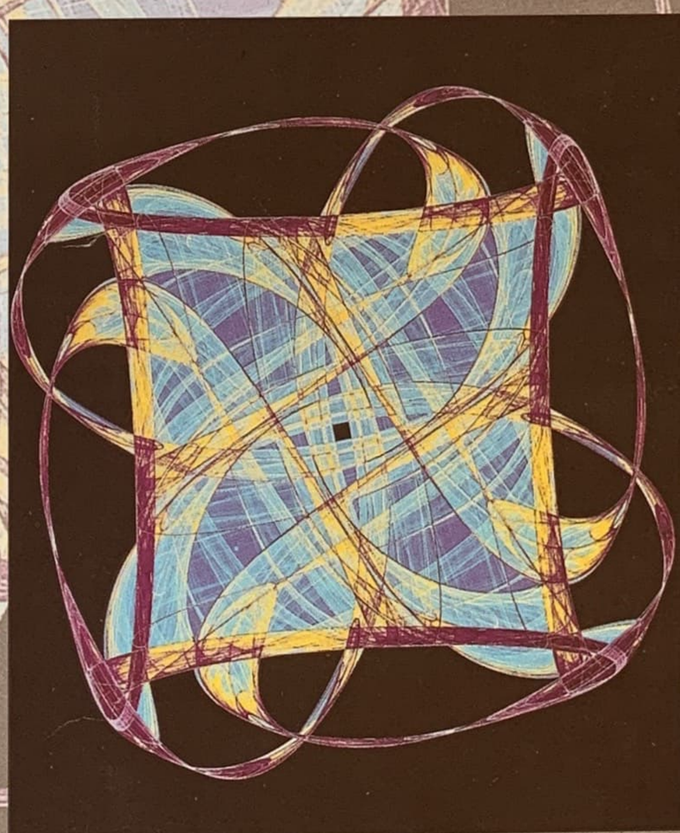
ARALIK 2000 / CİLT: 9 / SAYI: 5

ISSN - 1300-624X

Matematik
D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR



TEŞEKKÜRLER VE AKDENİZ'DEN SONSÖZ

Elinizde tuttuğunuz bu sayıyla birlikte **Matematik Dünyası** dergimizin 9. cildinin son sayısına ulaşmış oluyoruz. Türk Matematik Derneği 'nin bir yayın organı olan dergimizin yayımını 1998, 1999 ve 2000 yılları için Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü üstlenmiş durumdaydı. Üç yılın ardından bu görevi bırakmak istememizdeki en temel nedenler, giderek azalan öğretim elemanı sayımız ve olağan görevlerimizi yaparken karşılaştığımız güçlüklerdir. Şimdi 2001 yılından başlayarak yeni bir ekibin bu yayını sürdürmesi gerekmektedir.

Üç yıl süren bu görevin ardından, derginin yayınlanmasında emeği geçen tüm kişilere burada sizlerin önünde en içten teşekkürlerimizi sunmak isteriz. Her şeyden önce, geçmişte ve günümüzde yayın kurulunu oluşturan

Halil İbrahim Karakaş	**Timur Karaçay**	**İlham Aliyev**
Fikri Gökdal	**Ünal Ufuktepe**	**Güvenç Arslan**
Hüseyin Irmak		

'a katkıları nedeniyle çok borçlu olduğumuzu düşünmekteyiz. Derginin dizgisini yapanlara, derginin iletişim işleriyle ilgilenenlere, derginin çıkışını yapanlara, grafiklerini çizenlere, derginin yaygınlaşması konusunda uğraşanlara, sürdürüm işleriyle ilgilenenlere, basılmış dergilerin sürdürümcülerimize yollanmasına yardımcı olanlara gönül borcumuz vardır. Bu tür görevlerde bulunan ve ada göre abecesel olarak aşağıda sıralanan tüm arkadaşlarımıza, bölüm çalışanlarımıza, araştırma görevlilerimize sizlerin önünde bir kez daha teşekkür ediyoruz:

Demet Cezan	**Fuat Yeniçerioğlu**	**Gültekin Soylu**	**Mehmet Cenkçi**
Melih Eryiğit	**Muhammet Çelik**	**Mustafa Özdemir**	**Mutlu Güloğlu**
Mümin Can	**Nesrin Tutaş**	**Özlem Yılmazhan**	**Ramazan Tınaztepe**
Sevda Sezer	**Simten Uyhan**	**Sinem Sezer**	**Zeynep Güvenç**
M. Uğur Güray			

Dergimiz için yazı hazırlayan tüm yazarlara, ilgili tüm kişilere ve tüm sürdürümcülerimize en içten dileklerimizle çok özel teşekkürlerimizi yolluyoruz. Son dönemde dergimizin dağıtımını ücretsiz üstlenen Yurtiçi Kargo 'nun sahibi Sayın **İbrahim Arıkan** ve ekibine de ayrıca teşekkür ederiz.

Ocak/2001 ayından başlamak üzere, mektupla, telefonla, faksla ya da e-posta adresimizi kullanarak internet üzerinden bölümümüze başvurarak 2001 yılında **Matematik Dünyası** 'nın nerede, hangi koşullarda yayınını sürdüreceğini öğrenebilirsiniz.

Matematik Dünyası olarak, önümüzdeki yıl da yeniden yanıbaşınızda olmamız ve güzellikler dolu yeni bir yıl dileklerimizle hoşça kalınız...

Antalya, Aralık/2000

MATEMATİK DÜNYASI YAZI KURULU adına
Doğan Çoker
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

2000 Dünya Matematik Yılı'nın sonuyla birlikte **Matematik Dünyası** 'nın da 9. cildinin sonuna ulaşmış durumdayız. Türk Matematik Derneği 'nin Başkanı olan *Tosun Terzioğlu* 'nun kaleminden Matematik Yılı ile ilgili bir yazıyı bu sayımızda bulabilirsiniz.

Bu sayıda ayrıca *Mehmet Şahin* 'in geometrik eşitsizliklerle ve *Nurhayat İspir* 'in Pisagor Teoremi ile ilgili çalışmaları yer almaktadır. *Ahmet Çetintaş* 'ın, TÜBİTAK Proje Yarışmasında ödül kazanan "Karakter Toplamları" adlı çalışmasını zevkle okuyacağınızı umuyoruz.

Daha önceden bir kaç kez belirtmiş olduğumuz gibi, bu sayımız aynı zamanda **Matematik Dünyası** 'nın Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından son kez yayınlandğı sayı olmaktadır. Dergimizin arka iç kapağında bu konuyla ilgili ayrıntılı açıklamaları okuyabilirsiniz. ODTÜ, Ankara 'da 6 yıl yayınlandıktan sonra zorunlu olarak verilen 1 yıllık aranın ardından 3 yıl da Akdeniz Üniversitesi, Antalya 'da yayınlanan dergimizin yayın yaşamının sürmesi en içten dileğimizdir. Şu ana dek yayını sürdürecek ekibin ortaya çıkmamasından duyduğumuz kaygı büyük olsa da bu sorunun aşılacağını ve **Matematik Dünyası** 'nın yaşamını sürdüreceğini düşünmekteyiz.

Yeni bir ekibin eliyle **Matematik Dünyası** 'nın bir sonraki sayısında buluşmak üzere yaklaşan 2001 yılınızı en içten dileklerimizle kutluyoruz.

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası
SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU : H. İbrahim Karakaş, Doğan Çoker, Fikri Gökdal, İlham Aliyev, Hüseyin Irmak
DİZGİ : Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2000) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 3.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA
Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@pascal.sci.akdeniz.edu.tr

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Mehmet Şahin
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Tandoğan , 06100-ANKARA

e-posta: sahinm@science.ankara.edu.tr

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde R: çevrel çember yarıçapı, r: içteğet çember yarıçapı, s: yarı çevre, F: alan, a, b, c: üçgenin BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları, h_a, h_b, h_c: üçgenin yükseklikleri, m_a, m_b, m_c: üçgenin kenarortayları, r_a, r_b, r_c: üçgenin dışteğet çemberlerinin yarıçapları, w_a, w_b, w_c: üçgenin iç açıortaylarını gösteriyor.

Teorem 1. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de

$$9.r \le m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt: Eşitsizliğin sol yanı [1], (1.1) 'de gösterilmişti. Diğer yanı kanıtlayalım. $\forall$ x, y, z pozitif reel sayıları için $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$ eşitsizliğini kullanacağız. $p = m_a + m_b + m_c$ diyelim.

$$p^2 = (m_a + m_b + m_c)^2 \le 3\,.(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \tag{1}$$

olur. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4},\ m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4},\ m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

olduğu biliniyor. Bunlar taraf tarafa toplanarak $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ bulunur. Bu (1) 'de yerine yazılırsa $p^2 \le 3.\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ 'dir. [2] (35) 'den

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2 \tag{2}$$

olup $p^2 \le \frac{9}{4}.9R^2 \Rightarrow p \le \frac{9R}{2}$ bulunur. ABC eşkenar üçgen ise, $9r = m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$ 'dir.

Teorem 2. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de

$$3^{n+1}.r^n \le r_a^n + r_b^n + r_c^n \le \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve n = 1 olmasıdır ($n \in N^+$).

Kanıt: $p = r_a^n + r_b^n + r_c^n$ diyelim. $r_a = \frac{F}{s-a}, r_b = \frac{F}{s-b}$ ve $r_c = \frac{F}{s-c}$ olduğundan

$$p = \frac{F^n}{(s-a)^n} + \frac{F^n}{(s-b)^n} + \frac{F^n}{(s-c)^n}$$

ve aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$p \geq 3.F^n.\frac{1}{\sqrt[3]{[(s-a)(s-b)(s-c)]^n}}\,, \qquad (3)$$

$$\frac{s}{3} = \frac{3s-2s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a).(s-b).(s-c)}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(s-a).(s-b).(s-c)}} \geq \frac{3}{s} \qquad (4)$$

olup (4) eşitsizliği (3) 'de kullanılırsa $p \geq 3.F^n.\left(\frac{3}{s}\right)^n$ ve F=r.s olduğundan $p \geq 3.r^n.s^n.\frac{3^n}{s^n} \Rightarrow p \geq 3^{n+1}.r^n$ bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafı için $x = \frac{F}{s-a}$, $y = \frac{F}{s-b}$, $z = \frac{F}{s-c}$ olmak üzere $x^n + y^n + z^n \leq (x+y+z)^n$, $n \in N^+$ $(x, y, z \in R^+)$ eşitsizliğini kullanacağız.

$$p = r_a^n + r_b^n + r_c^n \leq (r_a + r_b + r_c)^n$$

ve $r_a + r_b + r_c = r + 4R$ olup $2r \leq R$ (Euler eşitsizliği) kullanılırsa

$$p \leq (r+4R)^n \leq \left(\frac{R}{2} + 4R\right)^n \Rightarrow p \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

bulunur.

Sonuç 1: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$3^{n+1}.r^n \leq h_a^n + h_b^n + h_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve $n = 1$ olmasıdır $(n \in N^+)$.

Kanıt: Eşitsizliğin sağ yanı $h_a \leq m_a$, $h_b \leq m_b$, $h_c \leq m_c$ eşitsizliğinden açıktır. Sol yanı aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği ve $2F = a.h_a = b.h_b = c.h_c$, $F = r.s$ eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Sonuç 2: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$3^{n+1}.r^n \leq w_a^n + w_b^n + w_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve $n = 1$ olmasıdır $(n \in N^+)$.

Kanıt: Eşitsizliğin sol yanı $h_a \leq w_a$, $h_b \leq w_b$, $h_c \leq w_c$ eşitsizliklerinden açıktır. Sağ yanı ise $w_a \leq m_a$, $w_b \leq m_b$, $w_c \leq m_c$ eşitsizliklerinden ve Teorem 1 'den açıktır.

Problem: Dar açılı bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin AA', BB', CC' yükseklikleri çiziliyor.

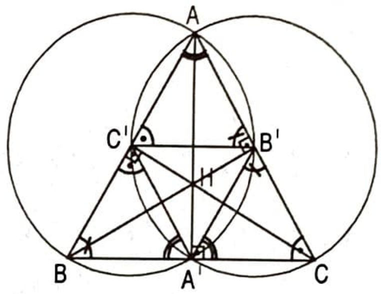
(a) $A'B'C'$ üçgeninin kenar uzunluklarının $a' = a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$ olduğunu gösteriniz.

(b) $\overset{\Delta}{ABC}$ 'nin alanı F, $A'B'C'$ 'nin alanı F_h ise, $\dfrac{F_h}{F} = 2\cos A \cos B \cos C$ olduğunu gösteriniz.

(c) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(a) ABB' ve $AA'B$ dik üçgenleri aynı hipotenüse sahip olduklarından $ABA'B'$ bir kirişler dörtgenidir. Aynı şekilde $ACA'C'$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $m(B\hat{A'}C') = m(B\hat{A}C)$ 'dir.



Şekil 1

Aynı şekilde, $m(C\hat{A'}B') = m(B\hat{A}C)$ olup buradan

$m(B'\hat{A'}C') = 180^0 - 2m(B\hat{A}C)$ 'dir.

Aynı düşünceyle $m(A'\hat{B'}C') = 180^0 - 2m(A\hat{B}C)$ ve

$m(A'\hat{C'}B') = 180^0 - 2m(A\hat{C}B)$ olur.

$|B'C'| = c'$, $|A'C'| = b'$, $|A'B'| = a'$ olmak üzere $A'B'C$ üçgeninde Sinüs Teoremine göre

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{|B'C|}{\sin(B'A'C)}$$

ve $\overset{\Delta}{BB'C}$ 'de $|B'C| = a \,.\, \cos C$ olduğundan

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{a.\cos C}{\sin A} \Rightarrow c' = \frac{a.\sin C.\cos C}{\sin A} \Rightarrow c' = \frac{a.\sin 2C}{2\sin A}.$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'de Sinüs Teoreminden $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ olduğundan $c' = R\,.\,\sin 2C$ bulunur. Benzer şekilde

$$b' = R\,.\,\sin B,\ a' = R\,.\,\sin A \tag{5}$$

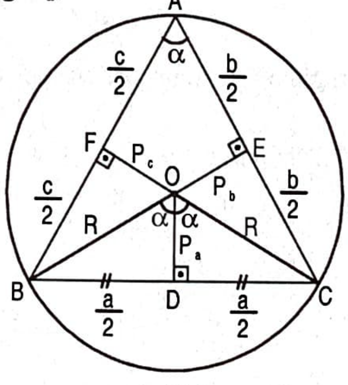
elde edilir.

