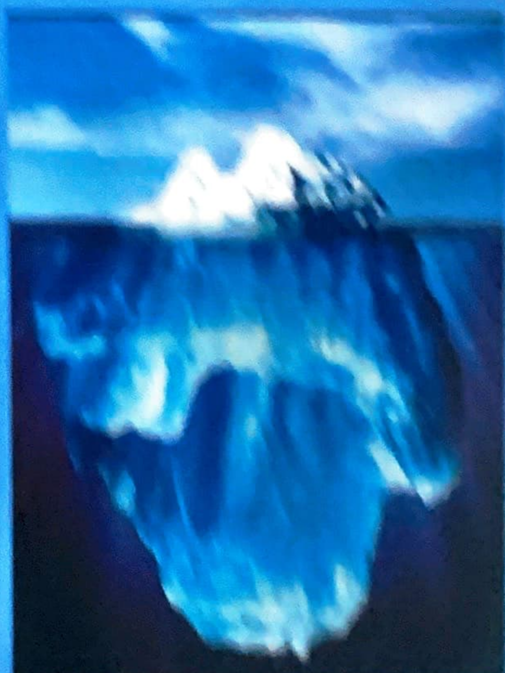
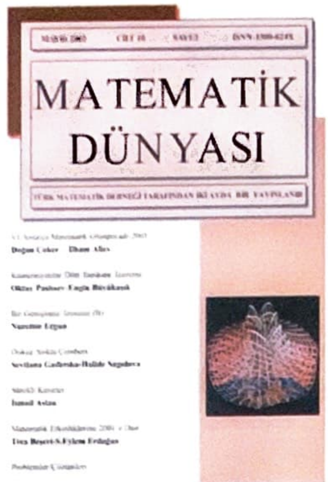
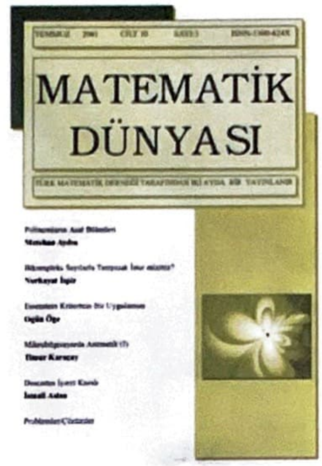
TEMMUZ 2002 CİLT 11 SAYI 3 ISSN 1300-624X

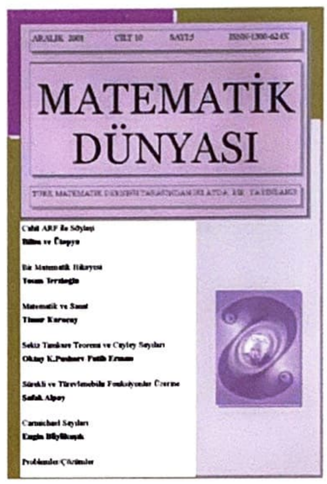
MATEMATİK DÜNYASI

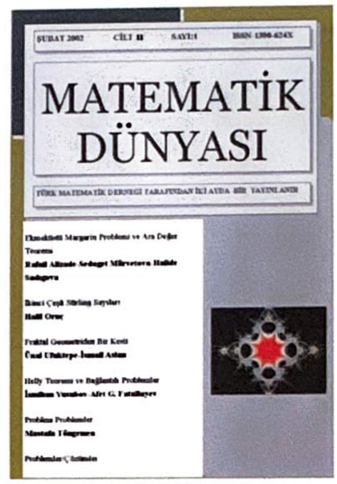
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

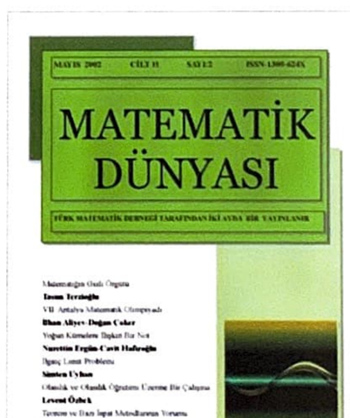












Eski ciltler aşağıdaki dernek adresin temin edilebilir:

Türk Matematik Derneği Sabancı Üniversitesi Karaköy İletişim Merkezi Bankalar Cad. No:2
80020 Karaköy-İSTANBUL
Tel: (0212) 292 4939/1506 Faks: (0212) 252 3293
h.senkon@iku.edu.tr tmd@sabanciuniv.edu.tr

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Tekrar birlikte olmanın keyfini yaşıyoruz. Abonelerimizin Matematik Dünyasına sahip çıkmaları, dergi zamanında ellerine ulaşmadığında anında bizi aramaları, Matematik Dünyasının liselerden, üniversitelerden, ülkemizin en ücra köşelerinden ve cezaevlerinden abonelerinin olması doğrusu bizleri çok mutlu kılıyor.

11. Cilt'in üçüncü sayısı yine dolu dolu sizlerin karşısında. Antalya ikinci aşama matematik olimpiadı soruları ve çözümleri, TÜBİTAK'ın proje yarışmalarında derece almış projeleri, geometeride ilginç bulacağınızı düşündüğümüz dönel uzayları dileriz zevkle okursunuz. Lütfen yazılar ile ilgili her türlü eleştirinizi bize ulaştırın ve gelecek sayılar için bizlere ışık tutun.

Yayın kurulumuzda yer alan Doğan Çoker, İsmail Aslan ve Engin Büyükaşık'a dergimize bugüne kadar yapmış oldukları katgılarından dolayı teşekür ediyoruz. Tekar hatırlatmakta yarar görüyoruz, Problemler ve Çözümleri bölümümüze bir cilt boyunca en fazla doğru yanıtı gönderen okurlarımıza süpriz hediyelerimiz olacak.

MATEMATİK DÜNYASI

İÇİNDEKİLER

Matematik Dünyası
SAHİBİ : Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU : Ünal Ufuktepe, Rafail Alizade, Oktay Pashaev, Ali İhsan Neslitürk, Murat Atmaca, Behiye Ubuz
DİZGİ : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafindan, Matematik Vakfınınn işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gun ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2002) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 12.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 10.000.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği' nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)Parakende satış fiyatı 3.000.000 TL.

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçe-Urla 35435-İZMİR

Abone İşleri ve Dağıtım: Tina Beşeri-Günnur Ufuktepe 0 (232) 4987525-4987541, Dizgi: Hakan Kutucu, Faks : 0(232) 4987509-4987598 ; E-Posta : mdunyasi@galois.iyte.edu.tr

VII. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI-2002 2.SEÇME SINAVI (SORULAR VE KISA ÇÖZÜMLER)

İlham Aliyev - Mutlu Güloğlu - Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Bu yıl yedincisi düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatları'nın ilk aşaması 20 Nisan 2002 'de test olarak, ikinci aşaması da 18 Mayıs 2002 'de yazılı olarak gerçekleştirildi. Artık, geleneksel bir şekle gelen Antalya Matematik Olimpiyatları 'nın ilki 1996 yılında Antalya, Isparta merkez okulları ile Alanya ve Kaş ilçesinden okulların katılımıyla yapılmıştı. Bu yıldan sonra okulların gösterdiği ilginin bize verdiği heyecanın da etkisiyle olimpiyat ulusal alanda yapılmaya başlandı.

Matematik Olimpiyatlarının asıl amacı yetenekli çocukları, bir başka deyişle, Türkiye 'nin genç dehalarını ortaya çıkarmak ve bu yolla Türkiye 'nin geleceğine katkıda bulunmaktır. Bunun nedeni ise çok açıktır; bilimde ilerlemeyi ve büyük buluşları genellikle sıradan bilim adamları değil, dahiler gerçekleştirmişlerdir.

Antalya Matematik Olimpiyadını Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü ile Akdeniz Üniversitesi Sağlık Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığına bağlı Akdeniz Üniversitesi Matematik Kulübü birlikte düzenlemektedir. Türkiye çapında TÜBİTAK'ın yaptığı olimpiyat sınavları dışında matematik olimpiyadı düzenli olarak bir tek Akdeniz Üniversitesinde gerçekleştirilmektedir. Matematik Olimpiyatlarının Akdeniz Üniversitesince yapılabilmesinin başlıca nedeni, olimpiyatları düzenlemenin güçlüğünün yanı sıra, Akdeniz Ünivesitesinin akademik personelinden, idari personeline ve hatta öğrencisine kadar bu işin önemini kavraması ve fedakarca bu konuya ilgi göstermesidir.

İlk Antalya Matematik Olimpiyadı 1996'da o zamanki bölüm başkanımız Prof. Dr. Halil İ. Karakaş ve Doç. Dr. İlham Aliyev tarafından gerçekleştirilmiştir. 2000 yılındaki V. Antalya Matematik Olimpiyadının düzenlenmesinde, geçtiğimiz yıl kaybettiğimiz değerli hocamız Dr. Fikri Gökdal'ın da büyük emeği geçmiştir. Özellikle Dr. Fikri Gökdal yıllarca matematik olimpiyatı düşüncesinin yurdumuzda okullara yaygınlaşmasında büyük rol oynamıştır. Bunun yanı sıra saydığımız bu üç kişi, yıllardır Türk Ulusal Olimpiyat Takımınının eğitiminde görev alan ve takımla birlikte yurtdışında bizi temsil eden değerli hocalarımız arasında yer almaktadır. Bu yılki olimpiyatların sorularının hazırlanmasında Prof. Dr. Doğan Çoker, Doç. Dr. İlham Aliyev, Doç. Dr. Gabil Adilov, Araş. Gör. Mutlu Güloğlu, Araş. Gör. Melih Eryiğit ve Araş. Gör. Ramazan Tınaztepe emek vermiştir. Soruların değerlendirilmesinde ise tüm Matematik Bölümü elemanları çalışmıştır. Bunun yanında olimpiyatın organizasyonunu da başta Üniversitemizin Sağlık Kültür ve Spor Dairesi Başkanı Cemal Öcal olmak üzere bu birimin tüm personelinin katkısı çok büyüktür.

Geçtiğimiz yıllarda olduğu gibi, bu yıl da Türkiyeyi Dünya ve Balkan Matematik Olimpiyatlarında temsil edip, madalya alan öğrencilerin hemen hepsi Antalya Matematik Olimpiyatına da katıldılar (ve doğal olarak çok iyi performans gösterdiler). Bu da Türkiye çapında Antalya Matematik Olimpiyatlarına gösterilen ilginin açık kanıtıdır. Antalya Matematik Olimpiyadına Erzincan'dan Trabzon'a, Edirne'den Urfa'ya kadar Türkiye'nin dört bir yanından öğrenciler katılması Türk Matematiğinde bir uyanışın habercisidir. Bunda da Akdeniz Üniversitesinin matematikseverleri olarak az da olsa bir katkımız olduğu için gurur duyuyoruz.

LİSE I SORULARI

(1) 7 balıkçı toplam 100 balık yakalamıştır. Herhangi iki balıkçının farklı sayıda balık yakaladığını bilerek, birlikte en az 50 balık yakalamış olan üç balıkçının varlığını kanıtlayınız.

(2) Toplamları bir doğal sayının 2002. kuvveti olan 2002 tane ardışık tek sayı bulunuz.

(3) Tamsayı katsayılı $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$ denkleminin rasyonel kökü varsa, a, b ve c sayılarından en az biri çift sayıdır; kanıtlayınız.

(4) a, b ve c sayıları bir dik üçgenin kenar uzunlukları ise,

$$(3abc)^3 > (a^3-b^3-c^3)(b^3-c^3-a^3)(c^3-a^3-b^3)$$

eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz.

(5) Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $[AB]$ kenarı üzerinde alınmış bir D noktası için $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ eşitliği sağlanıyors $\overset{\wedge}{ACB}$ açısının geniş açı olduğunu gösteriniz.

LİSE I KISA ÇÖZÜMLERİ

(1) En çok balık tutan balıkçıya "birinci", geriye kalanlar içinde en çok balık tutan balıkçıya "ikinci" v.s. diyerek, balıkçıları numaralayalım. Bu numaralamada ilk üç balıkçının tutmuş olduğu balık sayısının 50 'den az olmadığını görelim.

3.balıkçı ≥ 16 sayıda balık yakalamış ise, her balıkçı farklı sayıda balık yakaladığından, 2.balıkçı ≥ 17 ve 1.balıkçı ≥ 18 balık yakalamış olacaktır ve bunların toplam sayısı $\geq 16+17+18=51$ olacaktır.

Eğer 3.balıkçı ≤ 15 tane balık yakalamış olsaydı, bu takdirde, 4.balıkçı ≤ 14; 5.balıkçı ≤ 13; 6.balıkçı ≤ 12 ve 7.balıkçı ≤ 11 tane balık yakalamış olurdu. Bu durumda son dört balıkçı, toplam olarak, $\leq 14+13+12+11=50$ balık yakalamış olduğundan, ilk üç balıkçı $\geq 100-50=50$ balık yakalamış olurdu.

(2) $(n-2001)+(n-1999)+(n-1997)+\cdots+(n-1)+(n+1)+\cdots+(n+1997)+(n+1999)+(n+2001) = 2002.n$ eşitliğinde $n=2002^{2001}$ koyarsak, eşitliğin sol tarafı 2002 tane ardışık tek sayının toplamı ve sağ tarafı ise 2002^{2002} olacaktır.

Not: Seçenek sayısı sonsuzdur: her $K \in \mathbb{N}$ için $n = 2002^{2001}.K^{2002}$ alabiliriz.

(3) "Düz Çözüm": Denklemin kökleri için iyi bilinen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

formülüne göre, köklerden birinin rasyonel olmasından $\sqrt{b^2-4ac}$ sayısının rasyonel olması çıkar. Öte yandan, b^2-4ac tamsayı olduğuna göre $\sqrt{b^2-4ac}$ rasyonel sayısı bir tamsayıdır. $\sqrt{b^2-4ac}=k$ dersek,

$$b^2-4ac=k^2 \Rightarrow (b-k)(b+k)=4ac.$$

b bir çift sayı ise, iş biter. b 'nin tek sayı olduğunu varsayalım: $b = 2s + 1$. O halde k da bir tek sayıdır: $k = 2r + 1$. Yukarıdaki eşitlikte yerine koyarsak,

$$4(s-r)(s+r+1) = 4ac \Rightarrow (s-r)(s+r+1) = ac$$

olur. Sonuncu eşitlikte sol taraf her zaman çift sayı olduğundan, sağ taraf da bir çift sayıdır.

