk tepkisinin ne olacağını siz düşünün artık!" diyerek belirtir.

Teoremlerden bir bölümü bilinen şeylerdi; bir bölümünü ancak uğraşarak ispatlayan Hardy, bir bölümüne ise tamamen yabancı olduğunu görür. Bunlar gerçekten apayrı derinlik ve düzeyde buluşlardı. Sıradan bir kafanın, geçici bir hevesin ürünleri olamazdı.

Hardy'nin bir anısı, Ramanujan 'ın sayılarla ne denli içten bir dostluk ilişkisi içinde olduğunu göstermesi bakımından ilginçtir: "Putney'de hasta yatarken ziyaretine gitmiştim. Bindiğim taksinin plaka numarası 1729 idi. Bu sayıda ilginç bir özellik bulmadığımı söyleyince, hemen atıldı, "Öyle değil, Hardy, çok ilginç sayıdır o. İki küpün iki değişik biçimde toplamı olarak yazılabilen en küçük sayıdır" dedi.

Ramanujan, matematik dünyasına doğmuş yeni bir yıldızdı, çok geçmeden kaybolan bir yıldız!

DÜZELTME

Matematik Dünyası 'nın geçen sayısında (Cilt 9, Sayı 1, 26-28.sayfalar) **Levent Özbek** 'in yazmış olduğu "**Rasgele Dizi ve** π" yazısında, 27.sayfada üstten 11.satırda bulunan

"... rasgele yazılan iki sayının göreceli asal olmalarının olasılığı $6/\pi$ 'dir."

ifadesi yanlış dizilmiş olup doğrusu

"... rasgele yazılan iki sayının göreceli asal olmalarının olasılığı $6/\pi^2$ 'dir."

biçimindedir. Ayrıca yazarımızın çalıştığı kurum, yine yanlışlıkla, "**Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, ANKARA**" yazılmış olup, doğrusu "**Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü, ANKARA**" 'dır. Bu iki yanlışlık nedeniyle **Levent Özbek** 'ten ve okurlarımızdan özür dileriz.

Matematik Dünyası

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Mayıs 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.206. $x+y=1$ koşulunu sağlayan sayılar içinde x^3+xy+y^3 polinomuna minimum değer veren x ve y 'yi bulunuz.

A.207. Bir n doğal sayısının tüm pozitif bölenlerinin sayısına s diyelim. n 'nin tüm pozitif bölenlerinin çarpımını, n ve s cinsinden bulunuz.

A.208. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ve $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ ise,

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq |\sum_{j=1}^{k} a_j|$$

eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden bir $k \in \mathbf{N}$ bulunduğunu kanıtlayınız.

A. 209. x_1 ve x_2, $x^2-6x+1=0$ denklemini sağlayan sayılar olsun. Hiçbir n doğal sayısı için $x_1^n+x_2^n$ sayısının 5 ile bölünmediğini ispatlayınız.

A.210. $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin kesişim noktası E, $[BC]$ tabanı üzerinde bir nokta K ve $A\hat{K}E = D\hat{K}E$ ise, C 'nin AK doğrusuna uzaklığı $|CC'|$, B 'nin BK doğrusuna olan uzaklığı $|BB'|$ olmak üzere, $|BB'| = |CC'|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.206. 25×25 karesinin her hanesine $+1$ ve -1 sayılarından biri yazılmıştır. i-inci satırdaki sayıların çarpımına a_i ve j-inci sütundaki sayıların çarpımına da b_j diyelim.

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_{25}+b_{25} \neq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Y.207. Herhangi 3 tanesinden bir üçgen yapılabilen 5 doğru parçası verilmiştir. Bu doğru parçalarından yapılabilen üçgenler içinde en az bir tanesinin dar açılı olduğunu kanıtlayınız.

Y.208. Aşağıdaki denklemin tüm rasyonel köklerini bulunuz:

$$abx^2+(a^2+b^2)x+1=0 \qquad (a,b \in \mathbf{Z}).$$

Y.209. a^n+2^n+1 sayısı $a^{n+1}+2^{n+1}+1$ sayısını bölecek biçimde tüm a ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Y.210. ABC dar açılı üçgeninde A, B, C 'den $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla D, E, F; yine A, B, C 'den EF, FD, DE 'ye indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla P, Q, R ile gösterilmek üzere, AP, BQ, CR doğrularının aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