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'nin çevrel çemberinin merkezi O ve O 'nun [BC] 'ye uzaklığı P_a, [AC] 'ye uzaklığı P_b, [AB] 'ye uzaklığı P_c olsun.

$m(C\hat{O}B) = 2.m(B\hat{A}C)$ olduğundan $\overset{\Delta}{OBC}$ 'de alan bağıntısından

$$m(\overset{\Delta}{OBC}) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha = \frac{a.P_a}{2}$$

'den $R^2 = \sin 2\alpha = a.P_a$ ve $\overset{\Delta}{ODC}$ 'de $\dfrac{P_a}{R} = \cos A$ ve



Şekil 2

$\alpha = \hat{A}$ olduğundan $R^2 . \sin 2A = a . \cos A$ ise, (5) 'de $R . \sin 2A = a . \cos A$ yazılınca, $a' = a . \cos A$ bulunur. Benzer şekilde $b' = b . \cos B$, $c' = c . \cos C$ elde edilir.

(b) $A(A'B'C') = F_h$ idi. $F_h = \dfrac{b'c'.\sin(B'C'A')}{2} = \dfrac{b'.c'.\sin(180^0 - 2A)}{2}$

$$F_h = \frac{b \cos B . c \cos C . \sin 2A}{2}$$

$$= \frac{bc . \cos B . \cos C . 2 \sin A . \cos A}{2}$$

$$F_h = \underbrace{bc \sin A}. \cos A . \cos B . \cos C$$

$$= 2F . \cos A . \cos B . \cos C$$

ve buradan

$$\frac{F_h}{F} = 2 \cos A . \cos B . \cos C$$

bulunur.

Not: $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de Kosinüs Teoreminden

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

olduğundan

$$\frac{F_h}{F} = 2 . \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(2ab)(2ac)(2bc)},$$

$$\frac{F_h}{F} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2} \tag{6}$$

'dir.

(c) Dönüşüm formülleri yardımıyla

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 . \sin\dfrac{A}{2} . \sin\dfrac{B}{2} . \sin\dfrac{C}{2}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $\sin\dfrac{A}{2}$, $\sin\dfrac{B}{2}$ ve $\sin\dfrac{C}{2}$ 'nin kenarlar cinsinden değerlerini bulalım. İki kat formülüne göre

$\cos A = 1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}$ veya $2\sin^2\dfrac{A}{2} = 1 - \cos A$ ve $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ olduğundan

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}.$$

$a+b+c=2s$ olduğundan $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{2(s-b).2(s-c)}{4bc}$ ve $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 'dir.

Benzer şekilde

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad \text{ve} \quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

bulunur. O halde

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}.\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$=1+4.\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \text{ 'dir.}$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $abc=4RF$ ve $F=s.r$ ve $F^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ olduğundan

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\frac{\frac{F^2}{s}}{4RF}=1+\frac{r^2.s^2}{R.F.s^2}=1+\frac{r}{R}$$

bulunur.

Sonuçlar

(a) $A'B'C'$ üçgeninin çevresi $Ç'$ ve $\text{Çevre}(\overset{\Delta}{ABC})=2s$ ise, $Ç'\leq s$ 'dir.

(b) $\text{Alan}(\overset{\Delta}{ABC})=F$, $\text{Alan}(A'B'C')=F'$ ise, $\dfrac{F'}{F}\leq\dfrac{1}{4}$ 'tür.

(c) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\dfrac{3}{2}$ 'dir.

Kanıt: **(a)** Şekil 2 'den

$$A(\overset{\Delta}{ABC})=F=\frac{a.P_a}{2}+\frac{b.P_b}{2}+\frac{c.P_c}{2}=\frac{a.R.\cos A}{2}+\frac{b.R.\cos B}{2}+\frac{c.R.\cos C}{2}$$

$$=\frac{R}{2}.(a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C),$$

$F=\dfrac{R}{2}.(a'+b'+c')$ ve $r.s=\dfrac{R}{2}.(2s')$, $Ç'=2s'=\dfrac{2rs}{R}$ ve $2r\leq R$ olduğundan $Ç'\leq s$ bulunur.

(b) Aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğine göre

$1+\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C\geq 3.\sqrt[3]{\cos A.\cos B.\cos C}$ olup $\cos A.\cos B.\cos C\leq\dfrac{1}{27}\left(1+\dfrac{r}{R}\right)^3$ 'dür.

$2r\leq R$ olduğundan

$$\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C \le \frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ 'dir.}$$

Böylece, $\frac{F'}{F} = 2.\cos A.\cos B.\cos C \le 2.\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ ve $\frac{F'}{F} \le \frac{1}{4}$ bulunur. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni eşkenar üçgen ise $\frac{F'}{F} = \frac{1}{4}$ 'tür.

(c) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ ve $2r \le R$ olduğundan

$$\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ 'dir.}$$

Teorem 3. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde yükseklik ayaklarının oluşturduğu üçgenin (ortik üçgen) alanı F_h, açıortayların karşı kenarları kestiği noktaların birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı F_w, kenarortayların karşı kestiği noktaların birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı F_m ise,

$$\left(\frac{2r}{R}\right)^6 . F_h \le F_w \le F_m \tag{7}$$

'dir. Üçgen eşkenar ise eşitlik vardır.

Çözüm: $A(\overset{\Delta}{ABC}) = F$ ve [3] 'den

$$\frac{F_w}{F} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \tag{8}$$

'dır. (6) 'dan

$$\frac{F_h}{F} = \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}$$

olup son iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa,

$$\frac{F_w}{F_h} = \frac{8a^3b^3c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \tag{9}$$

olur. Aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(b^2+c^2-a^2) + (a^2+c^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2) \ge 3.\sqrt[3]{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

olup düzenlenirse,

$$\frac{1}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \ge \left(\frac{3}{a^2+b^2+c^2}\right)^3$$

olur. [2] (35) 'den $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{1}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \ge \left(\frac{3}{9R^2}\right)^3 = \frac{1}{27R^6} \tag{10}$$

olur. [5] 'den $(b+c)(c+a)(a+b) = 2S(s^2+r^2+2Rr)$ olup [6] 'dan $2S \le 3\sqrt{3}\,R$, $2r \le R$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)} \ge \frac{1}{24\sqrt{3}R^3} \tag{11}$$

elde edilir. (10) ve (11) eşitsizlikleri ve $abc = 4RF$ eşitliği (9) 'da kullanılırsa,

$$\frac{F_w}{F_h} \ge \frac{8.(4RF)^3}{(27R^6)(24\sqrt{3}R^3)} = \frac{2^9.R^3.F^3}{3^4.R^6.2^3.R^3.\sqrt{3}} = \frac{2^6.F^3}{3^4.\sqrt{3}.R^6}$$

$F = r.s$ eşitliği ve [6] 'dan $s^2 \ge 27r^2$ eşitsizliği kullanılırsa,

$\frac{F_w}{F_h} \ge \frac{2^6.r^3.s^3}{3^4.\sqrt{3}.R^6} \ge \frac{2^6.r^3.(3\sqrt{3}r)^3}{3^4.\sqrt{3}.R^6} = \frac{2^6.r^6}{R^6}$, $\frac{F_w}{F_h} \ge \left(\frac{2r}{R}\right)^6$ olup (7) eşitsizliğinin sol yanı kanıtlanmış oldu.

Şimdi sağ yanı kanıtlayalım. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$\frac{F_m}{F} = \frac{1}{4} \tag{12}$$

olduğu açıktır. (8) ve (12) eşitlikleri taraf tarafa oranlanarak,

$$\frac{F_w}{F_m} = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \tag{13}$$

elde edilir. [4] 'ten $8xyz \le (x+y)(y+z)(z+x)$ olup $\frac{F_w}{F_m} \le 1$ ve $F_w \le F_m$ 'dir. Böylece eşitsizliğin kanıtı tamamlanır.

KAYNAKLAR

[1] Mehmet Şahin, Üçgenin elemanları arasındaki bazı eşitlik ve eşitsizlikler II, Matematik Dünyası, Cilt 9, Sayı 1, (2000), 11-15.

[2] Murray S. Klamkin, Asymmetric triangle inequalities, Publications de la Faculté d'Électrotecnique de L'Université á Belgrade, No: 357 – No: 380, (1971), 33-44.

[3] Mehmet Şahin ve İsmail Dedeoğlu, Geometri 1-2-3, (1996), Sayfa 197.

[4] J. F. Rigby, A method of obtaining related triangle inequalities, with applications, Publications de la Faculté d' Électrotechnique de L'Universite á Belgrade, No: 412 – No: 460, (1973), 217-226

[5] Ji Chen, Xue – Zhi Yang, On Zirakzadeh inequality related to two triangles inscribed one in the other, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 4 (1993), 25-27.

[6] O. Bottema et al. , Geometric Inequalities, Groningen, 1969.

PİSAGOR TEOREMİ VE YÜZLERCE İSPATA EKLENEN YENİLERİ

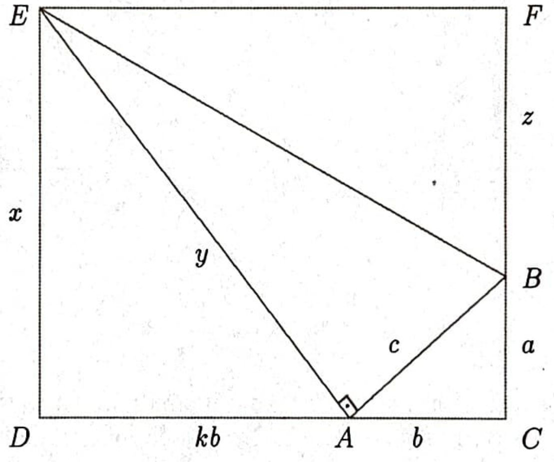
Nurhayat İspir

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100-ANKARA

Bir çoğumuz için, Pisagor Teoremi ile tanışıklığımız geometri kavramlarını ilk öğrendiğimiz yıllarda başlar. Bilindiği gibi, bir dik üçgenin kenarlarının uzunlukları a, b ve hipotenüsünün uzunluğu c ise, bu durumda a, b, c sayıları arasında $a^2+b^2 = c^2$ bağıntısı vardır. Teoremin ispatı, yüzlerce yıldır matematikseverleri meşgul etmiş, yüzlerce farklı ispatı yapılmıştır. Hatta, E. S. Loomis ([5], 1968) Pisagor Teoreminin ispatlarını toplayarak oluşturduğu "The Pythagorean Proposition" isimli kitabında tam **370** farklı ispat olduğunu iddia eder ([5], sayfa 269) ve ispatların henüz son bulmadığını söyler. Günümüzde Pisagor Teoremi ile ilgili çalışmalar ve ispatlar Loomis 'in sözünü doğrular niteliktedir. Bu yazımızda, son zamanlarda L. Hoehn ([4], 1997) tarafından yapılan oldukça yalın ve çekici ispatlardan bazılarını sizlere sunmak istiyoruz.

İlk olarak, Şekil 1 'de gösterilen $EDCF$ dikdörtgenini dikkate alalım. Bu CD kenarı üzerinde bir A noktası ve CF kenarı üzerinde bir B noktasını $E\hat{A}B$ bir dik açı olacak şekilde, işaretleyelim. Elde ettiğimiz ABC dik üçgeninin kenarlarını a, b, c ile gösterelim.

Şekil 1



AD kenarı b 'nin bir k katı olsun. Dikkat edilirse, $\Delta ABC \cong \Delta EAD$ olup,

$$\frac{a}{kb} = \frac{b}{x} = \frac{c}{y}$$

'dir. Buradan,

$$x = \frac{kb^2}{a}, \quad y = \frac{kbc}{a},$$

ve böylece

$$z = x - a = \frac{kb^2 - a^2}{a}$$

elde edilir. $EDCF$ dikdörtgeninin alanı bir taraftan $(kb+b)x$ olarak diğer taraftan EDA, EAB, ABC ve EFB üçgenlerinin alanları toplamı olarak iki farklı şekilde hesaplanabilir. Yani

$EDCF$ dikdörtgeninin alanı $= \Delta EDA$ alanı $+\Delta EAB$ alanı $+\Delta ABC$ alanı $+\Delta EFB$ alanı

veya

$$(kb+b)x = \frac{1}{2}kbx + \frac{1}{2}cy + \frac{1}{2}ba + \frac{1}{2}(kb+b)z$$

'dir. Bu denklemin her iki yanını 2 ile çarpar ve x, y, z 'nin değerlerini yerine yazarsak, sadeleştirme işlemlerinden sonra

$$kb^3 = kbc^2 - ka^2b \quad \text{veya} \quad b^3 = bc^2 - a^2b$$

denklemlerini ya da kısaca

$$b^2 = c^2 - a^2$$

denklemini elde ederiz. Bu durumda Pisagor Teoreminin ispatlarından biri gerçeklenmiş olur.

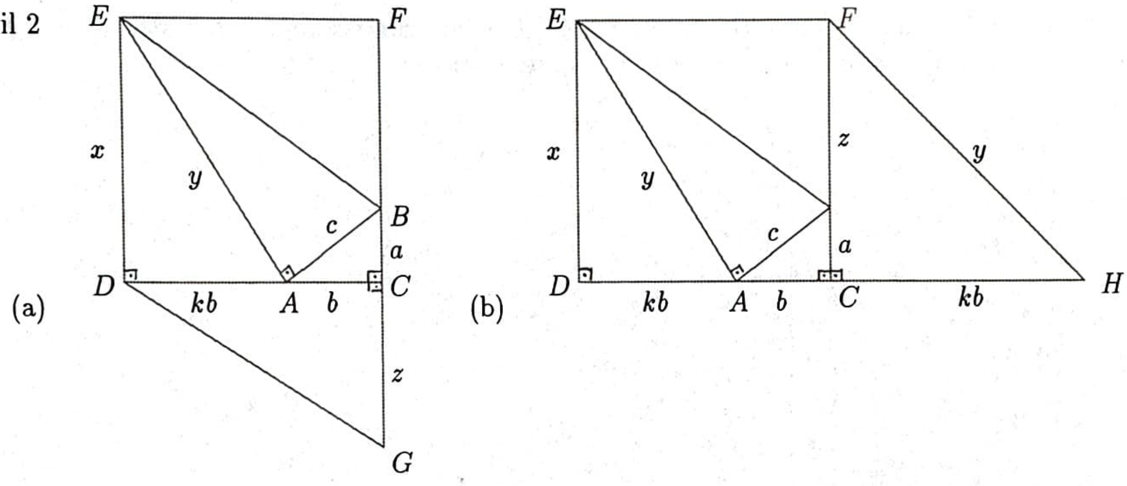
Şimdi Şekil 1 'i biraz değiştirelim. Bunun için EFB üçgenini şekildeki kareden ayıralım ve tekrar DC kenarına ekleyelim (Şekil 2a). Böylece EFB ve DCG benzer üçgenler olup, $EDGB$ paralelkenarının alanı farklı iki biçimde aynı $CDEF$ dikdörtgeninde olduğu gibi hesaplanabilir ve yine

$$b^2 = c^2 - a^2$$

bulunur.