"Olimpiyatik" Çözüm: $x = \frac{y}{a}$ dersek, denklem, $y^2 + by + ac = 0$ şekline düşer. x, ilk verilen denklemin rasyonel kökü ise, $y = ax$ sayısı da yeni denklemin rasyonel kökü olacaktır. Yeni denklemin kökleri

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

rasyonel olduğundan, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ rasyoneldir ve dolayısıyla tamsayıdır. O halde, b 'nin tek veya çift oluşuna bağımlı olmaksızın, y_1 ve y_2 de birer tamsayıdır. Vieta Teoremine göre,

$$-(y_1 + y_2).y_1y_2 = bac$$

'dir. Sol taraf çift sayı olduğundan, sağ taraf da bir çift sayıdır.

(4) Genelliği bozmadan, $a > b \geq c$ varsayabiliriz. Yani, a hipotenüsün uzunluğu olup, $a^2 = b^2 + c^2$ 'dir.

$$a^3 = a.a^2 = a(b^2 + c^2) = ab^2 + ac^2 > b^3 + c^3$$

olduğundan, problemde verilen eşitsizliğin sağ tarafında ilk terim pozitiftir. Son iki terimin her biri negatif olduğundan, çarpımları pozitiftir. Son iki terimi çarparsak,

$$(a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) = a^6 - (b^3 - c^3)^2 = a^6 - b^6 - c^6 + 2b^3c^3 \tag{1}$$

olur. Diğer yandan, $a^2 = b^2 + c^2$ eşitliğinde her iki yanın küpünü alırsak,

$$a^6 = b^6 + c^6 + 3(b^2c^4 + c^2b^4) < \cdots (c^2 < a^2 \quad \text{ve} \quad b^2 < a^2) \cdots < b^6 + c^6 + 3(b^2c^2a^2 + c^2b^2a^2)$$

$$\Rightarrow a^6 - b^6 - c^6 < 6a^2b^2c^2.$$

Bunu (1) 'de yazarsak,

$$(a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) < 6a^2b^2c^2 + 2b^3c^3 < \cdots (bc < a^2) \cdots < 6a^2b^2c^2 + 2b^2c^2a^2 = 8a^2b^2c^2$$

olur.

Böylece,

$$0 < (a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) < 8a^2b^2c^2\ . \tag{2}$$

Şimdi, problemdeki eşitsizlikte ilk terim için

$$0 < a^3 - b^3 - c^3 < \tfrac{3}{2}abc \tag{3}$$

sağlandığını görelim. Üçgen eşitsizliğinden $a - b - c < 0 \Rightarrow (a - b - c)^3 < 0 \Rightarrow$

$$a^3 - b^3 - c^3 + 3a(b^2 + c^2) - 3b(a^2 + c^2) - 3c(a^2 + b^2) + 6abc < 0\ .$$

Kosinüs Teoreminden

$$a^2 + c^2 = b^2 + 2ac\cos B\ ,\ a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos C\ ,\ b^2 + c^2 = a^2.$$

Bunu bir üstteki eşitsizlikte gözönüne alırsak $4(a^3 - b^3 - c^3) + 6abc(1 - \cos B - \cos C) < 0 \Rightarrow$

$$4(a^3 - b^3 - c^3) < 6abc(\cos B + \cos C - 1) < 6abc(1 + 1 - 1) = 6abc \Rightarrow a^3 - b^3 - c^3 < \frac{6}{4}abc = \frac{3}{2}abc$$

olur.

Şimdi, (2) ve (3) eşitsizliklerini taraf tarafa çarparsak,

$$0 < (a^3 - b^3 - c^3)(a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) < \frac{3}{2}abc.8a^2b^2c^2 = 12a^3b^3c^3 < (3abc)^3$$

elde ederiz.

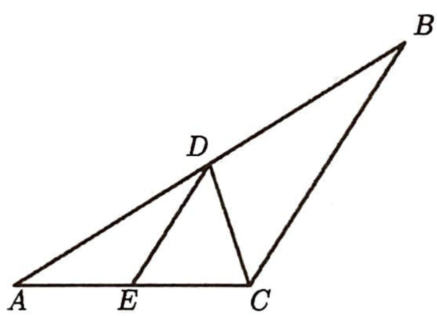
Not 1: İspat yolu incelenirse, eşitsizliğin dar açılı üçgenler için de doğru olduğu görülebilir. ($b^2+c^2 = a^2$ yerine $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$ yazılacak.)

Not 2: Lise I 'in en zor sorusu, gördüğünüz gibi, bu sorudur. Çok üzülerek ve sevgili öğrencilerimizden özür dileyerek belirtelim ki, bu sorunun ifadesinde önemli bir yazı hatası yapılmış ve "bir dik üçgenin" ifadesi yerine "bir üçgenin" ifadesi yazılmıştır. Bunu biz sınavın bitimine çok az kaldığında fark ettik ve yapacağımız bir şey olmadığından, bir açıklama yapmadık.

Sınavın değerlendirilmesi aşamasında jüri üyeleri, yazım hatasından dolayı ortaya çıkacak aksaklıkları minimuma indirmek için gereken çabayı göstererek, sözkonusu problemin değerlendirilmesi için makul bir formül buldular.

Onu da belirtelim ki, dik ve dar açılı üçgenler için doğru olan eşitsizlik, bazı geniş açılı üçgenler için tersine dönebilir.

(5)



$DE \parallel BC$ çizelim.

$$\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Öte yandan, problemin verilerine göre, $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$.

Demek ki, $|DE| = |DC|$ 'dir. Yani, $\overset{\triangle}{DEC}$ bir ikizkenar üçgendir. Öyleyse,

$$D\hat{E}C < 90^o \Rightarrow D\hat{E}A > 90^o \Rightarrow B\hat{C}A = D\hat{E}A > 90^o .$$

LİSE II SORULARI

(1) a, b, c ve $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ sayıları

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy + 1 & = & az \\ yz + 1 & = & bx \\ zx + 1 & = & cy \end{array} \right\}$$

eşitliklerini sağlayan pozitif tamsayılar olsunlar. Bu takdirde a, b ve c sayılarının en büyüğü kaçtır?

(2) $2a_n + a_{n-1}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$ dizisinin sınırlı olması halinde a_n, $(n = 0, 1, 2, ...)$ dizisinin de sınırlı olacağını gösteriniz.

(3) Düzlem üzerinde, herhangi üçü doğrusal olmayan 2002 tane nokta işaretlenmiştir. Öyle 3 işaretlenmiş nokta bulunabilir ki, bu noktalardan geçen çember, işaretlenmiş noktalardan hiç birini içinde bulundurmasın; kanıtlayınız.

(4) a, b, p, q, r, s pozitif tamsayıları

$$qr - ps = 1 \text{ ve } \frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$$

bağıntılarını sağlamaktadırlar. Bu durumda, $b \geq q + s$ eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz.

(5) Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $|BC| > 2.|AB|$ eşitsizliği sağlansın. Sadece pergel ve cetvel kullanarak, $[AC]$ kenarı üzerinde,

$$|AB| + |BD| + |DA| = |BC|$$

eşitliğini sağlayan D noktasının yerini bulunuz.

NOT: Cetvel uzunluk ölçmeye değil, yalnızca herhangi iki noktadan geçen doğruyu çizmeye yarar.

LİSE II KISA ÇÖZÜMLERİ

(1) x, y ve z sayıları aralarında asal olduğu için üçü de farklı sayılardır. Genelliği bozmadan $2 \leq x < y < z$ varsayabiliriz. Verilen eşitlikleri taraf taraf çarparsak,

$$xyz(xyz + x + y + z) + (xy + yz + zx + 1) = abcxyz$$

olur. Buradan, $xy + yz + zx + 1$ sayısının xyz sayısına bölündüğünü söyleyebiliriz. Dolayısıyla,

$$xy + yz + zx + 1 = A.xyz$$

sağlanacak biçimde $A \in \mathbf{N}$ vardır.

Şimdi,

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz}$$

eşitliğinden $A \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3.4} = \frac{27}{24}$ elde edilir ve buradan, A doğal sayı olduğu için, $A = 1$ çıkar.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 1 \text{ ve } 2 \leq x < y < z$$

bağıntılarından $x = 2$ elde edilir. Gerçekten, $x \geq 3$ olursa, $y \geq 4$ ve $z \geq 5$ olacağından,

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3.4.5} = \frac{48}{60} < 1$$

çelişkisi elde edilir.

Şimdi de $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2yz}$ eşitliğinden $y = 2 + \frac{5}{z-2}$ olur. $z-2$ sayısı 5'in bir böleni olacağından, $z = 3$ veya $z = 7$ olmalıdır. $x < y < z$ eşitsizliğinden dolayı, $z = 7$ ve dolayısıyla, $y = 3$ olur.

Sonuçta $x = 2$, $y = 3$, $z = 7$ değerlerini verilen denklemler sisteminde yerine koyarsak, $a = 1, b = 11, c = 5$ elde edilir. Buradan, $max\{a,b,c\} = 11$ olur.

(2) $2a_n + a_{n-1} = b_n$ diyelim. Varsayıma göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $|b_n| \leq C$ sağlanacak şekilde bir C sabiti vardır. Her $n \geq 1$ için $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_n$ sağlandığını gözönüne alarak, şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}b_{n-1}) + \frac{1}{2}b_n \\
&= \frac{(-1)^2}{2^2}a_{n-2} + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n \\
&= \frac{(-1)^2}{2^2}(-\frac{1}{2}a_{n-3} + \frac{1}{2}b_{n-2}) + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n = \\
&= \frac{(-1)^3}{2^3}a_{n-3} + \frac{(-1)^2}{2^3}b_{n-2} + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n = \cdots = \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}a_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}b_1 + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}}b_2 + \cdots + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n.
\end{aligned}$$

Buradan,

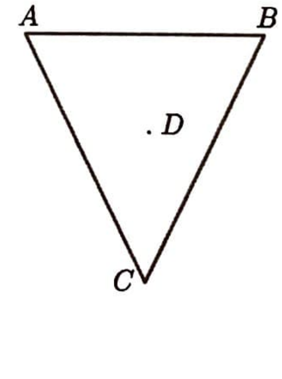
$$|a_n| \leq \frac{1}{2^n}|a_0| + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2})C \leq |a_0| + C$$

elde edilir.

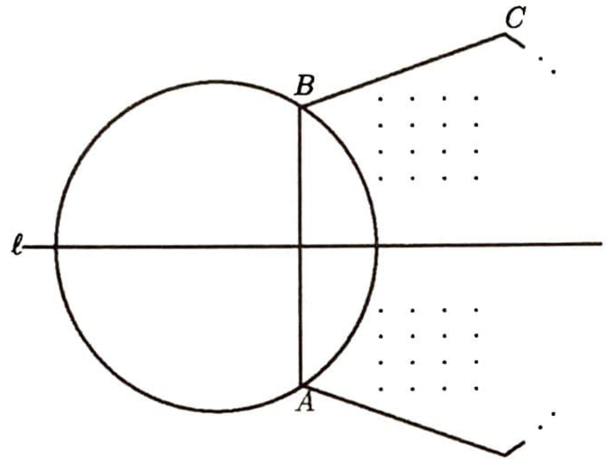
(3) "Çözüm 1" İşaretlenmiş noktalar içinde birbirine en yakın olan ikisini (eğer böyle ikili sayısı birden fazla ise, ikililerden herhangi birini) alalım ve bu noktalara A ve B diyelim. Çapı $|AB|$ olan çember içinde hiç işaretlenmiş nokta bulunmayacaktır. Geriye kalan 2000 tane noktayı herhangi bir şekilde numaralayalım: $C_1, C_2, \cdots, C_{2000}$. Şimdi, A, B ve C_k, $(k = 1, 2, \cdots, 2000)$ noktalarından geçen 2000 tane çembere bakalım (bu çemberler içinde çakışanlar da olabilir). $A\hat{C_k}B$, $(k = 1, 2, \cdots, 2000)$ açıları içinde en büyüğü $A\hat{C}B$ olsun. İşte, A, C, B noktalarından geçen çemberin içinde hiç işaretlenmiş nokta bulunmayacaktır. ($|AB| \leq |AC|$ ve $|AB| \leq |BC|$ olduğunu unutmayınız!)

Not: noktaları üçer üçer alarak, onlardan geçen çemberlerin (en fazla $\binom{2002}{3}$ tane çember) en küçüğü yardımıyla ispat yapmak zor olabilir.

Örnek olarak, şekilde işaretlenmiş noktalar bir eşkenar üçgenin köşe noktaları ve merkezi olursa, herhangi 3 işaretlenmiş noktadan geçen çemberin yarıçapı aynıdır. Buna karşın, D noktası, A, B, C noktalarından geçen çemberin içinde bulunuyor.



"Çözüm 2" İşaretlenmiş noktaların her birini içinde veya bir köşesinde bulunduran en küçük konveks çokgeni düşünelim. O halde köşelerin her biri işaretlenmiş noktalar olacak ve kenarlar üzerinde başka işaretlenmiş nokta bulunmayacaktır. (Çünkü noktaların herhangi üçü doğrusal değildir.)



Şimdi, şekilde, A ve B noktalarını içeren tüm çemberleri düşünelim. $[AB]$ parçasının ortasından geçen ve $[AB]$ 'ye dik olan ℓ doğrusu üzerinde alınmış herhangi noktayı merkez kabul ederek, A ve B 'den geçen çemberler çizersek, A ve B 'den geçen tüm çemberler ailesini elde edebiliriz.

Şimdi merkezi ℓ üzerinde kaydırarak, öyle çember çizilebilir ki, üzerinde A ve B dışında en az bir işaretlenmiş nokta bulunur ve çemberin kapsadığı düzlem bölgesi içinde hiç işaretlenmiş nokta bulunmaz. (Ayrıntıları size bırakıyoruz!)