A.196. $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere, 2^n ve 5^n sayılarının onluk sayı sisteminde yazılışlarındaki ilk rakamlarının aynı olduğu bilinmektedir. Bu rakamı bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Çözüm. Söz konusu rakam 3 'tür. ($n=5$ için $2^5=32$ ve $5^5=3125$ 'tir ve demek ki, 3 rakamının ilk olduğu durum mevcuttur.) $n \geq 4$ durumunu incelemek yeter. 2^n ve 5^n nin ilk rakamları a ve rakamlar sayısı da, sırası ile, $s+1$ ve $t+1$ olsun. Bu takdirde

$$a.10^s < 2^n < (a+1).10^s \ ;$$

$$a.10^t < 5^n < (a+1).10^t$$

olur. Taraf tarafa çarparsak,

$a^2.10^{s+t} < 10^n < (a+1)^2.10^{s+t}$,

$a^2 < 10^{n-s-t} < (a+1)^2$

elde ederiz. $1 \leq a \leq 9$ olduğundan, $n-s-t=1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, $a^2 < 10 < (a+1)^2$ ve buradan $a=3$ olduğu görülür.

A.197. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$a_1 = 0, |a_2| = |a_1+1|, |a_3| = |a_2+1|, ..., |a_n| = |a_{n-1}+1|, ...$

Bu durumda, $2(a_1+a_2+...+a_n) \geq -n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $a_1 = 0, |a_2| = |a_1+1|, ..., |a_{n+1}| = |a_n+1|$ eşitliklerinin her iki yanının karesini alıp taraf tarafa toplarsak,

$$2(a_1+a_2+...+a_n)+n = a_{n+1}^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2(a_1+a_2+...+a_n) \geq -n$$

elde edilir.

A. 198. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$ olduğu halde ıraksak olan bir sınırlı dizi var mıdır?

Çözüm. Evet, vardır. Bir örnek gösterelim. $a_n = \sin\sqrt{n}$ alalım. Her n için $|a_n| \leq 1$ ve dolayısıyla, (a_n) bir sınırlı dizidir. Bu dizi ıraksaktır. Çünkü, örneğin sıfıra ve bire yakınsayan altdiziler bulmak mümkündür.

Şimdi,

$$0 \leq |a_{n+1}-a_n| = |\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}|$$

$$= 2|\cos\tfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}|.|\sin\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}|$$

$$\leq 2|\sin\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}| \leq ...$$

($|\sin x| \leq |x|$ eşitsizliğini kullanıyoruz.)

$$\leq 2.\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0, \quad (n\to\infty).$$

Sandviç teoreminden, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$.

A.199. $f:(1,\infty)\to\mathbf{R}$ sürekli bir fonksiyon olup her $x,y>1$ için $f(xy) = x.f(y)+y.f(x)$ eşitliğini sağlamaktadır. f fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. Eşitliğin her iki yanını xy ile bölelim:

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}.$$

$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x)$ dersek, $\varphi(xy) = \varphi(x)+\varphi(y)$ olur. Şimdi de bu eşitlikte x yerine e^x, y yerine de e^y koyarsak,

$$\varphi(e^{x+y}) = \varphi(e^x)+\varphi(e^y)$$

elde ederiz. $\varphi(e^t) = \psi(t)$ dersek, sonuncu eşitliği

$$\psi(x+y) = \psi(x)+\psi(y)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu sonuncu ise Cauchy 'nin meşhur fonksiyonel denklemidir ve sürekli fonksiyonlar sınıfında onun çözümünün $\psi(x) = c.x$ olduğu kolayca gösterilebilir. "Geriye dönersek", problemdeki fonksiyonel denklemin çözümünün $f(x) = cx.\ln x$ olduğunu söyleyebiliriz.

A.200. ABC bir eşkenar üçgen ve P, bu üçgenin düzleminde bulunan herhangi bir nokta ise, $|PA|+|PC| \geq |PB|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. $PABC$ dörtgeninde Ptolemy teoreminden

$$|PB|.|AC| \leq |PA|.|CB|+|PC|.|AB|$$

yazılır. Eşitlik, $MABC$ 'nin çembersel olması halinde geçerlidir.

$$|AB| = |BC| = |AC|$$

olduğundan $|PB| \leq |PA|+|PC|$ elde edilir.

Y.196. m ve n 'nin $(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n$ eşitliğini sağlayan tamsayı değerlerini bulunuz.

Çözüm. $m=n=0$ için eşitlik sağlanır. m ve n 'nin başka tamsayı değerlerinde eşitliğin sağlanamayacağını gösterelim.

m ve n 'nin işaretleri farklı olursa, eşitlik sağlanamaz. Genelliği bozmadan $m>0$, $n>0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, Binom formülü kullanılarak,

$$(5+3\sqrt{2})^m = x_m + y_m\sqrt{2},$$

$$(3+5\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$$

olacak biçimde $x_m, y_m, u_n, v_n \in \mathbf{N}$ sayılarının varlığını söyleyebiliriz. Bu sayıların eşit olması için gerek ve yeter koşul, $x_m = u_n$ ve $y_m = v_n$ olmasıdır.