Benzer biçimde Şekil 1 yeniden değiştirilerek farklı bir paralelkenar elde edilebilir. Bunun için Şekil 1 'deki dikdörtgenden EDA üçgenini çıkarıp CF kenarına ekleyelim (Şekil 2b). Burada $\Delta EDA \cong \Delta FCH$ olup $HAEF$ paralelkenarının hesabı bize yine Pisagor Teoreminin bir diğer ispatını verir.

Şekil 2



Aslında Şekil 1 'de EFB üçgenini kaldırdığımızda elde edilen $EDCB$ yamuğunun (Şekil 3a) alanı hesaplanarak da Pisagor Teoremi ispatlanabilir. Gerçekten, çıkarılan EFB üçgenin alanı

$$\frac{1}{2}(kb + b)\left(\frac{kb^2 - a^2}{a}\right)$$

olduğundan bu miktar Şekil 1 'deki dikdörtgenin alanı için verilen ilk denklemin her iki yanından çıkarılabilir. Gerekli sadeleştirme işlemleri yapıldığında aşinası olduğumuz $c^2 = a^2 + b^2$ denklemi elde edilir.

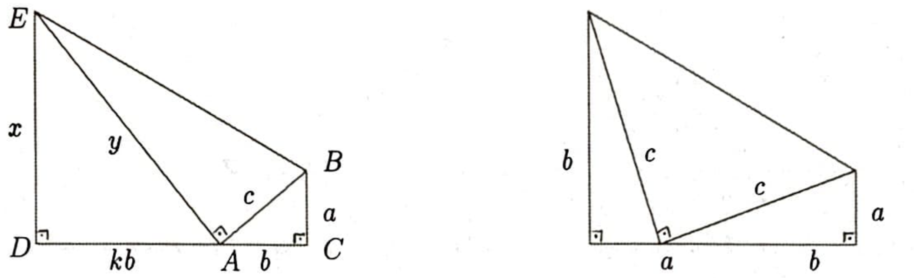
Dikkat edersek bu sonuçlar k 'nın genel bir değeri için sağlanmaktadır. Bununla birlikte, pek çok kayda değer ispat k 'nın özel değerleri için ele alınmıştır. Bu noktada, Başkan James Abram Garfield'ın ispatından bahsetmeden geçemeyeceğiz [2]. Başkan J. A. Garfield, Pisagor Teoreminin ispatı ile uğraşan yüzlerce amatörden biridir. Ne yazık ki, 1881 'de Amerika başkanı seçildikten dört ay sonra iş isteğini geri çevirdiği bir kişi tarafından Washington, D.C. tren istasyonunda vurulmuştur.

Eğer $k = a/b$ alınırsa, bu durumda Şekil 3a Başkan Garfield 'in ispatına indirgenir (Şekil 3b). Açık olarak, $kb = a$ olması durumunda

$$x = \frac{kb^2}{a} = b \quad \text{ve} \quad y = \frac{kbc}{a} = c$$

olup Şekil 3b 'deki yamuğun alanı, üçgenlerin alanları toplamı olduğundan $\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2}$ eşitliği $a^2 + b^2 = c^2$ sonucunu verir.

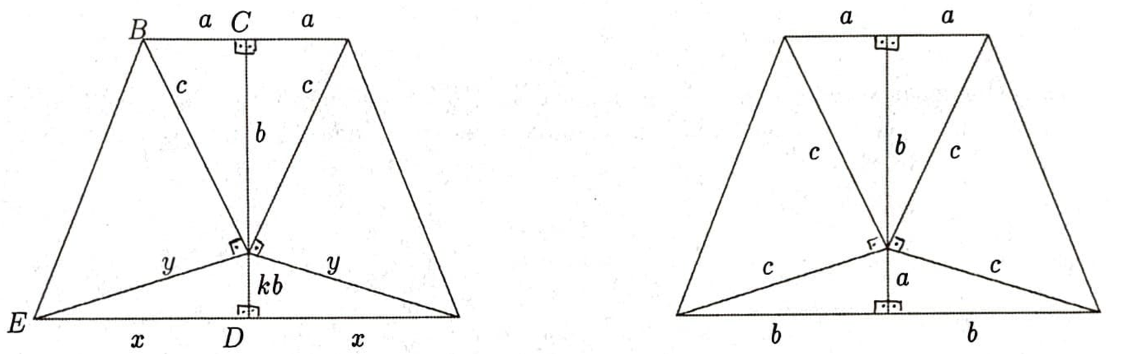
Şekil 3



(a) Garfield 'in ispatının genelleştirilmesi (b) Başkan Garfield 'in ispatı

Şekil 3a 'daki $EDCB$ yamuğu ve kopyası bir ikiz kenar yamuk (Şekil 4a) verecek şekilde düzenlenirse, bir lise öğrencisi olan Jamie deLemos [1] 'un 1995 yılında yapmış olduğu ispatın (Şekil 4b) bir genelleştirilmesi elde edilir.

Şekil 4



(a) deLemos 'un ispatının genelleştirmesi (b) deLemos 'un ispatı: $k = \frac{a}{b}$

Eğer $k = a/(c-a)$ alınırsa, Şekil 1 'deki dikdörtgen Şekil 5a 'da gösterilen dikdörtgene indirgenir. Burada $\Delta EAB \cong \Delta EFB$ 'dir ve

$$x = \frac{kb^2}{a} = \frac{a}{c-a}\frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{c-a}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, dikdörtgenin karşılıklı kenarları dikkate alındığında $x = c + a$ eşitliğinden

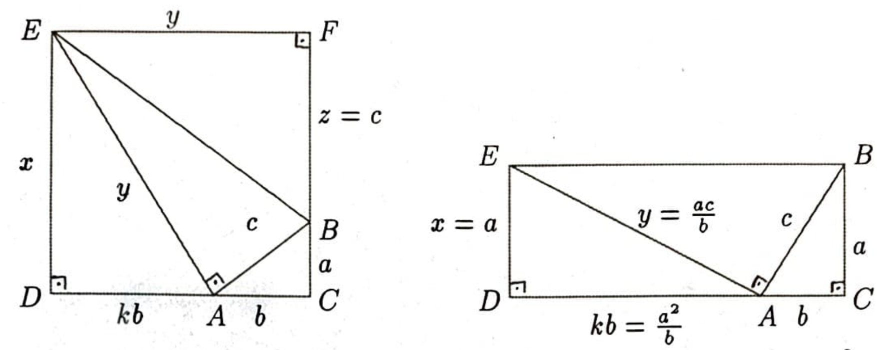
$$\frac{b^2}{c-a} = c + a$$

ve böylece

$$b^2 = c^2 - a^2$$

sonucu bulunur. Bu ispat ise Hoehn 'nin 1995 'de yaptığı ispatla eşdeğerdir [5].

Şekil 5



(a) Hoehn 'nin ispatı: $k = \frac{a}{c-a}$ (b) Dikdörtgensel ispat: $k = \frac{a^2}{b^2}$

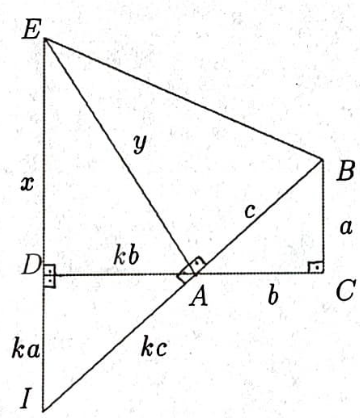
Eğer $k = a^2/b^2$ alınırsa Şekil 3a 'daki $EDCB$ yamuğu, Şekil 5b 'de gösterilen $EDCB$ dikdörtgenine indirgenir. Bu halde

$$x = \frac{kb^2}{a} = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{a^2} = a, \quad y = \frac{kbc}{a} = \frac{a^2}{b^2}\frac{bc}{a} = \frac{ac}{b} \quad \text{ve} \quad kb = \frac{a^2}{b^2}b = \frac{a^2}{b}$$

'dir.

Başka bir ispat vermek amacı ile Şekil 3a 'daki $EDCB$ yamuğu biraz daha değiştirilebilir. Bunun için BA kenarı ile ED kenarı bir I noktasında birleştirildiğinde ABC üçgeni ile benzer olan bir AID üçgeni elde edilir (Şekil 6):

Şekil 6



EIB üçgeninin alanı iki farklı şekilde, yani

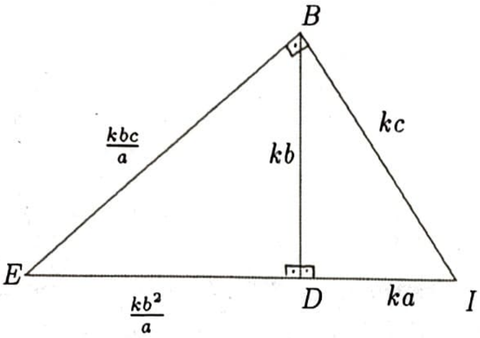
$$\Delta EIB \text{ 'nin alanı} = \Delta EIA \text{ 'nın alanı} + \Delta EAB \text{ 'nin alanı}$$

denklemi ile hesaplanabilir. $x = kb^2/a$, $y = kbc/a$ olduğu gözönüne alınırsa,

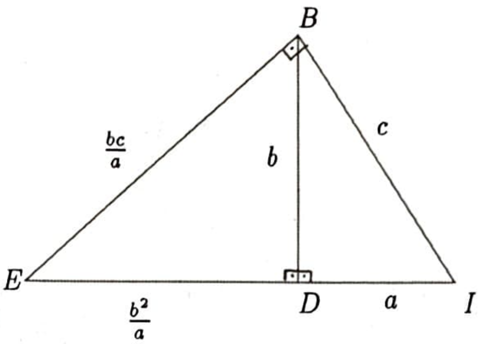
$$\frac{1}{2}(kc+c)\left(\frac{kbc}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{kb^2}{a} + ka\right)kb + \frac{1}{2}\left(\frac{kbc}{a}\right)c$$

denklemi bulunur. Gerekli sadeleştirme işlemleri sonucunda bildiğimiz $c^2 = b^2 + a^2$ denklemine ulaşırız. Dikkat edilirse, ispat sırasında ABC üçgenine gerek duyulmadı. Aslında EAB üçgenine de gerek yoktur. O halde Şekil 6, Şekil 7a 'ya indirgenebilir. Fakat Şekil 7a 'da görülen k çarpanı keyfi bir sayıdır. Bu nedenle Şekil 7a, Şekil 7b 'ye benzer olan herhangi bir şekle indirgenebilir.

Şekil 7



(a)



(b)

Açık olarak, Şekil 7b 'deki EIB üçgeninin alanı

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a}+a\right)b=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)c$$

olup, bu denklem $c^2 = b^2 + a^2$ denklemidir. Böylece Pisagor teoreminin ispatı için Şekil 7b en genel örneği sergiler.

Sonuç olarak,

1. Bütün ispatlar bir anlamda Şekil 7b 'ye indirgendiğinden bu makale bir tek ispat mı içermektedir?

2. Diğer taraftan, 1, 2a, 2b, 3a, 4a ve 6 şekilleri k 'nın genel değerlerini içerdiğinden ve k keyfi bir reel sayı olarak kabul edildiğinden, bu şekiller Pisagor Teoreminin farklı sonsuz sayıda ispatlarının bir dizisini mi gösterir?

Ne dersiniz, henüz son noktanın konmadığı yüzlerce ispat matematiksel düşüncenin zengin havuzunda ilginç yorumları ile bizleri mi bekliyor?

KAYNAKLAR

[1] J. deLemos, "Reader Reflections. The Pythagorean Theorem" Mathematics Teacher 88 (January, 1995), 79.

[2] M. Graham, "Events in the History of American Mathematics: President Garfield and the Pythagorian Theorem" Math. Teacher 69 (December 1976), 686-687.

[3] L. Hoehn, "A New Proof of the Pythagorean Theorem" Math. Teacher 88 (February 1995): 168.

[4] L. Hoehn, "The Pythagorean Theorem: An Infinite Number of Proofs?" Math. Teacher, Vol. 90, No. 6, (September 1997), 438-441.

[5] E. S. Loomis, "The Pythagorean Proposition" Washington, D.C.: National Council of Mathematics, 1968.

KARAKTER TOPLAMLARI

Ahmet Çetintaş
Bilkent Üniversitesi, 06531-ANKARA

$f(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom ve p tek asal sayı olmak üzere; $\sum_{x=1}^{p}(\frac{f(x)}{p})$ ifadesine karakter toplamı denir ($(\frac{f(x)}{p})$: Legendre sembolüdür). Bu projede ise günümüz sayılar teorisinin popüler bir konusu olan sınırlı bir kümede tanımlanmış denklemlerin özel bir hali, "$f(x) \equiv y^2 \pmod p$" denkleminin p modülündeki çözüm sayısı ele alınmıştır. Polinomların karakter toplamları hesaplanarak çözüm yoluna gidilmiştir. Polinom $ax+b$ şeklinde iken çözüm kolay oluyor, ama derece artınca işler karışıyor. Amacımız polinomun derecesi 1 veya 2 iken genellemeler getirmek, 3 iken ise özel durumlarda çözüm yolları üretmektir. Nitekim sayılar teorisi, konu hakkındaki çalışmalarda polinomun derecesinin 3 'ten büyük olduğu durumlara genellemeler getirememiş, sadece sınırlar koyabilmiştir. Sonuç olarak projede üretilen genellemelerin kullanışlı olduğu görülmüş ve uygulamaları yapılmıştır.