(4)

$$\tfrac{a}{b} - \tfrac{p}{q} = \tfrac{aq-pb}{bq} > 0 \Rightarrow aq - pb > 0 \Rightarrow aq - pb \geq 1, \qquad (1)$$

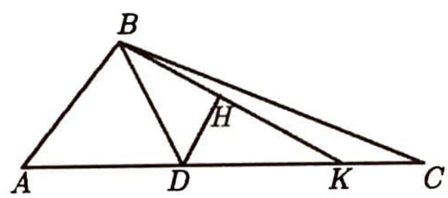
$$\tfrac{r}{s} - \tfrac{a}{b} = \tfrac{rb-as}{sb} > 0 \Rightarrow rb - as > 0 \Rightarrow rb - as \geq 1. \qquad (2)$$

(1) eşitsizliğinin her iki yanını s ile ve (2) eşitsizliğinin her iki yanını q ile çarparak taraf tarafa toplarsak,

$$qrb - spb \geq s + q \Rightarrow b(qr - sp) \geq s + q \Rightarrow qr - sp = 1$$

olduğu için $b \geq s + q$ elde edilir.

(5)



Şekilde, D noktasının, $|AB| + |BD| + |AD| = |BC|$ eşitliğini sağlayan nokta olduğunu varsayalım. Üçgenin AC kenarı üzerinde $|DK| = |DB|$ sağlayacak biçimde K noktası alırsak,

$$|AK| = |AD| + |DK| = |AD| + |DB| = |BC| - |AB|$$

olur. Bu, bize D noktasını bulmanın yolunu gösterir: AC kenarı üzerinde, A noktasından başlayarak, uzunluğu $|BC| - |AB|$ olan AK doğru parçasını ayırıyoruz. K ve B noktalarını birleştiren BK parçasının orta noktası olan H 'den BK 'ya dik olan doğruyu çiziyoruz. İşte, bu doğrunun AC ile kesişim noktası istediğimiz D noktası olacaktır.

Gerçekten, $|BD| = |DK|$ olduğundan,

$$|BC| - |AB| = |AK| = |AD| + |DK| = |AD| + |DB| \Rightarrow |BC| = |AB| + |AD| + |DB|$$

bulunur.

Not: Pergel ve cetvel kullanarak, bir doğru parçasının ortasından geçen ve ona dik olan doğrunun nasıl çizilebildiğini sizlere bırakıyoruz.

"GÜNESİ BALÇIKLA GEL DE SIVA.
GİZLİ TÜRKÜLERİ GEL DE SÖYLE.
BİR GÜZEL İNCİ ÇIKARDI AKIL.
DÜŞÜNCEMİN DENİZİNDEN.
SIKIYSA GEL DE DEL. "
Ömer Hayyam

SAYI EŞİTLİĞİ MATEMATİK DEĞİLDİR: 11 EYLÜL'Ü HATIRLAMAK

Doğan Kökdemir, Ayşegül Özgün ve Serap Ergen
Başkent Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Eleştirel ve Yaratıcı Düşünme Araştırmaları Laboratuvarı
http://www.elyadal.org

Terör ve terörün bir sonucu olarak binlerce insanın ölümünün arkasında neler olduğunu anlamak, daha doğrusu bu tür bir kötülüğün neden olduğu hakkında hipotezler üretmek insan olmanın vazgeçilmez bir davranış özelliğidir. Bizler, çevremizde olup bitenler hakkında amatör bilim insanları gibi davranmaya çalışmaktayız [1]. Doğruyu aramaya yönelik bu çalışmada her zaman rasyonel davrandığımızı söylemek çok gerçekçi olmayacaktır çünkü çoğu zaman kuramları test edip yanlışlama yönünü seçmek yerine, kararlarımızı önceden belirleyip onu doğrulayacak veriler peşinde koşmayı tercih ediyoruz. Bilimsel çalışmalar için önemli olan yanlışlamacı yaklaşım [3] söz konusu insan davranışı olduğunda doğrulamacı bir şekle bürünmektedir. Daha da ilginç olan doğal afetler ve terör gibi pek çok kişiyi ilgilendiren trajik olaylarda nedensellik içeren açıklamaların mistik ögeler içermesi çok sık görülen bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

New York'daki İkiz Kuleler'e düzenlenen saldırıların arkasında da bu tür açıklamalar hemen kendisini gösterdi. Saldırının 11 Eylül tarihinde gerçekleşmiş olması mistik nedenler peşinde koşanlar için ilk ipucunu veriyordu: **11** sayısı. **11**'in bir asal sayı olması da herhalde dikkatleri daha çok çekmeyi başarmıştır. 11 Eylül saldırısı ile **11** sayısı arasındaki belirtilen "mistik" ilişkilerin bazı örnekleri şunlardır (http://www.september11newscom/Mysteries2.htm):

1. Saldırı tarihi: 11 / 9 $1 + 1 + 9 = \mathbf{11}$,
2. "September 11" yazısı 9 harf ve 2 rakamdan oluşuyor $9 + 2 = \mathbf{11}$,
3. 11 Eylül yılın 254. günü $2 + 5 + 4 = \mathbf{11}$,
4. 11 Eylül'den sonra yılın sonuna **111** gün kalıyor,
5. İkiz kuleler yıkılmadan önce yan yana durdukları için **11**'e benziyorlardı,
6. "Nostradamus" **11** harften oluşan bir isim,
7. "Afghanistan" **11** harften oluşuyor,
8. "The Pentagon" **11** harften oluşuyor,
9. Uçaklardan "Flight **11**"de 92 kişi bulunuyordu $9 + 2 = \mathbf{11}$,
10. Uçaklardan "Flight 175"de 65 kişi bulunuyordu $6 + 5 = \mathbf{11}$,
11. İsrail Başbakanı, "Ariel Sharon" **11** harf,
12. İsrail Dışişleri Bakanı, "Shimon Peres" **11** harf,
13. ABD'nin bağımsızlık günü: 4 Temmuz $4 + 7 = \mathbf{11}$,
14. Bir önceki ABD Başkanı, Bill Clinton **11** harf.

Doğruyu söylemek gerekirse, yukarıdaki sayılar ve eşitlikler gerçekten ilginç görünmektedir. Sokaktaki adam için bu kadar ilginç eşitliğin yanyana gelmesi sadece ve sadece tek bir nedene bağlı olacaktır: 11 Eylül saldırılarının gerçekten mistik bir yönü var!

Tuhaf Rastlantıların Olasılığı: Bütün bu eşitliklerin anlamlı olduğunu bir an için kabul edelim. Sonucu **11** sayısını veren bütün bu örnekler sadece basit bir rastlantı ile açıklanabilir mi? Bir olayın olma olasılığı ile herhangi bir olayın olma olasılıkları birbirilerinden farklıdır. Örneğin, 49 sayı arasından 6 tanesini tahmin etmeye çalışılan Sayısal Loto'da herhangi bir sayı dizisini tahmin edip ödülü kazanma şansınız C(49:6) iken, önceden belirlenmiş bir sayı dizesini tahmin etme (Örnek: 1, 23, 25, 32, 33, 45) olasılığı (1/49)*(1/48)*(1/47)*(1/46)*(1/45)*(1/44) olacaktır. Her ne kadar loto gibi bir şans oyununda kazanma şansı her iki koşulda da çok düşük olsa da yine de sayıların önceden belirlendiği bir olayın olma olasılığı gelişigüzel bir düzenlemeye göre çok daha düşük olacaktır.

11 Eylül saldırılarına bu açıdan bakıldığında, eğer olaylar olmadan önce 11 Eylül saldırısını öngördüğü iddia edilen olaylar saptanmış olsaydı; diğer bir deyişle iddialar öncül (a priori) olabilseydi yapılan çıkarımların bilimsel olduğunu söyleyebilirdik, ancak, olaylar olup bittikten sonra geriye dönük (post hoc) kanıt aramaların bilimsel olduğunu söylemek çok zor. Örneğin, bir an için 11 Eylül'de değil 13 Eylül'de olduğunu düşünelim. Bu tür bir tarih değişikliğinde mistik kuramlar açıklama gücünü (!) kaybedecekler miydi? Kesin olarak hayır diyebiliriz çünkü bu sefer kanıt aramalar 13 sayısı üzerinde yoğunlaşacaktı. İşte bir kaç örnek:

1. **13** sayısı uğursuz olarak kabul edilen bir sayıdır,
2. 13 Eylül yılın 256. günü $2+5+6=\mathbf{13}$,
3. Pentagon'a çarpan uçak : UA 175 $1+7+5=\mathbf{13}$,
4. Flight 77'de 58 yolcu vardı $5+8=\mathbf{13}$,
5. İkiz kulelerde toplam 26 ülkeden çalışan vardı $\mathbf{13}+\mathbf{13}$,
6. İkiz kulelerde toplam 104 asansör vardı $\mathbf{13}$ x 8,
7. Usame Bin Ladin ailesinin 52. çocuğudur $\mathbf{13}$ x 4,
8. Saddam Hüseyin **13** harften oluşuyor,
9. Usame bin Ladin **13** harften oluşuyor,
10. İkiz kuleler 415 ve 417 metre yüksekliğindeydiler $415+417=\mathbf{13}$ x 64.

Herhangi bir olayın "garip" rastlantılardan oluşan matematiksel bir gizem içerdiğini söylemek için gerekli olan sadece biraz yaratıcılık. Eğer amaç çevremizde olup biten olayları belirli matematiksel eşitlikler ya da özel sayılar olarak sunmak olursa bunları sağlayacak olayları belirlememiz hiç de güç olmayacaktır. Sayısal verilerden bir kısmını kullanarak istediğimiz sayıyı elde etme şansımız olması karşılaşılan olayların mistik olduğunu göstermeye yetmediği gibi aksi kanıtlar bütün bu sayısal sonuçların sadece rastlantı olduğunu açıkca göstermektedir.

"Neden ?" Sorusunun Önemi: Sonuca Doğru: Sahte bilimlerin bizlere sunduğu yargılarla karşılaştığımızda "Neden ?" sorusunu sormak çok önemlidir [2]. Örneğin, 11 Eylül saldırılarıyla ilgili olarak, İsrail Başbakanının ya da ABD'nin eski başkanının isimlerinde toplam 11 harf bulunmasının neden terör saldırılarıyla ilgili olduğunu sorgulamak gerekmektedir.

Belki daha da önemli olarak, 11 sayısının neden bu kadar önemli olduğunu düşünmekte yarar var. Bu sayının diğer sayılardan nasıl bir farkı var ki, binlerce insanın ölümüne yol açan bir terör olayını önceden (aslında sonradan) haber veriyor? Eğer bu sayı kodu iddia edildiği gibi önceden insanlara haber verildiyse, neden aynı haber daha fazla insanın öldüğü birinci ve ikinci Dünya Savaşlarında görülmedi. Japonlar, kendi topraklarınında yokedici etkisi olan atom bombası saldırlarını farkedemedi' Ve neden bu tür bir gizli (?!) kod olmak zorunda ve tabii ki bu kodları kim neden kullanıyor?

Sonuç: Matematik insanlardan uzaklaştıkça ya da daha doğrusu insanlar matematikten uzak durmayı tercih ettikçe, sayılar kendi anlamlarından daha farklı kişiliklere bürünmeye başlıyorlar. Özel olarak matematiğin ve genel olarak bilimin içindeki karmaşa ve zenginlik o kadar fazla ki; bütün bunlara ek olarak mistik bir takım ögelere hiç ihtiyacımız yok. Ancak, bilimin ilettiklerinden uzak duran bireyler aslında çok normal olan olasılıkları bile sayıların bir gücü olarak görmeye devam edeceklerdir. Mısır uygarlığının eserlerini sayıların gizemiyle açıklamaya çalışanlar, insaların kaderlerini yıldız haritalarına (!) bakarak söylemeye çalışanlar ve sayıların sadece matematiksel semboller olmadığını; dünyada her olan bitenin sayıların birbirileriyle olan ilişkisinden doğduğunu söyleyen post-modern kaderciler (numerologlar) her zaman kendi yaşamlarını sürdürecek boşluklar ve onlara inanan insanlar bulacaklardır.

Kuramsal ya da uygulamalı matematikle ve diğer bilimlerle uğraşan bilim insanları zaman zaman bu inançların pek de tehlikeli olmadıklarını düşünebilirler. Aslında bu tür inançlara karışmayı bireylerin özgürlüklerine bir müdahale olarak görmek de mümkündür. Ancak, bilimsel sorgulama ya da daha genel bir ifadeyle eleştirel düşünme becerisine sahip olmayan bireylerin ve bu bireylerden oluşan toplumların çok hızlı gelişen bir dünyada yaşam kalitelerini geliştirmeleri pek mümkün görünmemektedir. Sadece matematik değil; bunun yanında fizik, kimya, biyoloji, istatistik ve psikoloji gibi bilimler düşünme sistemini geliştirmeye yöneliklerdir. Bu nedenle, bu alanlar sadece kendi isimlerindeki bölümlerde değil sosyolojiden siyaset bilimine, iktisattan işletmeye uzmanlık alanlarında; bu alanların eğitimini alan genç insanlara öğretilmelidir. Belki bu şekilde sahte bilimlerin yayılması da - karşılarında daha eğitimli kişiler olacağı için - yavaşlayacaktır.

KAYNAKÇA

[1] Heider, F.(1958). The psychology of interpersonal relations. Boston: John-Wiley.

[2] Kökdemir, D. (2001). Bana el yazını göster sana kim olduğunu söyliyeyim. Cumhuriyet Bilim Teknik, 770, 6.

[3] Popper, K.R. (1934/1998). Bilimsel araştırmanın mantığı. İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

BİR SAYILAR TEORİSİ SORUSUNUN GENELLEŞTİRİLMESİ VE BU GENELLEŞTİRMEYE UYGUN POLİNOMLARIN BULUNMASI

Ali Adalı
İzmir Özel Yamanlar Lisesi

GİRİŞ: $1, 2, 3, ...$ dizisinde, ilk terimden başlayarak $'+'$ ve $'-'$ işaretlerini uygun koyup topladığımızda herhangi bir k doğal sayısını şu şekilde elde edebiliyoruz:

$$k = -1 + 2 - 3 + ... - (2k-1) + 2k.$$

Ayrıca $'+'$ ve $'-'$ 'lerin yerini değiştirdiğimizde -k sayısını da elde edebiliyoruz. Bu şekilde tüm tamsayıları elde edebiliriz.