Öte yandan, $x_m = u_n$ ve $y_m = v_n$ olması durumunda

$$(5 - 3\sqrt{2})^m = x_m - y_m\sqrt{2},$$

$$(3 - 5\sqrt{2})^n = u_n - v_n\sqrt{2}$$

eşitliklerinin sağ tarafları birbirinin aynı, fakat sol tarafları farklı olacaktır. Çünkü, $|5 - 3\sqrt{2}| < 1$ ve $|3 - 5\sqrt{2}| > 1$ 'dir.

Çözenler: (*Emrah Kaplan (Kayseri)*).

Y.197. $P(x)$, katsayıları tamsayılar olan bir polinom olmak üzere, belli bir n tamsayısı için $P(-n) < P(n) < n$ eşitsizlikleri sağlanıyor. $P(-n) < -n$ olacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Her tamsayı a ve b $(a \neq b)$ için $P(a) - P(b)$ farkı $(a - b)$ farkına bölünür. Öyleyse, $P(n) - P(-n) > 0$ sayısı $n - (-n) = 2n$ sayısına bölünmelidir. Buradan

$$P(n) - P(-n) \geq 2n \Rightarrow$$

$$P(-n) \leq P(n) - 2n < n - 2n = -n$$

$$\Rightarrow P(-n) < -n$$

sağlanmalıdır.

Y.198. Her biri üçüncü dereceden ve reel katsayılı $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarının her $x \in \mathbf{R}$ için

$$P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$$

eşitsizliklerini sağladığını varsayalım. Bununla beraber, $P(x_0) = R(x_0)$ sağlanacak biçimde bir $x \in \mathbf{R}$ sayısının varlığını düşünelim. Bu takdirde, her $x \in \mathbf{R}$ için

$$Q(x) = \alpha.P(x) + (1 - \alpha)R(x)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\alpha \in [0, 1]$ sabitinin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. Derecesi ≤ 3 olan bir $S(x)$ polinomu her $x \in \mathbf{R}$ için $S(x) \geq 0$ eşitsizliğini ve bir $x_0 \in \mathbf{R}$ noktasında $S(x_0) = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, bu polinom

$$S(x) = a(x - x_0)^2, \quad (a \geq 0)$$

şeklinde olur. Bunu gözönüne alırsak,

$$R(x) - P(x) = a(x - x_0)^2,$$

$$Q(x) - P(x) = b(x - x_0)^2, \quad (0 \leq b \leq a)$$

eşitlikleri sağlanacak biçimde a ve b sabitlerinin varlığını söyleyebiliriz. $a > 0$ varsayabiliriz, çünkü $a = 0$ durumunda ispatı yapılacak bir şey yoktur.

Böylece, $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + b(x - x_0)^2 \\ &= \frac{b}{a}[P(x) + a(x - x_0)^2] + \frac{a-b}{a}P(x) \\ &= \alpha P(x) + (1 - \alpha)R(x) \end{aligned}$$

olur.

Y.199. Her reel $a_1, a_2, ..., a_n$ sayıları için

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geq 0$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_n x^{n-1}$ polinomuna bakalım.

$P^2(x) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j x^{k+j-2}$ ve

$0 \leq \int_0^1 P^2(x)dx = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{a_k a_j}{k+j-1}$.

Y.200. Bir E düzlemi ile düzlemin içinde bir A noktası ve dışında bir B noktası veriliyor. E düzlemi içinde öyle bir C noktası bulunuz ki, $\frac{|AB|+|AC|}{|BC|}$ maksimum olsun.

Çözüm. ABC üçgeninde $A\hat{B}C = \beta$, $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{C}B = \gamma$ olsun. Sinüs teoreminden,

$$|AC| = |AB|.\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad |BC| = |AB|.\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

yazılarak

$$\frac{|AB|+|AC|}{|BC|}=\frac{|AB|+|AB|\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}{|AB|\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}=\frac{\sin\gamma+\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur.

α 'nın sabit olduğunu kabul ettiğimizde, $\beta=\gamma$ için ifade maksimum değerini alır ve $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ olur. $0<\alpha<\pi$ olduğundan α arttıkça $\sin\frac{\alpha}{2}$ de artar. α 'nın en küçük değerinde $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ maksimum olur. Bu AC doğrusu AB doğrusunun izdüşümü iken gerçekleşir. O halde, C noktası, AB 'nin izdüşümü üzerinde ve $|AC|=AB|$ şartını sağlayan noktadır.

Çözenler: (*Emrah Kaplan (Kayseri), Necati Girgin (Denizli)*).

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.