GİRİŞ

"f tamsayı katsayılı bir polinom ve p tek asal sayı olmak üzere $f(x) \equiv y^2 \pmod p$ denkleminin, $1 \leq x, y \leq p$ tamsayı çözümlerinin sayısı kaçtır?" sorusuna bir çok kaynakta rastlanılabilir. Polinomun derecesi 3 'ten büyük iken günümüz matematiği kesin sonuçlara ulaşamamış, sadece sınırlar koyabilmiştir. Projede de polinomun derecesi 1, 2 ve 3 iken incelenmiş ve karakter toplamları hesaplanarak çözme yoluna gidilmiştir.

7. Ulusal Matematik Olimpiyatları İkinci Aşama Sınavı'nda konu ile alakalı bir soru çıkmış olup, bu soru projenin esin kaynağını oluşturmuştur.

AMAÇ: f, 1., 2. veya 3. dereceden tamsayı katsayılı bir polinom ve p bir tek asal sayı olmak üzere $f(x) \equiv y^2 \pmod p$ denkliğinin $0 \leq x, y \leq p-1$ çözüm sayılarını bulmada karakter toplamlarını hesaplayarak genellemeler getirmek ve bu genellemeleri kullanarak konu hakkındaki sorulara kolay çözümler üretmektir.

KULLANILAN TEOREM VE SEMBOLLER

(1*) **Euler Kriteri:** p bir asal sayı, $d = (n, p-1)$ ve $a \equiv 0 \pmod p$ olsun. $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod p$ ancak ve ancak $x^n \equiv a \pmod p$ denkliği çözülebilir. Eğer çözülebiliyorsa, d tane farklı çözümü vardır.

(2*) $a \equiv 0 \pmod p$ iken $a \equiv x^2 \pmod p$ denkleminin çözümü varsa, a 'ya p modülünde kuadratik rezidü, çözüm yoksa kuadratik nonrezidü denir.

(3*) **Legendre Sembolü:** $p > 2$ asal sayıları için $(\frac{a}{p})$ ifadesine Legendre sembolü denir:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & a,\ p \text{ modülünde kuadratik rezidü ise,} \\ -1; & a,\ p \text{ modülünde kuadratik nonrezidü ise,} \\ 0; & a \equiv 0 \pmod p \text{ ise.} \end{array} \right\}$$

(4*) $x^2 \equiv a \pmod p$ ifadesinin çözüm sayısına N_p dersek, $N_p = 1 + (\frac{a}{p})$ olduğu görülür.

(5*) Euler kriterinden yola çıkarak $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{a}{p}) \pmod p$ diyebiliriz.

İspat:

$a \equiv 0 \pmod p \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \equiv (\frac{a}{p}) \pmod p$.

$a \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow a^{p-1} - 1 \equiv (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod p$.

Buna göre $a^{\frac{p-1}{2}}$ ifadesi ya 1 ya da -1 'e denktir. Eğer $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ ise, $x^2 \equiv a \pmod p$ denklemi çözülebilirdir (Euler kriteri). Böylece $(\frac{a}{p}) = 1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ 'dir. Diğer yandan, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (mod p) ise, $x^2 \equiv a \pmod p$ denklemi çözülemez (Euler kriteri), bu nedenle $(\frac{a}{p}) = -1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}}$ olmalıdır.

(6*) **Teorem (Lagrange):** $f(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom iken $f(x) \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin çözüm sayısı polinomun derecesini aşmaz.

YÖNTEM

(A) $ax + b \equiv y^2 \pmod p$ Şeklindeki Denklemlerin Çözüm Sayısı (a, b tamsayı, p tek asal sayı)

Konunun en kolay kısmı bu kısımdır. Çözüm sayısına M_p dersek,

$$M_p = \sum_{x=1}^{p}(1 + (\frac{ax+b}{p}))$$

olacağı açıktır (bak. 4*). Böylece

$M_p = p + \sum_{x=1}^{p}(\frac{ax+b}{p})$ $\quad$ ($\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax+b}{p})$ toplamını hesaplamamız sorunu çözer.)

$a \equiv 0 \pmod p$ ise,

$$S = \{ax + b : x \text{ tamsayı ve } 1 \leq x \leq p\}$$

kümesini tanımlayalım ve bu kümenin p modunda tam kalanlar sistemi olduğunu ispatlayalım. $ax + b \equiv ay + b \pmod p \Rightarrow x \equiv y \pmod p$ olacağı açıktır. Buna göre S kümesinin p tane elemanı p modülünde p farklı değer alacaktır. Böylece S, p modülünde bir tam kalanlar sistemi olacaktır.

$$\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax+b}{p}) = \sum_{z=1}^{p}(\frac{z}{p}).$$

Lemma 1: p modülünde n. dereceden rezidülerin sayısı $\frac{p-1}{(p-1,n)}$ 'dir.

İspat: Euler kriterine göre (bak. 1*), $a \equiv 0 \pmod p \Rightarrow x^n \equiv a \pmod p$ denkleminin çözüm sayısı $(p-1, n) = d$ 'dir. Buna göre çözüm tam olarak $\frac{p-1}{d}$ tane a için olabilir. Böylece n. dereceden rezidülerin sayısı $\frac{p-1}{d}$ olur. Böylece lemmanın ispatı bitmiş olur.

$n = 2$ için $(2, p-1) = 2$ olduğundan, p modülünde 2. dereceden, yani kuadratik rezidülerin sayısı $\frac{p-1}{2}$ tanedir. Böylece kuadratik nonrezidülerin sayısı da $\frac{p-1}{2}$ tane olacaktır.

$$\sum_{z=1}^{p}(\frac{z}{p}) = (\frac{p}{p}) + \sum_{z=1}^{p-1}(\frac{z}{p}) = 0 + 1.\frac{p-1}{2} + (-1).\frac{p-1}{2} = 0.$$

Karakter toplamının değeri 0 olarak bulundu. $M_p = p + \sum_{x=1}^{p}(\frac{ax+b}{p}) = p$ olacaktır.

Çıkmış bir soru üzerinde yöntemin uygulamasını yapalım.

SORU: (16. Balkan Matematik Olimpiyadı, Makedonya, 1999) $p > 2$ bir asal sayı ve $p \equiv 2 \pmod 3$ olmak üzere,

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 : x, y \text{ tamsayı}, \ 0 \le x, y \le p-1\}$$

kümesi tanımlansın. S kümesinin p ile bölünebilen elemanları sayısının en fazla $p-1$ olacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM: $T = \{x^3 : x \text{ tamsayı } , 0 \le x \le p-1\}$ olsun. T kümesinin p modülünde tam kalan sistemi olduğunu gösterelim. Lemma 1 'den, $p = 3m+2$ iken 3. dereceden rezidülerin sayısı $\frac{p-1}{(3,3m+1)} = p-1$ olacaktır. Buna göre T kümesi p modülünde p farklı değer alacaktır. Böylece T, p modülünde bir tam kalan sistemi olur.

$p \mid y^2 - x^3 - 1 \Rightarrow y^2 \equiv x^3 + 1 \pmod p$, $x^3 \equiv z \pmod p$ yazalım. $y^2 \equiv z + 1 \pmod p$ denkleminin tam olarak p tane $(0 \le y, z \le p-1)$ tane çözümü olacaktır (A bölümündeki sonuçtan). Buna göre S kümesinde p ile bölünebilen elemanların sayısına $S(p)$ dersek, $S(p) \le p$ olacaktır. Ayrıca $(x,y) = (0,1)$ ve $(x,y) = (2,3)$ olduğu durumlarda $y^2 - x^3 - 1 = 0$ oluyor. Bu iki durum birbirine denk ve $p \mid y^2 - x^3 - 1$ olduğu durumlar olduğu için $S(p) \le p-1$ olmak zorundadır.

(B) $ax^2 + bx + c \equiv y^2 \pmod p$ Şeklindeki Denklemlerin Çözüm Sayısı

$a, b, c \in \mathbf{Z}$, p tek asal sayı, $a \equiv 0 \pmod p$ iken $ax^2 + bx + c \equiv y^2 \pmod p$ denkleminin çözüm sayısına Q_p diyelim:

$$Q_p = \sum_{x=1}^{p} [(\frac{ax^2+bx+c}{p}) + 1] = p + \sum_{x=1}^{p} (\frac{ax^2+bx+c}{p})$$

olacaktır. Burada da $\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax^2+bx+c}{p})$ karakter toplamını hesaplamamız soruyu çözecektir. Öncelikle şuna dikkat edelim:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Şimdi iki durumu ayrı ayrı inceleyelim: (i) $p \mid b^2 - 4ac$, (ii) $p \nmid b^2 - 4ac$:

(i) $p \mid b^2 - 4ac$ olsun.

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \equiv a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pmod p .$$

Lemma 2: $(\frac{a.b}{p}) = (\frac{a}{p}).(\frac{b}{p})$.

İspat: $(\frac{a.b}{p}) \equiv (a.b)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (a)^{\frac{p-1}{2}}.(b)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{a}{p}).(\frac{b}{p}) \pmod p$. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

$\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax^2+bx+c}{p}) = \sum_{x=1}^{p}(\frac{a.(x+\frac{b}{2a})^2}{p}) = \sum_{x=1}^{p}(\frac{a}{p}).(\frac{(x+\frac{b}{2a})^2}{p})$ [Lemma 2 'den]

$= (\frac{a}{p}).\sum_{x=1}^{p}(\frac{(x+\frac{b}{2a})^2}{p})$.

$\sum_{x=1}^{p}(\frac{(x+\frac{b}{2a})^2}{p}) = \sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2}{p})$ olacağı açıktır. $\sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2}{p}) = (p-1).1 + 0 = p-1$ olup

$$\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax^2+bx+c}{p}) = (\frac{a}{p}).(p-1)$$

olarak sonuca varılır.

(ii) $p \not| \, b^2-4ac$ olsun. $d_1 = \frac{b}{2a}$, $d = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ olmak üzere,

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a((x+d_1)^2+d)$$

bulunur ve

$$\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{ax^2+bx+c}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p}\left(\frac{a((x+d_1)^2+d)}{p}\right) = \sum_{z=1}^{p}\left(\frac{a(z^2+d)}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right).\sum_{z=1}^{p}\left(\frac{z^2+d}{p}\right)$$

çıkar.

Lemma 3: $1 \le k \le p-2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{p-1} n^k \equiv 0 \pmod{p}$.

İspat: u, p modülünde ilkel kök olmak üzere $k \neq 0$ ve $k \neq p-1$ ise,

$$\sum_{n=1}^{p-1} n^k = \sum_{s=1}^{p-1}(u^s)^k = \sum_{s=1}^{p-1}(u^k)^s = \frac{u^{k.(p-1)}-1}{u-1}.u \equiv 0 \pmod{p}$$

bulunur.

$$\sum_{z=1}^{p}\left(\frac{z^2+d}{p}\right) \equiv \sum_{z=1}^{p}(z^2+d)^{\frac{(p-1)}{2}} \pmod{p}\ .$$

$(z^2+d)^{\frac{(p-1)}{2}}$ ifadesi binom açılımı ile yazıldığında terimlerin kuvvetlerine bakarsak, z^{p-1} teriminden başka, kuvveti $p-1$ 'den büyük ya da eşit olan hiç bir terim yoktur. Ayrıca bu ifadelerin $z = 1, 2, \ldots, p$ için ayrı ayrı binom açılımlarını yazıp toplayalım, aynı binom katsayısına sahip olanları paranteze aldığımızda bu katsayıya $\sum_{z=1}^{p} z^k$ $(1 \le k \le p-2)$ şeklinde bir çarpan gelecektir ki Lemma 3 'deki ispatımızdan, bu ifadelerin hepsi p ile bölünür. Dolayısıyla

$$\sum_{z=1}^{p}(z^2+d)^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv \sum_{z=1}^{p} z^{p-1} + 0 \equiv p-1 \pmod{p}\ .$$

Böylece $\sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2+d}{p}) \equiv p-1 \pmod{p}$ olduğunu bulduk. $-p \le \sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2+d}{p}) \le p$ olacağı açıktır (Legendre sembolü). Bu aralıkta alınabilecek değerler -1 ve $p-1$ 'dir. $\sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2+d}{p}) = p-1$ olması için gerek ve yeter koşul $(\frac{z^2+d}{p})$ ifadelerinden yalnız bir tanesinin 0 'a eşit olması ve geri kalan $p-1$ tanenin ise 1 'e eşit olmasıdır. $z^2+d \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (p-z)^2+d \equiv 0 \pmod{p}$ olmak zorundadır. ($d \not\equiv 0 \pmod{p}$ olduğu için $z \not\equiv 0 \pmod{p}$ olur.) Buna göre $(\frac{z^2+d}{p})$ ifadelerinden ya hiç biri 0 'a eşit değildir ya da en az 2 tanesi 0 'a eşit olacaktır. Böylece çelişki elde etmiş olduk.

Dolayısıyla

$\sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2+d}{p}) = -1$,

$\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax^2+bx+c}{p}) = (\frac{a}{p}).\sum_{z=1}^{p}(\frac{z^2+d}{p}) = -(\frac{a}{p})$,

$Q_p = p + \sum_{x=1}^{p}(\frac{ax^2+bx+c}{p}) = p - (\frac{a}{p})$.

Sonuç olarak,

$$Q_p = \left\{ \begin{array}{ll} p + (\frac{a}{p})(p-1); & p \mid b^2 - 4ac \text{ ise} \\ p - (\frac{a}{p}); & p \nmid b^2 - 4ac \text{ ise} \end{array} \right\}$$

çıkar. Böylece genel bir ifade bulmuş olduk. Şimdi bu yöntemi uygulamalarda kullanalım:

SORU: (1991 IMO 'ya Polonya tarafından önerilmiştir) $a, b, c \in \mathbf{Z}$ ve p tek asal sayı olmak üzere, eğer $f(x) = ax^2 + bx + c$, $2p-1$ tane ardışık x tamsayı değerinde tamkare oluyorsa, $p \mid b^2 - 4ac$ olduğunu gösteriniz.

Soruyu $p > 3$ için çözeceğiz. Çözümü görünce gerçekten çok kolay bir soruymuş diyebilirsiniz. Ama bu yöntem kullanılmadan verilen çözüm uzun ve akla gelmesi zor bir çözümdür.