Aynı işlemi $1^2, 2^2, 3^2, ...$ dizisinde de uyguladığımızda uygun $'-'$ ve $'+'$ işaretleri seçimi ile her k tamsayısını elde edebiliyoruz.

Her n doğal sayısı için $1^n, 2^n, 3^n, ...$ dizisinin de uygun $'-'$ ve $'+'$ seçimleri için her k tamsayısını bu terimlerin toplamı şeklinde elde edebilir miyiz?

Acaba dizi, verilen tamsayı katsayılı bir P polinomu için,

$$P(1), P(2), P(3), ...$$

dizisi olsa; ilk terimden itibaren dizinin terimlerinin önlerine uygun $'-'$ veya $'+'$ işaretleri yazıp topladığımızda hangi tamsayıları elde edebiliriz? Veya hangi tamsayı katsayılı P polinomları için tüm tamsayılar bu şekilde gösterilebilir?

AMAÇ: $P(1), P(2), P(3), ...$ dizisinde her n tamsayısı için, $'+'$ ve $'-'$ 'lerin uygun seçiminde

$$n = \pm P(1) \pm P(2) \pm ... \pm P(k)$$

olacak şekilde bir k doğal sayısının varlığını garantilemek için tamsayı katsayılı P polinomunun hangi şartları sağlaması gerekir? Amacımız P polinomlarını incelemek ve bu polinomlar hakkında belirli koşullar elde etmek. Sonuç kısmında da görülebileceği gibi polinomun yukarıdaki şartı sağlayıp sağlamadığını incelemek için polinomun belli değerlerini incelememiz yeteli olacaktır.

YÖNTEM: ***İddia 1:*** Her n pozitif tamsayısı için öyle bir k vardır ki; $'+'$ veya $'-'$ 'lerin uygun seçimi için,

$$n = 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm k^2$$

şartı sağlansın.

Yöntem: (Kaynak: 250 Problems in Elementary Number Theory, W. Sierpinski) Yukarıdaki iddiada her i^2 'li terim yerine $P(i)$ yazıp, hangi tamsayı katsayılı P polinomlarının şartı sağladığını inceleyelim.

Lemma 1: Derecesi $n \geq 1$ olan bir P polinomu ve k sabit sayısı için,

$$P(x+k) - P(x)$$

polinomu (n-1). derecedendir.

Yöntem: $P(x+k) - P(x)$ olinomu $(n-1)$. derecedendir.

$$P_i(x) = P_{i-1}(x + 2^{i-1}) - P_{i-1}(x),$$

$i = 1, 2, ..., n-1$ için, $P_{i+1}(x)$ polinomunun derecesi $P_i(x)$ polinomunun derecesinden bir fazladır. Öyle ise; $P_n(x)$ sabittir.

Tanım: $k_1 < k_2$ tamsayıları için, $A_{(k_1,k_2)}$ ile,

$$\pm P(k_1) \pm P(k_1+1) \pm ... \pm P(k_2)$$

ifadesindeki $\pm$ işaretlerinin değiştirilmesiyle oluşacak toplamların oluşturduğu $2^{k_2-k_1+1}$ elemanlı kümeyi gösterelim.

Lemma 2: Her x tamsayısı için öyle bir y tamsayısı vardır ki; $P_n(0) \in A_{(x,y)}$. $P_n(x) \in A_{(x,x+2^{n-1})}$ olduğu açıktır ($P_n(x)$; $P(x), P(x+1), ..., P(x+2^{n-1}-1)$ değerlerinin önlerine '+' veya '−' yazılarak elde ediliyor ve $P_n(x)$ sabit).

Lemma 3: a tamsayısı, x ve y_1 tamsayı olmak üzere; $A_{(x,y_1)}$ kümesinin elemanı olsun.

$$b \equiv a \pmod{P_n(0)}$$

ise öyle bir y_2 tamsayısı vardır ki; $b \in A_{(x,y_2)}$ ($P_n(x)$ sabit olduğu için yerine $P_n(0)$ yazıldı).

Yöntem:

$$b = a + kP_n(0)$$

olsun. $k \in \mathbf{Z}$, $a \in A_{(x,y_1)}$, $a \pm P_n(0) \in A_{(x,y_2)}$ aynı işlemi k defa uygularsak;

$$\Rightarrow \pm kP_n(0) \in A_{(x,z)}.$$

Fikir: P tamsayı katsayılı olduğu için,

$$P(x+P_n(0)) \equiv P(x) \pmod{P_n(0)} \quad (Bezout\ Teo.)$$

Öyleyse, her tamsayı x için $P(x)$ değeri (mod $P_n(0)$)'da, $P(1), P(2), ..., P(P_n(0))$ değerlerinden birine denk olacak. $A_{(x,y)}$ kümesindeki elemanları (mod $P_n(0)$)'da düşünmemiz uygun.

İddia 2: Öyle bir x_1 doğal sayısı ve her $i = 1, 2, ..., P_n(0)$ için, öyle tamsayı s_i vardır ki;

$$s_i \in A_{(1,x_1)} \quad ve \quad s_i \equiv 2P(i) \pmod{P_n(0)}.$$

Yöntem:

$$k = P(1) + P(2) + ... + P(P_n(0)) \in A_{(1,P(P_n(0)))}$$

Bezout teoreminden dolayı,

$$P(x+P_n(0)) \equiv P(x) \pmod{P_n(0)},$$

$c_i = P(1+P_n(0))+P(2+P_n(0))+...+P(i-1+P_n(0))-P(i+P_n(0))+P(i+1+Pn(0))+...+P(2P_n(0)) \in A_{(P(P_n(0)+1),2P(P_n(0)))}$,

$$\Rightarrow k - c_i \in A_{(1,2P_n(0))}.$$

$$\Rightarrow k - c_i \equiv 2P(i) \pmod{P_n(0)}.$$

İddia 3: Her k pozitif tamsayısı için öyle x_k tamsayısı ve her $i = 1, 2, ..., P_n(0)$ için öyle bir s_i vardır ki;

$$s_i \in A_{(1,x_k)} \ ve \ s_i \equiv 2kP(i) \pmod{P_n(0)}.$$

Yöntem: İddia 3 teki adımı $P(i)$ için k defa uygulamamız yeterli.

İddia 4: Her $k_1, k_2, ..., k_{P_n(0)}$ tamsayıları için öyle bir x tamsayısı ve $s \in A_{(1,x)}$ olan bir s vardır ki;

$$s \equiv 2k_1P(1) + 2k_2P(2) + ... + 2k_{P_n(0)}P(P_n(0)) \pmod{P_n(0)}.$$

Yöntem: İddia 3'teki adımı sırasıyla $P(i)$ için k_i defa uygulamamız yeterli

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = d$$

olsun. $d > 1$ olursa;
$A_{(x,y)}$ kümesindeki sayılar d ile bölünür. d ile bölünmeyen sayılar elde edilemez. Buna göre; tüm tamsayıları elde etmemiz için $d = 1$ olmalıdır. .... (♣)

Lemma 4:

$$a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbf{Z}^+, (N \geq 2) \ ve \ obeb(a_1, a_2, ..., a_N) = 1$$

ifadeleri ancak ve ancak

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + ... + a_N k_N = 1$$

olacak şekilde $k_1, k_2, ..., k_N \in \mathbf{Z}$ varsa doğrudur.

Yöntem:

$$(a_1, a_2) = 1 \Leftrightarrow a_1 k_1 + a_2 k_2 = 1$$

olacak şekilde tamsayı k_1 ve k_2 olduğu açık ([1], s. 5, Teorem 8).
Basit bir tümevarımla lemmayı ispatlamak mümkün.
Öyle ise; (Lemma 3'ten dolayı) öyle bir x değeri vardır ki; her t tamsayısı için, $A_{(1,x)}$ kümesinde $2t$ bulunur.

Sonuç: Tüm çift sayıları bu şekilde elde edebiliriz. Şimdi tek sayıları elde etmeye çalışalım:
(i) $P_n(0)$ tekse;

$$P_n(0) = 2c + 1, \quad c \in \mathbf{Z}.$$

Sonuçtan dolayı herhangi bir n tamsayısı için öyle bir x var ki $2(n + c + 1) \in A_{(1,x)}$ ve $P_n(0)$ tekse $2n + 1 \in A_{(1,y)}$ olan y olduğu açık.
$\Rightarrow P_n(0)$ tekse; tek sayılar bu şekilde elde edilebiliyor.

(ii) $P_n(0)$ çiftse;

$$P(1), P(2), ..., P(P_n(0))$$

dizisindeki ilk tek terim $P(i)$ yi alıp incelediğimizde Lemma 3'ün sonucu olarak öyle bir tamsayı x vardır ki; her n tamsayısı için,

$$2n + 1 \in A_{(1,x)}$$

$\Rightarrow P_n(0)$ çiftse; tek sayılar da bu şekilde elde edilir.

Sonuç: Görüldüğü gibi her n tamsayısı için, öyle bir x vardır ki;

$$n \in A_{(1,x)} \Leftrightarrow obeb(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1.$$

İddia 5:

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1 \Leftrightarrow obeb(P(1), P(2), ..., P(n + 1)) = 1.$$

Yöntem:

$$P_n(0) \neq 0 \ ve \ 2^{n-1} | P_n(0) \ (Bezout \ Teo.) \Rightarrow P_n(0) \geq 2^{n-1}.$$

($\Leftarrow$) $P_n(0) \geq 2^{n-1} \geq n + 1$. Bu yüzden,

$$(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1 \Rightarrow$$

$$(P(1), P(2), ..., P(n + 1)) = 1$$

($\Rightarrow$) $(P(1), P(2), ..., P(n + 1)) = d$ olsun. Lagrange interpolasyonun'dan dolayı,

$$d | P(1), d | P(2), ..., d | P(n + 1) \Rightarrow \forall x \in \mathbf{Z}, \quad d | P(x)$$

olur.

$$d | P(1), d | P(2), ..., d | P(P_n(0)) \ ve \ d | P_n(0)$$

ise;

$$d | (P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1 \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1.$$

$n = 0, 1, 2$ durumlarının incelenmesi kolay olup ilgilenenlerin uğraşına bırakılmıştır.

EKLER: P polinomu tamsayı katsayılıdır dolayısıyla tam değerli bir polinomdur (yani her tamsayıda tamsayı değeri alır) ise öyle $l_0, l_1, ..., l_n$ tamsayıları vardır ki;

$$P(x) = l_0 + l_1 x + l_2 \frac{x(x+1)}{2} + ... + l_n \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$$

(P polinomunun derecesi n idi) ([2], 319. Soru ve çözümü)

İddia 6:

$$(l_0, l_1, ..., l_n) = 1 \Leftrightarrow (P(1), P(2), ..., P(n+1)) = 1.$$

Yöntem: $(l_0, l_1, ..., l_n) | P(1), P(2), ..., P(n+1))$ *ve* $P(1), P(2), ..., P(n+1)) | (l_0, l_1, ..., l_n)$. Bunun doğal bir sonucu olarak P polinomu, bir c tamsayı değeri için

$$P(c) = \pm 1$$

oluyorsa; bu polinomla her k tamsayısı için $k \in A_{(1,x)}$ olan bir x vardır (yani bu polinomla tüm tamsayılar elde edilebiliyor).

Örnek: $P(x) = x, P(x) = x^2, P(x) = x^n, P(x) = x^n + 1, P(x) = x^n - 1, P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n, P(x) = xQ(x) + 1$ (Q tamsayı katsayılı bir polinom).

SONUÇ VE TARTIŞMA: P tamsayı katsayılı bir polinom olmak üzere her N tamsayısı için, '+' ve '−' 'lerin uygun seçiminde, $N = \pm P(1) \pm P(2) \pm ... \pm P(k)$ şartını sağlayan bir k doğal sayısı bulunabiliyorsa; P polinomuna "*uygun polinom*" diyelim. n, P polinomunun derecesi olmak üzere; sonuç olarak elde ettiğimiz teoremler:

Teorem 1. P uygun bir polinomdur. $\Leftrightarrow$ $obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = 1$

Teorem 2.

$$l_0, l_1, ..., l_n \in \mathbf{Z} \text{ ve } P(x) = l_0 + l_1 x + l_2 \frac{x(x+1)}{2} + ... + l_n \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$$

olmak üzere;

$$P \text{ uygun bir polinomdur.} \Leftrightarrow obeb(l_0, l_1, ..., l_n) = 1.$$

Teorem 3.

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = obeb(l_0, l_1, ..., l_n).$$

Teorem 4.

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = d \Rightarrow \forall x \in \mathbf{Z}, d | P(x).$$

Teorem 5. $P(x) = 1, P(x) = x, P(x) = x^2, P(x) = x^2 \pm 1, P(x) = x^n, P(x) = x^n \pm 1, P(x) = x^n \pm x^n - 1 + ... + x + 1, P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x \pm 1 (a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z})$ polinomları uygun polinomlardır.

Teorem 6. $c \in \mathbf{Z}$ ve $P(c) = \pm 1$ olan bir c varsa P uygun bir polinomdur.

Teorem 7.

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = d$$

ise; P polinomu d ile bölünen tamsayılarda uygun bir polinomdur. Yani P polinomu ile d ile bölünen tüm tamsayıları elde edebiliriz.

Teorem 8. P tamsayı katsayılı polinom olmak üzere; '+' ve '−' 'lerin uygun seçiminde

$$N = \pm P(1) \pm P(2) \pm ... \pm P(k)$$

olan en az bir k doğal sayısı ancak ve ancak sonsuz çoklukta böyle k doğal sayıları varsa vardır.

Teorem 9. $N \geq 2$ olmak üzere; $a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbf{Z}^+$ için,

$$obeb(a_1, a_2, ..., a_N) = 1 \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, ..., k_N \in \mathbf{Z} : a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_Nk_N = 1.$$

Acaba P polinomunun katsayılarına bakarak polinomun uygun olup olmadığı bulunabilir mi? İlk akla gelen fikirlerden biri katsayıların aralarında asal olmaları. Tüm tamsayıları elde etmek için bu şart gerekli, çünkü 1 elde ediliyorsa, 1; bu katsayıların ortak bölenlerinin en büyüğü ile (*obeb*) bölünmeli ve dolayısıyla katsayıların obeb'i 1 olmalıdır.

Fakat bu şart yeterli değil.

Örneğin: $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$ polinomunun katsayıları aralarında asaldır, fakat bu polinom her tamsayı x değeri için çift değerler alır. Tek sayılar bu polinomla elde edilemez.

PROJENİN GELİŞTİRİLMESİ:

Polinomları bir yana bırakalım. Acaba dizimizin elemanları asal sayılar olsa yine her sayıyı istenilen şekilde göstermek mümkün müdür?

Yani $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$ dizisinin terimlerini; ilk terimden başka bir terime kadar olan asalları 1 veya -1 ile çarpıp toplayarak istenilen bir doğal sayıyı elde edebilir miyiz?

İddia: $n \geq 5$ doğal sayı olmak üzere; $p_1, p_2, ..., p_n$ ilk n asal sayı olsun.

$$S_n = \{|\sum_{i=1}^{n} a_i p_i|; a_i \in \{-1, 1\}\}, \quad T_n = p_1 + p_2 + ... + p_n, \quad K_n = \{T_n - 2, T_n - 8, T_n - 12\}$$

ise;

$$S_n \cap K_n = \emptyset \ ve \ S_n \cup K_n = \{0 \leq x \leq T_n | x \equiv T_n \pmod 2\}.$$

Yöntem: Tümevarım: $n = 5$ için, (gösterimi EKLER -2'de var.) n için iddia doğru olsun. $n + 1$ için doğruluğunu incelememiz bizi sonuca ulaştıracaktır.

Teorem: Her k tamsayısı için öyle bir n doğal sayısı vardır ki; $k \in S_n$.

Yöntem: $T_n - 12 > k \ ve \ T_n \equiv k \pmod 2$ olan bir n tamsayısı alırız. k sabit ve T_n ilk n asalın toplamı olduğu için böyle bir n bulmak mümkün.

Teorem: $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ilk k asal sayı olmak üzere her n doğal sayısı için, $n = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k$ şartını sağlayan $k \in \mathbf{N}$ ve $a_i \in \{-1, 1\}$ sayıları bulunur ($i = 1, 2, ..., k$).

EKLER-2: $p_1, p_2, ..., p_n$ ilk n asal sayı olsun. Bu sayıları 1 veya -1 ile çarpıp topladığımızda meydana gelen sayılar: $n = 5$ için:

-2-3-5-7-11=-28,
-2-3-5-7+11=-6,

⋮

+2+3+5+7+ 11=28

Oluşan küme:

$$\{0, -2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -18, -22, -24, -28, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 24, 28\}$$

Yani -28'den 28'e kadar olan çift sayılar; $\{-16, -20, -26, 16, 20, 26\}$ hariç.

Kümenin sadece pozitif ve 0'a eşit olan elemanlarını düşünmemiz yeterli, çünkü bir sayı kümede mevcutsa negatifi de mevcut.

n = 6 için gösterilebilen sayılar:

-2+ 3-5+7+11-13=1,
+2-3-5+7-11+13=3

⋮

-2+3-5+7+11+13=27
29 gösterilemez
-2-3+5+7+11+13=31
33 gösterilemez
+2-3+5+7+11+13=35
-2+3+5+7+11+13=37
39 gösterilemez
+2+3+5+7+11+13=41

1 ile 41 arasındaki tüm tek sayılar; $\{29,33,39\}$ hariç.

$n=7$ için:

-2-3+5-7+11+13-17=0,
-2-3-5-7-11+13+17=2

⋮

-2+3-5+7+11+13+17=44,
46 gösterilemez,
-2-3+5+7+11+13+17=48,
50 gösterilemez,
+2-3+5+7+11+13+17=52,
-2+3+5+7+11+13+17=54,
56 gösterilemez,
+2+3+5+7+11+13+17=58,
0'dan 58'e kadar olan tüm çift sayılar; $\{46,50,56\}$ hariç.

İlk n asal sayıyı 1 veya -1 ile çarpıp topladığımızda mod 2'de n'e denk olan sayıları elde edemeyiz. Çünkü, ilk asal 2; çift, kalan $n-1$ asal tektir. mod 2'de kontrol edilirse oluşan sayıların bu modda $n-1$ 'e denk olması gerektiği görülür. $p_1, p_2, ..., p_n$ asallarını 1 veya -1 ile çarpıp toplayarak (mod 2'de $n-1$'e denk olan) elde edilemeyen sayılar: ($p_1+p_2+...+p_n$ 'den küçük veya eşit sayılar.)

Elde Edilemeyenler:	**Kullanılan asallar:**
n =1→ 0	2
n= 2→ 3	2,3
⋮	
n=22→ 779, 783, 789	2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79

$T_n=p_1+p_2+...+p_n$ dersek; $n\geq 5$ için gösterilemeyen sayılar hep T_n-2, T_n-8, T_n-12 şeklinde.

KAYNAKLAR:

[1] Sierpinski W. , 250 Problems in Elementary Number Theory

[2] Chenstov N.N., Yaglom I.M., Shklyarsky D.O., Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics; Arithmetic and Algebra

[3] Karakaş H.İ., Aliyev İ., Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri

[4] Karakaş H.İ., Aliyev İ., Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri

Bu projeyi hazırlamamda yardımlarını esirgemeyen Yasin Çetindil, Kazım Büyükboduk, Yusuf Aytar ve bu tür projeleri destekliyen ve teşvik eden TÜBİTAK'a, okul yöneticilerime, aileme, başta Yamanlar Matematik Olimpiyat Takımı (YMOT) olmak üzere tüm arkadaşlarıma ve okul çalışanlarına teşekkürü bir borç biliyorum.

* Bu proje 2002 TÜBİTAK lise araştırma projeleri yarışmasında gümüş madalya almıştır. Ali Adalı ve emeği geçen öğretmenlerini kutlarız (MD).

HERHANGİ BOYUTLU SATRANÇ TAHTASININ KAPLANABİLMESİ ÜZERİNE

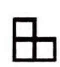
Metin Barış
Özel Ege Lisesi, İZMİR

Konunun Özeti

Bu projede n x m'lik bir satranç tahtasının, en fazla bir □ veya □□ ve istenilen sayıda  kullanılarak kaplanabilmesi problemi incelenmiştir. n ve m'in 1 ve 3'ten farklı olduğu tüm durumlarda ve n – 3, m bir çift sayı olduğu durumda, böyle bir kaplamanın mümkün olduğu gösterilmiştir. Ayrıca n – 3 ve m bir tek sayı olması halinde böyle bir kaplamanın mümkün olmayacağı kanıtlanmıştır.

Giriş

Aşağıdaki soru 1998 yılı TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavında önerilmiştir.

Soru: □ Birim kareyi göstermek üzere, istenilen sayıda  ve en çok bir tane □ kullanılarak aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için nxn'lik bir satranç tahtası kaplanamaz?

A) 100 B) 99 C) 98 D) 97 E) 96

Projenin sonucu olarak, verilen şıkların hiçbirinin doğru olmadığını göreceğiz. Şimdi bu soruyu genel şekilde ifade ederek inceleyelim:

n x m'lik bir satranç tahtasında n x m sayıda kare bulunduğundan $n \times m \equiv 2 \pmod 3$ durumunda soruda verilen koşullar sağlanacak şekilde satranç tahtasının kaplanması mümkün değildir. Bunun için bir □□ eklememiz gerekmektedir. Diğer durumlarda kullanamayacağımızdan (Örneğin, nxn durumunda $n^2 \not\equiv 2 \pmod 3$ olduğundan kulla□□maz), bu problemin genelliğini bozmaz.

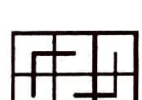
Tanım: n x m'lik bir satranç tahtası en fazla bir □ veya bir □□ ve istenilen sayıda  kullanılarak kaplanabilirse, "n x m'lik tahta kaplanabilir" diyeceğiz.

Problem: n ve m pozitif tam sayılarının hangi değerlerinde n x m' lik satranç tahtası kaplanabilir?

Projede bu problemin tam çözümünü veriyoruz.

Esas Sonuçlar

Lemma 1: n ve m sayılarından biri 3'ün, diğeri de 2'nin katı ise, n x m'lik tahta kaplanabilir.

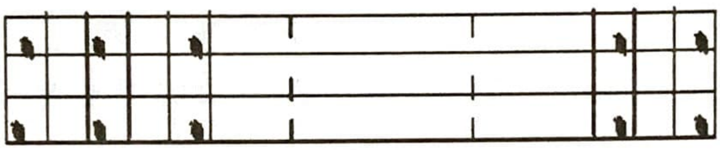
Kanıt: 2 x 3'lük (ve aynı şekilde 3 x 2'lik) tahta  şeklinde kaplanabilir. Koşulları sağlayan satranç tahtası böyle tahtalara bölünerek kaplanabilir.

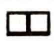
Lemma 2: 6 x m (ve dolayısıyla m x 6)'lık tahta her m > 1 için kaplanabilir.

Kanıt: m > 1 sayısı ya çifttir ve Lemma 1'den dolayı kaplanabilir, ya da tek'tir ve k– (m-3) / 2 olmak üzere m – 3 + 2k şeklinde yazılabilir. O halde 6 x m'lik tahtayı 6 x 3 ve 6 x (2k)'lık iki tahtaya bölerek Lemma 1'i uygularız.

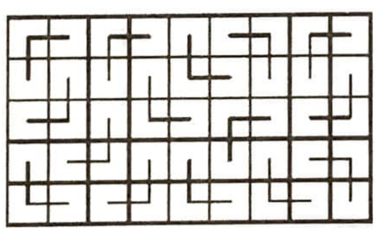
Lemma 3: 3 x m'lik (m x 3'lük) bir satranç tahtası m'in çift değerlerinde kaplanabilir; m'in tek değerlerinde kaplanamaz.

Kanıt: Çift m'ler için 3 x m'lik tahta Lemma 1'den dolayı kaplanabilir. m'in tek değerlerinde şekildeki gibi m + 1 tane hane işaretleyelim:



Bir tane  en fazla bir tane işaretli haneyi kapatabilir. 3 x m ≡ 0 (mod 3) olduğundan,  ve  kullanılamayacak. Dolayısıyla tahtayı kaplamak için en az m + 1 tane  gerekmektedir. Tahta üzerinde 3m tane hane bulunduğundan bu imkansızdır.

Lemma 4: 9 x m'lik (m x 9'luk) tahta m – 1 ve m – 3 değerlerinde kaplanamaz; diğer m'ler için kaplanabilir.
Kanıt: m – 1 değerinde tahtanın kaplanamayacağı açıktır. m – 3 durumunu Lemma 3'te inceledik. 9 x 5'lik tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir.



Çift m'ler için tahta, Lemma 1'den dolayı kaplanabilir. m > 5 tek sayısı için, k – (m –5) / 2 olmak üzere m – 5 + 2k şeklinde yazılabildiğinden, 9 x m'lik tahta, 9 x (2k)'lık ve 9 x 5' lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

Lemma 5: n x m' lik satranç tahtası:

1) n – 1 durumunda sadece m – 1 ve m – 2 için kaplanabilir.
2) n – 2 durumunda tüm m'ler için kaplanabilir.
3) n – 4 durumunda her m ≥ 2 için kaplanabilir.
4) n – 5 durumunda m – 1 ve m – 3 için kaplanamaz, diğer m'ler için kaplanabilir.

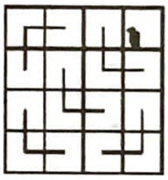
5) n – 7 durumunda m – 1 ve m – 3 için kaplanamaz, diğer m'ler için kaplanabilir.

Kanıt:

1. Açıktır.
2. $m - 1$ durumu açıktır. $m - 2$ ve $m - 4$ için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir.

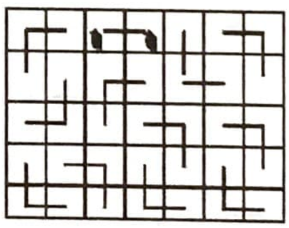
- $m \equiv 0 \pmod 3$ durumu Lemma 1'den elde edilir.
- $m \equiv 1 \pmod 3$, $m \geq 7$ için, $k - (m - 4)/3$ olmak üzere, $m - 4 + 3k$ şeklinde yazılarak, 2 x m'lik tahta, 2 x 4'lük ve 2 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 2 \pmod 3$ için, $k - (m - 2)/3$ olmak üzere, $m - 2 + 3k$ şeklinde yazılabilir. O halde 2 x m'lik tahta, 2 x 2'lik ve 2 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

3. $m \geq 4$ durumunu incelememiz yeterlidir. $m - 4$ için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir:



- $m \equiv 1 \pmod 3$, $m \geq 7$ için, $k - (m - 4)/3$ olmak üzere, $m - 4 + 3k$ olduğundan, 4 x m'lik tahta, 4 x 4'lük ve 4 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 2 \pmod 3$, $m \geq 5$ için, $k - (m - 2)/3$ olmak üzere, $m - 2 + 3k$ şeklinde gösterilebildiğinden, 4 x m'lik tahta, 4 x 2'lik ve 4 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

4. $m \geq 5$ alabiliriz. $m - 5$ ve $m - 7$ için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir:



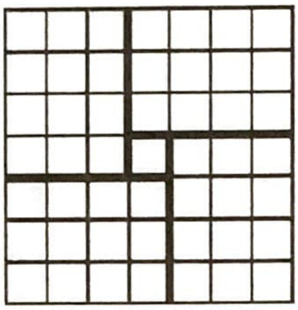
- $m \equiv 0 \pmod 6$ ise, tahta, 5 x 6'lık tahtalara bölünerek, Lemma 2'den dolayı kaplanabilir.
- $m \equiv 3 \pmod 6$ ise, $k - (m - 9)/6$ olmak üzere, $m - 9 + 6k$ şeklinde yazılabilir. O halde ; 5 x m'lik tahta 5 x 9'luk ve 5 x 6'lık tahtalara bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 1 \pmod 6$, $m \geq 13$ ise, $m - 7 + 6k$ şeklinde gösterilebilir, tahta, 5 x 7'lik ve 5 x 6'lık tahtalara bölünerek, kaplanabilir.

- $m \equiv 4 \pmod 6$, $m \geq 10$ ise, $m - 4 + 6k$ şeklinde yazılabilir.