ÇÖZÜM: $f(x)$ polinomunu p modülünde inceleyelim. $f(x)$, x 'in $2p-1$ ardışık tamsayı değerinde tamkare oluyormuş. Bu x 'lerden öyle p tanesini alalım ki bunlar ardışık p tane tamsayı olsun. Bu durumda $f(x) \equiv y^2 \pmod p$ denkleminin çözüm sayısı en az p olacaktır, çünkü p tane ardışık x değeri p modülünde bir tam kalan sistemi oluşturacaktır. Böylece x 'in her bir değeri için en az bir tane çözüm çıktığından en az p tane çözüme ulaşılacaktır.

Lagrange Teoremine göre (bak. 6*), $f(x) \equiv 0 \pmod p$ 'nin çözüm sayısı en fazla polinomun derecesi kadardır. Buna göre $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ denkleminin en fazla 2 çözümü vardır.

$f(x) \equiv y^2 \pmod p$ ifadesinde her $x \in \{1, 2, ..., p\}$ için en az bir tane y değeri bulabiliyorduk. $y \not\equiv 0 \pmod p$ olursa en az iki çözüm bulabiliriz: (x, y) ve $(x, -y)$. Buna göre $f(x) \equiv y^2 \pmod p$ ifadesinin en az $2p-2$ tane çözümü vardır. Şimdi bulduğumuz yöntemi burada kullanalım. $f(x) \equiv y^2 \pmod p$ denkleminin çözüm sayısı Q_p ise,

$$Q_p = \left\{ \begin{array}{ll} p + (\frac{a}{p})(p-1); & p \mid b^2 - 4ac \text{ ise} \\ p - (\frac{a}{p}); & p \nmid b^2 - 4ac \text{ ise} \end{array} \right\} \qquad (**)$$

bulunur. Bizim polinomumuzun en az $2p-2$ tane çözümü vardı. $p > 3$ olduğu için $2p - 2 > p + 1 \geq p - (\frac{a}{p})$ dolayısıyla, $p \nmid b^2 - 4ac$ olamaz. O halde $p \mid b^2 - 4ac$ olmalıdır.

SORU: (7. Ulusal Matematik Olimpiyadı Birinci Soru) $0 \leq x, y, z, w < 37$ olmak üzere $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$ denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM: Görüldüğü gibi $p = 37$ bir asal sayıdır. $t = 0, 1, 2, ..., p-1$ olmak üzere $x^2 + y^2 \equiv t \pmod p$ denkliğinin çözüm sayısına a_t, $z^3 + w^3 \equiv t \pmod p$ denkliğinin çözüm sayısına da b_t diyelim. Sonucun $\sum_{k=0}^{p-1}(a_k.b_k)$ olacağı açıktır.

a_0 'ı hesaplayalım. $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow y^2 \equiv -x^2 \pmod p$. $(**)$ eşitliğini hatırlarsak, $a_0 = (\frac{-1}{p}).(p-1) + p$ olduğu görülür. $p = 37 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow (\frac{-1}{37}) = 1$, böylece $a_0 = p - 1 + p = 2p - 1 = 2.37 - 1 = 73$.

Şimdi $t = 1, 2, ..., p-1$ için a_t 'yi hesaplayalım: $x^2 + y^2 \equiv t \pmod p \Rightarrow y^2 \equiv t - x^2 \pmod p$. Yine $(**)$ eşitliğini hatırlarsak, her $t \in \{1, 2, ..., p-2\}$ için $a_t = p - (\frac{-1}{p}) = 37 - 1 = 36$ 'dır.

b_0 'ı hesaplayalım: $x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod p$ olup $x \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$ olacaktır. Bu bir çözümdür.

$x \not\equiv 0$ ve $y \not\equiv 0$ iken $x = y.s$ olacak şekilde $s \in \{1, 2, ..., p-1\}$ alalım. Bu durumda $x^3 + y^3 = x^3 + s^3x^3 \equiv x^3.(s^3 + 1) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow s^3 + 1 \equiv 0 \pmod p$, $s^3 \equiv -1 \pmod p$ olmalıdır. Bu şartı sağlayan s 'lerin sayısının 3 olduğunu Lagrange Teoreminden söyleyebiliriz. Buna göre her $x \in \{1, 2, ..., p-1\}$ için 3 tane y değeri bulabiliyoruz, öyle ki $x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod p$ 'dir. Buna göre $p-1$ tane x için $3(p-1)$ tane çözüm ikilisi buluyoruz. Bir de $(x, y) = (0, 0)$ çözümü vardı. Böylece $b_0 = 3p - 2 = 3.37 - 2 = 109$ bulunur.

$\sum_{n=1}^{p-1} b_n = p^2$ 'dir. Herhangi bir (x,y) ikilisi bu toplamda tam olarak bir defa sayılacak ve böylece toplam, (x,y) ikililerinin sayısına eşit olacaktır. (x,y) ikililerinin sayısının p^2 tane olduğu açıktır.

Şimdi başa dönelim ve $\sum_{k=0}^{p-1} a_k.b_k$ toplamını hesaplayalım:

$\sum_{k=0}^{p-1} a_k.b_k = a_0.b_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k.b_k = a_0.b_0 + (p-1).\sum_{k=1}^{p-1} b_k$

$= 73.109 + 36.(\sum_{k=1}^{p} b_k - b_0)$

$= 73.109 + 36.(p^2 - 3p + 2) = 73.109 + 36.35.36 = 53317$.

Şimdi de sözkonusu yöntemi daha zor bir soruda kullanacağız:

SORU: $p > 3$ asal sayı ve $a \equiv 0 \pmod p$. İspatlayınız ki, $x^3 + ax \equiv y \pmod p$ denkliği y 'nin $p - \frac{1}{3}(p - (\frac{-3}{p}))$ değeri için çözülebilir $(y = 0, 1, ..., p-1)$.

ÇÖZÜM: $x^3 + ax \equiv t \pmod p$ ifadesinin çözüm sayısının en fazla 3 olacağını Lagrange Teoreminden (bak. 6*) söyleyebiliriz. $x^3 + ax \equiv y^3 + ay \pmod p$ denkliğinin çözüm sayısına bakalım: $x^3 - y^3 + a(x-y) = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + a) \equiv 0 \pmod p$. $x^2 + xy + y^2 + a \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin çözüm sayısını hesaplayalım. Eğer bu denklikte de $x = y$ çözümleri geliyorsa onları da sayacağız. Bu ikililerin sayısı T_p olsun. Sabit bir x değeri için $x = c$ diyelim:

$c^2 + cy + y^2 + a = (c + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + a \equiv 0 \pmod p$,

$(c + \frac{y}{2})^2 \equiv \frac{-3y^2}{4} - a \pmod p$.

Buna göre bu şekildeki (c,y) ikililerinin sayısı $1 + (\frac{-(\frac{3y^2}{4}+a)}{p})$ 'dir. Böylece bütün ikililerin sayısı da

$$\sum_{y=0}^{p-1}[1 + (\frac{-(\frac{3y^2}{4}+a)}{p})] = p + \sum_{y=0}^{p-1}(\frac{-(\frac{3y^2}{4}+a)}{p})$$

$$\sum_{y=0}^{p-1}(\frac{-(\frac{3y^2+4a}{4})}{p}) = \sum_{y=0}^{p-1}(\frac{\frac{1}{4}}{p})(\frac{-(3y^2+4a)}{p})$$

$$= \sum_{y=0}^{p-1}(\frac{-(3y^2+4a)}{p})$$

olarak bulunur. Yöntemimizi kullanarak bu toplamın değerini bulabiliriz:

$\sum_{y=0}^{p-1}(\frac{-(3y^2+4a)}{p}) = -(\frac{-3}{p})$. (Çünkü $p \mid 48.a$.)

Buna göre $x^2 + xy + y^2 + a \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin (x,y) sıralı ikili çözüm sayısı $p - (\frac{-3}{p})$ imiş.

Diyelim ki, $x^3 + ax \equiv c \pmod p$ $(c = 0, 1, ..., p-1)$ denkliğinin yalnızca bir tane çözümü vardır; bu çözüm x_1 olsun. Biraz evvel saydığımız ikililer içerisinde (x_1, x_1) ikilisi olabilir mi diye bakalım. Farzedelim ki, (x_1, x_1) ikilisi geçiyor: $x_1^2 + x_1.x_1 + x_1^2 + a \equiv 3x_1^2 + a \equiv 0 \pmod p \Rightarrow x_1^2 \equiv \frac{-a}{3}$ (mod p). Böylece $x_1 \equiv 0 \pmod p$ çıkar. $x_1^2 + x_1.y + y^2 + a \equiv 0 \pmod p$ denkleminin çözümlerine bakalım:

$$(y + \frac{x_1}{2})^2 \equiv \frac{-3x_1^2}{4} - a \equiv \frac{a}{4} - a \equiv \frac{-3}{4}a \equiv \frac{9x_1^2}{4} \pmod p .$$

$\frac{9x_1^2}{4}$ ifadesi kuadratik rezidüdür ve 2 farklı y değeri için denklik sağlanır. Buna göre de x_1 'den farklı olan y değeri için $y^3 + ay \equiv c \pmod p$ olacaktır ki bu baştaki kabulümüz ile çelişir.

$c \in \{0, 1, ..., p-1\}$ iken $x^3 + ax \equiv c \pmod p$ denkliğinin 3 farklı çözümü olduğu c 'lere 3 'lü c, iki farklı çözümü olduğu c 'lere de 2 'li c diyelim. 3 'lü c 'lerin sayısı c_3, 2 'li c 'lerin sayısı c_2 olmak üzere, $x^3 + ax \equiv y \pmod p$ denkliğinin çözümünün olmadığı y 'lerin sayısı $2c_3 + c_2$ olacaktır. Her bir 3 'lü c için 2 tane, 2 'li c için ise 1 tane y çözüme ulaşamıyor.

Şimdi göstermemiz gereken şey $p - (2c_3 + c_2) = p - \frac{1}{3}(p - (\frac{-3}{p}))$, $2c_3 + c_2 = \frac{1}{3}.(p - (\frac{-3}{p}))$ olduğudur.

T_p sayısında verdiğimiz şartı sağlayan ikilileri saymıştık. 3 'lü bir c için x_1, x_2 ve x_3 çözümler olsun. Biz T_p sayısında (x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1) ikilerini saydık. Böylece bu 3 'lü c 'nin çözümlerinin oluşturduğu ikilileri 6 sefer saydık. 2 'li bir c için ise, x_1 ve x_2 çözüm olmak üzere, T_p sayısında (x_1, x_2), (x_2, x_1) ikilileri ile (x_1, x_1) ve (x_2, x_2) çözüm ikililerinden yalnızca birini saydık. Yalnızca birini saydığımızı ispatlayalım. Farzedelim ki ikisini birden saydık. Buna göre $3x_1^2 + a \equiv 3x_2^2 + a \equiv 0 \pmod p \Rightarrow x_1^2 \equiv x_2^2 \pmod p$ olduğundan ancak $x_1 \equiv -x_2$ olabilir. $x_1^3 + ax_1 \equiv x_2^3 + ax_2 \equiv c \pmod p$ idi. $x_1^3 + ax_1 \equiv -x_1^3 - ax_1 \equiv c \pmod p$ olacaktır ki bu da $c \equiv 0 \pmod p$ demektir. Fakat $x^3 + ax \equiv 0 \pmod p$ ifadesinin ya 1 ya da 3 farklı çözümü olabilir. Çünkü, $x.(x^2 + a) \equiv 0 \pmod p$. $x \equiv 0$ bir çözümdür. $-a$ kuadratik rezidü ise, 2 tane daha farklı çözüm gelecektir. $-a$ kuadratik rezidü değilse, başka çözüm gelmeyecektir. Böylece 2 'li bir c 'nin x_1 ve x_2 çözümlerinin oluşturduğu 3 tane 2 'liyi sayıyoruz. Buna göre $T_p = 6.c_3 + 3.c_2$ 'dir. Buradan da, $2c_3 + c_2 = \frac{1}{3}.(p - (\frac{-3}{p}))$ bulunur ve ispat tamamlanır.

(C) $x^3 + \ell \equiv y^2 \pmod p$ Şeklindeki Denkliklerin Çözüm Sayısı

(i) $p \equiv 2 \pmod 3$ bir asal sayı olmak üzere $x^3 + \ell \equiv y^2 \pmod p$ denkleminin (x, y) çözümü sayısına L_p diyelim $(\ell = 1, 2, ..., p)$. $L_p = p + \sum_{x=1}^{p}(\frac{x^3+\ell}{p})$ olacaktır.

$$T(\ell) = \sum_{x=1}^{p}(\frac{x^3 + \ell}{p})$$

diyelim. $T(1) = 0$ olduğu Balkan Olimpiyadı sorusunda gösterilmişti. Aynı mantıkla $T(\ell) = 0$ $(\ell = 1, 2, ..., p)$ diyebiliriz. Buna göre $x^3 + \ell \equiv y^2 \pmod p$ denkliği $p \equiv 2 \pmod 3$ iken p tane çözüme sahiptir.