O halde ; Tahta bir tane 5 x 4'lük tahta ve 5 x 6'lık tahtalara bölünerek, kaplanabilir.
$m \equiv 2 \pmod 6$, $m \geq 8$ ise, $m - 2 + 6k$ şeklinde yazıp, tahtayı bölerek kaplayabiliriz.

$m \equiv 5 \pmod 6$, $m \geq 11$ ise, $m = 5 + 6k$ şeklinde yazarak tahtayı kaplayabiliriz.

5. $m \geq 7$ alabiliriz. $m = 7$ durumunda 7 x 7'lik tahtayı aşağıdaki şekilde 2 tane 4 x 3'lük, 2 tane 3 x 4'lük ve bir tane 1 x 1'lik tahtaya bölerek kaplayabiliriz.



* $m \equiv 0 \pmod 6$ ise, $m = 6k$ ve $m \equiv 3 \pmod 6$; $m \geq 9$ ise, $m = 9 + 6k$ şeklinde yazıp Lemma 2 ve Lemma 4'ü kullanırız.
* $m \equiv 1 \pmod 6$, $m \geq 13$ ise, $m = 7 + 6k$; $m \equiv 2 \pmod 6$ ise, $m = 2 + 6k$; $m \equiv 4 \pmod 6$ ise, $m = 4 + 6k$; $m \equiv 5 \pmod 6$ ise, $m = 5 + 6k$ şeklinde yazarak Lemma 2'yi kullanırız.

Teorem : n x m'lik bir satranç tahtası:
1) n ve m pozitif tam sayılarından biri 1 olup, diğeri 1 ve 2'den farklı olduğu;
2) n ve m sayılarından biri 3, diğeri tek sayı olduğu durumlarda kaplanamaz.

Diğer durumlarda tahta kaplanabilir.

Kanıt: Lemma 5(1) ve Lemma 3'ten dolayı m ve n'in 1 ve 3'ten farklı değerlerinin incelenmesi yeterlidir.

- $n \equiv 3 \pmod 6$; $n \neq 3$ ise, $n = 9 + 6s$ şeklinde yazılabilir, dolayısıyla Lemma 2 ve Lemma 4'ü kullanarak tahtayı kaplayabiliriz.
- $n \equiv 1 \pmod 6$, $n \neq 1$ ise, $n = 7 + 6s$ şeklinde yazıp Lemma 5(5)'i kullanarak tahtayı kaplayabiliriz.
- $a = 2$, 4 veya 5 olmak üzere , $n \equiv a \pmod 6$ ise, $n = a + 6s$ şeklinde yazarak Lemma 5'in sırasıyla 2), 3), 4) şıklarını kullanırız.
- $n \equiv 0 \pmod 6$ için Lemma 2'yi kullanırız.

SONUÇ ; n x n'lik BİR SATRANÇ TAHTASI SADECE $n = 3$ DEĞERİ İÇİN KAPLANAMAZ. BÖYLECE ; PROJENİN BAŞINDA VERDİĞİMİZ SORUDA **HİÇBİR ŞIK DOĞRU DEĞİLDİR.**

---

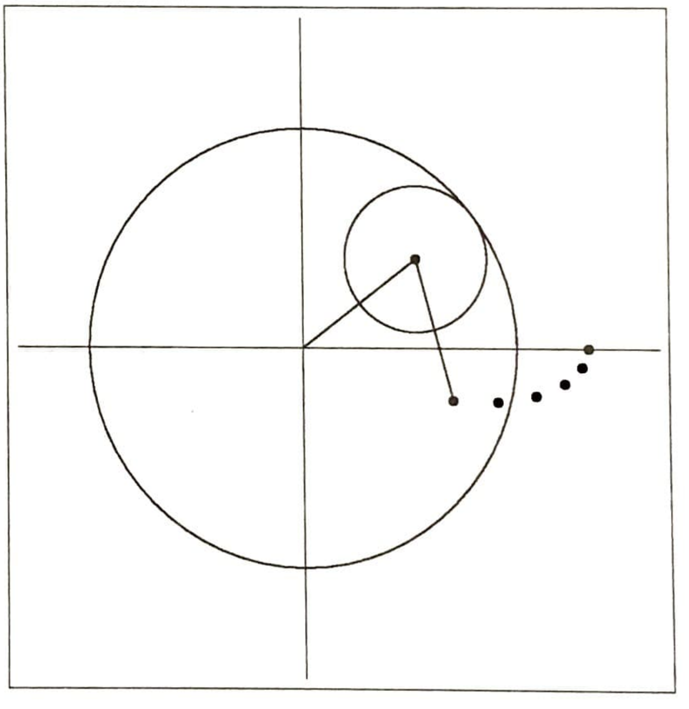
* Bu çalışma TÜBİTAK 2002 yılı liseler arası araştırma proje yarışmasında bronz madalya almıştır. Metin Barışı ve emeği geçen danışman öğretmenlerini kutluyoruz. (MD)

DÖNEN UZAYLAR

Sibel Paşalı
Muğla Üniversitesi / Muğla

Dönen uzaylar bir eğriler ailesini tanımlar. Sabit bir çember üzerinde dönen başka bir çemberin hareketine göre bir doğru üzerindeki bir noktanın bırakmış olduğu iz olarak da tanımlanabilir. Bir çoğunuz kitapçılarda veya işportada çocuklar için satılan iç içe geçebilen, üzerleri delikli çemberler ve renkli kalemlerden oluşan geometri setini görmüş, veya bunlardan estetik yönden kusursuz olan geometrik şekiller çizmişsinizdir. Bu makalede söz konusu edilen bu geometrik şekiller, onların parametrik denklemleri ve aralarındaki ilişkilerin bazılarıdır. Eğrilerin sınıflara ayrılmasının bir çok yolu vardır. Bu yollardan biri, bir eğriyi $p(x, y) = 0$ polinom denkleminin grafiği olup olmadığını belirlemekle başlar.

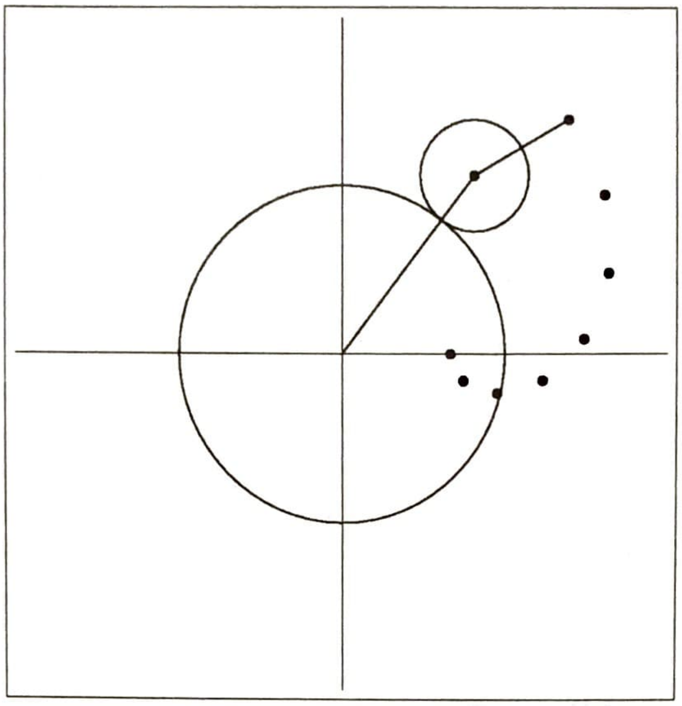
Tanım 1: Birbirine içten teğet olan iki çemberin merkezleri teğet noktasından geçen bir doğru üzerinde olsun. Bu çemberlerden biri sabit durmak üzere diğeri kaymaksızın sabit olan çemberin üzerinde hareket ediyor olsun. Hareket eden çemberin bir çapı üzerindeki veya bu çapın uzantısı üzerindeki herhangi bir noktanın bıraktığı ize **hypotrochoid** denir. Eğer bu nokta dönen çemberin çevresi üzerinde ise bu eğriye **hypocycloid** denir.



Şekil 1: Hypotrochoid

Tanım 2: Birbirine dıştan teğet olan iki çemberin merkezleri teğet noktasından geçen bir doğru üzerinde olsun. Bu çemberlerden biri sabit durmak üzere diğeri kaymaksızın sabit olan çemberin üzerinde hareket ediyor olsun. Hareket eden çemberin bir çapı üzerindeki veya bu çapın uzantısı üzerindeki herhangi bir noktanın bıraktığı ize **epitrochoid** denir. Eğer bu nokta dönen çemberin çevresi üzerinde ise bu eğriye **epicycloid** denir.

Sabit çemberin merkezi orijinde olsun. x exseniyle (pozitif tarafı) çemberlerin merkezlerini birleştiren doğru arasındaki açı (saatin ters yönü) θ olsun. n sabit olan çemberin, m ise dönen çemberin yarıçapları olsun. d dönen çemberin merkezi ile izi alınacak nokta arasındaki uzaklık ve a ise iz



Şekil 2: Epitrochoid

noktasının kutupsal koordinat sistemindeki (sabit çemberin merkezine göre) kutupsal açısı olsun. hy hypotrochoid ve $ep^{\text{‘}}$ de epitrochoid'i göstersin. Bunların parametrik denklemleri şunlardır:

$$hy[\theta, n, m, r, a] = \{x[\theta], y[\theta]\},$$

burada

$$\begin{aligned} x[\theta] &= (n-m)\cos[\theta + a] + d\cos[\frac{(n-m)\theta}{m} - a] \\ y[\theta] &= (n-m)\sin[\theta + a] - d\sin[\frac{(n-m)\theta}{m} - a], \end{aligned}$$

$$x + iy = (n-m)[\cos[\theta + a] + i\sin[\theta + a]] + d[\cos[\frac{(n-m)\theta}{m} - a] - \sin[\frac{(n-m)\theta}{m} + a]],$$

eşitliğinde $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} x + iy &= (n-m)e^{i(\theta+a)} + de^{-i(\frac{n-m}{m}\theta - a)} \\ &= [(n-m)e^{i\theta} + \frac{rm}{e^{i(\frac{n-m}{m})\theta}}]e^{ia} \end{aligned}$$

elde edilir. $\tau = e^{i\theta}$ olsun. Bu durumda

$$h[\tau, n, m, r, a] = ((n-m)\tau + \frac{d}{\tau^{\frac{n-m}{m}}})e^{ia}.$$

olur. Benzer şekilde:

$$e[\tau, n, m, r, a] = ((n+m)\tau - d\tau^{\frac{n+m}{m}})e^{ia}.$$

denkleminden $t = \tau^{\frac{n-m}{m}}$ dönüşümü kullanılarak

$$h[\tau, n, m, r, a] = ((n-m)\tau + \frac{d}{\tau^{\frac{n-m}{m}}})e^{ia},$$

elde edilir. Buna göre yeni hypotrochoid dönüşüm denklemi

$$hymap[t,n,m,r,a] = ((n-m)t^{\frac{m}{n-m}} + \frac{mr}{t})e^{ia}, \tag{1}$$

olur. Epitrochoid parametrik denklemi

$$ep[\theta,n,m,r,a] = \{x`[\theta], y`[\theta]\},$$

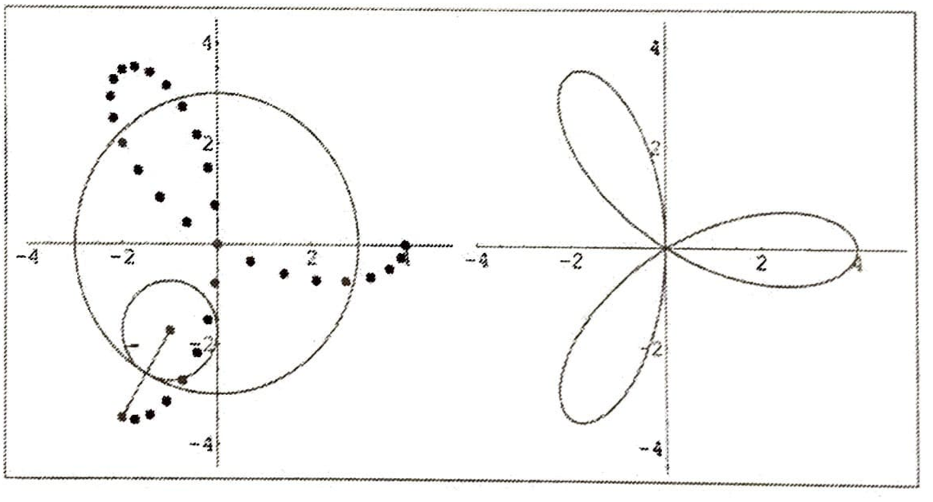
ve burada

$$\begin{aligned} x`[\theta] &= (n+m)\cos[\theta+a] - d\cos[\frac{(n+m)\theta}{m} + a] \\ y`[\theta] &= (n+m)\sin[\theta+a] - d\sin[\frac{(n+m)\theta}{m} + a]. \end{aligned}$$

Yeni epitrochoid dönüşüm denklemi ise aşağıdaki gibidir:

$$epmap[t,n,m,r,a] = ((n+m)t^{\frac{m}{n+m}} - rmt)e^{ia}.$$

Örnek 1: Parametrik denklemleri $\{2\cos\theta + 2\cos 2\theta, \quad 2\sin\theta - 2\sin 2\theta\}$ olan $hy[\theta,3,1,2,0]$ eğriyi çizelim. Burada sabit çemberin yarıçapı 3, dönen çemberin yarıçapı 1, dönen çemberin merkezinden iz noktasına olan uzaklık 2 olsun. Bu değerler altında aşağıdaki şekli elde ederiz.



Şekil 3: hy[θ,3,1,2,0]

Şimdi hypotrochoid ve epitrochoid arasındaki ilişkileri bir teoremle ifade edelim.

Teorem 1: Eger n ve m aralarında asal (n,m)=1, $n > 0$, $m > 0$, ve $\tau = t^{-1}$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $hymap[t,n,-m,r,a] = epmap[\tau,n,m,r,a]$,

(ii) $hymap[t,-n,m,r,a] = epmap[\tau,n,m,r,a+\pi]$.

İspat. n ve m aralarında asal, $n > 0$, $m > 0$ ve $\tau = t^{-1}$ olsun.

(i) (1) kullanarak,

$$\begin{aligned} hymap[t,n,-m,r,a] &= [(n+m)t^{\frac{-m}{n+m}} + \frac{-d}{t}]e^{ia} \\ &= [(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{ia} \\ &= epmap[\tau,n,m,r,a]. \end{aligned}$$

(ii) (1) kullanarak,

$$\begin{aligned} hymap[t,-n,m,r,a] &= [(-n-m)t^{\frac{m}{-n-m}} + \frac{d}{t}]e^{ia} \\ &= -[(n+m)t^{\frac{m}{-(n+m)}} - \frac{d}{t}]e^{ia} \\ &= -[(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{ia} \\ &= e^{i\pi}[(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{ia} \\ &= [(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{i(a+\pi)} \\ &= epmap[\tau,n,m,r,a+\pi]. \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

Şimdi ise n ve m'in aralarında asal olmaması durumuna karşılık aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2: n ve m sıfırdan farklı birer tamsayı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) epmap[t,n,m,r,a] = r hymap[τ,n,n+m,$\frac{1}{r}$,a], burada $\tau = t^{-\frac{m}{n+m}}$.

(ii) hymap[t,n,m,r,a] = r epmap[τ,n,m-n,$\frac{1}{r}$,a], burada $\tau = t^{\frac{m}{m-n}}$.

Proof. (i) $epmap[t,n,m,r,a] = ((n+m)t^{\frac{m}{n+m}} - rmt)e^{ia}$, $\tau = t^{-\frac{m}{n+m}}$ ve $t = \tau^{-\frac{n+m}{m}}$ olsun.

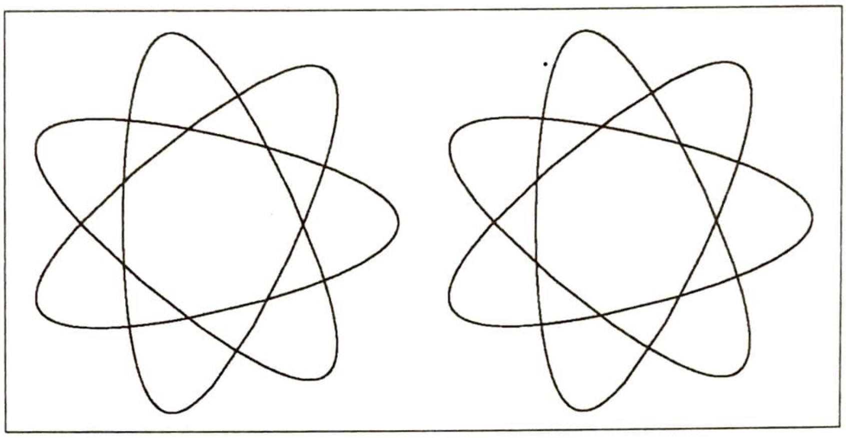
$$\begin{aligned} epmap[t,n,m,r,a] &= [(n+m)t^{\frac{m}{n+m}} - rmt]e^{ia} \\ &= r[(n+m)\ \frac{1}{r}\ t^{\frac{m}{n+m}} - mt]e^{ia} \\ &= r[(n-(n+m))t + \frac{\frac{1}{r}}{t^{\frac{n-(n+m)}{n+m}}}(n+m)]e^{ia} \\ &= r[n-(n-m)\tau^{\frac{n+m}{n-(n+m)}} + \frac{(n+m)\frac{1}{r}}{\tau}]e^{ia} \\ &= r\ hymap[\tau,n,m+n,\frac{1}{r},a] \end{aligned}$$

(ii) $hymap[t,n,m,r,a] = [(n-m)t^{\frac{m}{m-n}} + \frac{rm}{t}]e^{ia}$,$\tau = t^{\frac{m}{m-n}}$ ve $t = \tau^{\frac{m-n}{m}}$ olsun.

$$\begin{aligned} hymap[t,n,m,r,a] &= [(n-m)t^{\frac{m}{m-n}} + \frac{rm}{t}]e^{ia} \\ &= r[\frac{(n-m)}{r}t^{\frac{m}{m-n}} + \frac{m}{t}]e^{ia} \\ &= r[\frac{n+(m-n)}{t} - \frac{(m-n)}{r}t^{\frac{m}{m-n}}]e^{ia} \\ &= r[\frac{n+(m-n)}{t} - (m-n)\ \frac{1}{r}\ t^{\frac{n+(m-n)}{m-n}}]e^{ia} \\ &= r[n+(n-m)\tau^{\frac{m-n}{m}} - (m-n)\ \frac{1}{r}\ \tau]e^{ia} \\ &= r\ epmap[\tau,n,m-n,1/r,a]. \end{aligned}$$

Şimdi Teorem 2'ye bır örnek verelim.

Örnek 2: *hymap*$[t, 7, 3, 1/2, 0]$ and $1/2$ *epmap*$[\tau, 7, -4, 2, 0]$ denklemlerini alalım. Buna göre n=7, m=3, r=1/2 ,a=0. hymap ve epmap'in grafiği tamamen birbirinin aynısıdır:



Şekil 4: hymap[t,7,3,1/2,0]=$\frac{1}{2}$epmap[τ,7,-4,2,0]

Sonuç: Dönen uzaylara hypocycloid ve epicycloid eğrileri denir. Hypocycloid ve epicycloid farklı iki denklemle ifade edilir. Hypocycloid'de iki çember iç içe içten birbirlerine teğet olmasına karşın epicycloid'de iki çember dıştan birbirlerine teğettirler. Kutupsal koordinat sisteminde verilen bir parametrik eğrisi hypocycloid ve epicycloid cinsinden ifade edilebilinir. Teorem 1 ve 2 ve Örnek 1 ve 2'de hypocycloid ve epicycloid'in arasındaki ilişki kısaca açıklanmıştır. 1900'lü yıllarda W. F. Rigge çeşitli kapalı, sınırlı eğrilerin var olduğunu göstermiştir. Onun çalısmalarını R.E. Moritz'in mekanik makinalar yardımı ile dönen uzaylara benzeyen eğrilerin çizilebileceğine dair çalışmaları takip etmiştir. 1992 yılında L.M.Hall Mathematica yazılımını kullanarak dönen uzayları çizmiştir.

Problem: Birbirine içten teğet olan iki çemberin birinin yarıçapı diğerinin iki katı olsun. İçten teğet olan çember üzerinde alınan bir noktanın hypocycloid eğrisini çiziniz?

KAYNAKÇA

[1] Carver, Walter B., The conjugate system for plane Euclidean geometry, *American Mathematical Monthly* 63, 1956.

[2] Hall, Leon M., Trochoids, roses, and thorns-beyond the Spirograph, *The College Mathematics Journal* 23 (1992), 20-35.

[3] Moritz, R. E., On the construction of certain curves given in polar coordinates, *American Mathematical Monthly* 24 (1917) 213-220.

[4] Rigge, William F., A compound harmonic motion machine I, II, *Scientific American Supplement* 2197, 2198 (1918) 88-91, 108-110.

[5] Rigge, William F., Cuspidal rosettes, *American Mathematical Monthly* 26 (1919) 332-340.

[6] Rigge, William F., Envelope rosettes, *American Mathematical Monthly* 27 (1920) 151-157.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 15 Kasım 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama: Yarışma Sorularının doğru cözümlerini gönderenlerin isimleri dergide belirtilecektir.

- 2002 senesi boyunca en fazla doğru çözüm gönderenler arasından en az ilk 3 kişiye ödül olarak Matematik Dünyası 2003 yılı aboneliği ve yazarların imzası ile Matematik kitapları verilecektir.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.261. Tam m tane sıfırla biten bir faktoriyelin bulunduğu, fakat tam $m-1$ tane sıfırla biten faktoriyel bulunmadığı bilinir. Tam $m+1$ tane sıfırla biten bir faktoriyeli bulunur mu?

A.262. Eşkenar $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberinin (küçük) $\overset{\frown}{AB}$ yayı üzerinde bir X noktası alınmıştır, $|AX|+|BX|=|CX|$ olduğunu gösteriniz.

A.263. $1gr, 2gr, ..., 19gr$ olan ağırlıkların 9'u gümüşten, 9'u bronzdan, biri de altından yapılmış. Bronzların toplam ağırlığı gümüşlerin toplam ağırlığından 90 gr daha fazla olduğuna göre altın olan ağırlık kaç gramdır?

A.264. Herhangi 4 rakam verilmiştir.Bu sayıları, aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde, karelere yerleştirilebileceğini gösteriniz:

$$0<\boxed{}+\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}<9$$

A.265. Temel, basamakları toplamı ile toplandığında 2002'yi veren bir pozitif tam sayı bulduğunu İdris'e açıkladı. İdris de,basamakları toplamı ile farkını 2002'ye eşit olan bir pozitif tam sayı bulduğunu açıkladı. Temel, biraz düşündükten sonra böyle bir sayının bulunmadığını söyledi. Temel haklı mı? Temel'in sayısını bulunuz?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.261. Küpleri toplamı 2002 olan iki tam sayı bulunur mu?

Y.262. ABCDE dışbükey beşgeninde BE ve CE köşegenleri sırasıyla $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{BCD}$ açılarının açıortaylarıdır. $m(\widehat{EAB})=35°$, $m(\widehat{CDE})=145°$ ve $\overset{\triangle}{BCE}$ üçgeninin alanı 11'dir. ABCDE beşgeninin alanını bulunuz.

Y.263. 1'den 121'e kadar olan pozitif tam sayılar, 11×11 boyutlu tabloyu aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde yazılabilir mi?

a) aralarındaki fark 1'e eşit olan sayılar komşu (ortak kenarları bulunan) karelere yazılacak;

b) tüm tam kareler aynı sütunda bulunacak.

Y.264. a, b pozitif tam sayıları için $\sqrt{5}-\frac{a}{b}>0$ sağlanıyorsa, $\sqrt{5}-\frac{a}{b}>\frac{1}{4ab}$ olduğunu gösteriniz.

Y.265. Her iki komşu sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bir asal sayı elde edilecek şekilde, çember boyunca birbirinden farklı 2003 tane pozitif tam sayı yazılabilir mi?

ÇÖZÜMLER

A.251. 2002^{2002} sayısının son iki basamağını bulunuz.

Çözüm. $\phi(25)=5^2-5=20$ olduğundan, Euler teoreminden $20^{20}\equiv 1(mod 25)$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$2002^{2002}\equiv 2^{2002}\equiv 2^2\equiv 4(mod 25)$$

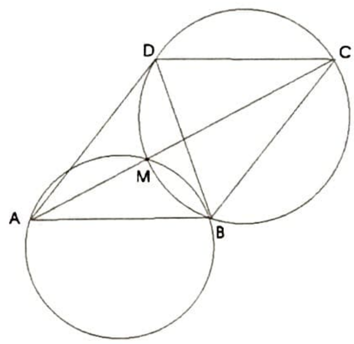
$$2002^{2002}\equiv 0(mod 4)$$

olduğundan,

$$2002^{2002} \equiv 4(mod100)$$

dir, yani 2002^{2002} sayısının son iki basamağı 04 olarak bulunur.

A.252. $ABCD$ paralelkenarında AC köşegeni BD köşegeninden daha uzundur. $BCDM$ bir kirişler dörtgeni olacak şekilde AC köşegeni üzerinde bir M noktası alınmıştır. BD doğrusunun, $\overset{\triangle}{ABM}$ ve $\overset{\triangle}{ADM}$ üçgenlerinin çevrel çemberlerine teğet olduğunu kanıtlayınız.



Çözüm. $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MCD}) = \frac{1}{2}(\widetilde{DM}) = m(\widehat{MBD})$ olduğundan $m(\widehat{MBD})$, $\overset{\triangle}{AMB}$ üçgeninin çevrel çemberinin $\widetilde{MB}$ yayının değerinin yarısına eşittir. Dolayısıyla BD doğrusu bu çembere teğettir. Benzer şekilde BD'nin diğer çembere de teğet olduğu gösterilebilir.

A.253. 4x4 boyutlu bir satranç tahtasının karelerine, hepsi aynı zamanda 0 olmayacak şekilde öyle sayılar yazınız ki, her sayı komşusundaki sayıların toplamına eşit olsun (bir ortak kenara sahip karelere komşu denir).

Çözüm.

A.254. Her a, b, c pozitif sayıları için

$$a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}abc$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Aritmetik ve Geometrik ortalama arasındaki eşitsizliği art arda iki kez kullanarak $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$ ve

$$2a^2b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{2a^2b^2c^2} = 2\sqrt{2}abc$$

0	1	1	0
-1	0	0	-1
-1	0	0	-1
0	1	1	0

eşitsizliklerini, burdan da $a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}abc$ eşitsizliğini elde ederiz.

A.255. 1997-2001 yıllarında inceleme yapan bir meteoroloji uzmanı her günü soğuk, serin veya sıcak diye kaydetmiş. Bu yılların birinde serin günler soğuk günlerden, sıcak günler de serin günlerden aynı sayı kadar fazla olmuş. Bu hangi yıldı?

Çözüm. Sözü geçen yıldaki soğuk günlerin sayısını k, serin günlerin sayısını m, sıcak günlerin sayısını da n ile gösterelim. O halde, $m - k = n - m$, buradan da $n + k = 2m$. Dolayısıyla bu yıldaki günlerin sayısı $n+k+m = 2m+m = 3m$, yani 3'ün katıymış. Bu da sadece artık yıllarda (366 gün) doğrudur. 1997-2001 arasında tek artık yıl vardır: 2000 yılı.