(ii) $s \not\equiv 0 \pmod p$ olsun. $p = 3m + 1 \Rightarrow T(\ell.s^3) = (\frac{s}{p})T(\ell)$ olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned} T(\ell.s^3) &= \textstyle\sum_{x=0}^{p-1}(\frac{x^3+\ell.s^3}{p}) \qquad (x = t.s \text{ dersek}) \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{p-1}(\frac{t^3s^3+\ell.s^3}{p}) = \sum_{t=0}^{p-1}(\frac{s^3}{p}).(\frac{t^3+\ell}{p}) \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{p-1}(\frac{s}{p}).(\frac{t^3+\ell}{p}) = (\frac{s}{p}).\sum_{t=0}^{p-1}(\frac{t^3+\ell}{p}) = (\frac{s}{p}).T(\ell). \end{aligned}$$

(iii) $p = 3m + 1$ ve n, p modülünde ilkel bir kök olmak üzere $T(1) + T(n^2) + T(n^4) = 0$ olduğunu ispatlayalım.

$$T(1) = \textstyle\sum_{x=0}^{p-1}(\frac{x^3+1}{p}) = (\frac{1}{p}) + \sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^{3s}+1}{p}) = 1 + \sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^{3s}+1}{p}),$$

$$T(n^2) = \textstyle\sum_{x=0}^{p-1}(\frac{x^3+n^2}{p}) = (\frac{n^2}{p}) + \sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^{3s}+n^2}{p}) = 1 + \sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^{3s-2}+1}{p}),$$

$$T(n^4) = \textstyle\sum_{x=0}^{p-1}(\frac{x^3+n^4}{p}) = (\frac{n^4}{p}) + \sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^{3s}+n^4}{p}) = 1 + \sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^{3s-4}+1}{p})$$

ve böylece

$$\begin{aligned} T(1) + T(n^2) + T(n^4) &= 3 + \textstyle\sum_{s=1}^{p-1}[(\frac{n^{3s}+1}{p}) + (\frac{n^{3s-2}+1}{p}) + (\frac{n^{3s-4}+1}{p})] \\ &= 3 + 3.\textstyle\sum_{s=1}^{p-1}(\frac{n^s+1}{p}) = 3 + 3.[\sum_{x=1}^{p-1}(\frac{x}{p}) - (\frac{1}{p})] \\ &= 3 + 3.(-1) = 0. \end{aligned}$$

(D) $x^3 + kx \equiv y^2 \pmod p$ Şeklindeki Denkliklerin Çözüm Sayısı

$p = 4m + 3$ şeklinde bir asal sayı ve $k \not\equiv 0 \pmod p$ iken $x^3 + kx \equiv y^2 \pmod p$ denkliğinin çözüm sayısı

$$p + \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x^3 + kx}{p}\right)$$

olacaktır.

$$s(k) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x^3 + kx}{p}\right)$$

olsun. $s(k) = 0$ olduğunu gösterelim. $p = 4m + 3$ olduğu için $(\frac{-1}{p}) = -1$ 'dir. Böylece $x \not\equiv 0 \pmod p$ iken $(\frac{x^3+kx}{p})$ ve $(\frac{-x^3-kx}{p})$ ifadelerinden tam olarak bir tanesi 1, bir tanesi -1 değerini alır. Buna göre

$$\left(\frac{x^3 + kx}{p}\right) + \left(\frac{-x^3 - kx}{p}\right) = 0$$

olacaktır. $x = 0 \Rightarrow (\frac{x^3+kx}{p}) = 0$ 'dır. O zaman $s(k) = 0$ olur. Denkliğin çözüm sayısı da p olarak bulunur.

TARTIŞMA VE SONUÇ

f, 1. ve 2. dereceden bir polinom iken genellemeler getirilmez. 3. derecede iken özel durumlara çözümler üretilmiştir. Genellemelerin kullanışlı olduğu görülmüş, konu ile alakalı sorulara kolay çözümler getirmede kullanılabilirliği anlaşılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Serguei A. Stepanev, Arithmetics of Algebraic Curves.

[2] Alan Baker, A Concise Introduction to the Theory of Numbers.

[3] I. M. Vinogradow, An Introduction to the Theory of Numbers.

[4] Charles Vanden Eynden, Number Theory.

[5] Ulusal ve Uluslararası Matematik Olimpiyatları Soruları.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmanın her aşamasında bana büyük destek veren Matematik Öğretmenim *Ogün Bilge* 'ye, projenin esin kaynağı olan sorunun sahibi Sayın *Okan Tekman* 'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca benden yardımlarını esirgemeyen başta okul yöneticilerim Sayın *Mahmut Açıl* ve Sayın *Coşkun Özsolak* 'a, tüm öğretmenlerime, sınıf arkadaşlarıma ve okul çalışanlarına minnetlerimi sunarım.

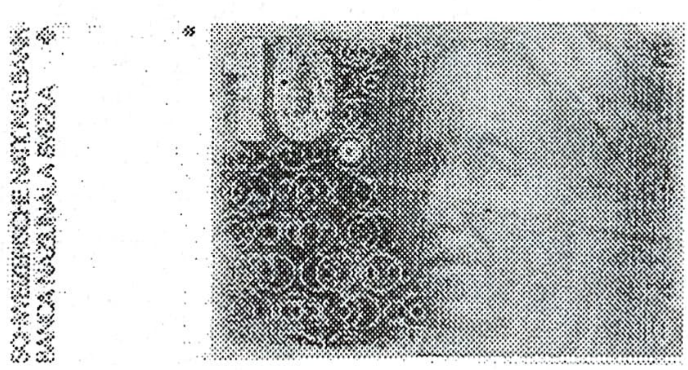
2000=DÜNYA MATEMATİK YILI

Tosun Terzioğlu
Sabancı Üniversitesi, İSTANBUL

Matematik: İnsan zekasının binlerce yıldır,
taş üstüne taş koyarak yükselttiği yüce bir yapı, görkemli bir anıt.

Uluslararası Matematikçiler Birliği IMU ve UNESCO tarafından 2000 yılı "Dünya Matematik Yılı" olarak ilan edildi. Yıl boyunca, bilim ve teknolojinin temel taşı ve insanlığın ortak kültürünün vazgeçilemez bir bölümü olan matematiğin önemini ve yararını topluma anlatmak için tüm dünyada matematikçiler konferanslar verecek, makaleler ve kitaplar yazacak. Oysa matematik hakkında matematikçi olmayanlar için makale yazmak ya da konferans vermek hiç de kolay değil. Hele matematik araştırmalarının derin sonuçları olan teoremleri ve uygulamaları matematikçi olmayan okurlara veya dinleyicilere gerektiği gibi aktarabilmek özen ve ustalık gerektirir. Matematik sanki etrafına aşılması zor duvarlar örerek matematikçi olmayanları kendi gizemli bahçesinden uzak tutmayı seçmiştir. Bu duvarların ardında neler olduğunu pek merak etmeyiz. Araştırmalarında matematikten yararlanan bilim insanları bile çoğu zaman matematiği salt bir araç olarak algılar. Tıpkı bir mikroskop, bir bilgisayar ve hatta bir vinç gibi. Sanatçılar içinse matematik kendi dünyalarının çok uzağında, soğuk, karanlık ve cansız bir nesnedir. Oysa, 20. yüzyılın büyük düşünürlerinden Bertrand Russell matematiğin en yüksek sanatın gösterebileceği kesin kusursuzluğa erişebilen, yüce bir güzelliği olduğunu yazmıştır.

Leonhard Euler



Uygulama

Matematiğin önemini anlatmanın bir yolu da matematiğin uygulamalarından söz etmektir. Günümüzde fizik, kimya, biyoloji gibi doğa bilimlerinin yanısıra, mühendisliğin hemen her alanında, ekonomide hatta dilbilimde matematik yaygın olarak uygulanır oldu. Doğa bilimlerinde matematiğin uygulanışı çok gerilere gider. Galileo, zamanımızdan dörtyüz yıl kadar önce "doğanın yüce kitabı yalnızca onun yazıldığı dili bilenlerce okunabilir; bu dil de matematiktir" demiştir. Ancak çoğu zaman matematikçi uğraştığı problemin, ispat etmeye çalıştığı teoremin doğa bilimlerinde veya başka alanlardaki uygulamalarına aldırmaz. Matematiğin gizemli bahçesi onun için yeterince zengindir. Matematikçi olmayanları dışarıda tutan o yüksek duvarların ötesinde neler olduğunu matematikçi de pek merak etmez; ama yaratılan matematik kuramları bir gün gelir doğanın bir temel yasasının keşfinde baş rolü oynar. Onyedinci yüzyılın başlarında Kepler, gezegenlerin hareketlerini açıklayan üç ünlü yasa açıkladı. Astronomide devrim yaratan bu yasalardan birincisi her gezegenin yörüngesinin bir elips olduğunu, Güneş 'in de bu elipsin bir odağı üzerinde olduğunu söyler. Kepler bu çalışmasında Appollonius 'un "Konikler" adını taşıyan eserinden yararlanmıştı. Appollnius bugün Antalya 'nın doğusunda kalıntılarını gezebildiğimiz Perge şehrinde M.Ö. 200 yıllarında yaşamış antik çağın en önemli matematikçilerinden biriydi. "Konikler" aslında sekiz kitapçıktan oluşan; çember, elips, parabol ve hiperbolleri içeren eğriler topluluğunu sistematik bir biçimde inceleyen bir başyapıttır. Perge 'li Appollonius bu yapıtında koni kesitlerini analitik yoldan da tanımlamıştır. Bir düzlem üzerinde sabit bir noktadan sabit uzaklıkta hareket eden bir noktanın bir çember çizdiğini biliriz. İki ayrı sabit noktadan uzaklığının toplamı sabit kalacak şekilde hareket eden bir noktanın yörüngesiyse elipstir. Bu iki sabit noktaya da elipsin odakları denir. Perge 'li Appollonius 'un sekiz kitabından sonuncusu kayıptır. İlk yedi kitapsa önce Yunanca 'dan Arapça 'ya, sonra da Arapça 'dan Latince 'ye çevrilerek yazılışından onsekiz yüzyıl sonra Kepler 'e ulaşmış ve gezegenlerin hareketini açıklayan doğa yasalarının keşfinde baş rolü oynamıştı. Appollonius ise koni kesitlerini incelerken bu kuramın gerçek hayatta uygulanabilirliğini pek düşünmemiştir. Bugünün dünyasında karmaşık ve soyut bir düşünceyle, bir öğretiyle karşılaştığımızda "peki bunun bana ne yararı var?" diye sorup, kendimizce daha yararlı, daha gerçek dünyaya ait işlere dönüveririz. Matematikçiyse "yarar" veya "uygulanabilirlik" aramadan çalışır; ama Appollonius örneğinde olduğu gibi, yarar veya uygulama çok sonraları ortaya çıkar. Riemann, Gauss ve Bolyai gibi matematikçiler tarafından ondokuzuncu yüzyılda geliştirilen eğrisel uzay geometrisi, daha sonra görelilik kuramını açıklamak için Einstein tarafından kullanıldı. 1830 'larda Galois ile başlayarak gelişen ve o zamanlar soyut matematiğin doruğu olarak nitelendirilen gruplar kuramı bugün modern fizikte yaygın olarak kullanılmakta. Matrisler kuramı, icadından altmış yıl kadar sanra Heisenberg tarafından kuantum mekaniğinin matematiksel modelini kurmak için kullanıldı. Bu matematik kuramlarının hiçbiri bir "yarar" gözetilerek geliştirilmemişti. Oysa her biri gerçek dünyayı anlamak, doğanın temel bir yasasını ifade etmek için çok pratik birer alet haline geldi. Nobel ödüllü fızikçi Wigner, "matematik dilinin fizik yasalarının ifade edilmesine elverişli olması mucizesi, anlayamadığımız, harikulade bir lütuftur" diye özetlemiş bu olguyu.

Gerçeğin Peşinde

Doğayı anlamaya çalışan bilimciler, durmaksızın gerçeğin peşinde koşarlar. Gerçekse yakalanmaz bir türlü. Doğa bilimlerindeki "gerçek" aslında pragmatiktir. Örneğin bir fizikçi elindeki kuramı, gerçeği bilinen olgularla, gözlemlerle karşılaştırır ve deneylerle sınar. Eğer doğayla kuram yeterince uyuşmuyorsa, "daha doğru" bir kurama, yeni bir gerçeğe doğru arayışlar başlar. Doğa bilimcisinin uğraşı hep daha doğru olanın peşinde koşmaktır.

Dünya Matematik Yılı 'nda matematiğin yaşgününü kutluyor olsaydık, pastanın üzerine 2500 tane mum sığdırmak zorunda kalırdık.

M.S. birinci yüzyılda Ptoleme, merkezi dünya olan bir evren modeli ortaya attı ve yüzyıllarca bu model "doğru" olarak kabul gördü. Onaltıncı yüzyılda Kopernik bu modele karşı çıktı. Kepler ise merkezi Güneş olan, gezegenlerin güneşin etrafında elipsler çizerek döndüğü evren modelini gözlemlere dayanarak açıkladı. Kepler 'in yasalarından yola çıkan Newton, yerçekimi yasasıyla gök mekaniği diye bir bilim dalını yarattı. Ancak Newton 'un gök mekaniği, Güneş 'e en yakın gezegenimiz olan Merkür 'ün yörüngesi hakkındaki gözlemleri açıklamakta yetersiz kaldı. Einstein 'in görelilik kuramı, Newton yerçekimi yasasını değiştirince Merkür 'ün hareketini de kapsayan yeni bir doğruya kavuştuk! Sanki doğanın gerçekleri tam yakalandıklarında kılık değiştirip elimizden kurtulan masal perileri gibi bizleri peşinden koşturuyor. Yarın yeni gözlemlerle ya da deneylerle değişmeyecek gerçekler arıyorsanız, onu matematikte bulursunuz. Matematikte "doğru", zamanla değişmez. Dünya Matematik Yılı 'nda matematiğin yaşgününü kutluyor olsaydık, pastamızın üzerine herhalde ikibinbeşyüz tane mum sığdırmak zorunda kalırdık. Milet 'li Thales 'in üçgenler ya da Perge 'li Appollonius 'un elipsler hakkındaki ikibinikiyüz yıllık teoremleri, bugün de gerçek. Yine o çağlardan bize miras kalan asal sayıların sonlu tane olmadığını ifade eden teoremin ispatının duru ve yalın güzelliğini bugün bile algılayabiliriz. Matematik insan zekasının binlerce yıldır, taş üstüne taş koyarak yükselttiği yüce bir yapı, görkemli bir anıt. Bu anıtın alt sıralarında yer alan bir taş bugün biraz tozlu olabilir, ama üzerini şöyle bir silersek o eski taşın sağlamlığı ve güzelliği bugün de gözlerimizi kamaştırır. **Matematik birikimseldir, kalıcıdır. Akıp giden zaman içinde kaybolmaz ve değerini yitirmez.**

Cahit Arf

NOT: Bu yazı, *Ekonomik Forum Dergisi* 'nin 7-7 no 'lu sayısında (15 Temmuz 2000, sayfa:62-63) yayınlanmıştır.

DUYURU

Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü 'nün kurucu başkanı ve **Matematik Dünyası** 'nın bölümümüz tarafından yayınlanmasına önayak olup uzunca bir süre yayın kurulunda etkin görevlerde bulunan Sayın **Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş** üniversitemizden emekli olarak Başkent Üniversitesinde yeniden göreve başlamıştır. Dergimize yapmış olduğu tüm katkılar nedeniyle kendisine çok özel teşekkürlerimizi sunarız.

Matematik Dünyası Yayın Kurulu

EN KÜÇÜK MATEMATİKSEVERLERE...