Y.251. n ve b pozitif tam sayıları için $V(n, b)$ ile n sayısının, her çarpan b'den büyük olacak şekilde çarpanlara ayrılma sayısını gösterelim. (örneğin, $48 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 8$ olduğundan $V(48, 2) = 5$'dir). Her n ve b pozitif tam sayıları için $V(n, b) < \frac{n}{b}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n = 1$ ve her $b \geq 1$ için $V(1, b) = 0 < \frac{1}{b}$'dir. Herhangi n aldığımızda her $b \geq n$ için $V(n, b) = 0 < \frac{n}{b}$'dir. Tümevarım uygulayalım. Tüm $n < k$ sayıları (b ne olursa olsun) ve $n = k$ durumunda tüm $b > i$ sayıları için $V(n, b) < \frac{n}{b}$ olduğunu varsayarak $V(k, i) < \frac{k}{i}$ olduğunu gösterelim(böylece, tümevarımda n artıyor, b ise azalıyor). k sayısının, $(i + 1)$'den büyük olan sayıların çarpımına ayrılma sayısı, tümevarımın varsayımından dolayı $\frac{k}{i+1}$'den küçüktür. k sayısı $(i + 1)$'e bölünmüyorsa, $V(k, i) = V(k, i + 1) < \frac{k}{i+1} < \frac{k}{i}$'dir. k sayısı $(i + 1)$'e bölünüyorsa, $k = (i + 1).m_2.m_3...m_s$ şeklindeki çarpanlara ayrılma

$(m_t > i)$ sayısı, $\frac{k}{i+1} = m_2.m_3...m_s$ şeklindeki ayrılma $(m_t > i)$ sayısına eşittir. Varsayımdan $V(\frac{k}{i+1}) < \frac{k}{(i+1)i}$ elde ederiz.Dolayısıyla,

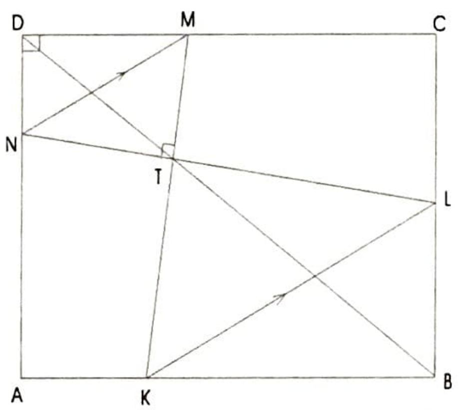
$$V(k,i) = V(k,i+1)+V(\frac{k}{i+1},i) < \frac{k}{i+1}+\frac{k}{(i+1)i}$$

$$= \frac{k}{i}$$

'dir.

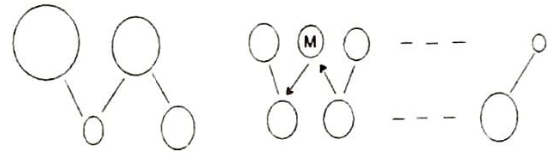
Y.252. $ABCD$ dikdörtgeninin AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde sırasıyla K, L, M, N noktaları verilmiştir. $KL||MN$ ve $KM \perp LN$ olduğu bilinir. KM ve LN doğru parçalarının kesişim noktasının BD köşegeni üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. $[MK] \bigcap [LN] = T$ olsun. $m(\widehat{NDM}) + m(\widehat{MTD}) = 180°$ olduğundan MDNT kirişler dörtgenidir,
dolayısıyla $m(\widehat{NDT}) = m(\widehat{NMD})$'dir. Benzer şekilde $s(\widehat{LTB}) = s(\widehat{LKB})$'dir. $KB||MD$ ve $KL||NM$ olduğundan $s(\widehat{NTD}) = s(\widehat{NMD}) = s(\widehat{LKB}) = s(\widehat{LTB})$'dir. Dolayısıyla, D,T,B noktaları aynı doğru üzerindedir.



Y.253. Ağırlıklarına gore sıralanmış 100 tane gümüş parçası ve yine ağırlıklarına göre sıralanmış 101 tane altın parçası verilmiştir. Bütün parçaların ağırlıkları farklıdır. Çift kollu teraziyi kullanarak en az kaç tartıyla ağırlığına göre 101. sırada bulunan parça bulunur?

Çözüm. Altın parçalarını, ağırlıklarının azalma sırası ile, gümüş parçalarını da bunun altında artma sırası ile yerleştirerek, şekildeki gibi komşu parçalarını doğru parçaları ile birleştirelim.



A parçası B parçasından daha ağırsa, bunu $A \to B$ şeklinde okla gösterelim. Herhangi parçayı aldığımızda bundan soldaki üst sıradaki parçalarla, bundan sağdaki alt sıradaki parçaların toplam sayısı 100'dür. Dolayısıyla aradığımız 101. sıradaki M parçasının solundaki tüm parçalar aşağıya, bu parçanın sağındaki tüm parçalar yukarıya doğru yönelmiş olacak. Önce tam ortadaki iki doğru parçasından birini kontrol ediyoruz (uçlarındaki altın ve gümüş parçalarını alıp tartıyoruz). Bu doğru parçası aşağıya yönelmişse, bundan soldaki tüm doğru parçaları aşağıya yönelmiştir. Tersine, bu doğru parçası yukarıya yönelmişse,bundan sağdaki tüm doğru parçaları yukarıya yönelmiştir. İkinci adımda yönleri bilinmeyen kısmın ortasındaki doğru parçasını (2 taneyse bunlardan birini) alıp, aynı işlemi yapıyoruz. 8 adımdan sonra tüm doğru parçaları yönlenmiş olacak ve biz M'yi bulacağız. Daha az adımda kesin olarak M'yi bulmak mümkün değildir, çünkü 201 tane M adayı bulunur,8'den daha az sayıda tartı yaptığımızda en fazla
$2^7 = 128$ değişik sonuç olabilir.

Y.254. Her $a > 1$ ve $b > 1$ sayıları için

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Aritmetik ve Geometrik Ortalama arasındaki eşitsizlikten

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\frac{b^2}{a-1}} = 2\frac{a}{\sqrt{a-1}}\frac{b}{\sqrt{b-1}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi her $x > 1$ için $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermemiz yeterli olacak. Son eşitsizlik $x^2 \geq 4(x-1)$ eşitsizliğine, bu da her x için doğru olan $(x-2)^2 \geq 0$ eşitsizliğine denktir.

Y.255. 1'den farklı ve 2002'den küçük ve ikişer ikişer aralarında asal olan 15 tane pozitif tam sayıdan en az birinin asal olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Verilen sayılar $n_1, n_2, ..., n_{15}$ ve bunlar en küçük asal çarpanları sırasıyla $p_1, p_2, ..., p_{15}$ olsun. Bu asal sayıların en büyüğü p ise, $p \geq 47$'dir (asal sayıları sıraladığımızda 15. sayı 47 olacak). Verilen sayıların hiçbiri asal olmazsa, en küçük asal çarpanı $p = p_i$ olan n_i sayısı için $n_i^2 \geq p_i^2 \geq 47^2 > 2002$ elde ederiz. Çelişki!

POPÜLER MATEMATİK KİTAPLARI

Yayın dünyasında popüler matematik kitaplarının sayısının hızla artması ve okuyucuların bu kitapları takip etmekte zorlanmaları nedeniyle bu sayımıza geniş bir kitap listesini koymaya karar verdik. Aşağıdaki listenin tam olmadığından eminiz. Herkese iyi okumalar diliyoruz (MD).

1. Papağan Teoremi, Denis Guedj, Güncel Yayıncılık
2. Sayı Şeytanı, Hans Magnus Enzensberger, Can Yayınları (Bu kitap İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Topluluğunca oyunlaştırılıp sahneye konuldu)
3. Sayıların Gizemi, Annemarie Schimmel, Kabalcı Yayınevi
4. Asal Gerilim, T.S.Kuhn, Kabalcı Yayınevi
5. Matematik ve Korku, Ali Nesin, Amaç ve Bilgi Üniv.
6. Matematik ve Doğa, Ali Nesin, Düşün ve Bilgi Üniv.
7. Matematik ve Oyun, Ali Nesin, Düşün ve Bilgi Üniv.
8. Matematikle Başarıyı Yakalamak, George Shafener, Gün Yayıncılık
9. Bil Bakalım, Y.B.Chernyak-R.M.Rose, Sarmal Yayınevi
10. Kısa Matematik Tarihi, D.J.Struik, Sarmal Yayınevı
11. Matematiğin Gizli Dünyası, D.Wells, Sarmal Yayınevi
12. Geometrinin Gizli Dünyası, D.Wells, Sarmal Yayınevi
13. Düşünme Kulesi, Selçuk Alsan,Sarmal Yayınevi
14. Gödel Kanıtlaması, E.Nagel-J.R.Newman, Sarmal Yayınevi
15. Matematik ve Mizah, J.A. Paulos, Sarmal Yayınevi
16. Doğanın Sayıları, I.Stewart, İzdüşüm Yayınları
17. Matematiksel Düşünme, Cemal Yıldırım, Remzi Kitapevi
18. Bilim Tarihi,Cemal Yıldırım, Remzi Kitapevi
19. Bilim Felsefesi,Cemal Yıldırım, Remzi Kitapevi
20. Kaos ve Düzen, F.Cramer, Alan yayıncılık
21. Akla Veda, P.Feyerabend, Ayrıntı Yayıncılık
22. Uzay, Zaman, Özdek I, Maxwell-Einstein-Schröndinger-Born, İdeo
23. İlimlerin Sayımı, Farabi, vadi yayıncılık
24. Nasıl Çözmeli, G. Polya, Sistem yayıncılık
25. Vahşi Sayılar, P. Schogt, Güncel Yayıncılık
26. Matematik Tarihi, R. Mankiewicz, Güncel Yayıncılık
27. Matematik Masalları, A. Herscovici, Güncel Yayıncılık
28. Mantık ve Olasılık, Colin Bruce, Güncel Yayıncılık
29. Matematiğin Aydınlık Dünyası, Sinan Sertöz, TÜBİTAK
30. Bir Matematikçinin Savunması, G.H.Hardy, TÜBİTAK
31. Matematik Sanatı, J.P.King, TÜBİTAK
32. Rakamların Evrensel Tarihi (VIII. cildi basıldı), G.Ifrah, TÜBİTAK

33. Değiştiren Beş Denklem, M.Guillen, TÜBİTAK

34. Bir Sayı Tut, M.E.Lines, TÜBİTAK

35. Raslantı ve Kaos, D.Ruelle, TÜBİTAK

36. Kaos, J.Gleick, TÜBİTAK

37. Dr. Ecco'nun Şaşırtıcı Serüvenleri, D.Shasho, TÜBİTAK

38. Bilimin Öncülleri, Cemal Yıldırım, TÜBİTAK

39. Gündelik Bilmeceler, P.Ghose-D.Home, TÜBİTAK

40. Büyük Çekişmeler, H.Hellman, TÜBİTAK

41. Bilim İş Başında, J.Lenihan, TÜBİTAK

42. Galileo'nun Buyruğu, E.B.Bolles, TÜBİTAK

43. Analiz ve Cebirde Olimpiyat Soru ve Cevapları, H.İ.Karakaş-İ.Aliev, TÜBİTAK

44. Sayılar Teorisinde İlginç Problemleri ve Çözümleri, H.İ.Karakaş-İ.Aliev, TÜBİTAK

45. 34. Matematik Olimpiyadı, TÜBİTAK

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

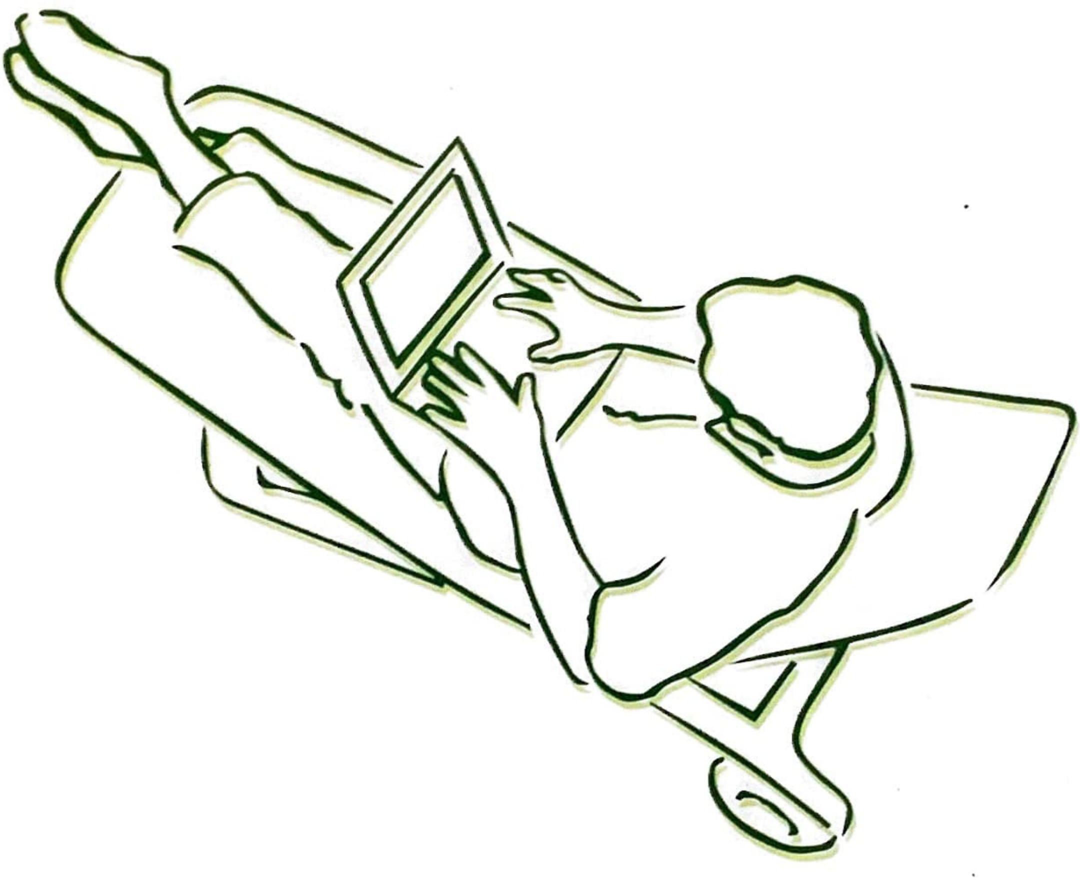
adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.

Sir Isaac Newton (1642-1727)

ŞubeSiz Bankacılık

KULLANIM REHBERİ

Bu rehberi kullanan
mutlu Garantiler
beş yılda bir milyonu buldu.



ŞEKİL 6

GLOBAL FINANCE
EN İYİ İNTERNET BANKASI ÖDÜLÜ
2002

Uzandığı yerden Elma Hesabı açtırarak
rahata kavuşan kişi, yaşamın
tam anlamıyla keyfini çıkarmaya başlar.

444 0 333 garanti.com.tr.

Garanti