Matematik ve özellikle de onun "elemanter matematik" denilen kısmı, 7 'den 77 'ye herkesin ilgisini çekebilecek yüzbinlerce çok ilginç soru ve problemlerle dolu bir denizdir. Bu soruların bir kısmı çok ciddi, bir kısmı açıkça şaka, bir kısmı ise ciddi veya şaka olduğu o kadar da belli olmayan türdendir. Çoğu anonim olan bu problem ve soruların bir kaç tanesini ortaokuldaki matematiksever dostlarımızın beğenisine sunuyor ve onları "ciddi" ile "şaka" 'nın sınırında cambazlık yapmaya davet ediyoruz:

1. 10 civciv 10 günde 1 kg buğday yiyorsa, bu civcivler 100 günde kaç kg buğday yer?

2. Parantezleri açınız ve ifadeyi sadeleştiriniz:

$$(x-a)(x-b)(x-c)...(x-y)(x-z)\ .$$

(x 'ten latin alfabesinin tüm harfleri çıkarılıyor.)

3. Sonucun $\frac{a+c}{b+d}$ 'ye eşit olması için $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirleri arasında hangi matematiksel sembolü koymak gerekiyor?

4. Bir kesrin payı paydasından büyüktür. Diğer kesrin ise paydası payından büyüktür. Bu kesirlerden hangisi daha büyüktür?

5. Bir kutunun içinde 100 tane kalem vardır. 88 tane kalemi çabuk saymanın bir yolunu gösterebilir misiniz?

6. Pergel kullanarak, kağıt parçası üzerinde çember değil, elipse benzer bir eğri çizebilir misiniz?

7. 5 simiti 6 arkadaş arasında, simitlerden hiç birini 6 veya daha fazla parçaya bölmeden, eşit dağıtabilir misiniz?

8. 100 sayısını, bir kaç sayının hem çarpımı, hem de toplamı biçiminde yazmak mümkün müdür?

9. Parantezleri açmadan,

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$$

ifadesini sadeleştirmek mümkün müdür?

10. Aşağıda, $2.2=5$ formülünün iki "ispatını" veriyoruz. Nerede "kandırmaca" yaptığımızı bulmaya çalışınız.

I. İspat: $8:4=10:5$ özdeşliğinde ortak çarpanları parantez dışına çıkarırsak,

$$4.(2:1)=5.(2:1)$$

olur. Şimdi, her iki yanı $2:1$ sayısı ile kısaltırsak, $4=5\Rightarrow 2.2=5$ elde ederiz.

II. İspat: $a=2.2$ ve $b=5$ diyelim. Şimdi, $c=\frac{a+b}{2}$ dersek, $a=2c-b$ ve $2c-a=b$ olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çarparsak, $a^2-2ac=b^2-2bc$ elde ederiz. Sonuncu eşitliğin her iki yanına c^2 eklersek,

$$(a-c)^2=(b-c)^2\Rightarrow a-c=b-c\Rightarrow a=b\Rightarrow 2.2=5$$

bulunur.

11. Aşağıda bütün sayıların sıfıra eşit olduğunun iki "ispatını" veriyoruz:

I. İspat: Herhangi bir a sayısını alalım ve onun yarısına x diyelim. Böylece, $2x = a$ olur. Bu eşitliğin her iki yanını a ile çarparsak, $2xa = a^2 \Rightarrow a^2 - 2xa = 0$ olur. Sonuncu eşitliğin her iki yanına x^2 eklersek,

$$x^2 - 2xa + a^2 = x^2 \Rightarrow (x-a)^2 = x^2 \Rightarrow x - a = x \Rightarrow a = 0$$

elde ederiz.

II. İspat: Herhangi bir a sayısını alalım ve $a - a + a - a + a - a + \dots$ ifadesini iki yolla hesaplayalım:

$$a - a + a - a + a - a + \dots = (a-a) + (a-a) + (a-a) + \dots = 0\ ;$$

$$a - a + a - a + a - a + \dots = a - (a-a) - (a-a) - (a-a) + \dots = a\ .$$

İfadelerin sol tarafları eşit olduğundan, sağ tarafları da eşit olmalıdır: $a = 0$.

İPUÇLARI:

1. 100 gün içinde civcivler tavuk olacaklarından sizin düşündüğünüzden (10 kg 'dan) çok daha fazla buğday yiyeceklerdir.

2. x 'den Latin alfabesinin tüm harfleri çıkarıldığından, çarpım sıfıra eşittir. (x 'in kendisi de Latin alfabesinin bir harfidir!!!)

3. "Eşittir" sembolünden başka hiç bir sembol işe yaramaz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\ .$$

4. Kesin bir şey söylemek mümkün olmaz. Örnek: $\frac{5}{-2} = \frac{-5}{2}$, $\frac{1}{-1} < \frac{1}{2}$, $\frac{2}{1} > \frac{1}{2}$.

5. 12 tane kalem alırsak, geriye 88 kalem kalır.

6. Kağıt parçasını bir silindir üzerine koyarak, pergel vasıtasıyla çember çizmeye çalışın.

7. Simitlerden 3 tanesinin her birini 2 eşit parçaya, kalan iki tanesinin her birini de 3 eşit parçaya bölünüz.

8. $100 = 4.25.\underbrace{1.1.\ \dots\ .1}_{71\ tane\ 1} = 4 + 25 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{71\ tane\ 1}.$

9. İfadeyi $1 = 21$ sayısı ile çarpınız ve $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $(2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = (2^{2^{n+1}} - 1)$ olduğunu gözönüne alınız. (Yanıt: 2^{128})

10. ve **11.** $A^2 = B^2$ eşitliğinden $A = B$ yazamayız. Doğrusu, $|A| = |B|$ 'dir. 11 nolu problemde verilen "II. İspatta" $a - a + a - a + a - a + \dots$ ifadesi bir sayı değildir. (Matematikte bu tür toplamlara ıraksak seri denir. Sözkonusu ifade, sadece, $a = 0$ için anlamlıdır ve sıfıra eşittir.)

Yaşça çok küçük meslektaşları
ile deneyimlerini bölüştüren: **İlham ALİYEV**

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Ocak 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.221. Terimleri tamsayılar olan bir sonsuz aritmetik dizinin bir teriminin tam küp olduğunu varsayalım. Bu dizinin terimleri içinde sonsuz çoklukta tam küpler bulunduğunu kanıtlayınız.

A.222. İstenilen dört tanesinin bir ortak noktası bulunan beş çemberin beşinin de bir noktadan geçtiğini kanıtlayınız.

A.223. Düzlem üzerinde alınmış A, B, C, D noktaları öyledir ki, herhangi P noktası için $|PA| + |PD| \geq |PB| + PC|$ eşitsizliği sağlanmaktadır. B ve C noktalarının AD doğru parçası üzerinde bulunduklarını ve $|AB| = |CD|$ olduğunu gösteriniz.

A.224. Negatif olmayan her a ve b sayıları için

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

A.225. ABC üçgeninin $[AD]$ yüksekliği üzerinde bir P noktası alınıyor, BP ve CP doğrularının $[AC]$ ve $[AB]$ ile kesişim noktaları sırasıyla E ve F ile gösteriliyor. $[DA$ 'nın, FDE açısına ait açıortay olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.221. Her $i = 1, 2, 3, ..., n$ için $x_i \geq 0$ ve $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 10$ bağıntılarını sağlayan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sayıları için $S = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Y.222. Her $n \in \mathbf{N}$ için sistemin tüm reel çözümlerini bulunuz:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 3 \\ &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = 3^2 \\ &\quad ... \\ &x_1^n + x_2^n + x_3^n + ... + x_n^n = 3^n \end{aligned}$$

Y.223. Her $\alpha \leq 1$ ve $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n > 0$ sayıları için

$$(1 + x_1 + x_2 + ... + x_n)^\alpha \leq 1 + 1^{\alpha-1}x_1^\alpha + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + ... + n^{\alpha-1}x_n^\alpha$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Y.224. Uzayda uzunlukları eşit olan 3 doğru parçası rasgele yerleştirilmiştir. Bu parçaların ortogonal (dikey) izdüşümlerinin eşit olduğu bir düzlemin varlığını gösteriniz.

Y.225. Biçimini değiştirmeyen bir ABC üçgeninin A köşesi sabit olup B köşesi bir çember üzerinde hareket etmektedir. C köşesinin geometrik yerinin bir çember olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.211. Her biri 1 veya -1 'e eşit olan a_1, a_2, ..., a_n sayıları için $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. n sayısının 4 'e bölündüğünü kanıtlayınız.

Çözüm. Her i için $a_i = \pm 1$ olduğundan, her $i, j = 1, 2, ..., n$ için $a_ia_j = \pm 1$ olacaktır. Dolayısıyla, $(a_1a_2).(a_2a_3)...(a_na_1) = \pm 1$ olmalıdır. Öte yandan, $(a_1a_2).(a_2a_3)...(a_na_1) = (a_1a_2...a_n)^2 > 0$ olacağından, $(a_1a_2).(a_2a_3)...(a_na_1) = 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Öyleyse, a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{n-1}a_n$, a_na_1 sayıları içerisindeki negatif sayılar sayısı (ona m diyelim) çift olmak zorundadır: $m = 2k$. Fakat, $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ olduğundan; a_1a_2, a_2a_3, ... , $a_{n-1}a_n$, a_na_1 sayıları içindeki pozitif sayılar sayısı negatif sayılar sayısına eşit olmalıdır. Dolayısıyla, $n = 2m = 4k$ ve n, 4 ile bölünmek zorundadır.

A.212. 1, 2, 3, ... , 80, 81 sayılarının tümü, birim karelere ayrılmış 9×9 karesinin hanelerine rasgele yerleştiriliyor. Sayılar nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, ortak bir kenarı bulunan ve içlerine yerleştirilmiş sayıların farkı en az 6 olan en az iki hanenin bulunduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Ortak kenarları bulunan karelere komşu kareler diyelim ve 1 ile 81 'in bulunduğu kareleri birleştiren "komşu kareler zincirine" bakalım. (Şekilde bu tür "zincirler" 'den ikisi taranmıştır.)

	x	x	x	x	x	x	x	81
	x							x
	x				x	x	x	x
	x				x			
	x				x			
	1	x	x	x	x			

İki durum sözkonusudur:

(I) 1 ve 81 en uzak karşı köşelerdedir.

(II) 1 ve 81 'den en az biri en uzak karşı köşelerde değildir.

I. durumda karşı köşeleri birleştiren herhangi iki "zincire" bakalım. 17 haneden ibaret olan bu zincirdeki sayılara $a_1, a_2, ..., a_{17}$ ($a_1 = 1$, $a_{17} = 81$) ve $b_1, b_2, ..., b_{17}$ ($b_1 = 1$, $b_{17} = 81$) diyelim.

$$80 = 81 - 1 = (81 - a_{16}) + (a_{16} - a_{15}) + ... + (a_3 - a_2) + (a_2 - 1), \quad (1)$$

$$80 = 81 - 1 = (81 - b_{16}) + (b_{16} - b_{15}) + ... + (b_3 - b_2) + (b_2 - 1) \quad (2)$$

eşitliklerine bakalım. Eğer (1) toplamında tüm parantezler ≤ 5 ise, toplam 80 ve parantez sayısı 16 olduğundan, parantezlerin her biri 5 'e eşit olmalı, dolayısıyla, $\{a_2, a_3, ..., a_{15}, a_{16}\} = \{6, 11, 17, ..., 76\}$ olmalıdır. O halde (2) ifadesinde 5 'ten küçük parantez(ler) ve dolayısıyla, 5 'ten büyük parantez(ler) bulunacaktır.

II. durumda 1 ve 81 'i en fazla 16 hane içeren "zincirle" birleştirebiliriz. Bu hanelerde yazılan sayılara $c_1 = 1$, c_2, c_3, ..., $c_n = 81$ diyelim. Burada $n \leq 16$ olduğundan,

$$80 = 81 - 1 = (81 - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + ... + (c_2 - 1)$$

eşitliğinde parantezler sayısı ≤ 15 ve dolayısıyla, en az bir parantez ≥ 6 olur.

A.213. $x + \frac{1}{x}$ bir tamsayı ise, her $n \in \mathbf{N}$ için $x^n + \frac{1}{x^n}$ sayısının da bir tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Tümevarım uygulayalım. Her $k = 1, 2, ..., n-1, n$ için $x^k + \frac{1}{x^k}$ sayısının bir tamsayı olduğunu varsayarak, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ 'in de tamsayı olduğunu gösterelim.

$x + \frac{1}{x}$ ve $x^n + \frac{1}{x^n}$ sayıları tam olduğundan onların çarpımı

$$(x+\tfrac{1}{x})(x^n+\tfrac{1}{x^n}) = (x^{n+1}+\tfrac{1}{x^{n+1}})+(x^{n-1}+\tfrac{1}{x^{n-1}})$$

yine bir tamsayı olmalıdır. Öyleyse,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})$$

sayısı da bir tamsayı olacaktır.

A.214. x sayısının tam kısmını $[\![x]\!]$ ile gösterelim. $x + \frac{99}{x} = [\![x]\!] + \frac{99}{[\![x]\!]}$ denkleminin tam olmayan kökünün kesir kısmını bulunuz.

Çözüm. $(x - [\![x]\!])(1 - \frac{99}{x[\![x]\!]}) = (x + \frac{99}{x}) - ([\![x]\!] + \frac{99}{[\![x]\!]}) = 0$ eşitliğinden ve $x \neq [\![x]\!]$ koşulundan

$$1 - \frac{99}{x[\![x]\!]} = 0 \Leftrightarrow x.[\![x]\!] = 99$$

olur. $x = n + d$ ($n \in \mathbf{Z}$, $0 < d < 1$) dersek, $n(n+d) = 99$ elde ederiz. $n > 0$ ise, $n^2 < 99 < n(n+1)$ olmalıdır ki, bu mümkün değildir. $n < 0$ ise, $n(n+1) < 99 < n^2$ eşitsizliğinden $n = -10$ ve $n(n+d) = 99$, $n = -10$ eşitliklerinden de

$$-10(-10+d) = 99 \Rightarrow d = -\frac{99}{10}+10 = 10-9,9 = 0,1$$

elde edilir. Böylece, denklemi sağlayan x 'in kesir kısmı $d = 0,1$ ' dir.

A.215. Düzlemde aynı doğru üzerinde bulunmayan A, B, C noktaları ile bir $k \in \mathbf{R}^+$ sayısı veriliyor. $|PA|^2 + |PB^2| + |PC|^2 = k$ şartını sağlayan P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), P(x, y)$ olsun. Verilen şarttan,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = k$$

ya da

$$3[(x - \tfrac{x_1+x_2+x_3}{3})^2 + (y - \tfrac{y_1+y_2+y_3}{3})^2] + \tfrac{1}{3}[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = k.$$

ABC üçgeninin ağırlık merkezi

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

olduğundan $|PG|^2 = \frac{1}{9}\left[3k - (a^2+b^2+c^2)\right]$ bulunur.

1. $3k < a^2+b^2+c^2$ ise, geometrik yer boş küme,

2. $3k = a^2+b^2+c^2$ ise, geometrik yer G noktası,

3. $3k > a^2+b^2+c^2$ ise, geometrik yer G merkezli ve $\left(\sqrt{3k-(a^2+b^2+c^2)}/3\right)$ yarıçaplı bir çemberdir.

Y.211. Doğal sayılar kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan 2001 altkümeye parçalanıp parçalanamayacağını belirleyiniz:

(i) Altkümeler ikişer ikişer ayrık ve hiç biri boş değildir.

(ii) Altkümelerin birleşimi tüm doğal sayılar kümesidir.

(iii) Bu altkümelerden herhangi 2000 tanesi seçilir ve bu 2000 kümeden birer tane eleman seçilip bu elemanların 2000-inci kuvvetleri alınarak elde edilen 2000 sayı çarpılırsa, bu çarpım, seçilmeyen kümenin elemanıdır. (Alp Şimşek; İzmir Fen Lisesi)

Çözüm. Böyle bir parçalanma mümkündür.

$a \in \mathbf{N}$ olmak üzere $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ ($p_1, p_2, ..., p_k$ asal ; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbf{N}$) ise, f(a)=$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k$ olarak tanımlayalım.

Altkümelerimiz A_0, A_1, ... , A_{2000} şöyle tanımlansın: Her $a \in \mathbf{N}$ için

$$f(a) \equiv i \ (mod\ 2001) \quad \Leftrightarrow \quad a \in A_i$$

olsun. Yani her doğal sayı a 'yı $f(a)$ 'nın 2001 modunda değeri olan indisli altkümeye koyalım. Bu altkümelerin ilk 2 şartı sağladığı açıktır. Öte yandan f fonksiyonunun her $a, b, n \in \mathbf{N}$ için $f(ab) = f(a) + f(b)$ ve $f(a^n) = nf(a)$ şartlarını sağladığı açıktır. O halde, 3. şartta dışarıda bırakılan küme A_i ise, $a_j \in A_j$; $j \in S_i = \{0,1,2,...,2000\} - \{i\}$ seçersek,

$$f(\Pi_{j\in S_i} a_j^{2000}) = 2000.\textstyle\sum_{j\in S_i} f(a_j)$$

$$\equiv 2000.\textstyle\sum_{j\in S_i} j \ \ (mod\ 2001)$$

$$\equiv 2000.(\textstyle\sum_{k=0}^{2000} k - i) \ \ (mod\ 2001)$$

$$\equiv 2000.(\tfrac{2001.2000}{2} - i) \ \ (mod\ 2001)$$

$$\equiv -2000i \ \ (mod\ 2001);$$

$$f(\Pi_{j\in S_i} a_j^{2000}) \equiv i \ \ (mod\ 2001)$$

olur. O halde, $\Pi_{j\in S_i} a_j^{2000} \in A_i$ olur. Yani 3. şart da sağlanır.

Not: Çözüm takip edilirse 2001 yerine herhangi tek sayı alabileceği görülür.

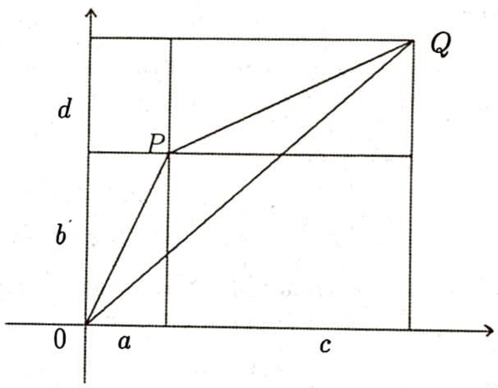
Y.212. a, b, c, d pozitif reel sayılar ve $bc \geq ad$ ise,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$
$$\leq b + \sqrt{(a+c)^2+d^2}$$

olduğunu gösteriniz. (M. Bumin Yenmez; İzmir Özel Yamanlar Lisesi)

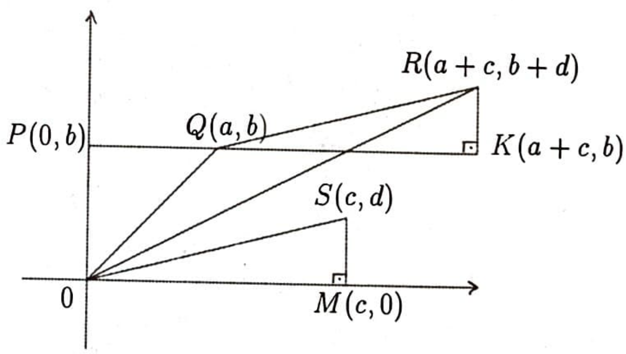
Çözüm. İlk başta sol tarafı gösterelim. Koordinat sisteminde $P(a,b)$, $Q(a+c, b+d)$ alalım. Üçgen eşitsizliğinden $OQ \leq OP + PQ$ olur. Böylece,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}\ .$$

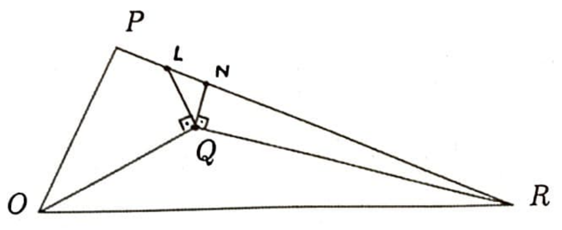


Şimdi sağ tarafa bakalım. Dik koordinat sisteminde $P = (0,b)$, $Q = (a,b)$, $R = (a+c, b+d)$, $S = (c,d)$, $M = (c,0)$ ve $K = (a+c, b)$ alalım. Şekilden görüldüğü gibi

$$\overset{\triangle}{OSM} \sim \overset{\triangle}{QRK} \Rightarrow S\hat{O}M = R\hat{Q}K\ .$$



$\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$ olduğundan, $Q\hat{O}M > S\hat{O}M = R\hat{O}K$ ve burada $O\hat{Q}R < 180°$ olur. O halde Q noktası $\overset{\triangle}{OPR}$ 'nin içindedir.



Q noktasından OQ 'ya çıkılan dikme ve RQ 'ya çıkılan dikme PR 'yi, sırasıyla L ve N noktalarında kessin. $O\hat{Q}R < 180°$ olduğundan, $L\hat{Q}N > 0°$ olur. Böylece $PL + PO \geq LO \geq OQ$ ve $NR > RQ$ 'dur. O halde, $OP+PL+LN+NR > OQ + QR$; yani $OP + PR > OQ + QR$ 'dir ki, bu $b + \sqrt{(a+c)^2 + d^2} \geq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$ olduğunu gösterir.

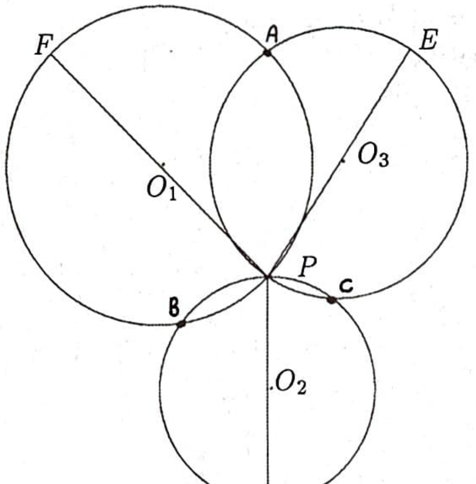
(**Çözen:** *Türkay Yolcu (Ankara)*).

Y.213. P, ABC üçgeni içinde alınan bir nokta olmak üzere; $\overset{\triangle}{PAB}$, $\overset{\triangle}{PBC}$, $\overset{\triangle}{PCA}$ üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları, sırasıyla, R_1, R_2, R_3 olsun. Buna göre,

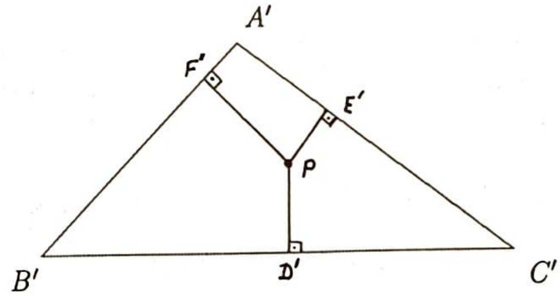
$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \geq \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Ahmet Çetintaş; Ankara Samanyolu Lisesi)

Çözüm.



Sözü edilen üç çemberin P 'den geçen çaplarının çemberi ikinci kez kestiği noktalar D, E, F olsun. Buna göre $PE = 2R_3, PD = 2R_2, PF = 2R_1$ olacaktır. Şimdi P noktasına göre düzlem üzerinde bir evirtim fonksiyonu tanımlayalım. P noktası C noktasını PC doğrusu üzerinde $PC.PC' = 1$ olacak şekilde (C 'ye yakın tarafta) bir C' noktasına götürsün. Buna göre yukarıdaki şekli P noktasına göre evirtirsek,



haline gelir. Bu şekilde P, ABC üçgeninin içinde bir nokta ve D', E' ve F', P noktasının kenarlara olan dikme ayaklarıdır. Bu durumda Erdös-Mordell eşitsizliğine göre

$$PA' + PB' + PC' \geq 2(PD' + PE' + PF')$$

olacaktır.

$$PA.PA' = 1\ ,\ PB.PB' = 1\ ,\ PC.PC' = 1\ ,$$

$$PD.PD' = 1\ ,\ PE.PE' = 1\ ,\ PF.PF' = 1$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitsizliklerde bunları yerlerine yerleştirirsek,

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \geq \frac{2}{PD} + \frac{2}{PE} + \frac{2}{PF}$$
$$= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

elde ederiz.

Y.214. Merkezi bir A_1 noktasında ve yarıçapı 1 olan dairenin içinde, A_1 'den farklı, rasgele, A_2, A_3, ... , A_{100} noktaları alınmıştır. $1 \leq k \leq 100$ olan her k tamsayısı için A_k 'dan A_1, A_2, ... , A_{k-1}, A_{k+1}, ... , A_{100} noktalarına olan uzaklıklardan en küçüğü a_k ile gösteriliyor. Bu durumda

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 < 9$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Merkezi A_k, $(k = 1, 2, ..., 100)$ noktasında ve yarıçapı $\frac{a_k}{2}$ olan daireye D_k diyelim. D_k 'ların birbiriyle kesişmediği açıktır. Öte yandan, D_k 'ların hepsi merkezi A_1 'de ve yarıçapı $1\frac{1}{2}$

olan dairenin içinde bulunurlar. Bundan dolayı, D_k 'ların alanlar toplamı $1\frac{1}{2}$ yarıçaplı dairenin alanından küçük olacaktır:

$$\pi.((\frac{a_1}{2})^2 + (\frac{a_2}{2})^2 + \ldots + (\frac{a_{100}}{2})^2) < \pi(\frac{3}{2})^2 .$$

Y.215. Açıları arasında, $\hat{C} = 3\hat{B} = 9\hat{A}$ bağıntısı bulunan bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunluklarını göstermek üzere, $bc + ca + ab$ ifadesinin, bu üçgene ait çevrel çemberin R ile gösterilen yarıçapı cinsinden değerini bulunuz.

Çözüm. A', B', C' : yükseklik ayaklarını; H : ortosantrı, O : çevrel çemberin merkezini göstersin.

$$\hat{A} = \frac{\pi}{13},\ \hat{B} = \frac{3\pi}{13},\ \hat{C} = \frac{9\pi}{13}$$

olup, n doğal sayısı için $\cos\frac{n\pi}{13} = -\cos(13-n)\frac{\pi}{13}$ ve

$1 + \cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{4\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{22\pi}{13} + \cos\frac{24\pi}{13} = 0,$

$\cos\frac{2\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{12\pi}{13} = \cos\frac{14\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{24\pi}{13} = -\frac{1}{2},$

'dir.

$$x = \cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13},$$

$$y = \cos\frac{4\pi}{13} + \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{12\pi}{13}$$

kabul edildiğinde $\cos A + \cos B + \cos C = -y$ ve $4x^2 + 2x - 3 = 0$ bulunur. Buradan

$$x = \frac{\sqrt{13}-1}{4},\quad y = \frac{-\sqrt{13}-1}{4}$$

elde edilir. ($x + y = -\frac{1}{2}$ ve $xy = -\frac{3}{4}$ 'tür.)

$$|HA'| = |2R\cos B\cos C| = -2R\cos B\cos C$$
$$= -R[\cos(B-C) + \cos(B+C)],$$
$$|HB'| = -R[\cos(C-A) + \cos(C+A)],$$
$$|HC'| = R[\cos(A-B) + \cos(A+B)],$$
$$|HA'| + |HB'| - |HC'| = R(-x-y) = \frac{R}{2}$$

bulunur.

$$|OI|^2 + |OH|^2 = R^2 - 2Rr + 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2,$$
$$2Rr = 8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$
$$2Rr = 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$
$$= 2R^2(-y-1),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= 4R^2(3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)$$
$$= 2R^2(3-x)$$

ve buradan

$$|OI|^2 + |OH|^2 = R^2(6 + 2x + 2y) = 5R^2$$

bulunur ve

$$bc + ca + ab$$
$$= 4R^2(\sin B\sin C + \sin C\sin A + \sin A\sin B)$$
$$= 2R^2[\cos(B-C) - \cos(B+C) + \cos(C-A) - \cos(C+A)\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$
$$= 2R^2(x-y) = R^2\sqrt{13}$$

elde edilir.

(**Çözen:** *Naim Uygun (Beşiktaş-İstanbul)*).

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 750.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya (Şarampol) Şubesi 6207-30000-271783 no'lu *Doğan Çoker* hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3
Cilt 2	Sayı: 1,5
Cilt 4	Sayı: 4
Cilt 5	Sayı: 1
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 8	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 9	Sayı: 1,2,3,4

C İ L T 9 D İ Z İ N İ

Yurtiçi Kargo

BU DERGİ **YURTİÇİ KARGO SERVİSİ A.Ş.**
TARAFINDAN ÜCRETSİZ OLARAK DAĞITILMAKTADIR.